T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU AFİN UZAYDA BAZI AÇILABİLİR VE MİNİMAL YÜZEYLER

Hacer KORKMAZ

Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

YOZGAT 2020

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU AFİN UZAYDA BAZI AÇILABLİR VE MİNİMAL YÜZEYLER

Hacer KORKMAZ

Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

YOZGAT 2020

	YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ **TEZ ONAY FORMU**

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111317006 numaralı öğrencisi Hacer KORKMAZ'ın hazırladığı **"Üç Boyutlu Afin Uzayda Bazı Açılabilir ve Minimal Yüzeyler"** başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 30/01/2020 Perşembe günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Jüri Üyesi (Danışman) : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .27../.02../.20 tarih ve .10.. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

27..../.02./..2020

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

ÜÇ BOYUTLU AFİN UZAYDA
BAZI AÇILABLİR VE MİNİMAL YÜZEYLER

Hacer KORKMAZ

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2020; Sayfa: 68

Tez Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid ve 3-boyutlu Afin uzayındaki yüzey teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde,3-boyutlu Afin uzaydaki öteleme yüzeyi ele alınacak ve bu yüzeyin hem açılabilir hem de minimal olması için gerekli hesaplamalar yapılacaktır. Buna ilaveten daha önce Centro-Afin uzayda Huili Liu tarafından verilen minimal yüzeylerin Afin uzayda minimal ve açılabilir olma şartları verilmiştir.

Dördüncü bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, öteleme yüzeyi, minimal yüzey

SOME FLAT AND MINIMAL SURFACES
IN THREE DIMENSIONAL AFFINE SPACE

Hacer KORKMAZ

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2020; Page: 68

Thesis Supervisor: Assoc. Dr. Lecturer Yusuf Ali TANDOĞAN

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems related to surface theory in 3-dimensional Euclid and affine space are given.

In the third chapter, 3-dimensional affine translational surface in space will be dealt with and the calculations required for this surface to be both developable and minimal.

In addition, conditions of minimal surfaces are provided that given before by Huili Liu to be minimal and developable in affine space.

The four chapter is devoted to result and discussion.

Keywords : Gaussian curvature, mean curvature, translational surface, minimal surface

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, tez çalışmam sürecinde farklı bakış açıları sunarak tezimdeki her detayı titizlikle inceleyip bana yol gösteren kıymetli hocam Dr. Öğretim Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN'a, tez çalışmalarımdaki desteğinden dolayı Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca maddi manevi fedakarlığını esirgemeyen çok değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

$\wedge$	: Vektörel çarpım
<,>	: İç çarpım
K	: X yüzeyinin Gauss eğriliği
H	: X yüzeyinin ortalama eğriliği
E,F,G	: Birinci temel form bileşenleri
L,M,N	: İkinci temel form bileşenleri
Ψ	: Psi
ξ	: xi
Ω	: Omega
Γ	: Gamma
λ	: Lamda
α	: Alpha
β	: Beta

1.GİRİŞ

Afin uzay, Öklid uzayının bazı özelliklerini, sadece paralellik ve paralel doğru parçalarının uzunluklarının oranını koruyarak, uzaklık ve uzaklık kavramlarından bağımsız olacak şekilde genelleştiren geometrik bir yapıdır. Afin diferansiyel geometri, diferansiyel değişmezlerin hacim koruyucu afin dönüşümleri altında değişmez olduğu bir tür diferansiyel geometridir. Afin ve Riemann diferansiyel geometrisi arasındaki temel farklılık, afin durumda, metrikler yerine bir manifold üzerine hacim formları eklenmesidir.

$\mathbb{R}^3$'te afin maksimal yüzey ailesi; geometrik bir fonksiyonun aşırılıkları ve ilişkili Euler-Lagrange denklemi bir Hessian denkleminin genelleştiren, doğrusal olmayan dördüncü dereceden bir kısmi diferansiyel denklemi olduğu için geometrik analizde önemli bir konudur (Milan F., 2014).

Düzlemsel eğrilik çizgilerine sahip minimal yüzeylerin incelenmesi klasik bir konudur ve 19'uncu yüzyılın sonunda Bonnet, Enneper ve Eisenhart tarafından incelenmiştir (Calabi E., 1990).

Minimal yüzeyler teorisi, 1740 yılında İsveçli Matematikçi Leonhard Euler (1707-1783)'in çalışmaları ile başlamış ve 1760'da Fransız Matematikçi Joseph Louis Lagrange (1736-1813)'ın çalışmaları ile hız kazanmıştır. Bilinen ilk minimal yüzey düzlemdir.

Açılabilir yüzeyler, gerilmeden ve yırtılmadan düzleme serilebilen yüzeylerdir. Bu özelliğinden dolayı sheet-metal ve plate-metal temelli endüstrilerde (Boersma J., 1995, Frey W., 1992) deniz araçları yüzeyinde, uçak yüzeylerinde (Pegna J., 1992) ve mimari yapılarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Gemi, uçak ve mobil vasıtaların tasarımında çok kullanılan açılabilir yüzeylerin kesişimi literatürde önemli bir yer tutmaktadır.

Diferansiyel geometriden de bilindiği gibi, bir açılabilir yüzey düzlem, konik, silindirik yüzey ya da bir eğrinin teğetlerinin doğurduğu yüzey olabilir (Kruppa E., 1957, Hacısalihoğlu H., 1994). Üreteçleri asal eğrilerdir ve yüzeyin tüm noktalarında Gauss eğriliği sıfırdır.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Afin uzayda, Centro-afin uzayda (Liu H.,1996) tarafından bulunan bazı yüzeylerin açılabilir ve minimal olma şartlarını sağlayan durumlar üzerinde çalışacağız.

2. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid ve 3-boyutlu Afin uzayındaki yüzeyler teorisi ile ilgili bilgiler verilecektir.

2.1. Öklid Uzayı ve Yüzeyler

Bu bölümde Öklid uzayı ve bu uzaydaki teorisine ait temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Ω , E^2 uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi olmak üzere, $\Psi:\Omega\subset E^2\to E^3$, diferensiyellenebilir ve regüler bir dönüşüm olsun. $\Psi:\Omega\subset E^2\to\sigma(\Omega)$ dönüşümü bir homomorfizm ise $\Psi(\Omega)$ cümlesine, E^3 uzayında bir basit yüzey denir. Σ, E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M her bir p noktası için $p\in\Psi(\Omega)$ ve $\Psi(\Omega)\subset\Sigma$ olacak biçimde bir $\Psi(\Omega)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa Σ cümlesine E^3 uzayında bir yüzey denir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.2. Bir $\langle,\rangle: R^3\times R^3\to R$ fonksiyonu her $x,y\in R^3$ için $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3); x_i,y_i\in R$ olmak üzere,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{3}x_iy_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa $\langle,\rangle$ fonksiyonuna R^3 vektör uzayında bir iç çarpım denir. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya R^3 uzayındaki standart iç çarpım denir. Herhangi iki $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)$ vektörlerinin iç çarpımı şeklinde gösterilir(Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.3. E^3 uzayında bir x vektörünün normu $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ olarak tanımlanır ve $\left\|\vec{x}\right\|$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.4. 3 boyutlu Öklid uzayında $\forall x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in E^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$x \wedge y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.5. $\sum$ yüzeyi $\Psi : \Omega \subset E^2 \to E^3$ parametrizasyonu ile verilsin. $\sum$ nin $p \in \Psi(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, Ψ_u ve Ψ_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece $\sum$ nin birinci ve ikinci temel formları, sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.2}$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Burada, N birim normali olmak üzere, birinci ve ikinci temek katsayıları, sırayla,

$$E = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle,\ F = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle,\ G = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle, \tag{2.3}$$

ve

$$e = \langle \Psi_{uu}, N \rangle, f = \langle \Psi_{uv}, N \rangle, g = \langle \Psi_{vv,N} \rangle \tag{2.4}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Eğer $\|\Psi_u \wedge \Psi_v\| \neq 0$ ise $\Psi(u,v)$ parametrizasyonu regülerdir denir .Bundan sonra, aksi söylenmediği sürece $\Psi(u,v)$ parametrizasyonu regüler kabul edilecektir.

Önerme 2.1. $\sum$ yüzeyi $\Psi : \Omega \subset E^2 \to E^3$ parametrizasyonu ile verilsin. (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden, $\sum$ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği sırası ile

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

$$2H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

şeklindedir. Yüzeyin asli eğrilikleri

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$
$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dır

Tanım 2.6. Monge Yüzeyi

$\Psi : \Omega \subset E^2 \to E^3$ ve $h : E^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to h(u,v)$ olmak üzere,

$\Psi(u,v) = (u,v,h(u,v))$ şeklinde tanımlanan yüzey **Monge yüzeyi** adını alır.

(Liu, H.L., 1999)

Tanım 2.7. Öteleme Yüzeyi
Ψ yüzeyi,

$$\Psi(u,v) = (u,v,h(u,v))$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$h(u,v) = f(u) + g(v)$$

biçiminde ise,

$\Psi(u,v) = (u,v,f(u) + g(v))$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda Ψ yüzeyine **öteleme yüzeyi** denir.

Tanım 2.8. Minimal Yüzey

Ψ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye **minimal yüzey** denir.
(Hacısalihoğlu H., 1994)

Tanım 2. 9. Scherk Yüzeyi

$$\Psi(u,v) = (u,v,f(u) + g(v))$$

minimal yüzey ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$f(u) = -\frac{1}{a} ln(cosau) \quad ve \quad g(v) = \frac{1}{a} ln(cosav)$$

ise

$$\Psi\ (u,v)=\left(u,v,\frac{1}{a}ln\left(\frac{cosav}{cosau}\right)\right)$$

şeklinde yazılır. Bu Ψ yüzeyine **Scherk yüzeyi** denir. (Liu, H.L., 1999)

Lemma 2. 1. Genel olarak bir $(u,v)\ \rightarrow \left(u,v,h(u,v)\right)$ Monge yüzeyi,bir minimal yüzeydir. $\Leftrightarrow (1+h_v^2)h_{uu}-2h_uh_vh_{uv}+(1+h_u^2)h_{vv}=0$

Burada h nin özel seçimiyle minimal yüzeylerin ilginç bir örneğini bulabiliriz.

1835'te Scherk $(u,v)\rightarrow \left(u,v,f(u)+g(v)\right)$ formunun, yani öteleme yüzeyinin minimal yüzey olma şartını saptamıştır. Bu, aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 2.1. Eğer, Monge yüzeyi $h(u,v)=f(u)+g(v)$ minimal öteleme yüzeyi ise Ψ ,

ya bir düzlem parçasıdır ya da $a\neq 0$ olmak üzere;

$$h(u,v)=\frac{1}{a}log\left(\frac{cos(av)}{cos(au)}\right)$$

dir. (Liu H.L., 1999)

İspat :

$$h(u,v)=f(u)+g(v)$$

$$h_{uu}=f''(u)$$

$$h_{uv}=0$$

$$h_{vv}=g''(v)$$

$$(1+h_v^2)h_{uu}-2h_uh_vh_{uv}+(1+h_u^2)h_{vv}=0$$

$$(1+g'(v)^2)f''(u)+(1+f'(u)^2)g''(v)=0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}=a=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}$$

$$f' = p$$

$$f'' = p'$$

$$\frac{p'}{1+p^2} = a$$

$$\int \frac{p'}{1+p^2} d_p = \int a d_u$$

$$arctan(p) = au + c_1$$

$$p = tan(au + c_1)$$

$$f' = p$$

$$\frac{df}{du} = tan(au + c_1)$$

$$df = tan(au + c_1)du$$

$$f(u) = \int \frac{sin(a.u+c_1)}{cos(a.u+c_1)} du$$

$$f(u) = -\frac{1}{a} log(cos(au) + c_1)$$

$$c_1 = 0$$

$$\Rightarrow f(u) = -\frac{1}{a} log(cos(au))$$

Benzer şekilde,

$-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2} = a$ eşitliğinden

$$g(v) = \frac{1}{a} log(cos(av))$$

elde edilir.

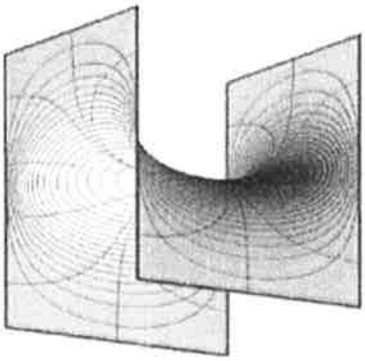
Böylece,

$$h(u,v) = \frac{1}{a} log\left(\frac{cos(av)}{cos(au)}\right)$$

bulunur. Bulunan bu yüzey **Scherk yüzeyi** adını alır ve aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\text{Scherk }[a](u,v) = \left(u, v, \frac{1}{a}\left(log\left(\frac{cos(av)}{cos(au)}\right)\right)\right)$$

Bu durumda Scherk yüzeyi öteleme yüzeyleri içinde minimal olan tek yüzeydir ve Şekil 2.1 de görüldüğü gibidir.



Şekil 2.1. Scherk yüzeyi

2.2. AFİN UZAY VE YÜZEYLER

Bu bölümde Afin uzaya ve Afin yüzeylere ait temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.2.1. Afin Uzay

Tanım 2.10. $A \neq \phi$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\Psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P,Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

Şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i. $\forall P,Q,R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına uç noktası denir.

Diğer yandan A nın boyutu ,

$$boyA = boyV$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.11. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$

noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$

nokta $(n+1)$-lisine A afin uzayının bir afin çatısı (afine frame) denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i noktalarına da çatının birim noktaları denir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Teorem 2.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde başlangıcı P_0 olan bir afin çatı vardır (Hacısalihoğlu H., 1994)

İspat: V nin bir bazı $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ olsun. Her bir $1 \leq i \leq n$, için $\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i$ olacak şekilde bir

tek $P_i \in A$ noktasının var olduğunu biliyoruz. O halde $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)$ – lisi bir

afin çatıdır ve $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı verildiğinde tektir.

