I-YAKINSAKLIK VE I-SÜREKLİLİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yeliz KIYAK UÇAR

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mart 2008

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

I-YAKINSAKLIK VE I-SÜREKLİLİK

Yeliz KIYAK UÇAR

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mart 2008

ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Fatih NURAY danışmanlığında,

Yeliz KIYAK UÇAR tarafından hazırlanan

I-YAKINSAKLIK VE I-SÜREKLİLİK

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

14/03/2008

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Fatih NURAY	
Üye	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Murat PEKER	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

I-YAKINSAKLIK ve I-SÜREKLİLİK

Yeliz KIYAK UÇAR

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

I, N pozitif tamsayılar kümesinin alt kümelerinin bir ideali iken metrik uzaylarda dizilerin I-yakınsaklığı kavramı tanıtılmıştır. Bu kavram metrik uzaylarda tanımlı reel fonksiyonların dizilerinin I-yakınsaklığı kavramına genişletilmiş ve ilgili bazı temel özellikler verilerek ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bu temel özellikler extremal I-limit noktaları ile ilişkilendirilmiştir. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık kavramı, I-yakınsaklık kavramına genelleştirilerek istatistiksel yakınsaklığın sonuçları I-yakınsaklığa genişletilmiştir. Bununla birlikte fonksiyonların istatistiksel sürekliliğinin bir genelleştirilmesi olan yeni bir süreklilik kavramı tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir. Reel fonksiyonlar için tanımlanan I-süreklilik kavramı keyfi topolojik uzaylardaki fonksiyonlara dönüştürülerek genelleştirilmiştir. Ayrıca metrik uzaylarda ve aynı zamanda dizisel uzaylarda I-süreklilik ve süreklilik kavramlarının denk oldukları gösterilmiştir.

2008, 49 sayfa

Anahtar Kelimeler: I-Yakınsaklık, I^*-Yakınsaklık, I-Süreklilik

ABSTRACT

MsSc Thesis

I-CONVERGENCE and I-CONTINUITY

Yeliz KIYAK UÇAR

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

We introduce and study of I-convergence of sequences in metric spaces, where I is an ideal of subsets of the set N of positive integers. We extend this concept to I-convergence of sequence of real functions defined on a metric space and prove some theorems and basic properties of this concepts. This basic properties deal with extremal I-limit points. Further the concept of statistical convergence generalize to I-convergence and the conclusions of statistical convergence extend to I- convergence. Besides we introduce a new notion of continuity, which is the generalization of statistical continuity of functions. We generalize the notion of I-continuity, which was defined for real functions by transforming to functions on arbitrary topological spaces. Further we show the equvalence of I-continuity and continuity for metric spaces and sequential spaces as well.

2008, 49 pages

Keywords: I-convergence, I^*-convergence, I-continuity

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a, çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yeliz KIYAK UÇAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
$x=(x_n)$	Reel sayı dizisi
sup	En küçük üst sınır
inf	En büyük alt sınır
$d(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\overline{d}(A)$	A kümesinin üst yoğunluğu
$\underline{d}(A)$	A kümesinin alt yoğunluğu
$st-\lim x_n$	x_n dizisinin istatistiksel limiti
I	Doğal sayıların alt kümelerinin ideali
I_0	Maksimal ideal
$F(I)$	Pozitif tamsayıların alt kümelerinin süzgeci
(X,ρ)	Metrik uzay
$I-\lim x_n$	x_n dizisinin I-limiti
$I^*-\lim x_n$	x_n dizisinin I^*-limiti
2^N	N nin tüm alt kümelerinin ailesi
$A\Delta B$	A ve B kümelerinin simetrik farkı
$I(\Gamma_x)$	x dizisinin I-yığılma noktalarının kümesi
$I(\Lambda_x)$	x dizisinin I-limit noktalarının kümesi
$B(x_0,\delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\mathsf{F}_0(I)$	I-yakınsaklığın yakınsaklık alanı
$\mathsf{F}_0(I^*)$	I^*-yakınsaklığın yakınsaklık alanı
ω	Reel dizilerin kümesi
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
Z	N nin bütün uygun ideallerinin sınıfı
$f\,\|_X$	f fonksiyonunun X kümesine kısıtlanması
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı

χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$C(I)$	I-sürekli fonksiyonlar kümesi
(AP)	Sonlu toplamsallık özelliği

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Yeliz KIYAK UÇAR
Doğum Yeri	Tokat
Doğum Tarihi	13.09.1979
Yabancı Dili	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	İzmir Türk Koleji, 1996
Lisans	İzmir Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2001.

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl Aralığı

2001-2005	Uşak Ulubey Lisesi.
2005-	Uşak İzzettin Çalışlar Lisesi.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, I bir ideal iken metrik uzaylarda dizilerin I-yakınsaklığı kavramı verilmiştir. Daha sonra bu kavram metrik uzaylarda tanımlı reel fonksiyon dizilerinin I-yakınsaklığı kavramına genişletilmiştir. Benzer şekilde I-yakınsaklıkla yakından ilişkili olan I^*-yakınsaklık olarak adlandırılan yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve I-yakınsaklık ile I^*-yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. I-yakınsaklıklıkla ilgili olarak bu yakınsaklığı koruyan fonksiyonlara da değinilmiştir. I-limit noktaları ve I-yığılma (Cluster) noktaları verildikten sonra bu ifadeler I-yakınsaklık ve extremal I-limit noktaları kavramları tartışılmıştır.

I-yakınsaklığın yakınsaklık alanı kavramı verildikten sonra sınırlı dizilerin uzayında, $\mathsf{F}(I)$ ve $\mathsf{F}(I^*)$ yakınsaklık alanlarında maksimal idealler incelenmiştir.

I-yakınsaklık kavramı kullanılarak bir noktada bir fonksiyonun limitinin Heine tanımına benzer bir yolla I-süreklilik kavramı araştırılmıştır. Daha sonra reel fonksiyonlar için tanımlanan I-süreklilik kavramı keyfi topolojik uzaylardaki fonksiyonlara dönüştürülerek genelleştirilmiştir. Aynı zamanda dizisel uzaylarda I-süreklilik ve süreklilik kavramlarının denk oldukları gösterilmiştir

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda gerek duyulan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $x=(x_n)$ bir reel sayı dizisi ve $a\in R$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n>n_0$ olduğunda $|x_n-a|<\varepsilon$ olacak biçimde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $x=(x_n)$ dizisi a ya yakınsaktır denir ve $\lim x_n=a$ veya $(x_n)\to a$ ile gösterilir.

Tanım 2.2: $(x_n)\subset R$ ve $a\in R$ olsun. a noktasının her $\delta-$komşuluğunda (x_n) dizisinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.3: (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti a ise bu a noktasına (x_n) dizisinin bir limit noktası denir.

Tanım 2.4: $A\subset R$, $f:A\to R$ bir fonksiyon ve $a\in A$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta$ olduğunda $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Fonksiyonun sürekli olmadığı noktaya da süreksizlik noktası denir.

Tanım 2.5: A**,** N in bir alt kümesi ve $A_n=\{k\le n : k\in A\}$ olsun. Buna göre A kümesinin sırasıyla alt ve üst yoğunluğu

$$\underline{d}(A)=\liminf\frac{|A_n|}{n} \qquad , \qquad \overline{d}(A)=\limsup\frac{|A_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|A_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda bu limite A kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $d(A)$ ile gösterilir. Yani $d(A)$ eşitliklerinin sağlanması halinde $A\subset N$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$d(A) = \lim \frac{|A_n|}{n} = \lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

dır. [Nived vd.,1991]

Tanım 2.6: Her $\varepsilon > 0$ için $A = A(\varepsilon) = \{k \in N : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesinin yoğunluğu sıfır yani

$$\lim \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi $\xi \in R$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = \xi$ ile gösterilir.[Steinhaus,1951, Fast,1951, Fridy,1985]

Tanım 2.7: $X \neq \phi$ olsun. Eğer X in altkümelerinin $I \subset 2^X$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X de bir idealdir denir.

1. $\phi \in \mathrm{I}$
2. $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{I}$ iken $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathrm{I}$
3. $\mathrm{A} \in \mathrm{I}, \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ iken $\mathrm{B} \in \mathrm{I}$ dir.

Eğer $I \neq \phi$ ve $X \notin I$ ise I idealine gerçek (proper) ideal, eğer I gerçek ideali X in tüm sonlu altkümelerini içeriyorsa I idealine uygun (admissible) ideal denir.

Tanım 2.8: $X \neq \phi$ olsun. Eğer $F \subset 2^X$ boş olmayan ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X de bir süzgeçtir denir.

1. $\phi \notin \mathrm{F}$
2. $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{F}$ iken $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathrm{F}$
3. $\mathrm{A} \in \mathrm{F}, \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ iken $\mathrm{B} \in \mathrm{F}$ dir.

Önerme 2.1: $I \subset 2^X$ idealinin gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart $F = F(I) = \{X \setminus A : A \in I\}$ kümesinin X de bir süzgeç olmasıdır.

Tanım 2.9: Boş olmayan bir X kümesi ile $\rho : XxX \to R$ fonksiyonu verilsin ve her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlansın.

1. $\rho(x, y) \geq 0$

2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetri özelliği)

4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

Bu ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.10: (X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$ biçiminde tanımlanan ρ_A fonksiyonu A üzerinde bir metrik uzaydır. (X, ρ_A) metrik uzayına (X, ρ) nun bir alt metrik uzayı denir.

Tanım 2.11: (X, ρ) bir metrik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer $A = \phi$ ise veya $a \in A$ için $B(a, r) \subset A$ olacak biçimde a merkezli r yarıçaplı bir $B(a, r)$ açık yuvarı varsa A kümesine X in bir açık alt kümesi denir.

Tanım 2.12: (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaksa yani $x_n \to x \in X$ ise (X, ρ) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.13: X bir küme τ , X in alt kümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olsun.

1. $X \in \tau$ ve $\phi \in \tau$ dır.

2. τ ailesinin sonlu sayıda elemanlarının ara kesiti τ ya aittir.

3. τ nun herhangi sayıda elemanlarının birleşimi τ ya aittir.

Bu takdirde τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir. τ ailesinin her bir elemanına da açık denir.

Tanım 2.14: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus \mathrm{A}$ açıksa A kümesine kapalıdır denir.

Tanım 2.15: A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve bu $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.16: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise A ya X kümesinde her yerde yoğun küme denir.

Tanım 2.17: X,Y iki topolojik uzay $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0)$ noktasının her V komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 noktasının bir U komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise f ye X üzerinde sürekli denir.

Tanım 2.18: (X,τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasını eleman kabul eden X in her A açık alt kümesine x_0 noktasının bir açık alt komşuluğu denir.

Tanım 2.19: $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(S) = T$ ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir.

Tanım 2.20: X in herhangi iki x ve y elemanı için $f(x) = f(y)$ eşitliği $x = y$ eşitliğini gerektiriyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Tanım 2.21: X,Y iki topolojik uzay , $f : X \to Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f ye bir homeomorfizm (topolojik eş yapı dönüşümü), X ve Y topolojik uzaylarına da homeomorfturlar denir. Aralarında bir homeomorfizm bulunan topolojik uzaylara homeomorfik uzaylar denir.

Tanım 2.22: (X,τ) bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Y nin alt kümelerinin

$\tau_Y = \{A^{'} : A^{'} = A \cap Y, A \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir ve τ_Y topolojisine indirgenen topoloji, Y ye de X in bir alt uzayı denir.

Tanım 2.23: (X,τ) topolojik uzay ve X kümesi üzerinde bir H denklik bağıntısı verilsin. $\Phi : X \to X/H$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\Phi(x) = [x]$ ile tanımlansın. Φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan X/H bölüm kümesi üzerindeki topolojilerin en incesine veya τ topolojisinin X/H kümesi üzerindeki sonuç topolojisine τ topolojisinin H bağıntısına göre bölüm topolojisi denir. Bölüm topolojisi $\Re$ sembolü ile gösterilirse, $(X/H,\Re)$ uzayına da (X,τ) uzayının H bağıntısına göre bölüm uzayı denir.

Tanım 2.24: Bir matrisin determinantı sıfırdan farklı ise bu matrise regüler matris denir.

Tanım 2.25: X bir küme, $A \subseteq X$ olmak üzere

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus \mathrm{A} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın X deki karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.26: Boş olmayan bir X kümesi verilsin. $(K,+,.)$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $(X,\oplus)$ değişmeli grup olmak üzere $\otimes : KxX \to X$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine vektör uzay (lineer uzay veya lineer vektör uzay) denir.

1. Her $a \in K$ ve $x \in X$ için $a \otimes x \in X$
2. Her $a \in K$ ve $x, y \in X$ için $a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$
3. Her $a, b \in K$ ve $x \in X$ için $(a + b) \otimes x = (a \otimes x) \oplus (b \otimes x)$
4. Her $a, b \in K$ ve $x \in X$ için $(a.b) \otimes x = a \otimes (b \otimes x)$
5. $e \in K$ birim elemanı ise her $x \in X$ için $e \otimes x = x$.

Tanım 2.27: Reel veya karmaşık K cismi üzerinde bir vektör uzayı X olsun. $n : X \to R$, $n(x) = \|x\|$ biçiminde bir n fonksiyonu aşağıdaki üç önermeyi sağlıyorsa n ye X üzerinde bir norm denir.

1. Her $x \in X, x \neq 0$ için $\|x\| > 0$.

2. Her $\lambda \in K$ ve $x \in X$ için $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3. Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(X, n) ikilisine de normlu uzay (normlu lineer vektör uzayı) denir.

Tanım 2.28: X bir E kümesinde tanımlanmış sınırlı fonksiyonlar uzayı olmak üzere

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

normuna supremum normu (sup-norm) denir.

