

NON-NEWTONYEN AKIŞKANLARDA PARALEL İKİ LEVHA
ARASINDAKİ AKIŞIN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS

Serdal YILMAZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Makine Eğitimi

Nisan 2008

AFYONKARAHİSAR KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans

NON-NEWTONYEN AKIŞKANLARDA PARALEL İKİ LEVHA ARASINDAKİ
AKIŞIN İNCELENMESİ

Serdal YILMAZ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Makine Eğitimi

Nisan 2008

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhammet Yürüsoy danışmanlığında, Serdal YILMAZ tarafından hazırlanan “NON-NEWTONYEN AKIŞKANLARDA PARALEL İKİ LEVHA ARASINDAKİ AKIŞIN İNCELENMESİ”

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 07/04/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇOLAKOĞLU	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Osman ÜNAL	

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	6
2.1 Akışkanlar Mekaniği Nedir	6
2.2 Sürekli Ortam	6
2.3 Euler ve Langrange Tasvirleri	7
2.4 Newtonyen ve non-Newtonyen Akışkanlar	8
2.4.1 Newtonyen Akışkanlar	8
2.4.2 Non-Newtonyen Akışkanlar	9
2.5 Akışkanların Fiziksel Özellikleri	11
2.5.1 Yoğunluk	11
2.5.2 Özgül Ağırlık	12
2.5.3 Viskozite	13
2.5.4 Buharlaşma Basıncı	17
2.5.5 Yüzeysel Gerilme	18
2.5.6 Bir Nokta Etrafında Basınç	21
3. MATERYAL VE METOD	23
3.1 Kartezyen Koordinatlarda Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum ve Enerji Denklemlerinin Çıkartılması	23
3.1.1 Hareket Denklemlerinin Çıkartılması	23
4. BULGULAR	33
4.1 Hız ve Sıcaklık Profilleri İçin Analitik Çözümlerin Bulunması	33

4.1.1 Reynold Viskozite Modeli	36
4.1.2 Vogel Viskozite Modeli	41
4.1.3 Reynold Viskozite Model Grafikleri	46
4.1.4 Vogel Viskozite Model Grafikleri	54
5. SONUÇ	62
6. KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

ÖZET

NON-NEWTONYEN AKIŞKANLARDA PARALEL İKİ LEVHA ARASINDAKİ AKIŞIN İNCELENMESİ

SERDAL YILMAZ

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Bu çalışmada, non-Newtonyen akışkanlar mekaniğinde iki sonsuz paralel levha arasındaki sıkıştırılmaz ve Newtonyen olmayan akışkan incelenmiştir. Non-Newtonyen akışkanlarda kartezyen koordinatlarında üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemleri çıkartılmıştır. Elde edilen bu denklemlerden faydalanılarak paralel iki levha arasındaki tek boyutlu akışı ifade eden denklemler ve sınır şartları belirlenmiştir. Sonuçta kartezyen koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklemler boyutlu denklemler olup daha genel olabilmesi için boyutsuz hale getirilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri için pertürbasyon teknikleri kullanılmıştır.

Çözümlerde en basit pertürbasyon açılımı olan yaya açılımı kullanılmıştır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Analitik çözümlerde, reynold viskozite modeli ve vogel viskozite modeli için çözümler gerçekleştirilmiştir. Ayrıca bu tez çalışmamızda analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümlerde yapılmıştır. Elde edilen analitik ve nümerik çözümler her iki modelde de karşılaştırılmıştır. Ayrıca elde edilen grafiklerde newtonyen ve newtonyen olmayan akışkanlar arasındaki farklar gösterilmiştir.

2008, 77 sayfa

Anahtar kelimeler: Newtonyen Olmayan Akışkanlar, Perturbasyon Tekniği, Paralel Plaka.

ABSTRACT

MSc Thesis

FLOWING RESEARCH of NON-NEWTONIAN FLUID in BETWEEN TWO
PARALLEL PLATES

SERDAL YILMAZ

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Education

Supervisor: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

In the study, non-Newtonian fluid flow in between two parallel plates at same temperatures is considered. The equations of motion are derived for third grade fluids. Acceleration terms, viscous term, third grade fluid terms are calculated for cartesian coordinates. The equations represent two dimensional steady flow. First the equations of motion are derived. Perturbation methods are employed in search of approximate solutions.

The simplest perturbation expansion, namely the pedestrian expansion, is used. The velocity distribution and the temperature distribution are calculated approximately. Third grade fluid with temperature dependent viscosity is accommodated in the analysis. Reynolds model and Vogel model are used to account for the temperature dependent viscosity. Approximate analytical solutions for the velocity and temperature profiles are found using perturbation techniques. It is found that the influence of non-Newtonian parameter and viscosity index is more pronounced in the region of the plate surfaces where rate of fluid strain and temperature gradients are high.

2008, 77 pages

Keywords: Non-Newtonian Fluids, Perturbation Techniques, Parallel Plates

TEŐEKKÖR

Yapılan tez alıőması sırasında danıőmanlıđımı yűrűten hocam Do. Dr. Muhammet YÖRÖSOY'a ve tűm űđrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini yanımda hissettiđim aileme sonsuz teőekkűr ederim.

Ayrıca tez çalıőmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Arő. Grv. Ali KEÇEBAŐ'a ve tűm bűlűm hocalarıma teőekkűrlerimi bir borç bilirim.