Sonuç 2.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayı verildiğinde A da bir

$P_0 \in A$

noktası ve V de bir $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ bazı verildiğinde başlangıcı P_0 olan afin çatı ile V deki $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ bazı birbirine karşılık gelirler (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.12. n - boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayının afin çatılarından biri $\{P_0, P_1,..., P_n\}$ olsun. Bu çatı A da aşağıdaki gibi afin koordinat sistemi denen bir koordinat sistemi belirtir. V nin bir bazı $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2},..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ olduğundan $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ vektörünü bu baza göre tek türlü

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_0P_i} \quad , \quad \alpha_i \in F$$

ifade edebiliriz. A nın birleştiği V vektör uzayı F cismi üzerinde tanımlandığına göre

$$x_i : A \to F \quad , \quad 1 \le i \le n$$

fonksiyonlarını $\forall P \in A$ için

$$P \to x_i(P) = \alpha_i \quad ,1 \le i \le n$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $P \in A$ noktasına F^n standart afin uzayının bir $(x_1(P), x_2(P),..., x_n(P))$ elemanını karşılık tutmuş oluruz; bu sıralı n - liye P noktasının koordinatları denir.

Tersine n tane $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n \in F$ sayıları verildiğinde koordinatları $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ olan bir tek $P \in A$ noktası vardır. Gerçekten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_0P_i}\right) \in V$$

vektörünü ele alalım. Bu halde ikinci afin aksiyom uyarınca

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

olacak biçimde bir tek $P \in A$ noktası vardır. Böylece $x_1, x_2, x_3, ..., x_n : A \to F$ fonksiyonlarının bir $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistem yardımıyla bir

$$A \xrightarrow{birebir} F^n \text{ (standart afin uzay)}$$

dönüşümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlar sistemine A nın bir afin koordinat sistemi denir. O halde $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ afin koordinat sisteminde $x_i : A \to F$ fonksiyonları afin anlamda koordinat fonksiyonlarıdırlar. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemini belirleyen $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ afin çatısındaki $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktalarından P_0 başlangıç noktası ve diğerleri birim noktalardır (Hacısalihoğlu H., 1994).

Örnek 2.1. n- boyutlu bir A afin uzayında bir afin çatı $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ ise $P_0, P_1, ..., P_n$ noktalarının koordinatları $P_0 = (0,0,...,0), P_1 = (1,0,...,0), ..., P_n = (0,0,...,1)$ dır. Buradan da P_0 ın A da başlangıç noktası ve P_i nin de A da i–yinci birim nokta olduğu görülmektedir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Örnek 2.2. n–boyutlu standart afin uzay F^n de

$E_0 = (0,0,...,0), E_1 = (1,0,...,0), ..., E_n = (0,0,...,1)$ noktalarını alalım. $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ çatısına standart afin çatı ve bu çatıya karşılık gelen afin koordinat sistemine de standart koordinat sistemi denir. Bu koordinat sisteminde $\forall P \in F^n$ noktasına $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ sayıları, P nin koordinatları olarak $P = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ biçiminde karşılık gelir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Tanım 2.13. A n - boyutlu bir afin uzay ve $\{P_i\}=\{P_0,P_1,...,P_n\}$ ile $\{Q_i\}=\{Q_0,Q_1,...,Q_n\}$ de A da farklı iki afin çatı olsun. $\{P_i\}$ çatısının $\{Q_i\}$ çatısına göre konumu aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$\{Q_i\}$ afin çatısı yardımıyla belirlenen afin koordinat sisteminde $P_0 \in A$ olduğundan $\overrightarrow{Q_0P_0} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \tag{2.5}$$

ve benzer şekilde $P_0, P_i \in A$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad , \quad 1 \le i \le n \tag{2.6}$$

yazılabilir. (2.5) ifadesinden görülmektedir ki $\{P_i\}$ çatısındaki P_0 başlangıç noktasının $\{Q_i\}$ çatısına göre afin koordinatları $[a_i]$ dir. Benzer olarak (2.6) ifadesinden görülmektedir ki $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ matrisinin i - yinci kolonu $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ vektörünün V deki $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}\}$ bazına göre koordinatlarından oluşur. Diğer yandan $\{\overrightarrow{P_0P_i}, 1 \le i \le n\}$ ve $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}, 1 \le i \le n\}$ sistemleri V nin birer bazı olduklarından A matrisi regülerdir. O halde $\{P_i\}$ve $\{Q_i\}$ afin çatılarının rollerini değiştirerek (2.5) ve (2.6) ifadeleri yerine, sırası ile,

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{P_0P_i} \tag{2.7}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \overrightarrow{P_0P_i} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) deki $\mathrm{B} = [b_{ji}] = F_n^n$ matrisi (2.6) deki $A = [\alpha_{ij}] \in F_n^n$ matrisinin inversidir. Dolayısıyla

$$AB = BA = I_n = [\delta_{ij}] \in F_n^n$$

dir. $P \in A$ keyfi bir nokta olmak üzere birinci afin aksiyomdan

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} \tag{2.9}$$

yazabiliriz. Burada P nin $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları $[y_i]$ olmak üzere

$$\overrightarrow{Q_0P} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \tag{2.10}$$

dır. Aynı biçimde nin çatısına göre koordinatları olmak üzere

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0Q_i} \tag{2.11}$$

dır. (2.5), (2.10) ve (2.11) in (2.9) de yerlerine yazılması ile

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{P_0P_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \alpha_i \right) \overrightarrow{Q_0Q_i}$$

veya iki vektörün eşitliği tanımından

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \alpha_i \,, \qquad 1 \le i \le n \,, \tag{2.12}$$

veya matris formundaki ifade ile

$$\mathrm{Y} = AX + C, \quad Y = [y_i] \in F_1^n \;, \quad A = [\alpha_{ij}] \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9) ifadesinde $P \in A$ noktası keyfi olduğundan $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ çatıları tarafından belirtilen iki koordinat sistemi arasındaki bağıntı (2.12) ile verilebilir. Bu ifadenin (2.13) ile verilen matris formu açık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

elde edilir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Teorem 2.3. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A da iki afin çatı olsun. Bu iki çatı

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_i} \qquad 1 \le i \le n$$

biçiminde bağıntılı ise bu çatıların belirlediği afin koordinat sistemleri olan $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$de

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bağıntılıdırlar. $P_0 = Q_0$ olması özel halinde şu sonuç elde edilir (Hacısalihoğlu H., 1994).

Teorem 2.4. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $P_0 = Q_0$ ise

bu iki çatının belirlediği $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ afin koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$Y = AX \quad \text{veya} \quad X = A^{-1}Y$$

dır, burada $A = [\alpha_{ij}] \in F_n^n$ dır (Hacısalihoğlu H., 1994).

Teorem 2.5. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $\forall i$, için $\overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ ise bu çatıya karşılık gelen $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ifadeleri koordinat eksenlerinin ötelenmesi hareketine karşılık gelir (Hacısalihoğlu H., 1994)

Örnek 2.3. İki boyutlu bir reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun.

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2 \\ y_2 &= 4x_2 - 7 \end{aligned}$$

dönüşümü A daki iki afin koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı göstermektedir. Gerçekten bu sistemi matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz ki bu da (2.10) formundadır. Buradan x_1, x_2 yi y_1, y_2 cinsinden hesaplarsak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

matrislerine karşılık

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad b = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür (Hacısalihoğlu H., 1994)

Teorem 2.6. F standart afin uzayında bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta sisteminin bir afin çatı olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nn} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır, burada

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ni} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

dır.

İspat:

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix},$$

dır. Biliyoruz ki $\{\overrightarrow{P_0P_i}\}$ vektörlerinin F^n standart vektör uzayında bir baz olması için gerek ve yeter koşul, kolonları

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

olan nxn matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır, yani,

$$\det \begin{bmatrix} P_{11} - P_{10} & P_{12} - P_{10} & \cdots & P_{1n} - P_{10} \\ P_{21} - P_{20} & P_{22} - P_{20} & \cdots & P_{2n} - P_{20} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} - P_{n0} & P_{n2} - P_{n0} & \cdots & P_{nn} - P_{n0} \end{bmatrix}$$

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Diğer taraftan $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}$ sistemi F^n vektör uzayında bir baz oluşturursa $\{P_i\}$, nokta sistemi de F^n vektör uzayı ile birleştirilen F^n standart afin uzayında bir çatı oluşturur.

2.2.2. Afin Yüzeyler

Afin diferansiyel geometride afin dönüşümler altında invaryant olan 3-boyutlu uzayda yüzeylerin özelliklerini çalışıyoruz. (Özyürek D.D.,2019).

Tanım 2.14. Berwald-Blaschke metriği afin dönüşümler için invaryanttır ve aynı zamanda koordinat sistemlerinin bağımsızıdır. Bu metrik kuadratik formdur. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı (dış bükey olmayan durum) olmayabileceğini göreceğiz.

Berwald-Blaschke metriği;

$$h = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}},$$

tarafından verilir ki burada L, M ve N

$$L = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] \quad , \quad M = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] \quad , \quad N = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}]$$

olarak verilir. Bundan böyle, yüzeyin non-dejenere olduğunu kabul edebiliriz, yani $LN - M^2 \neq 0$ dır (Özyürek D.D.,2019).

Birinci temel afin formu ile ikinci öklidyen temel formunun katsayıları arasındaki ilişki:

Birinci temel afin formu ile ikinci öklidyen temel formunun katsayıları arasında bir ilişki vardır. Öyle ki,

$$l_{ij} = N \cdot \Psi_{ij} = \left(\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|} \right) \qquad \Psi_{ij} = \frac{[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{ij}]}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|}$$

ki, bu denklemde $N = \dfrac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|}$ öklidyen normal vektördür.

Öklidyen Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde elde edilebilir :

$$K = \frac{\det(l_{ij})}{\|\Psi_u \wedge \Psi_v\|^4}$$

1. $K < 0 \Leftrightarrow LN - M^2 < 0$

2. $K = 0 \Leftrightarrow LN - M^2 = 0$ (2.15)

3. $K > 0 \Leftrightarrow LN - M^2 > 0$

$LN - M^2$ negatif, sıfır veya pozitif olduğundan noktalar sırasıyla hiperbolik, parabolik veya eliptiktir. $LN - M^2 \neq 0$ hipotezinden dolayı sadece konveks durumlarda (eliptik noktalar) ve konveks olmayan durumlarda (hiperbolik noktalar) çalışıyoruz (Özyürek D.D.,2019).

Tanım 2.15. S non-dejenere noktalarla regüler yüzey ve $\Psi : \Omega \subset R^2 \to S \subset R^3$ parametrizasyon olsun, afin konormal vektörü

$$\vartheta = \frac{\Psi_U \wedge \Psi_V}{\left|LN - M^2\right|^{1/4}} \tag{2.16}$$

ifadesiyle verilir ki burada L, M ve N birinci temel afin formun katsayılarıdır. Ayrıca işarete göre saptandığını unutmamak gerekir. Tanımdan, görüyoruz ki $\vartheta \cdot d\Psi = 0$ dır. Noktanın eliptik yada hiperbolik olmasına bağlı olarak $\pm$ işaretin olduğu durumda $\rho^4 = \pm(LN - M^2)$ olsun. Bu notasyonu kullanarak,

$$\vartheta = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho} \tag{2.17}$$

elde ederiz.

Tanım 2.16. Afin normal vektörü

$$\begin{aligned} \vartheta \cdot \xi &= 1 \\ \vartheta_u \cdot \xi &= 0 \\ \vartheta_v \cdot \xi &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

denklemleri ile tanımlarız. Afin normal vektörün S yüzeyine, tanjant düzlemine ait olmadığını gözlemleyelim. (2.18) deki birinci denklemin türevi alındığında $\vartheta \cdot \xi_u = 0$ ve $\vartheta \cdot \xi_v = 0$ olduğunu kolayca doğrulayabiliriz. Dolayısıyla $\delta : \Omega \to R$ fonksiyonu vardır, öyle ki;

$$\xi = \delta(\vartheta_u \wedge \vartheta_v)$$

dir. Şimdi, fonksiyonunu elde etmek için afin normal ve konormalin iç çarpımını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

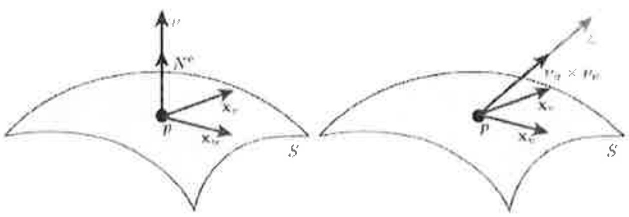
$$1 = \vartheta \cdot \xi = \delta[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]$$

Böylece, $\delta = \frac{1}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]}$, yani afin normal vektör

$$\xi = \frac{1}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]} \vartheta_u \wedge \vartheta_v \tag{2.19}$$

dir (Özyürek D.D.,2019).

Ayrıca afin normal vektörün işarete göre saptandığını unutmayalım. Her bir $x \in \Omega$ noktası için afin normal $\xi(x)$ vektörü yönünde x boyunca doğru alırız. Bu doğru, ξ için işaretin seçiminden bağımsız olarak x boyunca afin normal olarak adlandırılır.