Tanım 2.29: Boş olmayan bir kümenin ikişer ikişer ayrık ve boş olmayan altkümelerinden oluşan örtüye bu kümenin bir ayrışımı denir.

Tanım 2.30: Sonlu küme veya doğal sayı kümesi ile eş güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir.

Tanım 2.31: Bir V vektör uzayında doğrusal bileşimlerinin kümesi V yi veren bir alt kümeye V nin üreteci denir.

Tanım 2.32: (G, o) bir cebirsel yapı olsun. Eğer;

1. o ikili işlemi birleşme özelliğine sahipse

2. birim elemanı varsa

3. her a elemanının a' tersi varsa

(G, o) cebirsel yapısına grup denir. (G, o) grubu değişme özelliğne sahipse bu gruba değişmeli grup denir.

Tanım 2.33: $H \neq \phi$ bir küme ve üzerinde tanımlı iki işlem $(+)$ ve $(\bullet)$ olsun. $(H, +, \bullet)$

cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu yapıya halka denir.

1. $(H,+)$ değişmeli bir gruptur.

2. "$\bullet$" işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

3. "$\bullet$" işleminin "+" işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.34: $F \neq \phi$ bir küme olsun. $(F,+,\bullet)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu yapıya cisim denir.

1. $(F,+)$ sistemi değişmeli bir gruptur.

2. $(F \setminus \{0\},\bullet)$ sistemi değişmeli bir gruptur.

3. "$\bullet$" işleminin "+" işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.35: (G,o) ve (G',Δ) birer grup ve $\Phi : G \to G'$ dönüşümü verilsin. Her $a, b \in G$ için $\Phi(aob) = \Phi(a)\Delta\Phi(b)$ eşitliği gerçekleniyorsa Φ dönüşümüne G den G' ye bir grup homomorfizimi denir.

Tanım 2.36: (G,o) ve (G',Δ) gruplarında etkisiz elemanlar e ve e' olsun. $\Phi : G \to G'$ grup homeomorfizmi olmak üzere $K_\Phi = \{x : x \in G \text{ ve } \Phi(x) = e'\}$ kümesine Φ homomorfiziminin çekirdek kümesi (çekirdeği) denir ve $\mathrm{Ker}\,\Phi$ ile gösterilir.

Tanım 2.37: Toplanabilme teorisinde $C_1 = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & ;1 \leq k \leq n \\ 0 & ;k > n \end{cases}$$

ile verilir ve (birinci dereceden) Cesaro matrisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.38: $\{X_i : i \in İ\}$, İ ile indislenmiş topolojik uzayların ailesi olsun. $X = \coprod_i X_i$ kümesine X_i kümelerinin ayrık toplamı denir.

3. I-YAKINSAKLIK

Bu bölümde öncelikle I -yakınsaklık kavramı ile I^*-yakınsaklık kavramı verilerek bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.1: $I \subset 2^X$ bir gerçek ideal ve (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya ait ise $x = (x_n)$ dizisi $\xi \in X$ e I-yakınsaktır denir. ξ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin $I -$ limitidir denir ve $I - \lim x = \xi$ ile gösterilir.

Burada I -yakınsaklığa ve ideallere bazı örnekler verelim.

Örnek 3.1:

1. $I = \{\phi\}$, N de minimal idealdir. $x = (x_n)$ dizisinin I -yakınsak olması için gerek ve yeter şart sabit olmasıdır.

2. $\phi \neq M \subset N, M \neq N$ olsun. $I_M = 2^M$ olduğunda I_M, N de bir gerçek ideal olur. $x = (x_n)$ dizisinin I_M -yakınsak olması için gerek ve yeter şart $N \setminus M$ de sabit olmasıdır, yani her $n \in N \setminus M$ için $x_n = \xi$ olacak biçimde $\xi \in R$ olmasıdır. $M = \phi$ için 1. örnek 2. örneğin özel bir halidir.

3. I_f, N in tüm sonlu alt kümelerinin bir ailesi olsun. I_f, N de bir uygun idealdir ve I_f -yakınsaklık, alışılmış yakınsaklıktır.

4. $I_d = \{A \subset N : d(A) = 0\}$ şeklinde ifade edilsin. O halde I_d, N de bir uygun idealdir ve I_d -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklıktır.

5. I -yakınsaklığın geniş bir sınıfı şu yöntemle bulunabilir:

$T = (t_{nk})$, negatif olmayan regüler bir matris olsun. O halde $A \subset N$ için

$$d_T^{(n)}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} . \chi_A(\mathrm{k}) \quad (n = 1,2,...)$$

dir. Eğer $d_T(A) = \lim d_T^{(n)}(A)$ varsa buna A nın T-yoğunluğu denir. T nin regülerliğinden $\lim \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$ dir ve buradan eğer varsa $d_T(A) \in [0,1]$ dir. $I_{d_T} = \{A \subset N : d_T(A) = 0\}$ şeklinde ifade edilsin. O halde I_{d_T}, N de bir uygun idealdir. Burada kullanılan T matrisinin farklı seçimleriyle bilinen bazı yakınsaklık türleri elde edilir. Örneğin $t_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , k \le n \text{ ise} \\ 0 & , \mathrm{k} > \mathrm{n} \text{ ise} \end{cases}$ cesaro matrisi seçimiyle istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

6. $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, N in bir ayrışımı (yani $k \neq l$ için $D_k \cap D_l = \phi$) ve D_j ($\mathrm{j} = 1,2,...$) ler sonsuz kümeler olsun. Örneğin $j = 1,2,...$ için $D_j = \{2^{j-1}(2s-1) : s \in N\}$ seçebiliriz. $A \subset N$ olmak üzere A nın sonlu sayıda D_j ile kesişimlerinin sınıfı I ile gösterilsin. I bir uygun idealdir.

Yakınsaklığın hangi aksiyomlarının I-yakınsaklık için sağlandığını araştıralım. Bilinen birçok yakınsaklık aksiyomlarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

a. Her $\{\xi, \xi, \xi, ..., \xi, ...\}$ sabit dizisi ξ sayısına yakınsar.

b. Yakınsak dizilerin limiti tek olarak belirlidir.

c. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin limiti ξ ise bu dizinin tüm alt dizilerinin limiti de aynıdır.

d. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin tüm alt dizilerinin ξ sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa x, ξ sayısına yakınsar.

Önerme 3.1: X in en az iki noktası olduğunu varsayalım. $I \subset 2^X$ bir uygun ideal olsun.

1. I-yakınsaklık $a.$, $b.$ ve $d.$ yi sağlar.

2. Eğer I sonsuz bir küme içeriyorsa I -yakınsaklık $c.$ yi sağlamaz.

İspat: 1. $a.$nın doğruluğu açıktır. $b.$nin ispatı için $x=(x_n)$ dizisinin $\xi,\eta \in X$, $\xi \neq \eta$ iki limiti olacak biçimde $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\rho(\xi,\eta)$ seçelim.

$$A_1 = \{n \in N : \rho(x_n,\xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

ve

$$A_2 = \{n \in N : \rho(x_n,\eta) \geq \varepsilon\} \in I$$

biçiminde ifade edilir.

$$(N \setminus A_1),(N \setminus A_2) \in F(I) \text{ ve } (N / A_1) \cap (N / A_2) \in F(I)$$

olduğundan

$$(N \setminus A_1) \cap (N \setminus A_2) \neq \phi$$

bulunur. Burada ε un seçimi gereğince $\xi=\eta$ elde edilir. $d.$ nin sağlanmadığını kabul edelim. Yani x in her bir alt dizisi ξ ye yakınsayan bir alt diziye sahip olsun fakat x dizisi ξ ye I -yakınsaklık olmasın. O halde

$$A(\varepsilon) = \{n \in N : \rho(x_n,\xi) \geq \varepsilon\} \notin I$$

olacak biçimde $\varepsilon>0$ vardır. Fakat I bir uygun ideal olduğundan $A(\varepsilon)$ sonsuz bir kümedir. $A(\varepsilon)=\{n_1<n_2<...<n_k<...\}$ olsun. $k \in N$ için $y_k = x_{n_k}$ olsun. O halde $y=(y_k)_{k=1}^{\infty}$, x in ξ sayısına I -yakınsayan bir alt diziye sahip olmayan bir alt dizisi olur. Bu durum kabule uygun değildir.

2. $A \in I$ sonsuz bir küme olsun. $A=\{n_1<n_2<...<n_k<...\}$ ve $B = N \setminus A = \{m_1<m_2<...<m_k<...\}$ olsun.

I bir uygun ideal olduğundan B de sonsuz bir kümedir. $\xi_1,\xi_2 \in X$, $\xi_1 \neq \xi_2$ seçimiyle $x=(x_n)$ dizisi tanımlansın ve $k \in N$ için $x_{n_k}=\xi_1$, $x_{m_k}=\xi_2$ şeklinde ifade edilsin. O halde $I-lim\, x_k = \xi_2$ dir fakat (x_{n_k}) alt dizisi ξ_1 e I -yakınsar.

Uyarı 3.1: Eğer I sonsuz küme içermeyen bir uygun ideal ise I -yakınsaklık yakınsaklıkla benzerdir ve $c.$ sağlanır.

3.1 I-Yakınsaklık ve I*-Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık teorisinde bilinen bir sonuç aşağıdaki gibidir.
$x = (x_n)$ reel sayı dizisinin ξ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $d(M) = 1$ ve $\lim x_{m_k} = \xi$ olacak biçimde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$ kümesinin olmasıdır.

Bu sonuç bizi I-yakınsaklıkla yakından ilişkili olan I^*-yakınsaklık olarak adlandırılan yakınsaklık kavramına götürür.

Tanım 3.1.1: X in elemanlarının bir $x = (x_n)$ dizisinin $\xi \in X$ sayısına I^*-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$ olacak biçimde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \in F(I)$ $(N \setminus M \in I)$ kümesinin var olmasıdır.

Önerme 3.1.1: I bir uygun ideal olsun. Eğer $I^* - \lim x_n = \xi$ ise $I - \lim x_n = \xi$ dir.

İspat: $M = N \setminus H = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$ olacak biçimde $H \in I$ kümesinin olduğunu varsayalım. O halde

$$\lim x_{m_k} = \xi \tag{3.1}$$

olur.
$\varepsilon > 0$ olsun. (3.1) den dolayı her $k > k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) < \varepsilon$ olacak biçimde $k_0 \in N$ vardır. Dolayısıyla

$$A(\varepsilon) = \{n \in N : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\} \tag{3.2}$$

dır. $H \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ kümesi I ya aittir (I uygun ideal olduğundan). O halde $A(\varepsilon) \in I$ dır.

Bu önermenin tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 3.1.1: I **,** örnek 3.1 5. de olduğu gibi bir ideal olsun. $x=(x_n)$ dizisi şu şekilde tanımlansın.

$n \in D_j$ için $x_n = \dfrac{1}{j}$ $\quad (j=1,2,...)$ olsun.

O halde açıkça $I-\lim x_n = 0$ dır. Diğer yandan $I^{*}-\lim x_n = 0$ olmadığını göstermeliyiz. $I^{*}-\lim x_n = 0$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\lim_{m \in M} x_m = 0 \tag{3.3}$$

olacak biçimde $M \in F(I)$ kümesi vardır. $F(I)$ nın tanımından dolayı $H \in I$ iken $M = N \setminus H$ dır. I nın tanımından $H \subset D_1 \cup ... \cup D_p$ olacak biçimde $p \in N$ vardır. Fakat M , D_{p+1} kümesini içerir ve buradan M den bir çok m için $x_m = \dfrac{1}{p+1}$ dir. Bu (3.3) ile çelişir.

Teorem 3.1.1: (X,ρ) bir metrik uzay olsun.

1. Eğer X in bir yığılma noktası yoksa I - ve I^{*}-yakınsaklık her $I \subset 2^N$ uygun ideali için aynıdır.
2. Eğer X in bir ξ yığılma noktası varsa bir $I \subset 2^N$ uygun ideali ve $I-lim\, y_n = \xi$ olacak biçimde X in elemanlarının bir (y_n) dizisi vardır. Fakat $I^{*}-\lim y_n$ yoktur.

İspat: 1. $\xi \in X$ ve $I-lim\, x_n = \xi$ olsun. Önerme 3.1.1 den $I^{*}-lim\, x_n = \xi$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. X in yığılma noktası olmadığından

$$B(\xi,\delta) = \{x \in X : \rho(x,\xi) < \delta\} = \{\xi\}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Kabulden dolayı

$$\{n \in N : \rho(x_n,\xi) \geq \delta\} \in I$$

dır. Buradan

$$\{n \in N : \rho(x_n,\xi) < \delta\} = \{n \in N : x_n = \xi\} \in F(I)$$

dır ve açıkça $I^* - lim\, x_n = \xi$ olur.

2. ξ, X in bir yığılma noktası olduğundan $\xi = lim\, x_n$ olacak biçimde X in elemanlarının bir $x = (x_n)$ dizisi vardır ve $(\rho(x_n, \xi))$ dizisi 0a azalır. $n \in N$ için $\in_n = \rho(x_n, \xi)$ şeklinde ifade edilsin. Örnek 3.1 6.dan I için bir ε ideali alınır. $n \in D_j$ iken $y_n = x_j$ ile bir (y_n) dizisi tanımlayalım. $\eta > 0$ olsun. $\in_v < \eta$ olacak biçimde $v \in N$ seçelim.

$$A(\eta) = \{n : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subset D_1 \cup ... \cup D_v$$

dir. Buradan $A(\eta) \in \varepsilon$ ve $\varepsilon - lim\, y_n = \xi$ dir.