SERDAL YILMAZ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

1. Simgeler

A_1	Rivlin Ericksen Tensörleri
A_2	Rivlin Ericksen Tensörleri
C_1	Eksenel Yöndeki Basınç Değişimi
ϵ	Pertürbasyon Parametresi
k	Isı İletim Katsayısı
h	Paralel İki Levha Arasındaki Yükseklik
m	Eleman Hacim Kütle
M	Viskozite Sabiti
T	Mutlak Sıcaklık
p	Mutlak Basınç
R	Gaz Sabiti
V	Eleman Hacmi
V_0	Ortalama Hızı
ρ	Özgül Kütle
μ	Viskozite
ν	Kinematik Viskozite
β	Üçüncü Derece Akışkan Terimi
α	İkinci Derece Akışkan Terimi
Λ	Non-Newtonyen Akışkan Katsayısı
Γ	Brinkman Sayısı
Q_m	Ortalama Sıcaklık
Q_w	Levha Sıcaklığı

2. Kısaltmalar

Non-Newtonyen	Newtonyen Olmayan
u	y Yönündeki Vektörel Hız
v	x Yönündeki Vektörel Hız

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Açıklama	Sayfa No
Şekil 2.1	Akışkanın kayma karakteristiği	10
Şekil 2.2	Akışkanların sınıflandırılması	10
Şekil 2.3	Kayma gerilmesi etkisi altında akışkanların deformasyonu	15
Şekil 2.4	İki tabaka arasında momentum transferi	17
Şekil 2.5	Yüzeydeki arakesit boyunca bir basınç farkının gösterilmesi	19
Şekil 2.6	Islanmayan bir katı cidar üstünde sıvı damlası	20
Şekil 2.7	Bir nokta etrafında basınç	22
Şekil 4.1	Paralel iki plaka arasındaki akışın şematik gösterilmesi	32
Şekil 4.2	Farklı Λ değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	44
Şekil 4.3	Farklı Λ değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca değişimi	45
Şekil 4.4	Farklı M değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	45
Şekil 4.5	Farklı M değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca değişimi	46
Şekil 4.6	Farklı C değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	46
Şekil 4.7	Farklı C değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca değişimi	47
Şekil 4.8	M değeri için analitik ve nümerik hız profilleri	47
Şekil 4.9	M değeri için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri	48
Şekil 4.10	Λ Değeri için analitik ve nümerik hız profilleri	48
Şekil 4.11	Λ Değeri için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri	49
Şekil 4.12	Farklı Λ değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	51
Şekil 4.13	Farklı Λ değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca değişimi	52
Şekil 4.14	Farklı A değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	53
Şekil 4.15	Farklı A değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca değişimi	53
Şekil 4.16	Farklı B değerleri için hız profilinin y eksenine boyunca değişimi	54
Şekil 4.17	Farklı B değerleri için sıcaklık profilinin y eksenine boyunca	55

	değişimi	
Şekil 4.18	Farklı C değerleri için hız profiline y eksenine boyunca değişimi	55
Şekil 4.19	Farklı C değerleri için sıcaklık profiline y eksenine boyunca değişimi	56
Şekil 4.20	A için analitik ve nümerik hız profilleri	56
Şekil 4.21	A için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri	57
Şekil 4.22	C için analitik ve nümerik hız profilleri	57
Şekil 4.23	C için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri	58

1. GİRİŞ

Akışkanlar mekaniği temel bilimlerde ve mühendislikte vazgeçilmez konulardan birini oluşturmaktadır. Yüzyıllar boyunca akışkanlar mekaniği, bugün alt dalları olan hidrolikten ve hidrostatikten ibaret kalmıştır. Ancak son üç ya da dört yüzyılda bugünkü anlamda akışkanlar mekaniği temelleri atılmış, matematiksel formülasyonu yapılmıştır. Özellikle sınır tabakası yaklaşımının geliştirilmesi ile beraber Navier-Stokes denklemlerinin daha basit bir forma sokularak çözülmesi mümkün olmuştur. Günümüzde akışkanlar mekaniği, diğer bilim ve mühendislik dallarında olduğu gibi, o kadar genişlemiştir ki, akışkanlar mekaniği genel olarak incelenebilecek bir kavrama dönüşmüştür. Son yirmi yıl içerisinde akışkanlar mekaniğinde non-Newtonyen akışkanlar mekaniği konusunda çalışmalar yoğunlaşmıştır. Çünkü non-Newtonyen akışkan modeller ile su ve hava dışındaki molekül ağırlığı daha büyük olan akışkanların hareketlerini tam olarak ifade etmek mümkün olmuştur.

Birçok gerçek akışkanın, özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip olanların mekanik davranışları Navier-Stokes teorisi tarafından doğru olarak belirlenmektedir. Bu teorinin uygulanabildiği akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Newtonyen akışkanlar; gerilme ile hızın konuma bağlı değişimi (hız gradyanı) arasında lineer bir ilişkinin olduğu akışkanlar olarak tanımlanabilir. Non-Newtonyen akışkanlarda ise verilen bir sıcaklık ve basınçtaki gerilme ile hız gradyanı arasındaki ilişki lineer değildir.

Newtonyen akışkanlar mekaniği bu yüzyılın başında bir değişime maruz kalmıştır. Bunun ana sebeplerinden birisi 1904'de Prandtl tarafından ortaya atılan sınır tabakası kavramı ve uçak endüstrisi olmuştur. Uçak endüstrisi sayesinde bir cismin etrafında hareket eden akış için geniş çalışmalar yapılmış, bu akış ile ilgili birçok tasarım metodları geliştirilmiştir. Bunun aksine non-Newtonyen akış mekaniği ise daha yakın bir zamanda gelişmeye başlamıştır. Esas itibari ile madde akışı ile moleküler yapı arasında ilişki kurmak isteyen fiziksel kimyacıların polimerik malzeme testleri bu konuda öncü rolü oynamıştır. Polimerik malzemelerin ticari önem kazanması bu

konudaki araştırmaları arttırmıştır. Bu sınıflandırmalara gerek vardı, çünkü non-Newtonyen terimi bir şeyin ne olduğunu değil ne olmadığını ifade eden bir terimdir.