Şekil 2.2. Afin normal ve konormal vektörü

Örnek 2.4. Afin normal vektörü eliptik ve hiperbolik paraboloidlerde sabittir. Eliptik ve paraboloidlerin parametrizasyonunun $X(u,v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$ olduğunu kabul edelim. u ve v ye göre türevleri

$$X_u = (1,0,u) \quad , \quad X_{uu} = (0,0,1) \quad , \quad X_{vv} = (0,0,1) \quad ,$$

$$X_v = (0,1,v) \quad , \quad X_{uv} = (0,0,0)$$

dir. Böylece,

$$\rho = [X_u, X_v, X_{uu}][X_u, X_v, X_{vv}] - [X_u, X_v, X_{uv}]^2 = 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$\vartheta = \frac{X_u \wedge X_v}{\rho} = (-u, -v, 1)$$

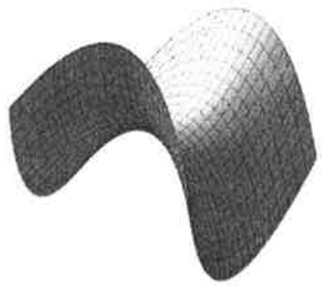
dir. O nedenle, $\vartheta_u = (-1,0,0)$ ve $\vartheta_v = (0,-1,0)$ sonrasında

$$\xi = \frac{1}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]} \vartheta_u \wedge \vartheta_v = (0,0,1) \qquad (2.20)$$

dır. Benzer yoldan hiperbolik paraboloidin parametrizasyonunu $S(u,v) = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$ olarak kabul edersek, afin normalin bu yüzeyin herhangi bir noktasında $(0,0,1)$ vektörü olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.17. Afin eğrilikler normal vektörün varyasyonlarını tanımlar. $\vartheta \cdot \xi_u = \vartheta \cdot \xi_v = 0$ olduğunu gördük. Yani, ξ_u ve ξ_v türevleri ϑ ye diktir.

Şekil 2.3. Eliptik paraboloid



Şekil 2.4. Hiperbolik paraboloid

Bilhassa ξ_u ve $\xi_v \in T_pS$ dir. Bu nedenle S şekil operatörünü $S : T_pS \to T_pS$ olarak tanımlayabiliriz ki burada $S_p(v) = -D_v\xi$ dir. ξ_u ve ξ_v yüzeye teğet oldukları için $i, j = 1,2$ olmak üzere $b_{ij} : \Omega \to R$ fonksiyonlarına sahibiz, öyle ki

$$\xi_u = b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v \ ,$$

$$\xi_v = b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v$$

dir. Böylece,

$$D\xi(\alpha') = (b_{11}u' + b_{12}v')\Psi_u + (b_{21}u' + b_{22}v')\Psi_v$$

dir. Bu nedenle

$$D\xi\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

dir.

Yukarıdaki eşitlik $\{\Psi_u, \Psi_v\}$ bazında $S_p(v) = D_v\xi$ şekil operatörünün $i, j = 1,2$ için $B = (b_{ij})$ matrisi tarafından verildiğini gösterir. Bu matris simetrik olmak zorunda değildir (Özyürek D.D.,2019).

Tanım 2.18. b_{ij} katsayıları determinantı ve izinin yarısı sırasıyla Gauss ve afin ortalama eğrilikler olan $B = (b_{ij})$ matrisini oluşturur. Bu nedenle,

$$\kappa = \det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \ ,$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}trB = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22})$$

dir

Tanım 2.19. Afin diferansiyel geometrisinde, izotermal koordinatlar metriğin lokal olarak

$$h = \rho(du^2 + dv^2)$$

formuna sahip olduğu anlamına gelir, ki burada ρ diferensiyellenebilir fonksiyondur. Bu durumda, konveks durumu dikkate alıyoruz. Böylece, aşağıdaki denklemlerde verilen özelliklerle koordinatları çalışırız.

$$[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = \rho^2 \text{ ve } [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = 0 \tag{2.21}$$

Şimdi afin diferansiyel geometrisinde önemli bir sonuç belirledik ve kanıtlıyoruz.

Teorem 2.7. (Lelieuvre Formülü) İzotermal koordinatlarla lokal olarak konveks yüzeylerde

$$\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_v \quad \text{ve} \quad \Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_u \tag{2.22}$$

eşitliklerimiz vardır (Özyürek D.D.,2019).

İspat. (2.16) den $L = N$ ve $M = 0$ olduğundan

$$\vartheta = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|LN - M^2|^{1/4}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|L|^{1/2}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho}$$

dir. v ye göre konormal vektörün türevi

$$\vartheta_v = \frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}$$

dir.

Şimdi, $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C) = [A, B, C]A$ eşitliğini kullanırsak direk hesaplamayla

$$\begin{aligned}
\vartheta \wedge \vartheta_u &= \left(\frac{1}{\rho}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge \left(\frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\rho^2}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + \left(\frac{1}{\rho^2}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv}) \\
&- \left(\frac{\rho_v}{\rho^3}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_v) \\
&= \frac{1}{\rho^2}[\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}]\Psi_v + \frac{1}{\rho^2}[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}]\Psi_u - \frac{\rho_v}{\rho^3}[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_v]\Psi_u \\
&= \frac{1}{\rho^2}[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}]\Psi_u = \frac{1}{\rho^2}\rho^2\Psi_u = \Psi_u
\end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı yöntemle $\Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_u$ olduğunu ispatlayabiliriz. Şimdi

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v] \tag{2.23}$$

eşitliğini ispatlayalım. (Teorem 2.7) Lelieuvre Formülünden konormal vektörü hesaplamak için aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\begin{aligned}\Psi_u \wedge \Psi_v &= (\vartheta \wedge \vartheta_v) \wedge (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \\ &= -[\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u]\vartheta \\ &= [\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u]\end{aligned}$$

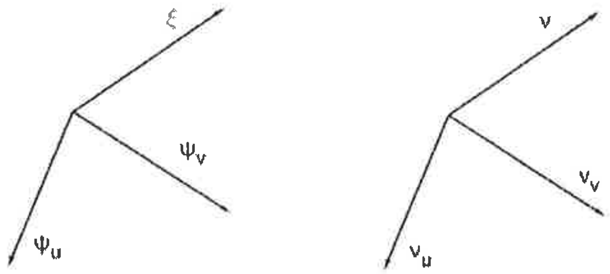
Böylece,

$$\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]} = \vartheta$$

dir. (2.17) den $\vartheta = \frac{1}{\rho}\Psi_u \wedge \Psi_v$ denklemine sahibiz. Sonuç olarak,

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]$$

dir.



Şekil 2.5. Afin Üçyüzlü ve Duali

Aynı zamanda ϑ_u ve ϑ_v konormal vektörlerin türevlerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\Psi_v \wedge \xi &= (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \wedge \left(-\frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u\right) \\ &= \frac{1}{\rho}(\vartheta_u \wedge \vartheta) \wedge (\vartheta_u \wedge \vartheta_v) \\ &= \frac{1}{\rho}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_v]\vartheta_u \\ &= -\vartheta_u\end{aligned}$$

Benzer şekilde ϑ konormal vektörünün v ye göre türevini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\Psi_u \wedge \xi &= (\vartheta \wedge \vartheta_v) \wedge \left(-\frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u\right) \\ &= \frac{1}{\rho}(\vartheta_v \wedge \vartheta) \wedge (\vartheta_v \wedge \vartheta_u) \\ &= \frac{1}{\rho}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u]\vartheta_v \\ &= \vartheta_v\end{aligned}$$

dir veya eşit bir biçimde

$$\vartheta_u = \xi \wedge \Psi_v \quad \text{ve} \quad \vartheta_v = \Psi_u \wedge \xi \tag{2.24}$$

dir.

Lelieuvre Formülünü kullanarak ρ afin metriği için başka bir formül ve afin normal vektörü için bir formül elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}[\Psi_u, \Psi_v, \xi] &= \left[\vartheta \wedge \vartheta_v, -\vartheta \wedge \vartheta_u, \frac{1}{\rho}\vartheta_u \wedge \vartheta_v\right] \\ &= -\frac{1}{\rho}((\vartheta \wedge \vartheta_v) \wedge (\vartheta \wedge \vartheta_u)) \cdot (\vartheta_u \wedge \vartheta_v) \\ &= -\frac{1}{\rho}[\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u]\vartheta \cdot (\vartheta_u \wedge \vartheta_v) \\ &= \frac{\rho}{\rho}\vartheta \cdot (\vartheta_u \wedge \vartheta_v) \\ &= [\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]\end{aligned}$$

Böylece,

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v] = [\Psi_u, \Psi_v, \xi]$$

dir.

Şimdi, ϑ konormal vektörü ile H ortalama afin eğriliği arasında bir ilişki bulabiliriz.

Teorem 2.8. $\Psi : \Omega \to R^3$ izotermal koordinatlarla bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv} = 2\rho \mathrm{H} \vartheta \tag{2.25}$$

dir ki burada ρ afin metriği, ϑ konormal vektör ve H afin ortalama eğriliğidir. Başka bir deyişle,

$$\Delta_h \vartheta = -\mathrm{H}\vartheta := -\frac{\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv}}{2\rho}$$

dir (Özyürek D.D., 2019).

İspat. Lelieuvre Formülünden

$$\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_v \quad , \qquad \Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_u$$

dir.

Sonra sırasıyla v ve u ya göre türevlerini hesaplarsak,

$$\Psi_{uv} = \vartheta \wedge \vartheta_{vv} \ , \qquad \Psi_{vu} = -\vartheta \wedge \vartheta_{uu}$$

elde ederiz.

Ψ diferensiyellenebilir fonksiyondur ve $\Psi_{uv} = \Psi_{vu}$ dir. Bundan dolayı,

$$\vartheta \wedge \vartheta_{vv} = -\vartheta \wedge \vartheta_{uu}$$

dir. Böylece,

$$\vartheta \wedge (\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv}) = 0$$

dir.

Şimdi, $\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv} = \alpha\vartheta$ eşitliği ile sonuçlandırabiliriz. Afin normal vektörün tanımından $\vartheta \cdot \xi = 1$ dir. Böylece

$$(\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv}) \cdot \xi = \alpha$$

dir.

(2.18) denklemi bize $\vartheta_v \cdot \xi = 0$ eşitliğini verir, bu eşitliğin v ye göre türevini aldığımızda

$$\vartheta_{vv} \cdot \xi + \vartheta_v \cdot \xi_v = 0,$$

elde ederiz. Aynı zamanda $\vartheta_u \cdot \xi = 0$ eşitliğinin u ya göre türevi alındığında

$$\vartheta_{uu} \cdot \xi + \vartheta_u \cdot \xi_u = 0$$

dir. (2.18.) tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\vartheta_{uu} \cdot \xi &= -\vartheta_u \cdot \xi_u \\
&= -\vartheta_u \cdot (b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v) \\
&= -b_{11}\vartheta_u \cdot (\vartheta \wedge \vartheta_v) - b_{21}\vartheta_u \cdot (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \\
&= -b_{11}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_v] + b_{21}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_u] \\
&= b_{11}\rho
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{vv} \cdot \xi &= -\vartheta_v \cdot \xi_v \\
&= -\vartheta_v \cdot (b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v) \\
&= -b_{12}\vartheta_v \cdot (\vartheta \wedge \vartheta_v) - b_{22}\vartheta_v \cdot (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \\
&= -b_{12}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u] + b_{22}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u] \\
&= b_{22}\rho
\end{aligned}$$

dir. Sonra

$$(\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv}) \cdot \xi = \vartheta_{uu} \cdot \xi + \vartheta_{vv} \cdot \xi = (b_{11} + b_{22})\rho = 2\rho\mathrm{H}$$

dir. Böylece

$$\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv} = 2\rho \mathrm{H} \vartheta$$

eşitliğiyle sonuçlandırabiliriz.

Dahası, $\Delta_h \vartheta := -\dfrac{\vartheta_{uu} + \vartheta_{vv}}{2\rho}$ olduğundan

$$\Delta_h \vartheta = -\mathrm{H} \vartheta$$

dir.

Böylece, H ortalama afin eğriliği ile afin konormal vektörün laplasyanı arasında bir ilişki elde ettik. Dahası, Teorem (2.7.) den biliyoruz ki $\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_v$ ifadesinin u ya göre ve $\Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_u$ ifadesinin v ye göre türevleri alındığında

$$\Psi_{uu} = (\vartheta_u \wedge \vartheta_v) + (\vartheta \wedge \vartheta_{uu}),$$

ve

$$\Psi_{vv} = (-\vartheta_v \wedge \vartheta_u) - (\vartheta \wedge \vartheta_{uv})$$

elde ederiz. Bu nedenle,

$$\Psi_{uu} + \Psi_{vv} = 2\rho \frac{1}{\rho} \vartheta_u \wedge \vartheta_v = 2\rho\xi$$

dir. Böylece,

$$\Psi_{uu} + \Psi_{vv} = 2\rho\xi$$

olduğunu ispatladık.

Teorem (2.8.) den $\vartheta_{uu} \cdot \xi = -\vartheta_u \cdot \xi_u = b_{11}\rho$ ve $\vartheta_{vv} \cdot \xi = -\vartheta_v \cdot \xi_v = b_{22}\rho$ eşitliklerine sahibiz. (2.16.) afin normal vektörün tanımını kullanarak , $\vartheta_v \cdot \xi = 0$ denkleminin u ya göre türevini alırsak

$$\vartheta_{uu} \cdot \xi + \vartheta_v \cdot \xi_u = 0$$

elde ederiz. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\vartheta_u \cdot \xi &= -\vartheta_v \cdot \xi_u \\
&= \vartheta_v \cdot (b_{11}\psi_u + b_{21}\Psi_v) \\
&= -b_{11}\vartheta_v \cdot (\vartheta \wedge \vartheta_u) - b_{21}\vartheta_v \cdot (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \\
&= -b_{11}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_v] + b_{21}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u] \\
&= b_{21}\rho
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca, Tanım (2.16.) dan elde ettiğimiz $\vartheta_u \cdot \xi = 0$ denkleminin v ye göre türevini alırsak

$$\vartheta_{uu} \cdot \xi + \vartheta_u \cdot \xi_v = 0$$

olur. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{uu} \cdot \xi &= -\vartheta_u \cdot \xi_v \\
&= -\vartheta_u \cdot (b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v) \\
&= -b_{12}\vartheta_u \cdot (\vartheta \wedge \vartheta_v) - b_{22}\vartheta_u \cdot (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \\
&= -b_{12}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_v] + b_{22}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_u] \\
&= b_{12}\rho
\end{aligned}
$$

dir. Bu yüzden, konveks durumda $b_{12} = b_{21}$ dir.