$\varepsilon^* - lim\, y_n = \xi$ olduğunu varsayalım. $M = N \setminus H = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$ için $lim\, \rho(y_{m_k}, \xi) = 0$ olacak biçimde bir $H \in \varepsilon$ kümesi vardır. ε un tanımından $H \subset D_1 \cup ... \cup D_l$ olacak biçimde $l \in N$ vardır. Fakat o zaman $D_{l+1} \subset N \setminus H = M$ dir. Böylece sonsuz sayıda k için (her D_i bir sonlu küme) $y_{m_k} \to \xi$ ile çelişen $\rho(y_{m_k}, \xi) = \in_{l+1} > 0$ elde edilir. $y \neq \xi$ için $\varepsilon^* - lim\, y_n = y$ varsayımı da çelişkiye sebep olur.

I ideali için I- ve I^*-yakınsaklığın eşdeğer olması ile ilgili gerek ve yeter şartlar şu şekilde verilebilir.

Tanım 3.1.2: Eğer $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j,\ i, j = 1,2,...)$ ve $A_i \in I$ ise her $i \in N$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu küme ve $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in I$ olacak biçimde B_i kümeleri varsa $I \subset 2^N$ uygun ideali (AP) koşulunu sağlar denir.

Uyarı 3.1.1: $i \in N$ iken $B_i \in I$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.1.2: $I \subset 2^N$ bir uygun ideal olsun.

1. I ideali (AP) özelliğine sahip ve (X,ρ) keyfi bir metrik uzay ise X in elemanlarının keyfi bir $x=(x_n)$ dizisi için $I-lim\,x_n=\xi$ iken $I^*-lim\,x_n=\xi$ dir.

2. Eğer (X,ρ) en az bir yığılma noktasına sahip ve X in elemanlarının keyfi bir $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve her $\xi\in X$ için $I-lim\,x_n=\xi$ iken $I^*-lim\,x_n=\xi$ ise I , (AP) özelliğine sahiptir.

İspat: 1. I nın (AP) özelliğini sağladığını varsayalım. $I-lim\,x_n=\xi$ olsun. O halde $\varepsilon>0$ için $A(\varepsilon)=\{n\in N:\rho(x_n,\xi)\geq\varepsilon\}\in I$ dır. $n\geq 2$, $n\in N$ için $A_1=\{n\in N:\rho(x_n,\xi)\geq 1\}$ ve $A_n=\left\{n\in N:\frac{1}{n}\leq\rho(x_n,\xi)<\frac{1}{n-1}\right\}$ şeklinde ifade edilsin. Açıkça $i\neq j$ için $A_i\cap A_j=\phi$ olur. (AP) koşuluyla $j\in N$ ve $B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\in I$ ve $A_j\Delta B_j$ sonlu kümeler olacak biçimde $\{B_n\}$ kümelerinin bir dizisi vardır. $M=N\setminus B$ iken

$$\lim_{n\in M} x_n=\xi \tag{3.4}$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$\eta>0$ olsun. $\frac{1}{k+1}<\eta$ olacak biçimde $k\in N$ seçelim. O halde

$$\{n\in N:\rho(x_n,\xi)\geq\eta\}\subset\bigcup_{j=1}^{k+1}A_j$$

dir. $A_j\Delta B_j$, $j=1,2,...,k+1$ sonlu küme olduğundan

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j\right)\cap\{n\in N:n>n_0\}=\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}A_j\right)\cap\{n\in N:n>n_0\} \tag{3.5}$$

olacak biçimde $n_0\in N$ vardır. Eğer $n>n_0$ ve $n\notin B$ ise $n\notin\bigcup_{j=1}^{k+1}B_j$ ve (3.5) den dolayı

$n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$ dir. O halde $\rho(x_n, \xi) < \dfrac{1}{n+1} < \eta$ dir ve (3.4) elde edilir.

2. $\xi \in X$, X in bir yığılma noktası olsun. $\xi = lim\, x_n$ olacak biçimde X in elemanlarının bir $x = (x_n)$ dizisi vardır ve $(\rho(x_n, \xi))$ dizisi azalarak 0 a gider. $n \in N$ için $\in_n = \rho(x_n, \xi)$ olsun. $\{A_n\}$, I da boş olmayan kümelerin bir ayrık ailesi olsun. $n \in A_j$ iken $y_n = x_j$ olmak üzere (y_n) dizisi tanımlansın. $\eta > 0$ olsun. $\in_m < \eta$ olacak biçimde $m \in N$ seçelim. $A(\eta) = \{n \in N : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subset A_1 \cup ... \cup A_m$ dir. Buradan $A(\eta) \in I$ ve $\text{I-lim}\, y_n = \xi$ olur. Varsayımdan dolayı $I^* - lim\, y_n = \xi$ dir. Buradan $M = N \setminus B = \{m_1 < m_2 < ...\}$ olacak biçimde $B \in I$ kümesi vardır. Buradan

$$lim\, y_{m_k} = \xi \tag{3.6}$$

olur. $j \in N$ için $B_j = A_j \cap B$ şeklinde ifade edilsin. Her n için $B_j \in I$ dır. Ayrıca $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$ dir. Buradan $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ dır. $j \in N$ dir. (3.6) den A_j, M kümesi ile ortak elemanlarının sonlu bir sayısına sahiptir. Böylece $A_j \subset (A_j \cap B) \cup \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ olacak biçimde bir $k_o \in N$ vardır. Buradan $A_j \Delta B_j = A_j / B_j \subset \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}\}$ dır ve $A_j \Delta B_j$ sonlu bir kümedir. $j \in N$ in keyfi olmasından I, (AP) özelliğine sahiptir.

3.2 I-Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1: (X, ρ) bir metrik uzay, $g : X \to X$ bir fonksiyon ve $I \subset 2^N$ bir uygun ideal olsun. Eğer her $\xi \in X$ ve X in elemanlarının her $x = (x_n)$ dizisi için $I - lim\, x_n = \xi$ iken $I - lim\, g(x_n) = g(\xi)$ oluyorsa g fonksiyonu X de I-yakınsaklığı koruyor denir.

Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.1: $g : X \to X$ fonksiyonunun X de I-yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart g nin X de sürekli olmasıdır (keyfi bir I uygun ideali için).

İspat: 1. $I - lim\, x_n = \xi$ olsun. g sürekli ise her $\eta > 0$ için $x \in B(\xi, \delta)$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır ve $g(x) \in B(g(\xi), \eta)$ dir. Fakat

$$C(\delta) = \{n \in N : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \subset \{n \in N : \rho(g(x_n), g(\xi)) < \eta\} = D(\eta)$$

dir ve $C(\delta) \in F(I)$ olduğundan $D(\eta) \in F(I)$ dır. Bundan dolayı $I - lim\, g(x_n) = g(\xi)$ dir.

2. Bazı $\xi \in X$ için g sürekli değilse bu takdirde $lim\, x_n = \xi$ ve $n \in N$ için $\rho(g(x_n), g(\xi)) \geq \eta$ olacak biçimde X in elemanlarının bir $x = (x_n)$ dizisi ve bir $\eta > 0$ sayısı vardır. Buradan g herhangi bir I ideali için I-yakınsaklığı korumaz.

3.3 *I* - Limit Noktaları ve *I*-Yığılma (Cluster) Noktaları

$\xi \in R$ ve $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $\overline{d}(M) > 0$ ve $lim\, x_{m_k} = \xi$ olacak biçimde bir $M = \{m_1, m_2, ...\} \subset N$ kümesi varsa $\xi \in R$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir. Her $\varepsilon > 0$ için $\overline{d}\{n \in N : |x_n - \xi| < \varepsilon\} > 0$ varsa $\xi \in R$ sayısına $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel yığılma noktası denir.

Aşağıdaki yolla bu kavramlar I-yakınsaklığa genişletilebilir.

Tanım 3.3.1: (X, ρ) bir metrik uzay, $x = (x_n)$ X in elemanlarının bir dizisi olsun.

1. $M \notin I$ ve $lim\, x_{m_k} = \xi$ olacak biçimde $M = \{m_1, m_2, ...\} \subset N$ kümesi varsa $\xi \in X$ elemanına x in I-limit noktası denir.

2. $\xi \in X$ elemanının x in I -yığılma noktası denmesi için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in N : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$ olmasıdır.

x in tüm I -yığılma ve I -limit noktalarının kümeleri sırasıyla $I(\Gamma_x)$ ve $I(\Lambda_x)$ ile gösterilir.

Önerme 3.3.1: I bir uygun ideal olsun. X in elemanlarının her $x = (x_n)$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subset I(\Gamma_x)$ dir.

İspat: $\xi \in I(\Lambda_x)$ olsun.

$$lim\, \rho(x_{m_k}, \xi) = 0 \tag{3.7}$$

olacak biçimde $M = \{m_1, m_2, ...\} \notin I$ kümesi vardır.

$\delta > 0$ olsun. Tanım 2.1 e göre $k > k_0$ olacak biçimde $k_0 \in N$ vardır ve $\rho(x_{m_k}, \xi) < \delta$ dır. Buradan $\{n \in N : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \supset M \setminus \{m_1, ..., m_{k_0}\}$ dır ve $\{n \in N : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \notin I$ dır yani $\xi \in I(\Gamma_x)$ dir.

Teorem 3.3.1: I bir uygun ideal olsun.

1. X in elemanlarının her $x = (x_n)$ dizisi için $I(\Gamma_x)$ kümesi X de kapalıdır.

2. (X, ρ) bir ayrılabilir metrik uzay olsun. $n \in N$ için $M_n \notin I$ ve $M_n \subset N$ olacak biçimde (M_n)kümelerinin ayrık bir dizisi olduğunu varsayalım. Her $F \subset X$ kapalı kümesi için $F = I(\Gamma_x)$ olacak biçimde X in elemanlarının bir $x = (x_n)$ dizisi vardır.

İspat: 1. $y \in \overline{I(\Gamma_x)}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\xi_0 \in I(\Gamma_x) \cap B(y, \varepsilon)$ vardır. $B(\xi_0, \delta) \subset B(y, \varepsilon)$ olacak biçimde $\delta > 0$ seçelim. Açıkça $\{n \in N : \rho(y, x_n) < \varepsilon\} \supset \{n \in N : \rho(\xi_0, x_n) < \delta\}$ dır. Buradan $\{n \in N : \rho(y, x_n) < \varepsilon\} \notin I$ dır ve $y \in I(\Gamma_x)$ dir.

2. $A = \{a_1, a_2, ...\} \subset F$, F de sayılabilir yoğun bir küme olsun. $n \in M_i$ için $x_n = a_i$ şeklinde ifade edelim. Açıkça $I(\Gamma_x) \subset F$ dir. $F \subset I(\Gamma_x)$ olduğunu ispat etmek için $z \in F$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $\rho(a_{i_0}, z) < \varepsilon$ olacak biçimde $i_0 \in N$ alalım.

$x_n = a_{i_0}$ olduğundan her $n \in M_{i_0}$ için $\{n \in N : \rho(x_n, z) < \varepsilon\} \supset M_{i_0}$ elde edilir. Buradan $\{n \in N : \rho(x_n, z) < \varepsilon\} \notin I$ ve $z \in I(\Gamma_x)$ dir.

I -yakınsaklığın genelde metriklenemez olduğunu göstermek zor değildir.

Önerme 3.3.2: X en az iki elemanlı ve $I \subset 2^N$; $M \subset N$ sonsuz kümesini içeren bir uygun ideal olsun. $I -$ yakınsaklık metriklenemez.

İspat: X de $I - lim\, x_n = \xi$ olması için gerek ve yeter şartın $lim\, \sigma(x_n, \xi) = 0$ olacak biçimde bir σ metriğinin varolduğunu kabul edelim. $\xi_1, \xi_2 \in X$, $\xi_1 \neq \xi_2$ alalım, (x_n) dizisi eğer $n \in M$ ise $x_n = \xi_1, n \notin M$ ise $x_n = \xi_2$ şeklinde tanımlansın. Açıkça $I - lim\, x_n = \xi_2$ ve $lim\, \sigma(x_n, \xi_2) = 0$ dır, $N \setminus M$ bir sonsuz küme olduğundan $\sigma(\xi_1, \xi_2) = 0$ olmasını gerektirir. Bu da $\xi_1 \neq \xi_2$ ile çelişir.

4. I-YAKINSAKLIK VE EKSTREMAL I-LİMİT NOKTALARI

Metrik uzaylardaki porosity kavramı burada aşağıda verildiği şekliyle kullanılacaktır.

Tanım 4.1: (Y,δ) bir metrik uzay, $M \subset Y$ olsun. $B(y,\delta)$, $y \in Y$ merkezli, $\delta > 0$ yarıçaplı bir yuvar yani $B(y,\delta) = \{x \in Y : \rho(x,y) < \delta\}$ olsun.

$y \in Y$, $\delta > 0$ için;

$\gamma(y,\delta,M) = \sup\{t > 0 : \exists z \in B(y,\delta) : [B(z,t) \subset B(y,\delta)] \wedge [B(z,t) \cap M = \phi]\}$ şeklinde ifade edilsin. Eğer $t > 0$ yoksa $\gamma(y,\delta,M) = 0$ alalım.

$$\underline{p}(y,M) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\gamma(y,\delta,M)}{\delta}, \quad \overline{p}(y,M) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\gamma(y,\delta,M)}{\delta}$$

sayılarına M kümesinin y deki alt ve üst porosity'si denir. Eğer her bir $y \in Y$ için $\overline{p}(y,M) > 0$ ise M ye Y de porous denir. Y de her porous kümesinin Y de hiçbir yerde yoğun olmadığı açıktır.

Eğer $\overline{p}(y,M) \geq c > 0$ ise M ye Yde c-porous denir. Eğer her bir $y \in Y$ için $\overline{p}(y,M) \geq c > 0$ ise M ye Y de c-porous denir.