Akışkan denince akla hem sıvı, hem de gaz halindeki maddelerin ifade edildiği bilinen bir gerçektir. Günlük yaşantımızda önemli yeri olan nefes, aldığımız hava, su, süt, ulaşım aralarındaki kullandığımız benzin, mazot, damarlarımızda dolaşan kan hepsi basit akışkanlar kapsamında Newtonyen akışkanlar olarak söyleyebiliriz. Ancak akışkanlar her zaman basit yapıda olmayabilirler. Örneğin; bal, hamur, sulandırılmış nişasta, yumurta akı, bitkisel yağlar bu gruba girerler. Her yerde kullanılan boya ve günlük hayatta oldukça sık rastladığımız asfalt, zift, tutkal gibi maddeler de non-Newtonyen akışkanlardır.

Doğada bulunan akışkanların çoğunluğu non-Newtonyen akışkan modeline uyar. Bu nedenle sabit viskozite kanununa göre bu tür akışkanların özelliklerini ve içinde buldukları ortama göre hareketlerini incelemek mümkün değildir. Bu türdeki belirli bir akışkanı yada belirli özelliği olan akışkanları temsil edebilmek için her akışkanı ve genelinde belli bir akışkanı temsil eden denklemlere ihtiyaç vardır. Viskozitenin sadece kayma gerilmesine bağlı olduğu non-Newtonyen akışkanları en iyi temsil eden Power-Law modelidir. Daha kompleks akışkanlar için ise daha çok sayıda yapısal sabit içeren üçüncü mertebe akışkan modelleri kullanarak akışkanın davranışlarını daha iyi açıklamak mümkün olmakla beraber bu tür akışkan modelleri ile analitik çözümler elde etmek oldukça güçtür.

Non-Newtonyen akışkanlar genelde viskoelastik terimi ile ifade edilirler. Çünkü bu akışkanlar hem viskoziteli akışkan hem de elastik katı davranışını birlikte gösterirler. Newtonyen akışkanlardan alışık olduğumuz bazı özellikleri bu akışkanlar gösteremezler. Bunlara birkaç örnek verelim: normalde bir borudan aşağıya doğru akan bir sıvının çapı yere yaklaştığıca momentum korunumundan dolayı azalır. Hlbuki non-Newtonyen akışkanlarda tam tersi olmaktadır, yani çap yere yaklaştığıca artmaktadır. Bunun sebebi de elastik kuvvetlerin çıkışta serbest kalması ve genleşmeyi sağlamasıdır. Ayrıca non-Newtonyen akışkanlarda jet stabilitesi Newtonyen akışkanlara göre şaşırtıcı oranda daha fazladır. Türbülanslı akımda ise tam anlaşılamayan sebeplerden ötürü yüzey sürtünmesi de büyük ölçüde azalmaktadır.

Bu tez çalışmasında; iki sonsuz paralel levha arasındaki sıkıştırılmaz ve Newtonyen olmayan akışkanın tek boyutlu, akışı ele alınacaktır. Paralel iki levha arasındaki akışkan akışı ve ısı transferi incelenecektir. Paralel iki levha arasındaki akış için birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir çoğunluğu Newtonyen akışkanlar ile alakalıdır. Az sayıda yapılan non-Newtonyen akışkanlar ile ilgili bazı çalışmalar şöyledir:

Szeri ve Rajagopal (1985), çalışmasında bu tezde analitik çözümünün yapıldığı akışkan modeline ait çözümleri nümerik olarak yapmışlardır. Çalışmada ısıtılmış iki plaka arasındaki akışa ait hız ve sıcaklık profilleri elde edilmiştir. Bu çalışmada da viskozite sıcaklığın bir fonksiyonu olarak alınmıştır. Pakdemirli (1994), çalışmasında yine non-Newtonyen akışkan modeli için sınır tabakası problemini ele almıştır. Benzer çözümlerinin yapıldığı çalışmada sınır tabakası denklemleri öncelikle adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiş ve değişik non-Newtonyen katsayılar için nümerik çözümler yapılmıştır. Yürüsoy ve Pakdemirli (1999), kaymalı yatakların yağlanması üçüncü dereceden non-Newtonyen akış modelini kullanmışlardır. Bu çalışmada; üçüncü derece akışkan etkilerinin viskoz etkilerden daha küçük olduğu kabul edilmiştir. Çalışmada pertürbasyon (bir tür seri açılım metodu) yöntemi kullanılarak kaymalı yataklardaki basınç dağılımının yanında hız dağılımı için de analitik çözümler bulunmuşlardır. Yatakta lineer eğimli bir yüzey kullanılmıştır. Massoudi ve Christie (1995), boru içerisindeki üçüncü derece akışkanlar için hareket ve enerji denklemlerinin çözümlerini nümerik olarak yapmışlardır. Bu çalışmada da yine akışkanın viskozitesinin sıcaklığa göre değiştiği göz önüne alınmıştır. Yürüsoy ve Pakdemirli (2002), borularda üçüncü derece akışkan akışını yeniden incelemişlerdir. Massoudi ve Christie (1995), makalesinden farklı olarak pertürbasyon yöntemini kullanarak diferansiyel denklem sistemi için analitik çözümler bulmuşlardır. Ayrıca bulunan analitik çözümler için bazı kısıtlamalarda elde etmişlerdir. Hayat, Kara ve Momoniat (2003), tarafından yapılan bu çalışmada ise gözenekli yüzey üzerinde üçüncü derece akışkan modelini kullanarak analitik çözümler elde etmişlerdir. Çalışmada hem pertürbasyon hem de Lie Grup metodu birlikte kullanılmıştır. Yürüsoy, Yılbas ve Pakdemirli (2006), çalışmasında üçüncü derece akışkan modeli kullanılarak iç içe geçmiş iki boru arasındaki akış incelenmiştir. Makalede borudan akışkana ısı transferinin olduğu kabul edilmiştir. Bu çalışmada da yine Reynold viskozite modeli kullanılarak perturbatif çözümler