Şimdi B matrisinin katsayılarını hesaplamak için diğer formülleri bulacağız. (2.24) den hatırlayalım ki, $\vartheta_u = \xi \wedge \Psi_v$ ve $\vartheta_v = \Psi_u \wedge \xi$ ve B matrisinin b_{ij} katsayıları aşağıdaki formüllerle verilir :

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= -\frac{1}{\rho}\vartheta_u \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho}[\xi, \Psi_v, \xi_u] = \frac{1}{\rho}[\xi_u, \Psi_v, \xi] \\
b_{12} &= -\frac{1}{\rho}\vartheta_u \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho}[\xi, \Psi_v, \xi_v] = \frac{1}{\rho}[\xi_v, \Psi_v, \xi]
\end{aligned}
$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_v \cdot \xi_u = -\frac{1}{\rho}[\Psi_u, \xi, \xi_u] = \frac{1}{\rho}[\Psi_u, \xi_u, \xi]$$

$$b_{22} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_v \cdot \xi_v = -\frac{1}{\rho}[\Psi_u, \xi, \xi_v] = \frac{1}{\rho}[\Psi_u, \xi_v, \xi]$$

Böylece, şekil operatörünün katsayılarını hesaplamış oluruz.

Hatırlayalım ki $\vartheta \cdot \xi = 1$ ve $\vartheta \cdot \xi_u = \vartheta \cdot \xi_v = 0$ dır. Bundan dolayı ξ_u ve $\xi_v \in T_pS$ dir. $B = D_v\xi$ nin self-adjoint (kendine eş) olduğunu görmek için,

$$\xi_u \cdot \vartheta_v = \xi_v \cdot \vartheta_u$$

eşitliğini ispatlamak yeterlidir.

$\vartheta \cdot \xi_u = 0$ ve $\vartheta \cdot \xi_v = 0$ olduğunu biliyoruz, bu eşitliklerin sırasıyla v ve u ya göre türevlerini aldığımızda,

$$\vartheta_v \cdot \xi_u + \rho \cdot \xi_u = 0 \quad \text{ve} \quad \vartheta_u \cdot \xi_v + \vartheta \cdot \xi_{vv} = 0$$

elde ederiz. Böylece,

$$\vartheta_v \cdot \xi_u = -\vartheta \cdot \xi_{uv} = \vartheta_u \cdot \xi_v$$

dir. Dolayısıyla, $B = D_v\xi$ matrisinin self-adjoint (kendine eş) olduğu sonucuna varabiliriz.

Tanım 2.20. Konveks olmayan durum için asimptotik (u, v) parametreleri alabiliriz, mesela

$$h = 2\rho du dv,$$

ki burada ρ diferensiyellenebilir fonksiyondur. Böylece, asimptotik koordinatları aşağıdaki özellik ile çalışırız (Özyürek D.D.,2019).

$$[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = 0 \quad , \quad [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = \rho^2 \tag{2.26}$$

Teorem 2.9. (Lelieuvre Formülü) Yerel hiperbolik yüzeylerdeki asimptotik koordinatlarda

$$\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_u \quad \text{ve} \quad \Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_u \tag{2.27}$$

dir (Özyürek D.D.,2019).

İspat. (2.16) dan $L = N = 0$ ve $M = \rho^2$ olduğundan

$$\vartheta = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\left|LN - M^2\right|^{1/4}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{|M|^{1/2}} = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{\rho},$$

elde ederiz. Konormal vektörün ϑ ye göre türevi

$$\vartheta_v = \frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) + (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}$$

dir. Şimdi, $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C) = [A, B, C]A$ eşitliğini kullanırsak direk hesaplamayla

$$\begin{aligned}
\vartheta \wedge \vartheta_u &= \left(\frac{1}{\rho}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge \left(\frac{\rho[(\Psi_{uv} \wedge \Psi_v) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})] - (\Psi_u \wedge \Psi_v)\rho_v}{\rho^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{\rho^2}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_{uv} \wedge \Psi_v)\right] + \left[\left(\frac{1}{\rho^2}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_{vv})\right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{\rho_v}{\rho^3}\Psi_u \wedge \Psi_v\right) \wedge (\Psi_u \wedge \Psi_v)\right] \\
&= \frac{1}{\rho^2}[\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}]\Psi_v + \frac{1}{\rho^2}[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}]\Psi_u - \frac{\rho_v}{\rho^3}[\Psi_u, \Psi_v, \Psi_v]\Psi_u \\
&= \frac{1}{\rho^2}[\Psi_v, \Psi_u, \Psi_{uv}]\Psi_v \\
&= \frac{1}{\rho^2}\rho^2\Psi_v \\
&= -\Psi_v
\end{aligned}$$

dir. Aynı yoldan, $\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_u$ olduğunu ispatlayabiliriz.

Şimdi,

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u] \tag{2.28}$$

ispatlayalım. Lelieuvre formülü (Teorem 2.9.) dan

$$\Psi_u \wedge \Psi_v = (\vartheta \wedge \vartheta_u) \wedge (-\vartheta \wedge \vartheta_v)$$

$$= -[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]\vartheta$$

sonucu çıkar. Böylece,

$$-\frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]} = \vartheta$$

dir. Şimdi (2.17) yi kullanarak $\vartheta = \frac{1}{\rho}\Psi_u \wedge \Psi_v$ eşitliğini elde ederiz, böylece

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u]$$

dir. Böylece, afin normal ve konormal vektörleri elde etmiş oluruz.

$$\xi = \frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u \qquad \text{ve} \qquad \vartheta = \frac{1}{\rho}\Psi_u \wedge \Psi_v$$

dir. Biz aynı zamanda ϑ konormal vektörünün türevlerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\begin{aligned}\Psi_v \wedge \xi &= (-\vartheta \wedge \vartheta_v) \wedge \left(\frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u\right)\\ &= \frac{1}{\rho}(\vartheta_v \wedge \vartheta) \wedge (\vartheta_v \wedge \vartheta_u)\\ &= \frac{1}{\rho}[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u]\vartheta_v\\ &= -\vartheta_v\end{aligned}$$

Benzer yoldan, ϑ konormal vektörünün v ye göre türevini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\Psi_u \wedge \xi &= (-\vartheta \wedge \vartheta_u) \wedge \left(\frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u\right)\\ &= \frac{1}{\rho}(\vartheta_u \wedge \vartheta) \wedge (\vartheta_u \wedge \vartheta_v)\\ &= \frac{1}{\rho}[\vartheta_u, \vartheta, \vartheta_u]\vartheta_u\\ &= \vartheta_u\end{aligned}$$

Böylece,

$$\vartheta_v = \xi \wedge \Psi_v \quad \text{ve} \quad \vartheta_u = \Psi_u \wedge \xi \tag{2.29}$$

sonucuna varırız.

Lelieuvre formülünü kullanarak ρ afin metriği için ve afin normal vektörü için başka bir formül elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}[\Psi_u, \Psi_v, \xi] &= \left[\vartheta \wedge \vartheta_u, -\vartheta \wedge \vartheta_v, \frac{1}{\rho}\vartheta_v \wedge \vartheta_u\right] \\ &= -\frac{1}{\rho}((\vartheta \wedge \vartheta_u) \wedge (\vartheta \wedge \vartheta_v)) \cdot (\vartheta_v \wedge \vartheta_u) \\ &= -\frac{1}{\rho}[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]\vartheta \cdot (\vartheta_v \wedge \vartheta_u) = \frac{\rho}{\rho}\vartheta \cdot (\vartheta_v \wedge \vartheta_u).\end{aligned}$$

Böylece,

$$\rho = [\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u] = [\Psi_u, \Psi_v, \xi]$$

dir.

Şimdi belirsiz durumda ortalama afin eğriliği ve konormal ϑ vektörü arasında bir ilişki bulabiliriz (Özyürek D.D., 2019).

Teorem 2.10. $\Psi : \Omega \to R^3$ asimptotik parametrelerle bir diferensiyellenebilir fonksiyon, ϑ afin konormal vektör ve H ortalama afin eğriliği olsun. Buradan

$$\vartheta_{uv} = \rho \mathrm{H} \vartheta \tag{2.30}$$

elde ederiz, ki burada $\rho = [\vartheta, \vartheta_v, \vartheta_u] > 0$ afin metriğidir. Başka bir deyişle,

$$\Delta_h \vartheta = -2\mathrm{H}\vartheta := -\frac{\vartheta_{uv}}{2\rho}$$

dir (Özyürek D.D.,2019).

İspat. Lelieuvre formülünden

$$\Psi_u = \vartheta \wedge \vartheta_u \quad , \quad \Psi_v = -\vartheta \wedge \vartheta_v$$

elde ederiz.

Sonrasında, sırasıyla v ve u ya göre türevlerini hesapladığımızda

$$\Psi_{uv} = \vartheta_v \wedge \vartheta_u + \vartheta \wedge \vartheta_{uv} \quad , \; \psi_{vu} = -\vartheta_u \wedge \vartheta_v - \vartheta \wedge \vartheta_{vu}$$

elde ederiz. Ψ diferensiyellenebilir fonksiyondur dolayısıyla $\Psi_{uv} = \Psi_{vu}$ dur. Bu nedenle,

$$\vartheta \wedge \vartheta_{uv} = -\vartheta \wedge \vartheta_{vu}$$

dir.Böylece,

$$\vartheta \wedge \vartheta_{vu} = 0$$

dir. Şimdi, $\vartheta_{uv} = \alpha\vartheta$ olduğu sonucuna varabiliriz.

Yukarıdaki eşitliği ve $\vartheta \cdot \xi = 1$ afin normal vektör tanımını kullanarak,

$$\vartheta_{uv} \cdot \xi = \alpha$$

elde ederiz. (2.18) den $\vartheta_v \cdot \xi = 0$ olduğunu biliyoruz. u ya göre türevini aldığımızda

$$\vartheta_{vu} \cdot \xi + \vartheta_v \cdot \xi_u = 0,$$

elde ederiz, aynı zamanda $\vartheta_u \cdot \xi = 0$ olduğundan, bu ifadenin v ye göre türevini aldığımızda

$$\vartheta_{uv} \cdot \xi + \vartheta_u \cdot \xi_v = 0$$

dir. Tanım 2.16. kullanılarak

$$\begin{aligned}\vartheta_{vu}\cdot\xi &= -\vartheta_v\cdot\xi_u\\ &= -\vartheta_v\cdot\left(b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v\right)\\ &= -b_{11}\vartheta_v\cdot\left(\vartheta\wedge\vartheta_u\right) - b_{21}\vartheta_v\cdot\left(-\vartheta\wedge\vartheta_v\right)\\ &= -b_{11}\left[\vartheta_v,\vartheta,\vartheta_u\right] + b_{21}\left[\vartheta_v,\vartheta,\vartheta_v\right]\\ &= b_{11}\rho\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\vartheta_{uv}\cdot\xi &= -\vartheta_u\cdot\xi_v\\ &= -\vartheta_u\cdot\left(b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v\right)\\ &= -b_{12}\vartheta_u\cdot\left(\vartheta\wedge\vartheta_u\right) - b_{22}\vartheta_u\cdot\left(-\vartheta\wedge\vartheta_v\right)\\ &= -b_{12}\left[\vartheta_u,\vartheta,\vartheta_v\right] + b_{22}\left[\vartheta_u,\vartheta,\vartheta_u\right]\\ &= b_{22}\rho\end{aligned}$$

dir. Bu iki eşitlikten konveks olmayan durumda çalışıldığında $b_{11} = b_{22}$ olduğu sonucuna varılabilir. Şekil operatörünün self-adjoint (kendine eş) olduğunu ispatlamak için

$$\xi_u\cdot\vartheta_v = \vartheta_u\cdot\xi_v$$

olduğunu göstermek için yeterlidir.

$b_{11} = -\vartheta_v\cdot\xi_u$ ve $b_{22} = -\vartheta_u\cdot\xi_v$ olduğunda $b_{11} = b_{22}$ eşitliğinden bu aşikardır. Böylece,

$$2\vartheta_{uv}\cdot\xi = \left(\vartheta_{uv} + \vartheta_{vu}\right)\cdot\xi = \vartheta_{uv}\cdot\xi + \vartheta_{vu}\cdot\xi = \left(b_{11} + b_{22}\right)\rho = 2\rho\mathrm{H}$$

dir. Bu sebeple,

$$\vartheta_{uv} = \rho\mathrm{H}\vartheta$$

sonucuna varabiliriz. Dahası,

$$\Delta_h\vartheta := -\frac{\vartheta_{uv}}{2\rho}$$

olduğundan

$$\Delta_h \vartheta = -2\mathrm{H}\vartheta$$

dir.