Eğer $\underline{p}(y,M) > 0$ ise M ye Yde çok-porous denir. Eğer her bir $y \in Y$ de M çok-porous ise M ye Y de çok-porous denir. y de kümenin çok c-porous ve Y de kümenin çok c-porous kavramları benzer şekilde tanımlanabilir.

Eğer $\underline{p}(y,M) = \overline{p}(y,M)(= p(y,M))$ ise $p(y,M)$ sayısına y de M kümesi için porosity denir. Eğer $p(y,M) = 1$ ise M ye y de güçlü porous denir. M kümesi $y \in Y$ de güçlü porous ise Y de güçlü porous tur denir. [Kostyrko,P., Macaj,M., Salat,T., Sleziak,M., 2000]

4.1 I-Yakınsaklığın Yakınsaklık Alanı

Bu bölümde I bir uygun ideal olmak üzere tüm reel I -yakınsak dizilerin kümesi $\mathsf{F}_0(I)$ ile ifade edilecektir. $\mathsf{F}_0(I)$ kümesine I -yakınsaklığın yakınsaklık alanı denir.

Tüm reel dizilerin kümesi ω iken $\mathsf{F}_0(I) \subset \omega$ dır. $\mathsf{F}_0(I)$ alanının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1.1: I bir uygun ideal olsun.

1. Eğer $lim\, x_n = \xi$ ise $I - lim\, x_n = \xi$ dir.

2. Eğer $I - \lim x_n = \xi$, $I - \lim y_n = \eta$ ise $I - \lim(x_n + y_n) = \xi + \eta$ dir.

3. Eğer $I - \lim x_n = \xi$, $I - \lim y_n = \eta$ ise $I - \lim(x_n . y_n) = \xi . \eta$ dir.

İspat: 1. $I_f \subset I$ olduğundan ifadenin doğruluğu açıktır.

2. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\{n : |(x_n + y_n) - (\xi + \eta)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{n : |x_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{n : |y_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olduğundan ifade sağlanmış olur.

3. Varsayımdan $B = \{n : |x_n - \xi| < 1\} \in F(I)$ dır. Açıkça

$|x_n y_n - \xi\eta| \leq |x_n||y_n - \eta| + |\eta||x_n - \xi|$ dir. $n \in B$ için $|x_n| < |\xi| + 1$ dir ve

$$|x_n y_n - \xi\eta| \leq (|\xi| + 1)|y_n - \eta| + |\eta||x_n - \xi| \tag{4.1}$$

dir. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$0 < 2\delta < \frac{\varepsilon}{|\xi| + |\eta| + 1} \tag{4.2}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ seçelim. $M_1 = \{n : |x_n - \xi| < \delta\}$ ve $M_2 = \{n : |y_n - \eta| < \delta\}$ kümeleri $F(I)$ ya aittir. Açıkça $B \cap M_1 \cap M_2 \in F(I)$ dır ve her bir $n \in B \cap M_1 \cap M_2$ için (4.1) ve (4.2) den $|x_n y_n - \xi\eta| < \varepsilon$ dır. Buradan $\{n : |x_n y_n - \xi\eta| \geq \varepsilon\} \in I$ dır ve 3. sağlanır.

Reel dizilerde $I -$ yakınsaklığın $I^* -$ yakınsaklığa denk olabilmesi için gerek ve yeter şartın I nın (AP) özelliğinde olması gerektiğinden bölüm 3.1 de bahsedilmiştir. Burada $I -$ yakınsaklık ve $I^* -$ yakınsaklık bazı toplanabilme (limitleme) metotları ile ilişkilendirilecektir.

$\mathsf{F}_0(I)$ $\left(\mathsf{F}_0(I^*)\right)$, $I-$yakınsaklık (I^*-yakınsaklık) metodunun yakınsaklık alanı olsun. Yani

$$\mathsf{F}_0(I)=\{x=(x_n)\in\omega : I-\lim x_n \in R\}$$

$$\mathsf{F}_0(I^*)=\left\{x=(x_n)\in\omega : I^*-\lim x_n \in R\right\}$$

dır.

Genellikle

$$\mathsf{F}_0(I^*)\subset \mathsf{F}_0(I) \tag{4.3}$$

alınır ve (4.3) de eşitlik olması için gerek ve yeter şart I idealinin (AP) özelliğine sahip olmasıdır. Ayrıca burada sınırlı dizilerden bahsedilecektir. ℓ_∞ , tüm sınırlı dizilerin sup-norm uzayı iken $\ell_\infty \cap \mathsf{F}_0(I)$ ve $\ell_\infty \cap \mathsf{F}_0(I^*)$ kümelerinden bahsedilecektir. $\mathsf{F}(I)\subset \ell_\infty$ ve $\mathsf{F}(I^*)\subset \ell_\infty$ kümeleri aşağıdaki gibi tanıtılacaktır.

$$\mathsf{F}(I)=\{x=(x_n)\in \ell_\infty : I-\lim x_n \in R\}$$

$$\mathsf{F}(I^*)=\left\{x=(x_n)\in \ell_\infty : I^*-\lim x_n \in R\right\}$$

$\mathsf{F}_0(I)$nın ℓ_∞ lineer uzayının (halka) bir lineer alt uzayı (alt halka) olduğu (Teorem 4.1.1 de) gösterilmiştir. $\mathsf{F}_0(I^*)$ kümesi için de benzer bir iddia vardır.

I idealine bağlı olarak $\mathsf{F}_0(I)$ ve $\mathsf{F}_0(I^*)$ yakınsaklık alanlarının özellikleri verilebilir.

Z, N in tüm uygun ideallerinin sınıfı olsun. Eğer $\mathrm{Z}_0\subset \mathrm{Z}$, Z nin boş olmayan doğrusal sınıflanmış alt kümesi ise Z_0 üstten sınırlı iken $\bigcup \mathrm{Z}_0$ ın N de bir uygun ideal olduğu kolaylıkla sağlanır. Zorn Lemmasından ("Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan kısmen sıralı bir kümenin bir maksimal elemanı vardır.") Z de bir maksimal uygun ideal vardır. Aşağıdaki lemma bir maksimal uygun idealin tanımını verir.

Lemma 4.1.1: I_0, N de tüm sonlu alt kümeleri içeren bir ideal olsun. I_0 ın maksimal uygun ideal olması için gerek ve yeter şart her bir $A\subset N$ için

$$(A \in I_0) \text{ veya } (N \setminus A \in I_0) \tag{4.4}$$

olmasıdır.

İspat: 1. I_0 her $A \subset N$ kümesi için (4.4) ü sağlayan bir ideal olsun. I_0 ın maksimal uygun olduğu çelişkiyle gösterilebilir. I_1, N de bir uygun ideal ve $I_0 \underset{\neq}{\subset} I_1$ olsun. O halde $A \in I_1 \setminus I_0$ olacak biçimde $A \subset N$ vardır. (4.4) e bağlı olarak $A \notin I_0$ olduğundan $N \setminus A \in I_0$ dır. Sonuç olarak $A \in I_1$, $N \setminus A \in I_1$ ve $N \in I_1$ dir, bu bir çelişkidir.

2. I_0, N de bir maksimal uygun ideal olsun. Çelişki yoluyla (4.4) ispatlanmalıdır. $A \subset N$ kümesi

$$(A \notin I_0) \text{ ve } (N \setminus A \notin I_0) \tag{4.5}$$

biçiminde olsun. $K = \{X \subset N : X \cap A \in I_0\}$ şeklinde ifade edilsin.

a. $K \supset I_0$

b. K, N de bir uygun ideal

olduğu gösterilmelidir.

a. $X \in I_0$ olsun. O halde $X \cap A \subset X$ ve $X \cap A \subset I_0$ dır, buradan $X \in K$ dır.

b. Açıkça $N \notin K$ dır ve K, $n \in N$ için her bir $\{n\}$ sonlu alt kümelerini içerir. Eğer $X_1, X_2 \in K$ ise $X_1 \cap A,\ X_2 \cap A \in I_0$ dır ve $(X_1 \cup X_2) \cap A = (X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A) \in I_0$ dır, sonuç olarak $X_1 \cup X_2 \in K$ dır. $X \in K$ ve $X_1 \subset X$ olsun. O halde $X_1 \cap A \subset X \cap A \in I_0$ ve $X_1 \cap A \in I$ dır. Buradan $X_1 \in K$ dır. Böylece K nın N de bir uygun ideal olduğu ve $K \supset I_0$ olduğu gösterilmiştir. I_0 ın maksimalliğinden $K = I_0$ dır. $(N \setminus A) \cap A = \phi \in I_0$ dan $N \setminus A \in K$ elde edilir ki bu (4.5) e bağlı olarak bir çelişkidir.

Teorem 4.1.2: I, N de bir uygun ideal olsun. $\mathsf{F}(I) = \ell_\infty$ olması için gerek ve yeter şart I nın N de bir maksimal uygun ideal olmasıdır.

İspat: 1. I, N de bir maksimal uygun ideal olsun. $x = (x_n) \in \ell_\infty$ olsun. $I - \lim x_n \in R$ olduğu gösterilmelidir. $x \in \ell_\infty$ olduğundan her bir $n \in N$ için $a \le x_n \le b$ olacak biçimde $a, b \in R$ sayıları vardır. $A_1 = \left\{ n : a \le x_n \le \frac{a+b}{2} \right\}$,

$B_1 = \left\{ n : \dfrac{a+b}{2} \le x_n \le b \right\}$ şeklinde ifade edilsin. O halde $A_1 \cup B_1 = N$ dir. I bir uygun ideal olduğundan A_1, B_1 kümelerinin her ikisi de I ya ait değildir. Böylece en azından biri I ya ait değildir. Bu küme D_1 ile ve buna karşılık gelen aralık ise J_1 ile gösterilsin. O halde $D_1 = \{ n : x_n \in J_1 \} \notin I$ olacak biçimde J_1 aralığı ve D_1 vardır. Tümevarımla $J_1 \supset J_2 \supset ... \supset J_n \supset ...$ $J_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralığının bir dizisi oluşturulabilir. $lim(b_n - a_n) = 0$ ve $D_k = \{ n : x_n \in J_k \} \notin I$ $(k = 1,2,...)$ dır.

$\xi \in \bigcap_{l=1}^{\infty} J_k$ ve $\varepsilon > 0$ ve $M(\varepsilon) = \{ n : |x_n - \xi| < \varepsilon \}$ olsun. Yeterince büyük bir m için $J_m = [a_m, b_m] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ dır. $D_m \notin I$ olduğundan $M(\varepsilon) \notin I$ olduğu görülür. I bir maksimal ideal olduğundan Lemma 4.1.1 e bağlı olarak $N / M(\varepsilon) \in I$ ve $\{ n : |x_n - \xi| \ge \varepsilon \} \in I$ elde edilir. Buradan $I - \lim x_n = \xi$ dir.

2. I nın maksimal ideal olmadığını kabul edelim. Lemma 4.1.1 den dolayı $M \notin I$ ve $N \setminus M \notin I$ olacak biçimde $M = \{ m_1 < m_2 < ... \}$ kümesi vardır. $x = (x_n)$ dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$x_n = \chi_M(n) \qquad (n = 1,2,...)$$

O halde $x \in \ell_\infty$ ve $I - \lim x_n$ yoktur. Gerçekten her $\xi \in R$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\{ n : |x_n - \xi| \ge \varepsilon \}$ kümesi M ye veya $N \setminus M$ ye veya N ye eşittir ve bu kümelerin hiçbiri I ya ait değildir.

Uyarı 4.1.1: Teorem 4.1.2 sınırsız diziler için genişletilemez. Bu şu şekilde gösterilir.

Önerme 4.1.1: I bir uygun ideal olsun. O halde $I - \lim x_n$ in olmadığı reel sayıların sınırsız bir dizisi vardır.

İspat: $x_n = n$, $(n = 1,2,...)$ şeklinde ifade edilsin. Açıkça $I - \lim x_n$ yoktur. Burada ℓ_∞ da $\mathsf{F}_0(I)$ ve $\mathsf{F}_0^*(I)$ yakınsaklık alanlarının topolojik özelliklerinden söz edilecektir.

Teorem 4.1.3: I **,** N de bir uygun ideal olsun. O halde $\mathsf{F}(I)$, ℓ_∞ un bir kapalı lineer alt uzayıdır (ℓ_∞ , sup-norm ile verilmiştir).

İspat: ℓ_∞ da $x = (x_j)$, $x^{(m)} = \left(x_j^{(m)}\right) \in \mathsf{F}(I)$ $(m = 1,2,...)$, $lim\, x^{(m)} = x$ yani $lim\left\|x^{(m)} - x\right\| = 0$ olsun. $x \in \mathsf{F}(I)$ olduğu ispatlanmalıdır.

$I - \lim x^{(m)} = \xi_m \in R$ $(m = 1,2,...)$ in var olduğunu varsayalım. İspat iki adımda gerçekleşecektir.

1. (ξ_m) dizisinin bir cauchy dizisi olduğu ispatlanmalıdır (öyle ki $lim\, \xi_m = \xi \in R$ vardır).
2. $I - \lim x = \xi$ olduğu ispatlanmalıdır.

1. $\eta > 0$ olsun. $lim\, x^{(m)} = x$ den $\left(x^{(m)}\right)$dizisinin ℓ_∞ da bir cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle her bir $u, v > m_0$ olacak biçimde bir $m_0 \in N$ vardır ve

$$\left\|x^{(u)} - x^{(v)}\right\| < \frac{\eta}{3} \tag{4.6}$$

dır.