üretilmiştir. Çalışmada elde edilen çözümlerden faydalanılarak entropi analizi de yapılmıştır. Entropi analizi iki kısımda incelenmiş olup bunlar sırası ile sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ve ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi olmuştur. Çalışmada non-Newtonyen akışkan karakteri arttırıldıkça toplam entropi üretiminin azaldığı görülmüştür. Pakdemirli, Yılbas ve Yürüsoy (2004), çalışmasında ise kayar yataktaki entropi üretimini incelemişlerdir. Sadece sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimini ele almışlardır. Yürüsoy ve Pakdemirli (1999), çalışmasında elde edilen analitik çözümler bu çalışmada kullanılmıştır.

Tez çalışmasının, ikinci bölümünde kartezyen koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkışı yapılacaktır. Üçüncü dereceden non-Newtonyen akışkanların momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler ve son aşamada üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır. Bu bölümde elde edilecek olan momentum ve enerji denklemleri iki boyutlu kararlı akış için olacaktır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde, ikinci bölümde kartezyen koordinatlar için elde edilen hareket denklemlerinden faydalanılarak paralel iki levha içerisindeki tek boyutlu akışkan akımını ifade eden denklemler ve sınır şartları öncelikle elde edilecektir. Elde edilen denklemler boyutlu denklemler olup çözümlerin daha genel olabilmesi için denklemler boyutsuz hale getirilecektir. Sonuçta kartezyen koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilecektir. Bu denklem sistemleri için yaklaşık analitik çözümler elde edilecektir. Denklemlerin çözümü için pertürbasyon metodu (seri açılım metodu) kullanılacaktır. Literatürde birçok pertürbasyon yöntemi mevcuttur. Bu tez çalışmasında ise kullanılan pertürbasyon yöntemi yaya açılımı olacaktır. Bu açılım sayesinde hız ve sıcaklık profilleri için yaklaşık çözümler bulunacaktır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilecektir. Bunun için literatürümüzde de bahsedilen iki ayrı viskozite modeli olan Reynold ve Vogel modelleri kullanılacaktır. Her iki model için de bu tez çalışmasında hız ve sıcaklık profilleri için analitik çözümler bulunacaktır. Ayrıca tez çalışmasında analitik çözümlerin yanı sıra denklemleri nümerik çözümleri de yapılacaktır. Nümerik çözümler

için Maple paket programı kullanılacaktır. Elde edilen analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırması yapılacaktır. Ayrıca her iki viskozite modeli için elde edilen hız ve sıcaklık profilleri viskozite sabitleri ve non-Newtonyen katsayı için ayrı ayrı çizdirilecektir. Çizdirilen bu grafiklerde Newtonyen ve Newtonyen olmayan akışkanlar arasındaki farklar açıkça ortaya konacaktır. Ayrıca viskozite sabitlerinin akış profilini ve ısı transferini nasıl etkilediği de açıkça gösterilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Akışkanlar Mekaniği Nedir

Mekanik, kuvvet ve hareket bilimidir. Akışkanlar mekaniği de akışkanların hareketini ve etki eden kuvvetleri konu alan bilimi dalıdır. Katılar çok büyük kayma kuvvetlerine sürekli olarak karşı koyabilen maddelerdir. Akışkan ise çok küçük olsa bile bir kayma kuvvetine sürekli olarak direnç göstermeyen maddelerdir. Bir kayma kuvvetinin etkisi altında kaldıklarında, akışkanlar hareket etmeye başlarlar ve kayma kuvveti etki ettiği sürece akışkanların hareketi devam eder. Molekül seviyesinde doğal olarak, sıvılar ve gazlar birbirinden çok farklıdır. Sıvılarda moleküller birbirlerine daha yakın bulunurlar ve aralarında önemli büyüklükte çekim kuvveti vardır. Gaz moleküllerinin arasındaki çekim kuvveti çok zayıftır ve moleküller arası uzaklıkta sıvılardan çok daha fazladır. Sıcaklık ve basınç arttıkça, sıvılar ve gazlar arasındaki farklar da azalır ve kritik şartlara ulaşıldığında da sıvılar ve gazlar arasında fark kalmaz. Normal şartlarda gazlar ve sıvılar arasındaki en önemli farklılık, genişlemeye tabi tutulduklarında gösterdikleri davranış ile belirginleşir.

2.2 Sürekli Ortam

Yukarıda akışkanların diğer tüm maddeler gibi atomlardan veya moleküllerden meydana geldiğinden söz ettik. Burada hemen akla akışkanlarla ilgili herhangi bir problemin çözümünde o akışkanı meydana getiren bu temel elemanların davranışlarının incelenmesiyle akışkan davranışı hakkında bilgi edinebilme fikri gelebilir. Fakat bizim problemimizin boyutları içinde ne kadar akışkan molekülü olduğu hakkında yapılacak basit bir hesap bile böyle bir yaklaşımın pek yararlı olmayacağını gösterir. Örneğin; akışkan problemi olarak bir buzdolabı içindeki hava hareketini düşünelim. Buzdolabının hacmi yaklaşık 1m^3 olsun. Normal koşullarda böyle bir hacim içindeki azot moleküllerinin sayısı yaklaşık olarak (2.7×10^{25}) kadardır. Bu sayıda maddesel parçacığın en basit hareketini incelemek, parçacıkların dinamiğinin doğru ifade edildiğini kabul edersek, saniyede 10 işlem hızına sahip süper bilgisayarlarla bile, bellek problemi