Böylece, afin konormal vektörün laplasyanı ile H ortalama afin eğriliği arasında bir ilişki

kurarız. Şimdi B matrisinin katsayılarının geriye kalanını hesaplamak istiyoruz. Teorem 2.10. dan

$$\vartheta_{vu} \cdot \xi = -\vartheta_v \cdot \xi_u = b_{11}\rho \text{ ve } \vartheta_{uv} \cdot \xi = -\vartheta_u \cdot \xi_v = b_{22}\rho$$

eşitliklerini elde ederiz. (2.16.) afin normal vektörü tanımından, $\vartheta_v \cdot \xi = 0$ ifadesinin v ye göre türevi alındığında

$$\vartheta_{vv} \cdot \xi = \vartheta_v \cdot \xi_v = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\vartheta_{vv} \cdot \xi &= -\vartheta_v \cdot \xi_v \\
&= -\vartheta_v \cdot \left(b_{12}\Psi_u + b_{22}\Psi_v\right) \\
&= -b_{12}\vartheta_v \cdot \left(\vartheta \wedge \vartheta_u\right) - b_{22}\vartheta_v \cdot \left(-\vartheta \wedge \vartheta_v\right) \\
&= -b_{12}\left[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_u\right] + b_{22}\left[\vartheta_v, \vartheta, \vartheta_v\right] \\
&= b_{12}\rho
\end{aligned}$$

dir. Tanım 2.16. dan $\vartheta_u \cdot \xi = 0$ ifadesini elde ederiz, bu ifadenin u ya göre türevi alındığında ise

$$\vartheta_{uu} \cdot \xi + \vartheta_u \cdot \xi_u = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{uu}\cdot\xi &= -\vartheta_u\cdot\xi_u \\
&= -\vartheta_u\cdot(b_{11}\Psi_u + b_{21}\Psi_v) \\
&= -b_{11}\vartheta_u\cdot(\vartheta\wedge\vartheta_u) - b_{21}\vartheta_u\cdot(-\vartheta\wedge\vartheta_v) \\
&= -b_{11}[\vartheta_u,\vartheta,\vartheta_u] + b_{21}[\vartheta_u,\vartheta,\vartheta_v] \\
&= b_{21}\rho
\end{aligned}
$$

dir.

Aşağıdaki denklemler şekil operatörünün katsayılarını hesaplamak için bize diğer formülü

verir. (2.29) dan $\vartheta_v = \xi\wedge\Psi_v$ ve $\vartheta_u = \Psi_u\wedge\xi$ dir.

$$b_{11} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_v\cdot\xi_u = -\frac{1}{\rho}[\xi,\Psi_v,\xi_u] = \frac{1}{\rho}[\xi_u,\Psi_v,\xi]$$

$$b_{12} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_v\cdot\xi_v = -\frac{1}{\rho}[\xi,\Psi_v,\xi_v] = \frac{1}{\rho}[\xi_v,\Psi_v,\xi]$$

$$b_{22} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_u\cdot\xi_v = -\frac{1}{\rho}[\Psi_u,\xi,\xi_v] = \frac{1}{\rho}[\Psi_u,\xi_v,\xi]$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\rho}\vartheta_u\cdot\xi_u = -\frac{1}{\rho}[\Psi_u,\xi,\xi_u] = \frac{1}{\rho}[\Psi_u,\xi_u,\xi]$$

Sonuç olarak, B matrisinin katsayılarını hesapladık. Dahası, Teorem 2.10. dan $\vartheta // \vartheta_{UV}$ olduğunu biliyoruz. Lelieuvre formülünden $\Psi_U = \vartheta\wedge\vartheta_U$ denkleminin v ye göre türevi alındığında

$$\Psi_{uv} = (\vartheta_v\wedge\vartheta_u) + (\vartheta\wedge\vartheta_{uv}) = \vartheta_v\wedge\vartheta_u = \rho\frac{1}{\rho}\vartheta_v\wedge\vartheta_u = \rho\xi$$

elde edilir. Böylece, sıradaki formül

$$\Psi_{uv} = \rho\xi$$

elde edilir (Özyürek D.D., 2019).

2.2.3. Has Olmayan Afin Küreler Ve Afin Maksimal Dönüşümler

Bu bölümde, afin minimal dönüşüm ve afin minimal yüzey kavramlarını tanıtacağız. Aynı zamanda has olmayan afin küre tanımını vereceğiz.

Tanım 2.21. H afin ortalama eğriliği sıfır olan yüzeyler afin minimal yüzeyler olarak adlandırılır, çünkü $H=0$ denklemi kompakt iç destek ile diferensiyellenebilir deformasyonlara göre afin alanı durağan (kritik) olan yüzeyleri karakterize eden Euler-Lagrange denklemidir. Konveks durumda, onları minimal değil maksimal olarak belirlemeyi tercih ederiz, çünkü bazı yüzeyler için afin alanın ikinci varyasyonu her zaman negatiftir. (Calabi E., 1988) bu notasyonu kullanan ilk kişiydi (Özyürek D.D., 2019).

Bir başka deyişle, biz afin minimal yüzeyler olarak adlandırılan sıfır afin ortalama eğrilik ile yüzeylere çalışırız ve konveks yüzeyler için onlar aynı zamanda afin maksimal yüzeyler olarak adlandırılır.

Tanım 2.22. Afin ortalama eğrilik ile birleşen yüzeyler afin minimal yüzeyler olarak adlandırılır.

Tanım 2.23. Sabit afin ξ normali ile $\Psi:\Omega\to R^3$ immersiyonu has olmayan afin küre olarak adlandırılır.

Has olmayan afin küre, afin minimal yüzeydir. ϑ ye eşdeğer minimal afin yüzeyler harmoniktir. Hakikaten, konveks durumda Teorem (2.6.) dan sadece ve sadece $H=0$ olduğu durumda $\vartheta_{uu}+\vartheta_{vv}=0$ elde edilir. Belirsiz durumda ise Teorem (2.6.) dan sadece ve sadece $H=0$ olduğu durumda aynı zamanda $\vartheta_{uv}=0$ elde edilir. Diğer taraftan, konormal afin vektörün $\vartheta:\Omega\subset R^2\to R^3$ harmonik ve $\mathrm{Im}(\vartheta)\subset düzlem$ olduğunu kabul edelim. Ψ nin has olmayan afin küre olduğunu ispatlamalıyız.

Genelliği kaybetmeden düzlemin $z=1$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $\mathrm{Im}(\vartheta)\subset düzlem$ ise konormal vektör için parametrizasyon $\vartheta(u,v)=(v_1(u,v),v_2(u,v),1)$ dir. $\xi=(0,0,1)$ normal vektörünün (2.18) denklemini sağladığını kolayca doğrulayabiliriz. (2.18) in aşağıdaki denklemler sistemine eşit olduğunu dikkate alırsak,

$$\begin{cases} \vartheta \cdot \xi = 1 \\ \vartheta \cdot \xi_u = 0 \\ \vartheta \cdot \xi_v = 0 \end{cases}$$

dir. Böylece, ξ nin sabit olduğu sonucuna varabiliriz. Bu da Ψ nin has olmayan afin küre olduğu anlamına gelir.

Tanım 2.24. Ω regüler yüzey olsun. Eğer ϑ harmonik vektör alanı var ise yani, $[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]$, $\Omega \setminus S_\Psi$ de sıfırdan farklı ise $\Psi : \Omega \to R^3$ dönüşümüne afin maksimal dönüşüm denir, ki burada S_Ψ tekil eğrilerin kümesi ve Ψ (2.17) de verildiği gibidir.

Bir başka deyişle, eğer Ψ afin minimal yüzeyse afin minimal dönüşümdür ve $[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v] = 0$ olduğunda noktalarda belirli tekilliklere izin verir. $\rho = [\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]$ sıfır olduğunda, Ψ afin maksimal dönüşümünün S_Ψ tekil kümesi noktaların kümesidir. Bu durumda Ψ afin normali S_Ψ üzerinde iyi tanımlı olmayabilir. Tabii ki, $S_\Psi = \phi$ olduğunda afin minimal yüzeye sahibiz ve ξ sabit oluyor ise has olmayan afin küredir.

3. BULGULAR

Bu bölümde 3-boyutlu Afin uzaydaki öteleme yüzeyi ele alınacak ve bu yüzeyin hem açılabilir hem de minimal olması için gerekli hesaplamalar yapılacaktır. Buna ilaveten daha önce Centro-afin uzayda (Liu H.,1996) tarafından verilen minimal yüzeylerin Afin uzayda minimal ve açılabilir olma şartları verilecektir. Ayrıca, Monge tipinden yüzeylerin açılabilir ve minimal olma durumları incelenecektir.

3.1. Afin Uzayda Bazı Açılabilir ve Minimal Yüzeyler

3.1.1. Afin Uzayda Öteleme Yüzeyi

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ afin uzay eğrilerinin toplamı olarak tanımlanan bir S yüzeyi afin 3-uzayda bir öteleme yüzeyi olarak adlandırılır. Böylece bir öteleme yüzeyi olarak,

$$\Psi\,(u,v) = (u,v,f(u)+g(v)) \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanjant vektörler için baz ,

$$\begin{aligned} \Psi_u &= (1,0,f'(u)) \quad , \\ \Psi_v &= (0,1,g'(v)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak verilir.

$\Psi\,(u,v)$ nin ikinci kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} \Psi_{uu} &= (0,0,f''(u)), \\ \Psi_{uv} &= (0,0,0) \\ \Psi_{vv} &= (0,0,g''(v)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dir.

Öteleme yüzeyinin birinci afin temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned} &L = f''(u), \qquad N = g''(v), \qquad M = 0, \\ &d = (LN - M^2)^{\frac{1}{4}} = (f''g'')^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir. Böylece öteleme yüzeyinin Berwald-Blaschke metriğinin katsayıları veya öteleme yüzeyinin ikinci afin temel formun katsayıları,

$$E = \frac{f''}{(f''g'')^{\frac{1}{4}}}, \quad G = \frac{g''}{(f''g'')^{\frac{1}{4}}}, \quad F = 0 \tag{3.5}$$

olarak ifade edilir.

Berwald-Blaschke metriğinin non-dejenere olduğunu varsayalım : $d \neq 0$. Geometrik olarak $d > 0$ olması demek Öklidyen Gauss eğriliğinin olmaması demektir, yani öteleme yüzeyi güçlü bir biçimde konvekstir. Öteleme yüzeyinin afin eş normal alanı

$$\vartheta = \left(-\frac{f'}{(f''g'')^{\frac{1}{4}}}, -\frac{g'}{(f''g'')^{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{(f''g'')^{\frac{1}{4}}} \right) \tag{3.6}$$

şeklinde verilir.

Böylece, afin normal vektörü

$$\xi = \left(-\frac{f'''(f''g'')^{\frac{1}{4}}}{4f''^2}, -\frac{g'''(f''g'')^{\frac{1}{4}}}{4g''^2}, \frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(-f'g''^2f''' + f''^2\left(4g''^2 - g'g'''\right)\right)}{4f''^2g''^2} \right) \tag{3.7}$$

dır.

Sonuç olarak, $B = [b_{ij}]$ matrisinin b_{ij} formundaki katsayıları,

$$b_{11} = \frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7f'''^2 - 4f''f^{(4)}\right)}{16f''^3}, \tag{3.8}$$

$$b_{12} = -\frac{g''f'''g'''}{16(f''g'')^{\frac{7}{4}}},$$

$$b_{21} = -\frac{f''f'''g'''}{16(f''g'')^{\frac{7}{4}}},$$

$$b_{22} = \frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7g'''^2 - 4g''g^{(4)}\right)}{16g''^3}$$

dır.

Önerme 3.1: S, afin 3-uzayında non-dejenere bir öteleme yüzeyi olsun. S nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$\mathrm{K} = \frac{f'''^2\left(12g'''^2 - 7g''g^{(4)}\right) + f''f^{(4)}\left(-7g'''^2 + 4g''g^{(4)}\right)}{64(f''g'')^{\frac{5}{2}}}, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{H} = \left(\frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7f'''^2 - 4f''f^{(4)}\right)}{32f''^3} + \frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7g'''^2 - 4g''g^{(4)}\right)}{32g''^3}\right)$$

olarak verilir.

(3.1) denklemi ile verilen non-dejenere öteleme yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu varsayalım. Sonrasında,

$$f'''^2\left(12g'''^2 - 7g''g^{(4)}\right) + f''f^{(4)}\left(-7g'''^2 + 4g''g^{(4)}\right) = 0 \tag{3.10}$$

elde ederiz. Burada u ve v bağımsız değişkenlerdir, böylece (3.10) denkleminin her iki tarafı $p \in \mathbb{R}$ sabitine eşittir. Devamında, (3.10) denklemi

$$\frac{f'''^2}{f''f^{(4)}} = p = \frac{7g'''^2 - 4g''g^{(4)}}{12g'''^2 - 7g''g^{(4)}} \tag{3.11}$$

ifadesine indirgenir.

(3.11) denklemini çözdüğümüzde, bazı $c_i \in \mathbb{R}$ sabitleri için,

$$f(u) = c_1 + c_2u - \frac{c_3(u - pu + c_4p)^{\frac{3p-2}{p-1}}}{6p^2 - 7p + 2}, \tag{3.12}$$

$$g(v) = c_5 + c_6u - \frac{c_7\left((5p-3)v + c_8(7p-4)\right)^{\frac{2-3p}{3-5p}}}{6p^2 - 7p + 2},$$

elde ederiz. Sonrasında S,

$$\Psi(u,v) = \left(u, v, \left(c_1 + c_2 u - \frac{c_3(u - pu + c_4 p)^{\frac{3p-2}{p-1}}}{6p^2 - 7p + 2}\right) + \left(c_5 + c_6 u - \frac{c_7((5p-3)v + c_8(7p-4))^{\frac{2-3p}{3-5p}}}{6p^2 - 7p + 2}\right)\right) \tag{3.13}$$

tarafından parametrize edilir.

Özellikle,eğer $p = 0$ ise $c_i \in \mathbb{R}$ için

$$f(u) = c_1 u^2 + c_2 u + c_3, \tag{3.14}$$

$$g(v) = c_4 + c_5 v - \frac{c_6(3v + 4c_7)^{\frac{2}{3}}}{2},$$

dir. Bu durumda S ,

$$\Psi(u,v) = \left(u, v, (c_1 u^2 + c_2 u + c_3) + c_4 + c_5 v - \frac{c_6(3v + 4c_7)^{\frac{2}{3}}}{2}\right) \tag{3.15}$$

tarafından parametrize edilir.