$U\left(\frac{\eta}{3}\right) = \left\{ j : \left|x_j^{(u)} - \xi_u\right| < \frac{\eta}{3} \right\}$, $V\left(\frac{\eta}{3}\right) = \left\{ j : \left|x_j^{(v)} - \xi_v\right| < \frac{\eta}{3} \right\}$ kümelerinin $F(I)$ ya ait olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece bunların kesişimleri boş değildir. Bir çok $s \in U\left(\frac{\eta}{3}\right) \cap V\left(\frac{\eta}{3}\right)$ elemanı için

$$\left|x_s^{(u)} - \xi_u\right| < \frac{\eta}{3},\ \left|x_s^{(v)} - \xi_v\right| < \frac{\eta}{3} \tag{4.7}$$

dir. (4.6) ve (4.7) den

$|\xi_u - \xi_v| \le \left|\xi_u - x_s^{(u)}\right| + \left|x_s^{(u)} - x_s^{(v)}\right| + \left|x_s^{(v)} - \xi_v\right| < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$ olur. Buradan (ξ_m) bir cauchy dizisidir ve $\xi = lim\, \xi_m \in R$ vardır.

2. $\varepsilon > 0$ olsun. $v > v_0$ olacak biçimde v_0 seçelim, aynı zamanda

$$|\xi_v - \xi| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \left\|x^{(v)} - x\right\| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.8}$$

olur. O halde her bir $n \in N$ için

$$|x_n - \xi| \le \left|x_n - x_n^{(v)}\right| + \left|x_n^{(v)} - \xi_v\right| + |\xi_v - \xi| \tag{4.9}$$

dir.

$A(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| \ge \varepsilon\}$, $\quad CA(\varepsilon) = \{n : |x_n - \xi| < \varepsilon\}$, $\quad A_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \left\{n : \left|x_n^{(v)} - \xi_v\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

$CA_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \left\{n : \left|x_n^{(v)} - \xi_v\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ olsun. (4.8) ve (4.9) dan $n \in CA_v(\varepsilon)$ için $|x_n - \xi| < \varepsilon$ eşitsizliği ve

$$CA_v\left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right) \subset CA(\varepsilon) \tag{4.10}$$

elde edilir. $A_v\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \in I$ olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer (4.10) daki kümelerin tümleyeninden $A(\varepsilon) \in I$ elde edilir ve 2 nin ispatı tamamlanır.

$\mathsf{F}(I)$, $\mathsf{F}(I^*)$ yakınsaklık alanlarını ilgilendiren sonuçlar şu şekilde özetlenebilir.

$\mathsf{F}(I^*) \subset \mathsf{F}(I)$ ((4.3) den) dir ve $\mathsf{F}(I^*) = \mathsf{F}(I)$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart I nın (AP) koşulunda tutarlı olmasıdır. Buradan I, (AP) koşulunda tutarsızsa ve maksimal değilse $\mathsf{F}(I^*) \underset{\neq}{\subset} \mathsf{F}(I) \underset{\neq}{\subset} \ell_\infty$ dır.

Şimdi her I uygun ideali için $\mathsf{F}(I^*)$ kümesinin $\mathsf{F}(I)$ da yoğun olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.4: N deki her I uygun ideali için $\overline{\mathsf{F}(I^*)} = \mathsf{F}(I)$ dır ($\overline{\mathsf{F}(I^*)}$; ℓ_∞ da $\mathsf{F}(I^*)$ ın kapanışıdır).

İspat: $\mathsf{F}(I^*) \subset \mathsf{F}(I)$ dır. $\mathsf{F}(I)$, ℓ_∞ un bir kapalı alt uzayı olduğundan (Teorem 4.1.3) $\overline{\mathsf{F}(I^*)} \subset \mathsf{F}(I)$ dır. $\mathsf{F}(I) \subset \overline{\mathsf{F}(I^*)}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$z \in \ell_\infty$, $\delta > 0$ için $B(z,\delta) = \{x \in \ell_\infty : \|x - z\| < \delta\}$ şeklinde ifade edilsin (ℓ_∞ da yuvar). Her bir $y \in \mathsf{F}(I)$ ve $0 < \delta < 1$ için

$$B(y,\delta) \cap F(I^*) \neq \phi \tag{4.11}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. $L = I - \lim y$ şeklinde ifade edilsin. Keyfi bir $\eta \in (0,\delta)$ seçelim. O halde $A(\eta) = \{n : |y_n - L| \geq \eta\} \in I$ dır. $x = (x_n)$ şu şekilde tanımlansın:

eğer $n \in A(\eta)$ ise $x_n = y_n$ aksi takdirde $x_n = L$

Buradan açıkça $x \in \ell_\infty$ dur, $I^* - \lim x = L$ ve $x \in B(y,\eta)$ dir. O halde (4.11) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bilinen başka bir durum eğer W, X lineer normlu uzayının bir lineer kapalı alt uzayı ve $X = W$ ise W nın X de yoğun olmadığıdır. Bu ω nin porosity si hakkında bir soruya yol açar. Genel anlamda bu soruya yanıt verilecek ve $\mathsf{F}(I)$ ve $\mathsf{F}(I^*)$ yakınsaklık alanlarının bazı uygulamaları gösterilecektir.

Lemma 4.1.2: X in bir lineer normlu uzay ve W nın X in bir kapalı lineer alt uzayı olduğunu varsayalım, $W \neq X$. $s(W) = \sup\{\delta > 0 : \exists B(y,\delta) \subset B(\theta,1)/W\}$ olsun (θ; X in sıfır elemanı). O halde $s(W) = \frac{1}{2}$ dir.

İspat: İspat için dolaylı bir yol izlenilecektir. $s(W) > \frac{1}{2}$ olduğunu varsayalım. O halde uygun bir y için

$$B(y,\delta) \subset B(\theta,1) \setminus W \tag{4.12}$$

olacak biçimde bir $\delta > \frac{1}{2}$ vardır.

Burada iki olası durum vardır:

1. $\|y\| > \frac{1}{2}$, 2. $\|y\| \leq \frac{1}{2}$

1. Bu durumda her c için $\frac{1}{2} < c < \delta$, $y + \frac{c}{\|y\|}.y \in B(y,\delta)$ dır. Aynı zamanda

$\left\| y + \frac{c}{\|y\|}.y \right\| = \left(1 + \frac{c}{\|y\|}\right)\|y\| = \|y\| + c > 1$ dir. Buradan $y + \frac{c}{\|y\|}.y \notin B(\theta,1)$ dir ve bu durum (4.12) ile çelişir.

2. Bu durumda $\theta \in B(y,\delta)\cap W$ dır, bu da (4.12) ile çelişir. Buradan $s(W)\le \frac{1}{2}$ dir. $v \in X \setminus W$ olsun ve $\alpha = \inf_{v\in\omega}\|v-u\|$ şeklinde ifade edilsin. Açıkça $\alpha > 0$ dır. Genelleme dışında $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğu varsayılabilir (eğer $\alpha \ne \frac{1}{2}$ ise v yerine $\frac{1}{2\alpha}.v$ alınabilir). $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ için α nın tanımıyla $\frac{1}{2} \le \|v-u_0\| < \frac{1}{2}-\varepsilon$ olacak biçimde $u_0 \in \omega$ vardır. $y = v - u_0$ ve $\delta = \frac{1}{2}-\varepsilon$ şeklinde ifade edilsin. (4.12) nin bunları sağladığı gösterildi. Eğer $z \in B(y,\delta)$ ise $\|z-y\| < \frac{1}{2}-\varepsilon$ ve $\|z\| \le \|z-y\| + \|y\| < \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = 1$ dir yani $B(y,\varepsilon)\subset B(\theta,1)$ dir. $z \in B(y,\delta)\cap W$ olduğunu varsayalım, buradan $\|z-y\| < \frac{1}{2}-\varepsilon$ dır. Diğer taraftan ($z+u_0 \in W$ olduğundan); $\|z-y\| = \|z-(v-u_0)\| = \|(z+u_0)-v\| \ge \frac{1}{2}$ dir. Böylece çelişki elde edilir ve buradan $B(y,\delta)\cap W = \phi$ dir. Eğer $\varepsilon \to 0^+$ ise $\delta \to \frac{1}{2}^-$ dir ve $s(W) = \frac{1}{2}$ dir.

Teorem 4.1.5: X in bir lineer normlu uzay ve W nın X in kapalı lineer alt uzayı olduğunu varsayalım, $W \ne X$. O halde W, X de bir çok porous kümedir, daha fazla ayrıntıya inildiğinde;

1. Eğer $x \in X \setminus W$ ise $p(x,W) = 1$
2. Eğer $x \in W$ ise $p(x,W) = \frac{1}{2}$ dir.

İspat: 1.; X de W nın yakınsaklığının basit bir sonucudur. 2. yi ispatlayalım. $W \ne X$ olduğundan,

$$B(u,\delta)\subset B(\theta,1)\setminus W \tag{4.13}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ ve bir $u \in B(\theta,1)\setminus W$ vardır. Önce

$$\|u\| + \delta \le 1 \tag{4.14}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için dolaylı bir yol izlenecektir. $\|u\|+\delta > 1$ olduğunu varsayalım. $\|u\| < 1$ olduğundan uygun bir $c > 0$ için $1 < \|u\| + c\|u\| < \|u\| + \delta$ dır. Buradan $c\|u\| < \delta$ dır ve bu sebeple

$$u + cu \in B(u,\delta) \tag{4.15}$$

dır. Diğer taraftan $\|u+cu\| = (1+c)\|u\| = \|u\| + c\|u\| > 1$ dir ve buradan $u + cu \notin B(\theta,1)$ dir, (4.13) ve (4.15) çelişir, buradan (4.14) elde edilir.

$x \in W$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer (4.13) sağlanırsa;

$$B(x+\varepsilon u, \varepsilon\delta) \subset B(x,\varepsilon)/W \tag{4.16}$$

olduğu gösterilir.

$z \in B(x+\varepsilon u, \varepsilon\delta)$ için $\omega = z - x - \varepsilon u$ şeklinde ifade edilsin. O halde

$$\|\omega\| = \|z - x - \varepsilon u\| < \varepsilon\delta \tag{4.17}$$

dır. Ayrıca $z - x = \varepsilon u + \omega$ dır, buradan (4.14) ve (4.17) ile

$$\|z - x\| = \|\varepsilon u + \omega\| \le \|\varepsilon u\| + \|\omega\| < \varepsilon\|u\| + \varepsilon\delta \le \varepsilon$$

olur. Buradan $z \in B(x,\varepsilon)$ olur. Henüz $z \notin W$ olduğu gösterildi. Karşıt durumda $z - x = \varepsilon u + \omega \in W$ dir, buradan;

$$u + \frac{1}{\varepsilon}\omega \in W \tag{4.18}$$

dır. $\left\|\frac{1}{\varepsilon}\omega\right\| < \delta$ olduğundan $\frac{1}{\varepsilon}\omega \in B(u,\delta)$ dır. Fakat (4.13) den $u + \frac{1}{\varepsilon}\omega \notin W$ olur, bu da (4.18) ile çelişir.

Buradan $B(u,\delta) \subset B(\theta,1) \setminus W$ varsayımı altında (4.16) ispatlandı. Fakat $\wp(x,\varepsilon,W)$ nın tanımıyla (4.13) elde edilecek biçimde her bir $\delta > 0$ için $\gamma(x,\varepsilon,W) \ge \varepsilon\delta$ dır. Buradan Lemma 4.1.2 de bahsedilen $s(W) = \frac{1}{2}$ iken $\gamma(x,\varepsilon,\omega) \ge \varepsilon s(W)$, $\underline{p}(x,W) \ge s(W)$ dir. Her $B(y,\delta)$ yuvarı için $\delta > \frac{1}{2}$, $B(y,\delta) \subset B(\theta,1)$ olduğundan Lemma 4.1.2 den, Teorem 4.1.5 in iddiasından $\theta \in B(y,\delta)$ elde edilir.

$\mathsf{F}(I)$, $\mathsf{F}(I^*)$ yakınsaklık alanları çalışılırken Teorem 4.1.5 kullanılacaktır. I, N de bir uygun ideal olsun. $\|x\| = \sup\limits_{n=1,2,\ldots} |x_n|$, $x = (x_n) \notin \ell_\infty$ sup-normu ile tüm sınırlı reel dizilerin lineer normlu ℓ_∞ – uzayını alalım. Teorem 4.1.2 den dolayı $\mathsf{F}(I)$ yakınsaklık alanının ℓ_∞ ile benzer olması için gerek ve yeter şart I nın bir maksimal ideal olmasıdır. Buradan I nın maksimal olmadığı varsayımı altında $\mathsf{F}(I)$ dan söz etmek uygundur. Bu durumda $\mathsf{F}(I) \underset{\neq}{\subset} \ell_\infty$ dır ve Teorem 4.1.3 ile $\mathsf{F}(I)$ kümesi ℓ_∞ un bir kapalı lineer alt uzayıdır.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.1.5 in bir sonucudur.

Teorem 4.1.6: I nın N de maksimal olmayan bir uygun ideal olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $x \in \ell_\infty \setminus \mathsf{F}(I)$ ise $p(x, \mathsf{F}(I)) = 1$ dir.
2. Eğer $x \in \mathsf{F}(I)$ ise $p(x, \mathsf{F}(I)) = \frac{1}{2}$ dir.

Teorem 4.1.4 den $\mathsf{F}(I^*) \subset \mathsf{F}(I) = \overline{\mathsf{F}(I^*)}$ olduğundan ispat elde edilir.

Sonuç 4.1.1: Teorem 4.1.6 nın koşulları altında;

1. Eğer $x \in \ell_\infty \setminus \mathsf{F}(I)$ ise $p\left(x, \mathsf{F}(I^*)\right) = 1$
2. Eğer $x \in \mathsf{F}(I)$ ise $p\left(x, \mathsf{F}(I^*)\right) = \frac{1}{2}$

dir.