halledildiği varsayımı altında, milyonlarca yıl sürecektir. Yakın gelecekte bilgisayarların hızındaki artış bile bu problemin sayısal olarak çözülmesini olanaklı kılamayacaktır. Verilen bir hacimdeki molekül sayıları sıvılara göre oldukça düşük olan gazlar için geçerli olan bu zorluk, sıvılar için şüphesiz daha da aşılmazdır. Bu durumda problemimizi çözmek için akışkanları bir moleküller kümesi olarak görmekten vazgeçmek ve hesaplarımızı daha büyük boyutlarda yapmak zorundayız. Moleküllerin çapları farklı olmakla beraber küçük boyutlara örnek olarak uçak kanatları üzerinde karşılaştığımız sınır tabaka problemleri büyük boyutlara örnek olarak da atmosferdeki hava akımlarının incelenmesi verilebilir. Bu boyutlar göz önünde bulundurulduğunda en küçük hacimdeki molekül sayısı bile olağanüstü yüksek olmakta ve gözlemci açısından bu moleküllerin "kişisel" davranışlarının hiçbir önemi bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu küçük hacimdeki akışkanı bir bütün olarak kabul edebilir ve bu boyutlardaki akışkan hacimlerinin birbirleriyle etkilenmelerini incelemekle yerebiliriz. Böylece akışkanı, moleküllerden meydana gelmiş ayrışık bir ortam yerine, sürekli bir ortam olarak kabul etmiş oluruz. Böyle bir yaklaşım moleküllerin birbirleriyle olan ilişkilerini incelemek zorunda olan bir kimyacı için son derece yanlış olacaktır. Öte yandan akışkanların global davranışları ile ilgilenenlere, örneğin makine veya inşaat mühendislerine, işlerini son derece kolaylaştıracak ve akışkanlarla ilgili olarak aksi takdirde hiç bir zaman elde edemeyecekleri genel kurallar bulmalarını sağlayacaktır.

Bir akış parçacığının teorik ve deneysel olarak analiz edilebilmesi için pozisyon ve zamana bağlı olarak (x,y,z,t) tanımlanması gerekir ki, işte bu zamana ve konuma bağımlılık akışkanlar mekaniğini de katı cisimler mekaniğinden ayırır. Bir akış problemini tanımlama da ya bir akış alanı tespit edilerek bu akış alanında basınç, hız, sıcaklık gibi değerler belirlenir (Euler metodu), ya da belli bir partikülün hareketi akış alanı içinde zamana bağlı olarak takip edilmesi (Langrange metodu) olarak bilinir.

2.3 Euler ve Lagrange Yöntemleri

Daha önce de belirttiğimiz gibi, akışkan hareketini incelemek için kavramları matematik diliyle ifade etmeliyiz. Fakat biliyoruz ki matematiksel olarak dile getirilecek herhangi

bir durum büyüklüğü ancak önceden kesin olarak tanımlanmış bir referans sisteminde anlam taşır. Örneğin, bir akışkan parçacığının hızının 10 m/s olduğunun söylenmesi tek başına hiç bir anlam taşımaz. Doğru olan, örneğin, uzay içinde laboratuara bağlı olarak seçilmiş kartezyen bir koordinat sisteminde hız vektörü normunun (büyüklüğünün) SI birim sisteminde 10 olduğunun söylenmesidir. Çünkü şayet koordinat sistemi laboratuarda değil de uzayda sabit oldukları kabul edilen yıldızlara bağlı ise hızın 10 m/s olması apayrı bir durumu ifade eder. Koordinat sisteminin uygun seçilmesinin ve açıkça belirtilmesinin ayrı bir önemi de, incelenecek olan akışkan hareketinin matematik ifadesinin bir koordinat sisteminde çok kolay, bir diğerinde ise yine doğru fakat oldukça karmaşık olabilmesi, dolayısıyla yanlışlıklara daha açık olmasıdır. Bu yeni kavramlar akışkan hareketinin katıların hareketlerinden farklı olarak akışkan kütlelerin boyutlarına göre oldukça büyük yer değiştirmeleri kapsamından doğmuştur. Yer değiştirmelerin akışkan kütlelerin boyutlarına göre oldukça büyük olması akışkanın uzaydaki konumunun, hızının ve ivmesinin sabit bir koordinat sistemine göre yazılmalarının ne kadar uygun olduğu sorusunu akla getirmiştir. İşte akışkan hareketinin, sabit bir koordinat sistemine göre mi, yoksa akışkanla beraber hareket eden bir koordinat sistemine göre mi tasvir edilmesi gerektiği sorusu akışkanlar mekaniğinde iki ayrı tasvir yönteminin doğmasına sebep olmuştur. Akışkan hareketinin sabit, örneğin laboratuara bağlı bir koordinat sistemine göre tasvir edilmesine Euler yöntemi, akışkanı takip eden bir koordinat sistemine göre tasvir edilmesine Lagrange yöntemi denir. Bu tanımların hatırlanmasına yardımcı olması açısından Euler'in bir geometrici olarak uzayı öne çıkardığı, Lagrange'ın ise bir mekanikçi olarak maddeyi yani akışkanı öne çıkardığı da söylenir. Bu kavramların matematik olarak ifade edilmesine gelince Lagrange yönteminde bir akışkan parçacığının konumu başlangıç konumu koordinatları ve zamanın bir fonksiyonu olarak yazılır. Konumdan türetilen hız ve ivme de gene bu değerler, başlangıç konumu koordinatları ve zaman bağımsız değişkenler olarak kabul edilmek suretiyle elde edilirler. Euler yönteminde bir akışkan parçacığının konumu söz konusu olan anda akışkan parçacığının işgal ettiği uzaydaki noktanın konum koordinatları ve zamanın bir fonksiyonu olarak yazılır. Gene konumdan türetilen hız ve ivme de sadece zaman bağımsız değişken olarak kabul edilmek suretiyle elde edilirler (Uysal 2002).