Teorem 3.1. S afin 3-uzayında non-dejenere bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer S sıfır Gauss eğriliğine sahipse veya afin flat ise S, (3.13) veya (3.15) denklemleri olarak parametrize edilir.

Varsayalım ki, S afin minimal olsun. Böylece, ortalama eğrilik ancak ve ancak

$$\frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7f'''^2 - 4f''f^{(4)}\right)}{32f''^3} + \frac{(f''g'')^{\frac{1}{4}}\left(7g'''^2 - 4g''g^{(4)}\right)}{32g''^3} = 0 \tag{3.16}$$

durumunda sıfırdır.

Dahası, değişkenler için

$$\frac{\left(7f'''^2 - 4f''f^{(4)}\right)}{32f''^3} = p = -\frac{\left(7g'''^2 - 4g''g^{(4)}\right)}{32g''^3} \tag{3.17}$$

(3.16) denkleminin minimallik durumu olarak ayrılabilir.

Bu durumda, lineer olmayan (3.17) diferansiyel denklemi $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için analitik olarak çözülemez.

Eğer $p = 0$ ise $c_i \in \mathbb{R}$ için,

$$f(u) = c_1 + c_2 u - \frac{c_3(3u+4c_4)^{\frac{2}{3}}}{2}, \tag{3.18}$$

$$g(v) = c_5 + c_6 v - \frac{c_7(3v+4c_8)^{\frac{2}{3}}}{2},$$

dır.

Bu durumda , S

$$\Psi\,(u, v) = \left(u, v, \left(c_1 + c_2 u - \frac{c_3(3u+4c_4)^{\frac{2}{3}}}{2}\right) + \left(c_5 + c_6 v - \frac{c_7(3v+4c_8)^{\frac{2}{3}}}{2}\right)\right) \tag{3.19}$$

tarafından parametrize edilir.

3.1.2. Afin Uzayda Centro-Afin Minimal Yüzeyler

Burada, Cetro-Afin uzayda tanımlanan minimal olan yüzeylerin, afin uzayda minimal ve açılabilir olma şartları incelenecektir.

Teorem 3.2. S_1, S_2 ve S_3 Afin uzayda birer yüzey olsunlar. Bu takdirde, S_1, S_2 ve S_3 yüzeylerinin açılabilir ve minimal olması için,

1) S_1: $\Psi = \{e^u, e^v, e^{\alpha u + \beta v}\}$ olsun. Eğer S_1 yüzeyi açılabilir ise,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $(-1 + \alpha + \beta) \neq 0$ olmak üzere $\alpha = 1$ veya $\beta = 1$ olmalıdır.

Eğer S_1 yüzeyi minimal ise,

(α, β) ; u, v *sabit (ya da parametere)*

$e^{u+v+u\alpha+v\beta} \neq 0$ olacağından ya $\alpha = 1$; $\beta \in \mathbb{R}$, ya $\beta = 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$, ya da $\alpha = -\beta$ olmalıdır.

2) $S_2: \Psi = \{e^u \sin v\,, e^u \cos v\,, e^{2\beta u - \alpha v}\}$ olsun. Eğer S_2 yüzeyi açılabilir ise,

$\beta = 0$ veya $\alpha^2 + 4(-1+\beta)^2 = 0$ olmalıdır. Eğer S_2 yüzeyi minimal ise,

(α, β) ; $u\,, v\ sabit\ (ya\ da\ parametere)$ $e^{u+v+u\alpha+v\beta} \neq 0$ olacağından

$\beta(\alpha^2 + 4(\beta-1)^2) = 0$ ise $\beta = 0$ veya $\alpha^2 + 4(-1+\beta)^2 = 0$ olmalıdır.

3) $S_3: \Psi = \{e^u, e^v, e^u(u\alpha + \beta v)\}$ olsun. Eğer S_3 yüzeyi açılabilir ise,

$\alpha = 0$ olmalıdır. Eğer S_3 yüzeyi minimal ise,

(α, β) ; $u\,, v\ sabit\ (ya\ da\ parametere)$ $e^{2u+v} \neq 0$ olacağından
$\alpha = 0$ olmalıdır.

İspat :

Şimdi yukarıdaki teoremde verilen yüzeylerin afin uzayda açılabilir ve minimal olma şartlarını inceleyelim.

1.Tip Minimal ve Açılabilir Yüzey

$$\Psi = \{e^u, e^v, e^{\alpha u + \beta v}\} \tag{3.20}$$

yüzeyini göz önüne alalım.

$$\Psi_u = \{e^u, 0, e^{u\alpha + v\beta}\alpha\} \tag{3.21}$$

$$\Psi_v = \{0, e^v, e^{u\alpha + v\beta}\beta\}$$

$$\Psi_{uu} = \{e^u, 0, e^{u\alpha + v\beta}\alpha^2\} \tag{3.22}$$

$$\Psi_{uv} = \{0,0, e^{u\alpha + v\beta}\alpha\beta\}$$

$$\Psi_{vv} = \{0, e^v, e^{u\alpha + v\beta}\beta^2\}$$

olmak üzere,

$$L = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-1+\alpha)\alpha \tag{3.23}$$

$$N = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-1+\beta)\beta$$

$$M = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = e^{u+v+u\alpha+v\beta}\alpha\beta$$

dır.

$$p = (LN - M^2)^{1/4}$$

$$= \left(-e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4} \tag{3.24}$$

$$\xi = \left[\frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{LN-M^2}}\left(\Psi_u\left(\frac{N\Psi_u\Psi - M\Psi_v\Psi}{\sqrt{LN-M^2}}\right) + \Psi_v\left(\frac{L\Psi_v\Psi - M\Psi_u\Psi}{\sqrt{LN-M^2}}\right)\right)\right]$$

$$= \{-\frac{e^{-u\alpha-v(1+\beta)}(-1+\beta)\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}{2\alpha(-1+\alpha+\beta)},$$

$$-\frac{e^{-u(1+\alpha)}(-1+\alpha)\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}{2\beta(-1+\alpha+\beta)},$$

$$\frac{e^{-u-v}\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}(\alpha+\beta)}{2(-1+\alpha+\beta)}\} \tag{3.25}$$

$$h = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{p}$$

$$= \frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-du^2\alpha + du^2\alpha^2 - dv^2\beta + 2dudv\,\alpha\beta + dv^2\beta^2)}{\left(e^{2u+2v+2u\alpha+2v\beta}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}} \tag{3.26}$$

$$E = \frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-\alpha+\alpha^2)}{\left(e^{2u+2v+2u\alpha+2v\beta}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}$$

$$G = \frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-\beta+\beta^2)}{\left(e^{2u+2v+2u\alpha+2v\beta}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}} \tag{3.27}$$

$$F = \frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(\alpha\beta)}{\left(e^{2u+2v+2u\alpha+2v\beta}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}$$

dır.

$$\vartheta = \frac{\Psi_u \wedge \Psi_v}{p}$$

$$= \{-\frac{e^{v+u\alpha+v\beta}\alpha}{\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}, -\frac{e^{u+u\alpha+v\beta}\beta}{\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}},$$

$$\frac{e^{u+v}}{\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}\} \qquad (3.28)$$

Şimdi şekil operatörünün katsayılarını hesaplayabiliriz.

$$b_{11} = \frac{[\xi_u, \Psi_v, \xi]}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]}$$

$$= -\frac{e^{-u(1+\alpha)-v(1+\beta)}(-1+\alpha)(-1+\beta)\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}{4\alpha(-1+\alpha+\beta)} \qquad (3.29)$$

$$b_{12} = \frac{[\xi_v, \Psi_v, \xi]}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]}$$

$$= -\frac{e^{-u(1+\alpha)-v(1+\beta)}\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}(-1+\beta^2)}{4\alpha(-1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{21} = \frac{[\Psi_u, \xi_u, \xi]}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]}$$

$$= -\frac{e^{-u(1+\alpha)-v(1+\beta)}(-1+\alpha^2)\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}{4\beta(-1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{22} = \frac{[\Psi_u, \xi_v, \xi]}{[\vartheta, \vartheta_u, \vartheta_v]}$$

$$= -\frac{e^{-u(1+\alpha)-v(1+\beta)}(-1+\alpha)(-1+\beta)\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{1/4}}{4\beta(-1+\alpha+\beta)}$$

dır.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$K = b_{11}\, b_{22} - b_{21}\, b_{12}$ olduğundan,

$$= -\frac{(-1+\alpha)(-1+\beta)}{8(-1+\alpha+\beta)\sqrt{e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)}} \tag{3.30}$$

$H = \dfrac{b_{11}+b_{22}}{2}$ olduğundan,

$$= -\frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-1+\alpha)(-1+\beta)(\alpha+\beta)}{8\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{3/4}} \tag{3.31}$$

dır.

$K = 0$ olması için $\alpha\ ve\ \beta$ nın alacağı değerleri bulalım.

$K = 0$ ise

$$-\frac{(-1+\alpha)(-1+\beta)}{8(-1+\alpha+\beta)\sqrt{e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)}} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha-1)=0\\(\beta-1)=0\end{array}\right\}\ \text{olmalıdır.}$$

Buradan, $\alpha = 1$ veya $\beta = 1$ elde edilir.

Fakat $(-1+\alpha+\beta) \neq 0$ olmalıdır.

$H = 0$ minimal olması için $\alpha\ ve\ \beta$ nın alacağı değerleri bulalım.

$$-\frac{e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-1+\alpha)(-1+\beta)(\alpha+\beta)}{8\left(e^{2(u+v+u\alpha+v\beta)}\alpha\beta(-1+\alpha+\beta)\right)^{3/4}} = 0, \qquad \alpha\beta(-1+\alpha+\beta) \neq 0$$

$$-e^{u+v+u\alpha+v\beta}(-1+\alpha)(-1+\beta)(\alpha+\beta) = 0$$

(α, β) ; $\qquad u, v\ sabit\ (ya\ da\ parametere)$

$e^{u+v+u\alpha+v\beta} \neq 0$ olacağından ya $\alpha = 1$; $\beta \in \mathbb{R}$, ya $\beta = 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$, ya da $\alpha = -\beta$ olmalıdır.

Bu üç durumdan birisi $H = 0$ olmasına denktir.

2.Tip Minimal ve Açılabilir Yüzey

$$\Psi = \{e^u \sin v \,, e^u \cos v \,, e^{2\beta u - \alpha v}\} \tag{3.32}$$

yüzeyini göz önüne alalım.

$$\Psi_u = \{e^u \sin v \,, e^u \cos v \,, 2e^{2\beta u - \alpha v}\beta\} \tag{3.33}$$

$$\Psi_v = \{e^u \cos v \,, -e^u \sin v \,, -e^{2\beta u - \alpha v}\alpha\}$$

$$\Psi_{uu} = \{e^u \sin v \,, e^u \cos v \,, 4e^{2\beta u - \alpha v}\beta^2\} \tag{3.34}$$

$$\Psi_{uv} = \{e^u \cos v \,, -e^u \sin v \,, -2e^{2\beta u - \alpha v}\alpha\beta\}$$

$$\Psi_{vv} = \{-e^u \sin v \,, -e^u \cos v \,, e^{2\beta u - \alpha v}\alpha^2\}$$

olmak üzere,

$$L = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = -2e^{-\alpha v + 2u(1+\beta)}\beta(-1 + 2\beta) \tag{3.35}$$

$$N = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = -e^{-\alpha v + 2u(1+\beta)}(\alpha^2 + 2\beta)$$

$$M = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = e^{-\alpha v + 2u(1+\beta)}\alpha(-1 + 2\beta)$$

dır.

$$p = (LN - M^2)^{1/4} \tag{3.36}$$

$$= \left(-e^{-2\alpha v + 4u(1+\beta)}\alpha^2(-1 + 2\beta)^2 + 2e^{-2\alpha v + 4u(1+\beta)}\beta(-1 + 2\beta)(\alpha^2 + 2\beta)\right)^{1/4}$$

Yüzeyin normali,

$$\xi = \{-\frac{e^{3u - \alpha v + 2u\beta}(2\alpha(1+2\beta)\cos v + (\alpha^2 - 4(-1+\beta)\beta)\sin v)}{2\left(e^{-2\alpha v + 4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}},$$

$$-\frac{e^{3u - \alpha v + 2u\beta}\left((\alpha^2 - 4(-1+\beta)\beta)\cos v + 2\alpha(1-2\beta)\sin v\right)}{2\left(e^{-2\alpha v + 4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}}, \frac{e^{-2u}\beta\left(e^{-2\alpha v + 4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}}{1-2\beta}\}$$

$$\tag{3.37}$$

$$h=\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}\left(2du^2(1-2\beta)\beta+2dudv\,\alpha(-1+2\beta)-dv^2(\alpha^2+2\beta)\right)}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}}$$

$$=-\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}(2dudv\,\alpha+dv^2\alpha^2-2du^2\beta+2dv^2\beta-4dudv\alpha\beta+4du^2\beta^2)}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}} \tag{3.38}$$

$$E=-\frac{(-2+4\beta^2)e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}}$$

$$G=-\frac{(\alpha^2+2\beta^2)e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}} \tag{3.39}$$

$$F=-\frac{(\alpha-2\alpha\beta)e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}}$$

dır.