4.2 ℓ_∞, $\mathsf{F}(I)$ ve $\mathsf{F}(I^*)$ da Maksimal İdealler

Burada cebirsel açıdan ℓ_∞, $\mathsf{F}(I)$ *ve* $\mathsf{F}(I^*)$ reel sayı dizilerinin halkasından söz edilecek ve N de I maksimal (gerçek) idealleri ve bu halkalardaki cebirsel A maksimal (gerçek) idealleri arasındaki bağlantı verilecektir.

Öncelikle halkalarda ideallerle ilgili bazı bilinen durumları hatırlayalım. R, $\bar{1}$ ile bir değişmeli halka olsun. O halde A nın R de bir maksimal gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart $R \setminus A$ nın bir cisim olmasıdır. Açıkça $\bar{1} \in A$ ise A ideali gerçek ideal değildir.

Lemma 4.2.1: R değişmeli halkasında her A gerçek ideali R de bir A_0 maksimal ideali tarafından kapsanır.

Lemma 4.2.2: $U = \{U_i\}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. U nun sonsuz alt aileleri X i örtecek şekilde verilsin. O halde U ailesi, X deki bir maksimal I idealine genişletilebilir.

Reel sayıların $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ dizileri için $x + y = (x_n + y_n)$ ve $x.y = (x_n.y_n)$ şeklinde ifade edilir. O halde ℓ_∞, $\mathsf{F}(I)$ *ve* $\mathsf{F}(I^*)$ (I, N de bir uygun ideal) bu yolla tanımlanan + ve . ile $\bar{1} = (1)$ ile değişmeli halkalardır.

Aşağıdaki ifade de N in I maksimal idealinin uygun olması gerekmediği kabul edilecektir yani I, Tanım 2.7 nin yalnız koşullarını sağlar. Teorem 4.1.2 nin ispatının ayrıntılı bir analizi I nın uygun olması gerekmediğini gösterir. Aşağıdaki teoremin ispatında Teorem 4.1.2 nin bu özelliği kullanılmıştır.

Teorem 4.2.1: S, ℓ_∞ un bir alt halkası olsun.

1. S, tüm sabit dizileri içeriyor ise
2. Eğer bazı K reel sayıları ve her $n \in N$ için $(x_n) \in S$ ve $x_n > K > 0$ ise $\left(\frac{1}{x_n}\right) \in S$ dir.

O halde A nın S de bir maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart $A = A_I = \{x = (x_n) \in S; I - \lim x_n = 0\}$ olacak biçimde N de I maksimal idealinin var olmasıdır.

İspat: I nın N de bir maksimal ideal olduğunu varsayalım. Açıkça A_I, S de bir idealdir. A_I nın maksimal olduğu gösterilebilir. Teorem 4.1.2 ye bağlı olarak her bir $(x_n) \in \ell_\infty$ için $I - \lim x_n$ vardır. $\Phi_I(x) = I - \lim x_n$ olacak biçimde bir $\Phi_I(x) : S \to R$ homomorfizmi tanımlanabilir. S tüm sabit dizileri içerdiğinden Φ_I örtendir. Açıkça $A_I = Ker\Phi$ ve $S \setminus A_I = R$ dir. Buradan A_I bir maksimal idealdir.

S de her maksimal idealin, N de bazı I maksimal ideali için A_I formunda olduğunu gösteririz. $M(N)$, N deki tüm maksimal ideallerin kümesi olsun. $I \in M(N)$ iken S de A idealinin hiçbir A_I tarafından kapsanmadığını varsayalım. Buradan her bir $I \in M(N)$ maksimal ideali için $x_n > 0$ ve $I - \lim x_n = L > 0$ olacak biçimde bir $(x_n) \in A$ dizisi vardır. Böylece her $n \in V_I$ için $x_n > \frac{L}{2}$ olacak biçimde $V_I \in F(I)$ vardır. $N \subset \bigcup_{k=1}^{m} V_{I_k}$ olacak biçimde sonlu bir

$$\{I_1, I_2, ..., I_m\} \tag{4.19}$$

kümesinin var olduğunu gösterelim. Karşıt olarak $\{V_I ; I \in M(N)\}$ Lemma 4.2.2 nin varsayımlarını sağlar ve $\{V_I ; I \in M(IN)\} \subset I_0$ ile I_0 maksimal ideali vardır. Buradan $V_{I_0} \in I_0$ ve $V_{I_0} \in F(I_0)$ çelişkisi elde edilir.

(4.19) daki $\{I_1, I_2, ..., I_m\}$ için $x^{(i)}$ ($i = 1,2,...,m$) dizisi her $n \in V_I$ için $x_n^{(i)} > \frac{L_i}{2}$ ve $x_n^{(i)} > 0$ ı sağlayan $x^{(i)} = \left(x_n^{(i)}\right) \in A$ şeklinde olsun $\left(L_i = I_i - \lim x_n^{(i)}\right)$. $z_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + ... + x_n^{(m)}$ şeklinde ifade edilsin. O halde her bir $n \in N$ için $(z_n) \in A$ dır ve $z_n > \min_{1 \le i \le m} \frac{L_i}{2} > 0$ dır. (ii) den $\left(\frac{1}{z_n}\right) \in S$ dir ve $\bar{1} = \left(z_n . \frac{1}{z_n}\right) \in A$ dır. Buradan A, S de bir gerçek ideal değildir.

Sonuç 4.2.1: $\ell_\infty \left(\mathsf{F}(I), \mathsf{F}(I^*)\right)$ da $A \in \ell_\infty \left(\mathsf{F}(I), \mathsf{F}(I^*)\right)$ kümesinin bir maksimal ideal olması için gerek ve yeter şart $A = A_j = \left\{x = (x_n) \in \ell_\infty \left(\mathsf{F}(I), \mathsf{F}(I^*)\right) : J - \lim x_n = 0\right\}$ olacak biçimde N de bir J maksimal idealinin olmasıdır.

Örnek 4.2.1: Eğer I, $m \in N$ i içermeyen N in tüm alt kümelerinin tamamını oluşturan maksimal bir ideal ise $A = \{x = (x_n) \in S : x_m = 0\}$ nin S de maksimal ideal olduğu kabul edilir.

5. REEL FONKSİYONLARIN I – SÜREKLİLİĞİ

$I-$yakınsaklık kavramı kullanılarak bir noktada bir fonksiyonun limitinin Heine tanımına benzer bir yolla $I-$ süreklilik kavramı tanımlanabilir.

Tanım 5.1: I bir ideal ve $f : R \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$I-lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I-lim\, f(x_n) = f(x_0)$$

f fonksiyonu $x_0 \in R$ noktasında $I-$ süreklidir denir.

Örnek 3.1 5. de I_d $-$yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gibi $I-$ süreklilik de aynı seçimle istatistiksel sürekliliğe denktir.

Teorem 5.1: f , x_0 da $I-$ sürekli olsun. O halde f , x_0 da genel anlamda süreklidir.

İspat: Eğer f, x_0 da sürekli değilse x_0 da $I-$ sürekli olmadığı gösterilecektir. Eğer f, x_0 da sürekli değilse $n = 1,2,...$ için $x_n \to x_0$ ve $|f(x_n) - f(x)| \geq \eta > 0$ olacak biçimde bir (x_n) dizisi ve bir $\eta > 0$ sayısı vardır. $x_n \to x_0$ ve I ideali uydun ideal olduğundan $I-lim\, x_n = x_0$ dir. Açıkça $\{n : |f(x_n) - f(x)| \geq \eta\} = N \notin I$ dır ve

$I-lim\, f(x_n) = f(x_0)$ sağlanmaz.

Önerme 5.1: f ve g, R de $I-$ sürekli olsun. gof fonksiyonu R de $I-$ süreklidir.

Önerme 5.2: Eğer f ve g fonksiyonları x_0 da $I-$ sürekli ise $f+g$ ve $f.g$, x_0 da $I-$ süreklidir.

İspat: Fonksiyonların çarpım durumu için ispat şu şekildedir:

$I-lim\, x_n = x_0$ olsun.

$$I-lim(f.g)(x_n) = f.g(x_0)$$

yani

$$I-\lim f(x_n).g(x_n)=f(x_0).g(x_0) \tag{5.1}$$

olduğu ispatlanacaktır. Önermenin varsayımından

$$B=\{n:|f(x_n)-f(x_0)|<1\}\in F(I)$$

dır.

$$|f(x_n)g(x_n)-f(x_0)g(x_0)|\leq|f(x_n)||g(x_n)-g(x_0)|+|g(x_0)||f(x_n)-f(x_0)| \tag{5.2}$$

elde edilir. $n\in B$ için

$$|f(x_n)|<|f(x_0)|+1 \tag{5.3}$$

dir ve (5.2) ve (5.3) den

$$|f(x_n)g(x_n)-f(x_0)g(x_0)|\leq|f(x_0)+1||g(x_n)-g(x_0)|+|g(x_0)||f(x_n)-f(x_0)| \tag{5.4}$$

olur. $\varepsilon>0$ olsun.

$$0<2\eta<\frac{\varepsilon}{|f(x_0)|+|g(x_0)|+1} \tag{5.5}$$

olacak biçimde $\eta>0$ seçelim.

$M_1=\{n:|f(x_n)-f(x_0)|<\eta\}$ ve $M_2=\{n:|g(x_n)-g(x_0)|<\eta\}$ kümeleri $F(I)$ ya aittir. Açıkça $B\cap M_1\cap M_2\in F(I)$ ve her bir $n\in B\cap M_1\cap M_2$ için (5.4) ve (5.5) den $|f(x_n)g(x_n)-f(x_0)g(x_0)|<\varepsilon$ elde edilir. Buradan

$$\{n:|f(x_n)g(x_n)-f(x_0)g(x_0)|\geq\varepsilon\}\in F(I)$$

dır ve (5.1) sağlanır.

Burada ayrıca (a,b) de araştırılacak $I-$süreklilik kavramı ve $f:(a,b)\to R$ fonksiyonundan söz edilecektir. (a,b) üzerinde tüm $I-$sürekli fonksiyonların kümesi $C(I)$ olsun. Yukarıda sözü edilen Teorem 5.1 , $C(I)\subset C(I_f)$ olduğunu öne sürer ($C(I_f)$-genel anlamda tüm sürekli fonksiyonların sınıfı).

Teorem 5.2: $C(I_f)\subset C(I)$ dır.

Bu teoremin ispatı için gerekli olan aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 5.1: $C(I)$ kümesi her I ideali için düzgün yakınsaklığa bağlı olarak kapalıdır.

İspat: Her bir m için $f_m \in C(I)$, (f_m) dizisi f e düzgün yakınsak olsun ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. f in x_0 da $I-$sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $\varepsilon > 0$ seçelim ve (x_n) dizisi için $I-lim\, x_n = x_0$ olsun. $A(\varepsilon) = \{n : |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$

şeklinde ifade edilsin. (f_m) in f e düzgün yakınsaklığı her bir $x \in (a,b)$ için

$|f_k(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde k nın var olduğu anlamına gelir. O halde her

$n \in A(\varepsilon)$ için

$$\varepsilon \leq |f(x_n) - f(x_0)| \leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$|f_k(x_n) - f_k(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak $\dfrac{\varepsilon}{3} \leq |f_k(x_n) - f_k(x_0)|$ dır. Buradan

$A(\varepsilon) \subset \left\{n : |f_k(x_n) - f_k(x_0)| \geq \dfrac{\varepsilon}{3}\right\} \in I$, $A(\varepsilon) \in I$ ve $I-\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ dır.

İspat (Teorem 5.2): $I-$sürekliliğin tanımının basit bir sonucu $f(x) = \text{sabit}$ ve $f(x) = x$ fonksiyonlarının $C(I)$ ya ait olduğudur. Toplama ve çarpmaya göre $C(I)$ kümesi kapalı olduğundan her bir $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k . x^k$ polinomunun $C(I)$ ya ait olduğu sonucu elde edilir. Weierstrass teoremine göre her sürekli fonksiyon, polinomlar dizisinin bir düzgün limitidir ve Teorem 5.2 nin ifadesi Lemma 5.1 in sonucudur.

Tanım 5.2: I_1 ve I_2 uygun idealler olsun. Eğer her (x_n) dizisi için $I_1 - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I_2 - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ elde ediliyorsa $f : (a,b) \to R$ fonksiyonu x_0 da $(I_1, I_2)-$süreklidir denir ($x_0 \in (a,b)$). Eğer f, her bir $x \in (a,b)$ de $(I_1, I_2)-$sürekli ise f, $(I_1, I_2)-$süreklidir denir.

Uyarı 5.1: Daha önce bahsedilen $I-$süreklilik Tanım 5.2 deki $(I, I)-$süreklilik anlamındadır.

Teorem 5.3: 1. $I_1 \subset I_2$ olsun. f in $(I_1, I_2)-$ sürekli olması için gerek ve yeter şart f in I_f $-$sürekli olmasıdır.

2. $I_1 \setminus I_2 \neq \phi$ olsun. f in $(I_1, I_2)-$ sürekli olması için gerek ve yeter şart f in bir sabit fonksiyon olmasıdır.

İspat: 1. f, x_0 da I_f $-$sürekli olsun ve $x_0 = I_1 - lim\, x_n$ olsun. Teorem 5.2 ye göre $f(x_0) = I_1 - lim\, f(x_n)$ elde edilir yani her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n : |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} \in I_1$ dir. $I_1 \subset I_2$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) \in I_2$ ve $I_2 - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ dır.

x_0, f in bir süreksizlik noktası olsun. $I_f - lim\, x_n = x_0$ olacak biçimde bir (x_n) dizisi vardır ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için $n = 1,2,...$ olduğunda $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Buradan açıkça $I_1 - lim\, x_n = x_0$ ve $A(\varepsilon) = \{n : |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} = N \notin I_2$ dir. Buradan f, x_0 da $(I_1, I_2)-$ sürekli değildir.