2.4 Newtonyen ve Non-Newtonyen Akışkanlar

2.4.1 Newtonyen Akışkan

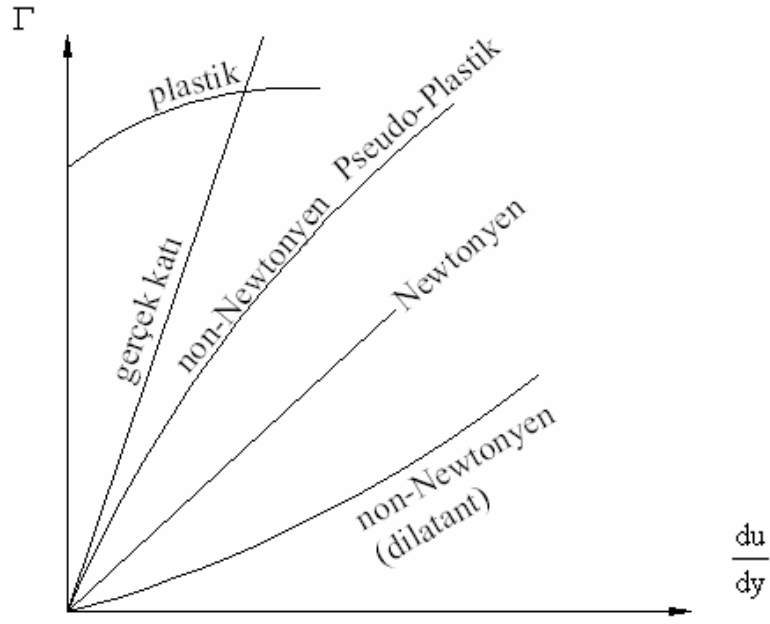
Aşağıdaki şekilde akışkanların karakteristiği gösterilmiştir. Burada x koordinatı hız gradyanını (deformasyon hızını), y koordinatı ise kayma gerilmesini göstermektedir.

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$ formuna uyarlar. τ kayma gerilmesi, μ mutlak viskoziteyi ifade etmektedir.

Bu orijinden geçen eğim μ olan bir doğruyla tariflenir. Bu gibi akışkanlar Newtonyen akışkan olarak isimlendirilir. Newton tarafından tanımlanan bu karaktere en yakın olarak doğada su ve havayı göstermek mümkündür. Doğada bunlar dışında daha birçok akışkan mevcut olup, davranışı bu karaktere uymaktadır. Bu özelliğinden dolayı bu akışkanlara Newtonyen akışkanlar denir (Soğukoğlu 1995).

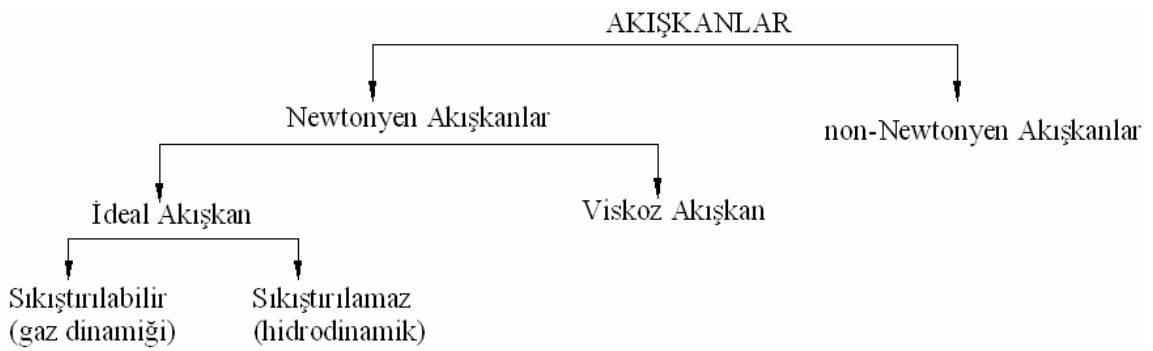
2.4.2 Non-Newtonyen Akışkan

Bu tip akışkanlarda kayma gerilmelerinin çok küçük değerleri dışında kayma gerilmesi ile hız gradyanı orantılı değildir. Non-Newtonyen akışkanlarda viskozite hız gradyanına bağlıdır. Bazı Non-Newtonyen akışkanlar için, sabit bir kayma gerilmesinde zamanla viskozite değişir. Sıvılar, zamanla viskozite artıyorsa 'rheopectic' azalıyorsa 'thixotropic' olarak isimlendirilir. Viskozitesi sıfır olduğu kabul edilen akışkanlar 'ideal akışkan' olarak isimlendirilirler, kayma deformasyon mukavemeti sıfırdır ve grafik x eksenine paraleldir. Bu tür akışkan doğada mevcut olmamakla beraber bu kabul matematiksel işlemlerde büyük kolaylık sağlar. 'İdeal veya Elastik katı' hiçbir yük şartında deformasyon göstermezler ve grafik y eksenine paraleldir. Bu tür akışkan doğada mevcut olmamakla beraber bu kabul matematiksel işlemlerde büyük kolaylık sağlar.



Şekil 2.1 Akışkanın kayma karakteristikleri

Şekil 2.1’de akışkanın kayma gerilmesi etkisi altındaki hız gradyanındaki değişimini göstermektedir. ‘Gerçek katı’; bir miktar deformasyon vardır ve grafik, orantı sınırı (Hooke Kanunu) içinde, düşeye çok yakın bir doğrudur. ‘Plastik katı’; şekil değiştirmeden bir miktar kayma gerilmesi alır, belli bir limitten sonra kayma gerilmesi deformasyon ile orantılı olarak hızla değişir.



Şekil 2.2 Akışkanların sınıflandırılması

Şekil 2.2’deki gibi akışkanları yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda sınıflandırmak mümkündür.