Yüzeyin konormali,

$$\vartheta=\{\frac{e^{u-\alpha v+2u\beta}(-\alpha\cos v+2\beta\sin v)}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}},\frac{e^{u-\alpha v+2u\beta}(2\beta\cos v+\alpha\sin v)}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}},$$

$$-\frac{e^{2u}}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{1/4}}\} \tag{3.40}$$

Şimdi şekil operatörünün katsayılarını hesaplayabiliriz.

$$b_{11}=\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}\beta\left(\alpha^2-4(-1+\beta)\beta\right)}{2\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}} \tag{3.41}$$

$$b_{12}=-\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}\alpha\left(\alpha^2-4(-1+\beta^2)\right)}{4\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}}$$

$$b_{21}=\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}\alpha\beta(-1+2\beta)}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}}$$

$$b_{22} = -\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}(2+\alpha^2-2\beta)\beta}{\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}}$$

dır.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K = -\frac{\beta(\alpha^2+4(-1+\beta)^2)}{4(-1+2\beta)\sqrt{e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)}} \tag{3.42}$$

dır.

$$H = \frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}(\alpha^2+4(-1+\beta)^2)\beta}{4\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}} \tag{3.43}$$

dır.

$K = 0$ olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$K = 0$ ise

$$-\frac{\beta(\alpha^2+4(-1+\beta)^2)}{4(-1+2\beta)\sqrt{e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)}} = 0$$

$\beta(\alpha^2 + 4(\beta - 1)^2) = 0$ olmalıdır.

Bu durumda, $\beta = 0$ veya $\alpha^2 + 4(-1+\beta)^2 = 0$

dır.

$H = 0$ minimal olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$$\frac{e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}(\alpha^2+4(-1+\beta)^2)\beta}{4\left(e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)\right)^{3/4}} = 0$$

$e^{-\alpha v+2u(1+\beta)}(\alpha^2 + 4(-1+\beta)^2)\beta = 0$

(α, β) ; $u\,, v$ $sabit$ $(ya\ da\ parametere)$

$e^{u+v+u\alpha+v\beta} \neq 0$ olacağından

$\beta(\alpha^2 + 4(\beta - 1)^2) = 0$ ise $\beta = 0$ veya $\alpha^2 + 4(-1+\beta)^2 = 0$

olmalıdır.

3.Tip Minimal ve Açılabilir Yüzey

$$\Psi = \{e^u, e^v, e^u(u\alpha + \beta v)\} \tag{3.44}$$

yüzeyini göz önüne alalım.

$$\Psi_u = \{e^u, 0, -\alpha e^u - (u\alpha + \beta v)\} \tag{3.45}$$

$$\Psi_v = \{0, e^v, -\beta e^u\}$$

$$\Psi_{uu} = \{e^u, 0, -2\alpha e^u - e^u(u\alpha + \beta v)\} \tag{3.46}$$

$$\Psi_{uv} = \{0,0, -\beta e^u\}$$

$$\Psi_{vv} = \{0, e^v, 0\}$$

olmak üzere,

$$L = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uu}] = -\alpha e^{2u+v} \tag{3.47}$$

$$N = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{vv}] = \beta e^{2u+v}$$

$$M = [\Psi_u, \Psi_v, \Psi_{uv}] = -\beta e^{2u+v}$$

dır.

$$p = (-\alpha\beta e^{4u+2v} - \beta^2 e^{4u+2v})^{1/4} \tag{3.48}$$

Yüzeyin normali,

$$\xi = \{-\frac{\beta e^{3u+v}}{2(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}, \frac{\alpha e^{2u+v}}{2(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}, \frac{\beta e^{3u+v}((2+u)\alpha+(2+v)\beta)}{2(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}\} \tag{3.49}$$

$$h = \{-\frac{du^2 \alpha e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}} - \frac{2\, dudv\, \beta e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}} + \frac{dv^2\, \beta e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}}\} \tag{3.50}$$

dır.

$$E = -\frac{\alpha e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}}$$

$$G = \frac{\beta e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}} \tag{3.51}$$

$$F = -\frac{\beta e^{2u+v}}{(\alpha\beta e^{4u+2v}+\beta^2 e^{4u+2v})^{1/4}}$$

dır.

Yüzeyin konormali,

$$\vartheta = \{\frac{e^{u+v}(\alpha+u\alpha+v\beta)}{(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{1/4}}, \frac{\beta\, e^{2u}}{(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{1/4}}, \frac{\beta d v^2\, e^{2u+v}}{(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{1/4}}\} \tag{3.52}$$

dır.

Şimdi şekil operatörünün katsayılarını hesaplayabiliriz.

$$b_{11} = 0 \tag{3.53}$$

$$b_{12} = -\frac{\beta e^{2u+v}}{4(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}$$

$$b_{21} = \frac{\alpha e^{2u+v}}{2(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}$$

$$b_{22} = -\frac{\alpha e^{2u+v}}{4(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}}$$

dır.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K = \frac{\alpha}{8(\alpha+\beta)\sqrt{\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v}}} \tag{3.54}$$

$$H = -\frac{\alpha e^{2u+v}}{8\left(e^{4u+2v}\beta(\alpha+\beta)\right)^{3/4}} \tag{3.55}$$

dır.

$K = 0$ olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$K = 0$ ise

$$\frac{\alpha}{4(-1+2\beta)\sqrt{(-1+2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)e^{-2\alpha v+4u(1+\beta)}}} = 0$$

$\alpha = 0$ olmalıdır.

$H = 0$ olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$$-\frac{\alpha e^{2u+v}}{8(\beta(\alpha+\beta)e^{4u+2v})^{3/4}} = 0$$

$$\alpha e^{2u+v} = 0$$

$\alpha = 0$ olmalıdır.

3.1.3. Afin Uzayında Açılabilir ve Minimal Monge Tipi Yüzeyler

Teorem 3.3. S_1, S_2 ve S_3 Afin uzayda Monge tipi yüzey olsunlar. Bu takdirde, S_1, S_2 ve S_3 yüzeylerinin açılabilir ve minimal olması için,

1) $S_1 : \Psi = \{u, v, u^\alpha + v^\beta\}$ olsun. Eğer S_1 yüzeyi açılabilir ise,

   $\alpha = 2$ için $\beta = 2$ veya $\alpha = \frac{\beta}{(-1+2\beta)}$ olmalıdır. Eğer S_1 yüzeyi minimal ise,

   $n \in Z^+$ olmak üzere, $\alpha = 2n$ $için$ $\beta = 2n + 1$,

   $\alpha = 2n + 1$ $için$ $\beta = 2n$ ve $\alpha = 2n + 1$, $\beta = 2n + 1$ olmalıdır.

2) $S_2 : \Psi = \left\{u, v, \frac{1}{u^\alpha v^\beta}\right\}$ olsun. Eğer S_2 yüzeyi açılabilir ve minimal ise,

   $\alpha = \beta = 0, -1, \frac{1}{2}$ olmalıdır.

3) $S_3 : \Psi = \left\{u, v, \frac{1}{u^\alpha + v^\beta}\right\}$ olsun. Eğer S_2 yüzeyi açılabilir ve minimal ise,

   $\alpha = \beta = 0, -1, \frac{1}{2}$ olmalıdır.

İspat :

Şimdi yukarıdaki teoremde verilen Monge tipi yüzeylerin afin uzayda açılabilir ve minimal olma şartlarını inceleyelim.

1. Tip Monge Yüzeyi

$$\Psi = \{u, v, u^\alpha + v^\beta\} \tag{3.56}$$

yüzeyini göz önüne alalım.

$$\Psi_u = \{1,0,\alpha u^{-1+\alpha}\} \tag{3.57}$$

$$\Psi_v = \{0,1,\beta v^{-1+\beta}\}$$

$$\Psi_{uu} = \{0,0,(-1+\alpha)\alpha u^{-2+\alpha}\} \tag{3.58}$$

$$\Psi_{uv} = \{0,0,0\}$$

$$\Psi_{vv} = \{0,0,(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}\}$$

olmak üzere,

$$L = (-1+\alpha)\alpha u^{-2+\alpha} \tag{3.59}$$

$$N = (-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}$$

$$M = 0$$

dır.

$$p = \left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha} v^{-2+\beta}\right)^{1/4} \tag{3.60}$$

Yüzeyin normali ,

$$\xi = \{-\frac{(-2+\alpha)(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{4u(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta)^{3/4}}, -\frac{(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)u^{-2+\alpha}}{4v(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta)^{3/4}}, \frac{(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta)^{1/4}(-\beta+\alpha(-1+2\beta))}{4(-1+\alpha)(-1+\beta)}\} \tag{3.61}$$

$$h = \frac{(-1+\alpha)\alpha du^2 u^{-2+\alpha} + (-1+\beta)\beta dv^2 v^{-2+\beta}}{\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{1/4}} \tag{3.62}$$

$$E = \frac{(-1+\alpha)\alpha u^{-2+\alpha}}{\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{1/4}}$$

$$G = \frac{(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{1/4}} \tag{3.63}$$

$$F = 0$$

Yüzeyin konormali ϑ ,

$$=\left\{-\frac{\alpha u^{-1+\alpha}}{\left(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta\right)^{1/4}},-\frac{\beta v^{-1+\beta}}{\left(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta\right)^{1/4}},\frac{1}{\left(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta\right)^{1/4}}\right\} \tag{3.64}$$

$$\vartheta_u=\{\frac{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\alpha^2(-1+\beta)\beta u^{-4+2\alpha}v^{-2+\beta}}{4(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta)^{5/4}}-\frac{(-1+\alpha)\alpha u^{-2+\alpha}}{(u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta)^{1/4}},$$

$$\frac{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta^2u^{-3+\alpha}v^{-3+2\beta}}{4\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{5/4}},-\frac{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-3+\alpha}v^{-3+2\beta}}{4\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{5/4}}\} \tag{3.65}$$

$$\vartheta_v=\{\frac{(-1+\alpha)\alpha^2(-2+\beta)(-1+\beta)\beta u^{-3+2\alpha}v^{-3+\beta}}{4\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{5/4}},$$

$$\frac{(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-1+\beta)\beta^2u^{-2+\alpha}v^{-4+2\beta}}{4\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{5/4}}-\frac{(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{1/4}},$$

$$-\frac{(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-3+\beta}}{4\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{5/4}}\} \tag{3.66}$$

dır.

Şimdi şekil operatörünün katsayılarını hesaplayabiliriz.

$$b_{11}=\frac{(-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{16u^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}} \tag{3.67}$$

$$b_{12}=-\frac{(-2+\alpha)(-2+\beta)(-1+\beta)\beta v^{-3+\beta}}{16u((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta})^{3/4}}$$

$$b_{21}=-\frac{(-2+\alpha)(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)u^{-3+\alpha}}{16v\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}}$$

$$b_{22}=\frac{(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{-2+\alpha}}{16v^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}}$$

dir.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K = \frac{(-2+\alpha)(-2+\beta)\left(-\beta+\alpha(-1+2\beta)\right)}{64u^2v^2\sqrt{(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}}} \tag{3.68}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{(-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{16u^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}} + \frac{(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{-2+\alpha}}{16v^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}}\right)$$

$$= \frac{\left((-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{\beta} + (-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{\alpha}\right)}{\left(32u^2v^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}\right)} \tag{3.69}$$

$K = 0$ olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$$\frac{(-2+\alpha)(-2+\beta)\left(-\beta+\alpha(-1+2\beta)\right)}{64u^2v^2\sqrt{(-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}}} = 0$$

$(-2+\alpha)(-2+\beta)\left(-\beta+\alpha(-1+2\beta)\right) = 0$

$(-2+\alpha) = 0$'dan

$\alpha = 2$ olur,

$(-2+\beta) = 0$'dan

$\beta = 2$ olur.

$\left(-\beta+\alpha(-1+2\beta)\right) = 0$'dan

$\beta = \alpha(-1+2\beta)$

$\alpha = \frac{\beta}{(-1+2\beta)}$

dır.

$H = 0$ minimal olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$$\frac{\left((-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{\beta}+(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{\alpha}\right)}{\left(32u^2v^2\left((-1+\alpha)\alpha(-1+\beta)\beta u^{-2+\alpha}v^{-2+\beta}\right)^{3/4}\right)} = 0$$

$$\left((-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{\beta}+(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{\alpha}\right)=0$$

$$(-2+\alpha)(-2+3\alpha)(-1+\beta)\beta v^{\beta}=-(-1+\alpha)\alpha(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{\alpha}$$

$\alpha=\beta$ olduğu durumda,

$$(-2+\beta)(-2+3\beta)(-1+\beta)\beta v^{\beta}=-(-1+\beta)\beta(-2+\beta)(-2+3\beta)u^{\beta}$$

$$v^{\beta}=-u^{\beta}$$

$$v^{\beta}+u^{\beta}=0$$

dır.

Yani $\alpha=\beta$ olduğu durumda u^{α} ve v^{β} dışındaki tüm değerler aynı olduğundan ihmal edilir.

$n\in Z^{+}$ olmak üzere,

$\alpha=2n$, $\beta=2n+1$

$\alpha=2n+1,$ $\beta=2n$ ve

$\alpha=2n+1,$ $\beta=2n+1$

olduğu durumlar için $v^{\beta}+u^{\alpha}=0$ denklemi sağlanır.

2. Tip Monge Yüzeyi

$$\Psi=\left\{u,v,\frac{1}{u^{\alpha}v^{\beta}}\right\}$$

yüzeyini göz önüne alalım. (3.70)

$$\Psi=\left\{u,v,u^{-\alpha}v^{-\beta}\right\}$$

$$\Psi_{u}=\left\{1,0,-\alpha u^{-1-\alpha}v^{-\beta}\right\} \tag{3.71}$$

$$\Psi_{v}=\left\{0,1,-u^{-\alpha}\beta v^{-1-\beta}\right\}$$

$$\Psi_{uu}=\left\{0,0,-(-1-\alpha)\alpha u^{-2-\alpha}v^{-\beta}\right\} \tag{3.72}$$

$$\Psi_{uv}=\left\{0,0,\alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}\right\}$$

$$\Psi_{vv} = \{0,0,-u^{-\alpha}(-1-\beta)\beta v^{-2-\beta}\}$$

olmak üzere,

$$L = \alpha(1+\alpha)u^{-2-\alpha}v^{-\beta} \tag{3.73}$$

$$N = \beta(1+\beta)u^{-\alpha}v^{-2-\beta}$$

$$M = \alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}$$

elde edilir.

$$p = \left(-\alpha^2\beta^2 u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta} + \alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{1/4} \tag{3.74}$$

olur.