2. Eğer $x_0 \in (a,b)$ ve f sabit bir fonksiyon ise her bir $\varepsilon > 0$ ve $I_1 - lim\, x_n = x_0$ şeklinde her (x_n) dizisi için $A(\varepsilon) = \{n : |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon\} = \phi \in I_2$ dir ve f, x_0 da $(I_1, I_2)-$ süreklidir.

Eğer f sabit fonksiyon değilse (a,b) de $f(y_1) \neq f(y_2)$ olacak biçimde y_1 ve y_2 vardır. Varsayımdan $A \in I_1 \setminus I_2$ ve $N \setminus A$ sonsuz kümelerdir. $z_k \to y_1$ olmak üzere (x_n) dizisi $n \in N \setminus A = \{n_1 < n_2 < ...\}$ için $x_{n_k} = z_k$ ve $n \in A$ için $x_n = y_2$ şeklinde tanımlansın. Açıkça $I_1 - lim\, x_n = y_1$ dir.

$A(\varepsilon) = \{n : |f(x_n) - f(y_1)| \geq \varepsilon\} \supseteq A$ elde edilir. $A \notin I_2$ olduğundan $A(\varepsilon)$ kümesi I_2 ye ait değildir. Böylece f, y_1 de $(I_1, I_2)-$ sürekli değildir.

Tanım 5.3: Her (x_n) dizisi için $I^* - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I^* - lim\, f(x_n) = f(x_0)$

sağlanıyorsa f fonksiyonu x_0 da I^* – süreklidir.

Teorem 5.4: Eğer I ideali (AP) özelliğine sahipse f in x_0 da I^* – sürekli olması için gerek ve yeter şart f in x_0 da sürekli olmasıdır.

İspat: (x_n) bir dizi ve f, x_0 da I^* – sürekli olsun. O halde $I^* - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I^* - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ dır. I, (AP) özelliğinde ise bu ifade

$I - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ ile denktir ve Teorem 5.1 e göre f, x_0 da

süreklidir. f, x_0 da sürekli ve $I^* - lim\, x_n = x_0$ olsun. O halde $lim\, x_{m_k} = x_0$ olacak

biçimde bir $M = \{m_1 < m_2 < ...\}$ kümesi vardır. f, x_0 da sürekli olduğundan $\lim_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(x_0)$ ve $I^* - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ elde edilir.

Tanım 5.2 den aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım 5.4: I_1 ve I_2 uygun idealler olsun. Eğer her (x_n) dizisi için $I_1^* - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I_2^* - lim\, f(x_n) = f(x_0)$ oluyorsa, $f : (a,b) \to R$ fonksiyonu x_0 da

(I_1^*, I_2^*) – süreklidir denir ($x_0 \in (a,b)$). Eğer f fonksiyonu her bir $x \in (a,b)$ de (I_1^*, I_2^*) – sürekli ise f, (I_1^*, I_2^*) – süreklidir denir.

Teorem 5.5: I_1 (AP) özelliğinde olsun.

1. $I_1 \subset I_2$ olsun. f in (I_1^*, I_2^*) – sürekli olması için gerek ve yeter şart f in I_f – sürekli olmasıdır.

2. $I_1 \setminus I_2 \neq \phi$ olsun. f in (I_1^*, I_2^*) – sürekli olması için gerek ve yeter şart f in bir sabit fonksiyon olmasıdır.

İspat:

$$I_1^* - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I_2^* - lim\, f(x_n) = f(x_0)$$

iken

$$I_1 - lim\, x_n = x_0 \Rightarrow I_2 - lim\, f(x_n) = f(x_0)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $I_1^* - lim\, x_n = x_0 \Leftrightarrow I_1 - lim\, x_n = x_0$ denkliği I_1 in (AP) özelliğinde olmasının bir sonucudur.

$$I_2^* - lim\, f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow I_2 - lim\, f(x_n) = f(x_0)$$

olduğu açıktır. Teorem 5.5 in ifadesi Teorem 5.3 ün sonucudur.

6. TOPOLOJİK UZAYLARDA I – SÜREKLİLİK

Reel fonksiyonlarda olduğu gibi topolojik uzaylarda da $I-$süreklilik için benzer bir tanım verilebilir.

Tanım 6.1: I **,** N de bir ideal ve X, Y topolojik uzaylar olsun. Eğer X de her bir (x_n) dizisi için;

$$I-\lim x_n = x_0 \Rightarrow I-\lim f(x_n) = f(x_0)$$

oluyorsa $f : X \to Y$ dönüşümü x_0 da $I-$süreklidir denir.

Teorem 6.1: X, Y topolojik uzaylar ve I keyfi bir uygun ideal olsun. Eğer $f : X \to Y$ $I-$sürekli ise f , I_f $-$süreklidir.

İspat: f in $I-$sürekli olduğunu fakat I_f $-$sürekli olmadığını varsayalım. O halde $I_f - \lim x_n = x$ olacak biçimde bir (x_n) dizisi vardır, fakat $I_f - \lim f(x_n) = f(x)$ değildir. $A(V) = \{n : f(x_n) \notin V\} \notin I_f$ olacak biçimde $f(x)$ in bir V açık komşuluğu vardır. Yani $A(V)$ sonsuzdur. (y_n) N in $A(V)$ alt kümesi ile verilen (x_n) dizisinin alt dizisi olsun. O halde $\{n : f(y_n) \notin V\} = N$ dir. Aynı zamanda (y_n) alt dizileri için $I_f - \lim y_n = x$ elde edilir. O halde $I - \lim y_n = x$ ve f in $I-$sürekliliği ile $I - \lim f(y_n) = f(x)$ dir. Buradan $\{n : f(y_n) \notin V\} = N \in I$ dır ki bu bir çelişkidir.

Teorem 6.1 deki ifadenin çift taraflı olmadığına dair bir örnek bir sonraki bölümde verilecektir.

I_f $-$sürekliliğin sürekliliğe denk olduğu topolojik uzaylara dizisel uzaylar denir. Dizisel uzaylar “Spaces in which sequences suffice” de S.P.Fraklin tarafından tamamen incelenmiştir. Dizisel uzaylarla ilgili iyi bilinen bazı durumlar tanıtılacaktır. Tüm ilk sayılabilir ve tüm metrik uzaylar diziseldir. X in dizisel olması için gerek ve yeter şartın $V \subset X$ in X de her bir yakınsak diziyi tüm limitleriyle kapsayan kapalı bir küme olması gerektiği bilinir. Dizisel uzaylar, metrik uzayların tam anlamıyla bölüm uzaylarıdır. Dizisel uzaylar, bölüm uzayları ve topolojik toplamların oluşumu altında kapalıdır.

Sonuç 6.1: X bir dizisel uzay ve I bir uygun ideal olsun. Y bir topolojik uzay $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f, süreklidir,
2. f, I_f −süreklidir,
3. f, I − süreklidir.

6.1 *I* – Süreklilik ve Asal Uzaylar

Eğer X in bir yığılma noktası varsa X topolojik uzayına asal uzaydır denir. N de gerçek idealler ile ∞ yığılma noktalı $N \cup \{\infty\}$ kümesi üzerindeki asal uzaylar arasında birebir eşleme vardır.

I bir gerçek ideal olsun. $N \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde bir N_I topolojik uzayı şu şekilde ifade edilir: $U \subset N \cup \{\infty\}$ kümesinin N_I da açık olması için gerek ve yeter şart $\infty \notin U$ veya $U / \{\infty\} \in F(I)$ olmasıdır. N_I, ∞ yığılma noktası ile açıkça bir asal uzaydır.

Diğer taraftan P, $N \cup \{\infty\}$üzerinde ∞ yığılma noktası ile bir asal uzay olsun. $I = \{U \subset N : U, P \text{ de kapalı}\}$ olsun. I nın bir gerçek ideal olduğu kolaylıkla görülür.

Aşağıdaki önerme N_I uzayı ve I −yakınsaklık arasındaki ilişkiyi gösterir.

Önerme 6.1.1: X bir topolojik uzay, her bir $n \in N$ için $x_n \in X$, $x \in X$ olsun. $f(n) = x_n$ ve $f(\infty) = x$ ile $f : N_I \to X$ dönüşümü tanımlansın. O halde $I - \lim x_n = x$ olması için gerek ve yeter şart f in sürekli olmasıdır.

İspat: $I - \lim x_n = x$ olsun ve U, X in bir açık alt kümesi olsun. Eğer $x \notin U$ ise

$\infty \notin f^{-1}[U]$ dur ve $f^{-1}[U]$ açıktır. Eğer $x \in U$ ise $\{n : f(n) \in U\} \in F(I)$ ve $f^{-1}[U] = \{n : f(n) \in U\} \cup \{\infty\}$ açıktır. O halde f süreklidir.

$f : N_I \to X$ sürekli olduğunu varsayalım. $I - \lim x_n = x$ olduğu gösterilmelidir. Gerçekten eğer U, x in bir açık komşuluğu ise $f^{-1}[U] = \{n : f(n) \in U\} \cup \{\infty\}$ N_I da açıktır. Buradan $\{n : x_n \in U\} \in F(I)$ ve $\{n : x_n \notin U\} \in I$ dır.

S, N de gerçek ideallerin bir ailesi olsun. Her bir $I \in S$ için f $I -$sürekli iken her $f : X \to Y$ dönüşümü sürekli ise X topolojik uzayına $S -$dizisel uzay denir (kısaca f $S -$süreklidir denir).

Lemma 6.1.1: Her bir $I \in S$ için N_I uzayı $S -$diziseldir.

İspat: Açıkça N de $I - \lim n = \infty$ dur. Önerme 6.1.1 den ispat elde edilir.

Lemma 6.1.2: Tüm $S -$dizisel uzayların sınıfı, bölüm uzaylarının ve topolojik toplamların oluşumu altında kapalıdır.

İspat: $X_j, j \in J$, $S -$dizisel uzaylarının bir sistemi olsun. $\coprod_{j \in J} X_j$ nin $S -$dizisel olduğunu gösterilecektir. $f : \coprod_{j \in J} X_j \to Y$, $S -$sürekli olsun. Her bir $j \in J$ için $f|_{X_j}$ nin $S -$sürekli olduğunu göstermek yeterlidir (o zaman her bir $f|_{X_j}$ süreklidir ve bu sebeple aynı zamanda f süreklidir). Diğer taraftan X_j de $I - \lim x_n = x$ ise $\coprod_{j \in J} X_j$ de de $I - \lim x_n = x$ olduğu açıktır. O halde $I - \lim f|_{X_j}(x_n) = I - \lim f(x_n) = f(x) = f|_{X_j}(x)$ dir.

X bir $S -$dizisel uzay ve $g : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. $f : Y \to Z$ $S -$sürekli olsun. O halde fog $S -$süreklidir (Önerme 5.1 ve Teorem 4.1). Buradan fog sürekli ve f süreklidir.

Lemma 6.1.3: X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ örten sürekli bir dönüşüm olsun. O halde f in bölüm dönüşümü olması için gerek ve yeter şart her bir $g : Y \to Z$ için

$$g \text{ sürekli} \Leftrightarrow gof \text{ sürekli} \qquad (6.1)$$

olmasıdır.

Teorem 6.1.1: $I \in S$ için X topolojik uzayının $S-$dizisel olması için gerek ve yeter şart X in N_I uzaylarının benzerlerinin bir topolojik toplamının bölümü olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ Lemma 6.1.1 ve Lemma 6.1.2 den ispat elde edilir.

$(\Rightarrow)$ Önerme6.1.1 e göre $f : X \to Z$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir $I \in S$ ve her sürekli $g : N_I \to X$ dönüşümü için fog nin sürekli olmasıdır. Bazı $I \in S$ için $g_i : X_i \to X$, $j \in J$, $X_j = N_I$ olacak biçimde tüm sürekli dönüşümlerin sistemi olsun. O halde $q : [g_j] : \coprod_{j \in J} X_j \to X$ kombinasyonu Lemma 6.1.3 den bir bölüm dönüşümüdür.

Sonuç 6.1.1: X in her bir sayılabilir U alt uzayı için $V \cap U$, U da kapalıyken $V \subset X$ kapalıysa topolojik uzaya sayılabilir üreteç denir. S, N in tüm (uygun) ideallerinin sistemi olsun. O halde X topolojik uzayının sayılabilir üreteç olması için gerek ve yeter şart X in $S-$dizisel olmasıdır, yani her Y topolojik uzayı ve her $f : X \to Y$ dönüşümü için;

$$f \text{ sürekli} \Leftrightarrow f,\ N \text{ de her bir } I \text{ (uygun) ideali için } I-\text{sürekli}$$

dir.

Örnek 6.1.1: $A_j, j \in J$ sonsuz kümelerin meydana getirdiği N in bir ayrışımı olsun. N de bir I ideali tanımlayalım. M in I ya ait olması için gerek ve yeter şart M in sadece sonlu birçok A_j ile sonsuz kesişimini içermesidir. Açıkça I bir uygun idealdir ("On subsequentialspaces" da S.P. Franklin ve M. Rajagopalan tarafından incelendiği gibi N_I uzayı S_2^- uzayına homomorfiktir. Bu dizisel olmayan bir uzayın bir örneği olarak burada kullanılır).

N_I da doğal sayıların (x_n) dizisi için $(x_n) \to \infty$ olmadığını iddia ediyoruz. Her bir $n \in N$ için $x_n \in N$ ve N_I da $lim\, x_n = \infty$ olduğunu dolaylı olarak farz edelim. Her bir $k \in N$ için $N_I \setminus A_k$ kümesi ∞ un bir açık komşuluğudur, o halde A_k , (x_n) dizisinin sadece sonlu birçok terimini içerir. Bu nedenle $\{x_n : n \in N\}$ I ya aittir ve N_I da ∞ un bir açık komşuluğudur.