2.5 Akışkanların Fiziksel Özellikleri

Bilindiği gibi maddenin hallerini genel olarak katı, sıvı ve gaz olarak üçe ayırmak mümkündür. Akışkan başlığı altında sıvı ve gaz hallerdeki maddeleri toplamaktayız. Her ne kadar akışkan kavramı maddenin fiziksel olarak en küçük parçası olan atomların bir araya gelmesinden oluştuğu bilgisine erişilmeden önce kullanılmış ise de, akışkanların fiziksel özelliklerinin temelinde akışkan maddeyi oluşturan atomların birbirlerinden oldukça uzak olmasının yattığını söyleyebiliriz. Günlük deneyimlerimizde bu farklılığın en önemli dışa vurumunun akışkanın içine konulduğu kabın şeklini alması olduğunu biliyoruz. Aslında akışkanlarla ilgili bu gözlemimizin altında yeryüzü üzerinde gözlemlediğimiz tüm akışkanların bir kütle kuvveti olan yerçekiminin kaçınılmaz etkisi altında olması yatmaktadır. Bir akışkanı yerçekimi gibi kütle kuvvetlerinin etkisi dışında, örneğin uzayda, inceleyecek olursak akışkanın içine konulduğu kabın şeklini alması sıvı akışkanlar için doğru olmadığını görürüz. Uzayda sıvı akışkanların bir başka özelliği olan yüzey gerilmesinin öne çıktığını ve sıvı akışkanın şekil almasına yön verdiği görülür. Yüzey gerilmesini de gene akışkan atomları ya da molekülleri arasındaki çekme ve itme kuvvetleri ile açıklamak mümkündür. Görüldüğü üzere, birçok konuda olduğu gibi, akışkanlar hakkında koşulların ne olduğunu belirtmeden yapılacak sözel savlar son derece yanıltıcı olabilmektedir. Pozitif bilimlerin başarısının altında bilginin sözellikten kurtarılıp matematik diliyle yazılmış olmasının bulunduğunu biliyoruz. Akışkanlar hakkında günlük deneyimlerinden gözlemlediği ya da gözlemleyemediği bazı genel özelliklerden fazla matematiksel ifadeler kullanmaksızın söz etmekte yarar vardır.

2.5.1 Yoğunluk

Bir sıvının özgül kütlesi birim hacminin kütlesidir. Akışkanın içindeki bir noktada yoğunluk;

$$\rho = \lim \frac{m}{v}$$

İfadesiyle verilir, burada m ; elemanter hacim kütlesi ve v ; örnek elemanter hacimdir. Ortalama yoğunluk, verilen akışkan kütlesinin hacmine bölünmesiyle bulunur.

$$\rho = \frac{m}{v}$$

Gazların özgül kütleleri ise mükemmel gaz kanunu kullanılarak hesaplanır.

$p = \rho RT$ Burada p mutlak basınç, ρ özgül kütle, R gaz sabiti ve T mutlak sıcaklıktır. R gaz sabiti; sıcaklık ve basınçtan bağımsızdır. Gaz halde cismin molekülleri çok seyrek, bu nedenle moleküller arasındaki çekim (kohezyon) etkili olmaz ve birbirlerinden serbestçe uzaklaşabilirler. Gazlar içinde buldukları kabın şeklini ve hacmini alırlar; yani kabı daima doldururlar. Gaz molekülleri bir kap içinde çok sıkıştırıldığı hallerin dışında, moleküllerin toplam hacmi gazın hacmi yanında yok sayılabilir ve aralarındaki çekim hesaba katılmayabilir. Böyle bir gaza ideal gaz denir. Gerçek gazlarda moleküllerin toplam hacmini ve aralarındaki çekim kuvvetini, özellikle sıkıştırılmış halde hesaba katmak zorunludur. Bir akışkanın özgül kütlesi bunun moleküler yapısına yani boyutlarına, moleküllerin ağırlığına ve molekülleri bir arada tutan mekanizmalarına bağlıdır. Moleküllerin çekim mekanizması sıcaklık ve basınçla değişir, bu nedenden dolayı akışkanın özgül kütlesi basınç ve sıcaklıkla değişmektedir. Genellikle sıvıların özgül kütleleri sıcaklıkla değişmesine rağmen basınçla çok az değişir, buna karşın gazların özgül kütleleri hem basınç hem de sıcaklıkla değişmektedir.

2.5.2 Özgül Ağırlık

Bir akışkanın özgül ağırlığı, birim hacmini ağırlığıdır.

$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

Burada ΔW ; ΔV elemanter hacmin ağırlığıdır.

$$\Delta W = \Delta mg$$

$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta mg}{\Delta V} = \rho g$$

veya

$$\gamma = \rho g \text{ 'dir.}$$

2.5.3 Viskozite (Akışkanın Kayma Gerilmelerine Karşı Davranışı)

Katıların kayma gerilmelerine karşı dirençlerinin oldukça büyük olmasına rağmen akışkanların gösterdiği direnç oldukça küçüktür, en küçük kayma gerilmesi etkisi altında dahi akışkan sürekli olarak şekil değiştirir.

Durgun bir akışkana bir teğetsel kuvvet uygulanırsa bu akışkanın deforme olmasına sebep olur. Deformasyon, akışkanın içinde birbirine komşu akışkan tabakalarının, birbirleri üzerinde farklı hızlarda kaymasıdır. Doğadaki bütün akışkanlarda, akışkan tabakalarının; birbirleri üzerinde hareket etmelerine karşı dirençleri söz konusudur. Bu direnç akışkan viskozitesi olarak isimlendirilir. Bunun için viskozite birbirine komşu tabakaların birbirlerine göre hareketlerinde içsel direncin ölçümü olan bir akışkan özelliğidir. Normal şartlar altında bal ve gliserin gibi akışkanlar su ve alkol gibi akışkanlara göre daha büyük bir direnç gösterirler. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir konu da akışkanın viskozitesi ile yoğunluğu arasındaki ilişkinin olmamasıdır. Gazlar da akışkan olduklarından sıvılara göre daha az da olsa viskoziteye sahiptirler.