Yüzeyin normali ξ,

$$= \{\frac{\beta(1+\beta)u^{-1-\alpha}v^{-2-\beta}}{2\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{3/4}}, \frac{\alpha(1+\alpha)u^{-2-\alpha}v^{-1-\beta}}{2\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{3/4}},$$

$$\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{2(1+\alpha+\beta)}\} \tag{3.75}$$

dır.

$$h = \frac{(du^2v^2)\alpha(1+\alpha)u^{-2-\alpha}v^{-2-\beta}+u\beta\left(2dudv\, v\alpha+dv^2u(1+\beta)\right)}{\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}} \tag{3.76}$$

elde edilir. Böylece,

$$E = \frac{u^{\alpha}v^{2+\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{3/4}}{\beta(1+\alpha+\beta)} + \frac{u^{\alpha}v^{2+\beta}\alpha\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{3/4}}{\beta(1+\alpha+\beta)}$$

$$G = \frac{u^{2+\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{3/4}}{\alpha(1+\alpha+\beta)} + \frac{u^{2+\alpha}v^{\beta}\beta\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{3/4}}{\alpha(1+\alpha+\beta)}$$

$$F = \frac{u^{1+\alpha}v^{1+\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{3/4}}{(1+\alpha+\beta)} \tag{3.77}$$

olarak bulunur.

Yüzeyin konormali,

$$\vartheta = \{\frac{\alpha u^{-1-\alpha}v^{-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}, \frac{\beta u^{-\alpha}v^{-1-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$
$$\frac{1}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}\} \tag{3.78}$$

dır.

u ve v ye göre türevlerini alalım.

$$\vartheta_u = \{\frac{\alpha^2(1+\alpha)\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} + \frac{(-1-\alpha)\alpha u^{-2-\alpha}v^{-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$
$$\frac{\alpha(1+\alpha)\beta^2(1+\alpha+\beta)u^{-1-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-1-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} - \frac{\alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$
$$\frac{\alpha(1+\alpha)\beta(1+\alpha+\beta)u^{-1-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}}\}$$

$$\vartheta_v = \{\frac{\alpha^2\beta(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-1-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-1-\beta-2(1+\beta)}}{2(u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\alpha\beta(1+\alpha+\beta))^{5/4}} - \frac{\alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}}{(u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\alpha\beta(1+\alpha+\beta))^{1/4}},$$
$$\frac{\alpha\beta^2(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-2-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} + \frac{(-1-\beta)\beta u^{-\alpha}v^{-2-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$
$$\frac{\alpha\beta(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-1-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}}\}$$

dir. Bu durumda yüzeyin normali,

$$\xi = \frac{\vartheta_u \wedge \vartheta_v}{[\vartheta,\vartheta_u,\vartheta_v]} = \{\frac{u^{1+\alpha}v^{\beta}(1+\beta)(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{2\alpha(1+\alpha+\beta)},$$
$$\frac{(1+\alpha)u^{\alpha}v^{1+\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{2\beta(1+\alpha+\beta)}, \frac{(\alpha+\beta)(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{2\beta(1+\alpha+\beta)}\} \tag{3.79}$$

dır.

Şimdi, şekil operatörünün katsayılarını hesaplayabiliriz.

$$b_{11}=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)} \tag{3.80}$$

$$b_{12}=\frac{(-1+\beta)(1+\beta)u^{1+\alpha}v^{-1+\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{21}=\frac{(-1+\alpha)(1+\alpha)u^{-1+\alpha}v^{1+\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{22}=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}$$

olarak bulunur.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{2\alpha}v^{2\beta}\sqrt{\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)^2} \tag{3.81}$$

dır.

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)}\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}\right)$$

$$=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)} \tag{3.82}$$

dır.

$K=0$ olması için α ve β nın alacağı değerleri bulalım.

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{2\alpha}v^{2\beta}\sqrt{\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)^2}=0$$

$$(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{2\alpha}v^{2\beta}\sqrt{\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}=0$$

$\alpha \neq \beta$ olduğu durumda, bu denklemin sıfıra eşit olduğunu hesaplamak mümkün olmadığından $\alpha = \beta$ durumu için koşulları inceleyeceğiz.

$\alpha = \beta$ olduğu durumda,

$$(1+\alpha)(1+\alpha)(\alpha+\alpha)u^{2\alpha}v^{2\alpha}\sqrt{\alpha^2(1+2\alpha)(uv)^{-2(1+\alpha)}}$$

$$(1+\alpha)^2 2\alpha.\alpha\sqrt{1+2\alpha}\,(uv)^{2\alpha}(uv)^{-(1+\alpha)}$$

$$(1+\alpha)^2 2\alpha^2\sqrt{1+2\alpha}\,(uv)^{\alpha-1}$$

$\alpha = 0$ için $\beta = 0$

$\alpha = -1$ için $\beta = -1$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ için $\beta = -\frac{1}{2}$

değerleri denklemi sağlar.

$H = 0$ minimal olması için $\alpha\ ve\ \beta$ nın alacağı değerler,

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)} = 0$$

$$(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4} = 0$$

denkleminin çözümü $K = 0$ olması durumu ile aynıdır.

Bu durumda,

$\alpha = \beta$ için $\alpha = \beta = 0, -1, \frac{1}{2}$

dır.

3. Tip Monge Yüzeyi

$$\Psi = \left\{u, v, \frac{1}{u^{\alpha}+v^{\beta}}\right\} \tag{3.83}$$

yüzeyini göz önüne alalım.

$$\Psi_u = \left\{1, 0, -\frac{\alpha u^{-1+\alpha}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^2}\right\} \tag{3.84}$$

$$\Psi_v = \left\{0,1,-\frac{\beta v^{-1+\beta}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^2}\right\}$$

$$\Psi_{uu} = \left\{0,0,-\frac{(-1+\alpha)\alpha u^{-2+\alpha}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^2}+\frac{2\alpha^2 u^{-2+2\alpha}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3}\right\} \quad (3.85)$$

$$\Psi_{uv} = \left\{0,0,\frac{\alpha\beta 2u^{-1+\alpha}v^{-1+\beta}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3}\right\}$$

$$\Psi_{vv} = \left\{0,0,-\frac{(-1+\beta)\beta v^{-2+\beta}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^2}+\frac{2\beta^2 v^{-2+2\beta}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3}\right\}$$

olmak üzere,

$$L = \frac{\alpha u^{-2+\alpha}(-(-1+\alpha)v^{\beta}+(1+\alpha)u^{\alpha})}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3} \quad (3.86)$$

$$N = \frac{\beta v^{-2+\beta}(-(-1+\beta)u^{\alpha}+(1+\beta)v^{\beta})}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3}$$

$$M = \frac{2\alpha\beta u^{-1+\alpha}v^{-1+\beta}}{(u^{\alpha}+v^{\beta})^3}$$

elde edilir.

$$p = \left(-\alpha^2\beta^2 u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}+\alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\right)^{1/4} \quad (3.87)$$

olur.

Yüzeyin normali,

$$\xi = \left\{\frac{\beta(1+\beta)u^{-1-\alpha}v^{-2-\beta}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{3/4}},\frac{\alpha(1+\alpha)u^{-2-\alpha}v^{-1-\beta}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{3/4}},\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{2(1+\alpha+\beta)}\right\}$$

(3.88)

dır.

$$h = \frac{u^{-2-\alpha}v^{-2-\beta}\left(du^2v^2\alpha(1+\alpha)+u\beta\left(2dudv\, v\alpha+dv^2u(1+\beta)\right)\right)}{\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}} \tag{3.89}$$

elde edilir. Böylece,

$$E =$$

$$\frac{u^{\alpha}v^{2+\beta}(-\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta})^{3/4}}{\beta(1+\alpha+\beta)} + \frac{u^{\alpha}v^{2+\beta}\alpha\left(-\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta}\alpha\beta(1+\alpha+\beta)\right)^{3/4}}{\beta(1+\alpha+\beta)}$$

$$G = \frac{u^{2+\alpha}v^{\beta}(-\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta})^{3/4}}{\alpha(1+\alpha+\beta)} + \frac{u^{2+\alpha}v^{\beta}\beta(-\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta})^{3/4}}{\alpha(1+\alpha+\beta)}$$

$$F = \frac{u^{1+\alpha}v^{1+\beta}(-\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-2\alpha}v^{-2-2\beta})^{3/4}}{1+\alpha+\beta} \tag{3.90}$$

dır.

Yüzeyin konormali,

$$\vartheta = \{\frac{\alpha u^{-1-\alpha}v^{-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}, \frac{\beta u^{-\alpha}v^{-1-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$

$$\frac{1}{\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}\} \tag{3.91}$$

dir.

u ve v ye göre türevlerini alalım,

$$\vartheta_u =$$

$$\{\frac{\alpha^2(1+\alpha)\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} + \frac{(-1-\alpha)\alpha u^{-2-\alpha}v^{-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$

$$\frac{\alpha(1+\alpha)\beta^2(1+\alpha+\beta)u^{-1-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-1-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} - \frac{\alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$

$$\frac{\alpha(1+\alpha)\beta(1+\alpha+\beta)u^{-1-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}{2\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{5/4}}\}$$

$\vartheta_v =$

$$\{\frac{\alpha^2\beta(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-1-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-1-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} - \frac{\alpha\beta u^{-1-\alpha}v^{-1-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$

$$\frac{\alpha\beta^2(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-\alpha-2(1+\alpha)}v^{-2-\beta-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}} + \frac{(-1-\beta)\beta u^{-\alpha}v^{-2-\beta}}{(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}},$$

$$\frac{\alpha\beta(1+\beta)(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-1-2(1+\beta)}}{2(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{5/4}}\} \tag{3.92}$$

dır.

Şimdi, şekil operatörünün katsayılarını hesaplayalım.

$$b_{11} = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)} \tag{3.93}$$

$$b_{12} = \frac{(-1+\beta)(1+\beta)u^{1+\alpha}v^{-1+\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{21} = \frac{(-1+\alpha)(1+\alpha)u^{-1+\alpha}v^{1+\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}$$

$$b_{22} = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}$$

olarak bulunur.

Böylece K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$K = \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{2\alpha}v^{2\beta}\sqrt{\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)^2} \tag{3.94}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\alpha(1+\alpha+\beta)} + \frac{(1+\alpha)(1+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)})^{1/4}}{4\beta(1+\alpha+\beta)}\right)$$

$$= \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta)u^{\alpha}v^{\beta}\left(\alpha\beta(1+\alpha+\beta)u^{-2(1+\alpha)}v^{-2(1+\beta)}\right)^{1/4}}{8\alpha\beta(1+\alpha+\beta)} \tag{3.95}$$

dır.

Buradaki α ve β değerleri 2.Tip Monge yüzeyindeki sonuçları ile aynıdır.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Afin uzayda yüzeyler teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edildi. Cetro-afin uzaydaki minimal yüzeylerin afin uzayda açılabilir ve minimal yüzey olma şartları incelendi. Ayrıca Afin uzayda bazı Monge yüzeylerinin açılabilir ve minimal olma şartları da belirlendi. Yapılan bu çalışmada gerekli olan uygulamalar ve hesaplamalar Matematica paket programı kullanılarak yapılmıştır.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar, açılabilir yüzeylerin kullanıldığı deniz araçları yüzeyi, uçak yüzeyleri, mimari yapılarda ve metal temelli endüstrilerde gerekli olan uygulamalara ışık tutabilir.

KAYNAKLAR

1. Milan, F., Singular curves of affine maximal maps, Fundamental Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1(1), 57-68, 2014.
2. Calabi, E., Affine differential geometry and holomorphic curves, Lect. Notes Math., 1422, 15-21, 1990.
3. Boersma, J., Molenaar, J., Geometry of the shoulder of a packaging machine, SIAM Rev., 37 (3), 406-422, 1995.
4. Frey, W.H., Mancewicz, M.J., Developable Surfaces: Properties, Representations and Methods of Design, Technical Report, GM Research Publication GMR-7637, 1992.
5. Pegna, J., Wolter, E-E., Geometrical criteria to guarantee curvature continuity of blend surfaces, ASME Journal of Mechanical Design, 114, 201-210, 1992.
6. Kruppa, E., Analytische und konstruktive Differential geometrie, Springer Verlag-Wien-1957.
7. Hacısalihoğlu, H.H. Diferansiyel Geometri . İnönü Üniversitesi yayınları, Malatya, 1994.
8. Liu ,H., Classification of Surfaces in R^3 which are centroaffine-minimal and equiaffine-minimal, Bull. Belg. Math. Soc. 3, 577-583, 1996.
9. Liu, H.L., Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimesional spaces, J. Geom., 64, 141-149, 1999.
10. Özyürek, D.D. 3 boyutlu afin uzayında bazı özel yüzeyler, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi , 2019.
11. Calabi ,E., Convex Affine Maximal Surfaces, Results. Math. (1988) 13,199.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Malatya'da doğan Hacer KORKMAZ, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Rahmi Akıncı Ortaokulu, Hacı Ahmet Akıncı Lisesinde tamamlamıştır. 2002 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2008 yılında başarıyla bitirmiştir.

İletişim Bilgileri

Adres : Hasanbey Caddesi Hasan Mandallı Sokak Gözde Apartmanı No:22 Battalgazi/MALATYA

Telefon: 0(545)8219367

E-posta: hacerkrkmz44@hotmail.com