O halde N_I uzayında gerçek yakınsak dizisel yoktur. Bu nedenle her $f : N_I \to X$ dönüşümü $I_f -$süreklidir. Eğer $n \in A_k$ ise $f(n) = \dfrac{1}{k}$ ve $f(\infty) = 1$ olacak biçimde $f : N_I \to R$ dönüşümünü kuralım. Açıkça f sürekli değildir. O halde bu örnek Teorem 5.1 deki içeriğin tersinin doğru olmadığını gösterir. Lemma 6.1.1 den f, $I -$sürekli değildir (N_I da $I - \lim n = \infty$ dır, fakat $I - \lim f(n) = f(\infty)$ elde edilmez). Bu örnek aynı zamanda Teorem 6.1 in içeriğinin tersinin olmadığını gösterir.

S, N de uygun ideallerin bir sistemi olsun. S dizisel uzaylarının dizisel uzaylar gibi benzer koşullarla karakterize edilip edilemeyeceğini araştıralım.

V nin noktalarının her bir $I -$yakınsak (x_n) dizisi için
$I \in S$ iken V , (x_n) in tüm $I -$limitlerini içeriyorsa V , (6.2)
X de kapalıdır.

Eğer V nin noktalarının her bir $I -$yakınsak (x_n) dizisi için V, (x_n) in tüm $I -$limitlerini içeriyorsa kısaca V , $I -$limitlere bağlı olarak kapalıdır denir.

Lemma 6.1.4: Eğer bir X topolojik uzayı (6.2) yi sağlıyorsa $S -$diziseldir.

İspat: $f : X \to Y$ bir $S -$sürekli dönüşüm ve $V \subset Y$ bir kapalı küme olsun. $f^{-1}[V]$ nin kapalı olduğu gösterilmelidir. Her bir $n \in N$ için $x_n \in f^{-1}[V]$, $I \in S$ için $I - \lim x_n = x$ iken $x \in f^{-1}[V]$ olduğunu göstermek yeterlidir. f in $S -$sürekliliği $I - \lim f(x_n) = f(x)$ ve $f(x) \in \overline{V} = V$ anlamına gelir ve buradan $x \in f^{-1}[V]$ dır.

Lemma 6.1.5: (6.2) yi sağlayan tüm X uzaylarının sınıfı, bölüm uzayları ve topolojik toplamların oluşumu altında kapalıdır.

İspat: $\coprod_{j \in J} X_j$ nin bir alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart her bir $j \in J$ için X_j ile kesişimlerinin X_j de kapalı olmasıdır. Eğer V, $\coprod_{j \in J} X_j$ de $I-$limitlere bağlı olarak kapalı ise her bir $j \in J$ için X_j deki $I-$limitlere bağlı olarak $V \cap X_j$ de kapalıdır. Buradan bu uzayların sınıfı topolojik toplamlar oluşumu altında kapalıdır.

X,n (6.2) yi sağlasın ve $q : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. V, her bir $j \in J$ için X_j deki $I-$limitlere bağlı olarak kapalı olan Y nin bir alt kümesi olsun. $q^{-1}[V]$ nin kapalı olduğu gösterilmelidir. Her bir $I \in S$ için $I-$limitlerine göre $q^{-1}[V]$ nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Her bir $n \in N$ için $x_n \in q^{-1}[V]$ ve $I \in S$ iken $I-\lim x_n = x$ olsun. q süreklidir ve Teorem 5.1 den aynı zamanda $I-$süreklidir. Buradan $I-\lim q(x_n) = q(x)$ ve $q(x) \in V$, $x \in q^{-1}[V]$ dir.

Lemma 6.1.4, Lemma 6.1.5 ve Teorem 6.1.1 in birleşiminden aşağıdaki ifade elde edilir.

Önerme 6.1.2: S, N de uygun ideallerin bir sistemi olsun. Her bir $I \in S$ için N_I uzayı (6.2) yi sağlasın. O halde bir X topolojik uzayının $S-$dizisel olması için gerek ve yeter şart $I \in S$ için V (x_n) in tüm $I-$limitlerini içeriyorken V nin noktalarının her bir $I-$yakınsak (x_n) dizisi için $V \subset X$ in kapalı olmasıdır.

Sonraki örnek bir N_I asal uzayı için genelde (6.2) nin sağlanmadığını gösterir.

Örnek 6.1.2: $A_j, j \in J$ sonlu kümelerden oluşan N in bir ayrışımı olsun. N de bir I ideali tanımlansın. M in I ya ait olması için gerek ve yeter şart $M \cap A_1$ in sonlu ve M in sadece sonlu bir çok A_j ile sonsuz kesişimlerine sahip olmasıdır. Açıkça $A_1 \cup \{\infty\}$ kümesi üzerindeki N_I uzayının alt uzayı, N_{I_f} de homomorfiktir ve Örnek

6.1.1 den $\{\infty\}\cup\left(\bigcup_{j=2}^{\infty}A_j\right)$ kümesi üzerindeki alt uzay, S_2^- uzayına homomorfiktir.

$V=\bigcup_{j=2}^{\infty}A_j$ olsun, $V\neq I$ dır, bu nedenle V, N_I de kapalı değildir. Fakat $I-$ limitlerine bağlı olarak V kapalıdır.

Tersine sadece sonsuzdan sonsuza bir dönüşüm olacak biçimde $f:N_I\to V\cup\{\infty\}$ sürekli dönüşümünün var olduğunu farz edelim. O halde kısıtlı $f\,|_{A_1\cup\{\infty\}}$ S_2^- de ∞ a yakınsayan bir diziye karşılık gelir. Fakat Örnek 6.1.1 de S_2^- de böyle bir dizinin olmadığı gösterildi.

KAYNAKLAR

Alexander, R. 1967. Density and Multiplicative Structure of Sets of Integers. Acta Arithm., 12, p. 321-332.

Antoni, J. 1986. On A-Continuity of Real Functions II. Math. Slov. 36, p. 283-288.

Antoni, J., Salat, T. 1980. On A-Continuity of Real Functions. AMUC. 39, p. 159-164.

Bachrata, k. 1992. The Maximal Ideals of C(0,1). Prace a Studie Vysokej Skoly Dopravy a Spojov v Ziline, Seria Matematico-Fyzikalna 8, p. 5-7.

Balaz, V., Cervenansky, J., Kostyrko, P., Salat, T. 1991. I-Convergence and I-Continuity of Real Fonctions. Acta Mathematica, 5. Mathematics Subject Classification. 26A15, 26A03.

Balcı, M. 1999. Matematik Analiz, Cilt I. Balcı Yayınları, Ankara.

Bartle, R.G., Joichi, J.I. 1968. The Preservation of Convergence of Measurable Functions Under Composition. Proc. Amer. Math. Soc. 12, p. 122-126.

Bayraktar, M. 2000. Fonksiyonel Analiz. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Bosik, J., Salat, T. 1993. On F-Continuity of Real Functions. Tarta Mt Math. Publ. 2, p. 37-42.

Brown, T. C., Freedman, R. 1990. The Uniform Density of Sets of Integers and Fermat's Last Theorem. Rendus Math. L'Acad. Sci., 12, p. 1-6.

Buck, R. C. 1946. The Measure Theoretic Approach to Density. Amer. J. Math. 68, p. 560-580.

Buck, R. C. 1953. Generalized asymptotic Density. Amer. J. Math. 75, p. 335-346.

Carlson, S. 1981. Cauchy Sequences and Function Rings. Amer. Math. Mothly 68, p. 700-701.

Cervansky, J. 1998. Statistical Convergence and Statistical Continuity. Zbornik Vedeckych Prac MtFSTU. 6, p. 207-212.

Cincura, J. 2001. Heredity and Coreflective Subcategories of The Category of Topological Spaces. Applied Categorical Structures 9 , p. 131-138.

Connor, J. S. 1988. The Statistical and Strong P-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis. 10, p. 373-385.

Connor, J. S. 1990. Two Valued Measures and Summability. Analysis 10, p. 373-385.

Connor, J. S., Kline J. 1996. On statistical Limit Points and Consistency of Statistical Convergence. J. Math. Appl. 197, p. 392-399.

Engelking, R. 1977. General Topology. PWN, Warsaw.

Fast, H. 1951. Sur La Convergence Statistique. Coll. Math. 2, p. 241-244.

Franklin, S. P. 1965. Spaces in Which Sequences Suffice. Fund. Math. 57, p. 107-115.

Franklin, S. P., Rajagopalan, M. 1990. On Subsequential Spaces. Topology Appl. 35, p. 1-19.

Freedman, A. R., Sember, J. J. 1981. Densities and Summability. Pacif. J. Math. 95, p. 293-305.

Fridy, J. A. 1985. On Statistical Convergence. Analysis. 5, p. 301-313.

Fridy, J. A. 1993. Statistical Limit points. Proc. Amer. Math. Soc. 118, p. 1187-1192.

Fridy, J. A., Orhan C. 1997. Statistical Limit Superior and Limit İnferior. Proc. Amer. Math. Soc. 125, p. 3625-3631.

Gürdal, M. 2004. Bazı Yakınsaklık Tipleri. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi, Isparta.

Herrlich, H. 1968. Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Springer Verlag, Berlin.

Gillman, L., Jerison, M. 1950. Rings of Continuous Functions. Van Nostrand, Princeton.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T., Sleziak, M. 2000. I- Convergence and Extremal I-Limit Points. Mathematics Subject Classification. Primary 40A05, Secondary 40C99.

Kostyrko, P., Salat, T., Wilczynski, W. 2000/2001. I- Convergence. Real Analysis Exchange. Vol. 26(2), p. 669-686.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T. Strauch, O. 2001. On Statistical Limit Points. Proc. Amer. Math. Soc. To appear.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T. Statistical Convergence and I-Convergence. Real Analysis Exch. Submitted.

Kuratowski, K. Topology. 1996. Academic Pres, Warsawa.

Macaj, M., Misik L., Salat, T., Tomanova, J. On a Clas of Densities of Sets of Positive Integers. To appear.

Maharam, D. 1976. Finitely Additive Measures on the Integers. Sankhya Indian J. Stat. 38A, p. 44-59.

Mazur, K. 1991. F_σ-ideals and $w_1 w_1^*$-gaps In The Boolean Algebras P(w)/I. Fund. Math. 138, p. 103-111.

Mikusinski, P. 1982. Axiomatic Theory of Convergence. Uniw. Slaski. Prace Nauk. Prace Matem. 12, p. 13-21.

Miller, H. I. 1945. A Measure Theoretic Subsequence Characterization of Statistical Convergence. Trans. Amer. Math. Soc. 347, p. 1811-1819.

Mitrinovic D. S., Sandor, B., Crstici, B. 1996. Handbook of Number Theory. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht- Boston-London.

Nagata, Jun-iti . 1974. Modern General Topology. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam-London.

Neubrunn, T., Smital J., Salat, T. 1967. On Certain Properties Characterizing Locally Seperable Metric Spaces. Cas. Pest. Mat. 92, p. 157-161.

Neubrunn, T., Smital J., Salat, T. 1968. On The Structure of The Space M(0,1). Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 13, p. 377-386.

Nuray, F., Ruckle, W. H. 2000. Generalized Statistical Convergence and Convergence Free Spaces. J. Math. Anal. Appl. 13, p. 513-527.

Olevskii, V. 1991-1992. A Note On The Banach- Steinhaus Theorem. Real Anal. Exchange 17, p. 399-401.

Ostmann, H. H. 1956. Additive Zahlentheorie I. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Öztürk, E. 1983. On Almost Continuity and almost A-Continuity of Real Functions. Comm. Fac. Sei. Univ. Ankara. 32, p. 25-30.

Petersen, G. M. 1966. Regular Matrix Transformations. Mac Graw-Hill, London-New York-Toronto-Sydney.

Powell, B. J., Salat, T. 1964. Convergenceof Subseries of The Harmonic Series and Asymptotic Densities of Sets of Positive Integers. Publ. Inst. Math. (Beograd) 50, p. 60-70.

Preiss, D. Approximate Derivatives and Baire Classes. Czechoslovak Math. J. Z1. 96, p. 373-382.

Robkins, H. 1948. Problem 4216 (1946, 470). Amer. Math. Montly. Solution by R. C. Buck in Amer Math. Montly. 55, 36.

Salat, T., Tijdeman, R. 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. Math. Slov. 30, p. 139-150.

Salat, T., Tijdeman, R. 1983. Asymptotic Densities of Sets of Positive Integers. Math. Slov. 33, p. 199-207.

Salat, T., Tijdeman, R. 1981. On Density Measures of sets of Positive Integers. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 34, Topics in Classical Number Theory, Budapest. p. 1445-1457.

Savaş, E., Das, G. 1994. On The A-Continuity of Real Functions. İstanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 53, p. 61-66.

Schinzel, A., Salat, T. 1994. Remarks on Maximum and Minimum Exponents in Factoring. Math. Slov. 44, p. 505-514.

Schoenberg, I. J. 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods. Amer. Math. Monthly. 66, p. 361-375.

Sierpinski W. 1947. Sur Un Suite İnfinie De Fonctions Continues Dont Tout Fonction D'Accumulation Est Non Measurable. Publ. Inst. Math. Beograd. 1, p. 5-10.

Sleziak, M. 2000. I-Continuity in Topological Spaces. Mathematics Subject Classification. Primary 54C08, Secondary 40A05.

Thomson, B. S. 1985. Real Functions. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York-Tokyo.

Zajicek, L. 1987-1988. Porosity and σ-porosity. Real Anal. Exchange 13, p. 314-350.