Literatürde viskozite diğer bir deyişle şöyle tariflenmektedir; bir sıvının en önemli özelliği akmasıdır, bu sıvının akmaya karşı gösterdiği direnç veya akışkanın akabilme özelliği viskozite olarak adlandırılır. Durgun halde bulunan bir suyun üzerinde elimizi gezdirirsek, bir akım oluşur fakat bu akım derine doğru zayıflar, o halde suyun kayma gerilmesine karşı az da olsa bir direnci vardır.

Viskozite kavramı izah edilecek olan bu deneyde daha iyi açıklanabilir. Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi birbirine y kadar mesafede paralel iki levha alalım, bu iki levhanın arası bir akışkanla dolu olsun ve üstteki levhaya etki eden F teğetsel kuvvetin etkisiyle u hızıyla hareket etsin ancak alttaki levha sabit halde kalsın. Hareketsiz levha üzerindeki hariç bütün akışkan partikülleri üst levhanın hareketi doğrultusunda hareket ederler. Levhalar arasındaki akışkanın her bir tabakası akım boyunca hız gradyanına sebep olacak şekilde değişik hızlarda hareket ederler. Yeterince küçük bir akışkan bölgesi için akışkan tabakalarının doğrusal olarak hareket ettikleri kabul edilebilir. Aşağıdaki şekilde BCDE elemanların hareket etmesiyle B' , C' , D' , E' konumuna ulaşacaktır. Bu elemanın açılma deformasyonunu θ ile verebiliriz.

1-) y mesafesinde A sabit alanına sahip hareketli levhanın u hızı levhaya etkileyen F kuvvetiyle doğru orantılıdır;

$$F \approx u$$

2-) y mesafesinde u sabit hızlı levhaya uygulanan kuvvet A alanıyla doğru orantılıdır.

$$F \approx A$$

3-) u hızı ile hareket eden A alanlı levhaya uygulanan F kuvveti, levhalar arasındaki y mesafesiyle ters orantılıdır.

$$F \approx \frac{1}{y}$$

Bu ilişkiler bir arada düşünülürse

$$F \approx \frac{uA}{y}$$

veya

$$\frac{F}{A} \approx \frac{u}{y}$$

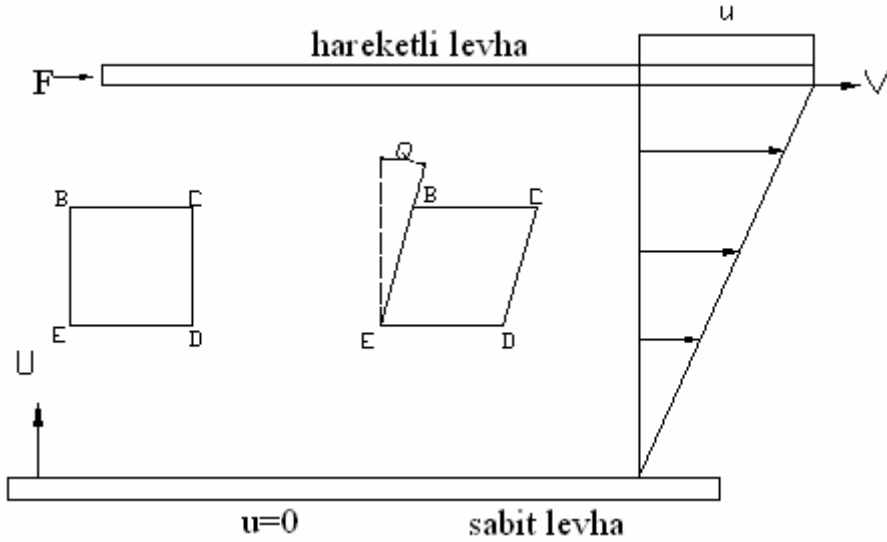
Elde edilir, burada F teğetsel kuvvetin A alanına oranı Γ kayma gerilmesi olduğuna göre;

$$\Gamma \approx \frac{u}{y}$$

yada

$$\Gamma = \mu \frac{u}{y}$$

Bulunur. Burada μ bir sabittir. Akışkan tabakaları arasındaki içsel akışkan direncinin bir ölçüsüdür ve 'dinamik viskozite katsayısı' olarak adlandırılır, diğer bir viskozite katsayısı da $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 'kinematik viskozite katsayısı' olarak literatürde tariflenmiştir.

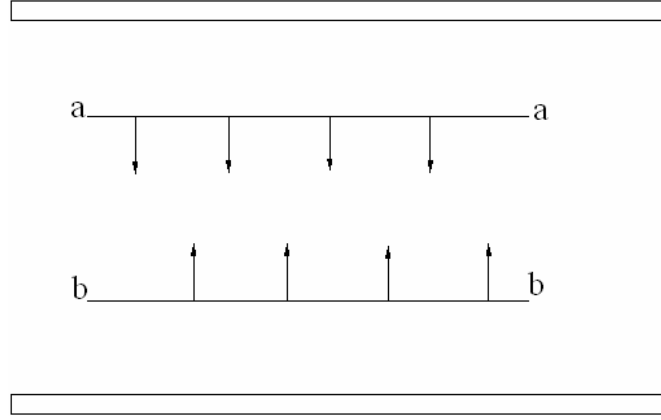


Şekil 2.3 Kayma gerilmesinin etkisi altında akışkanın deformasyonu

Şekil 2.3’de levhalar arasındaki akışkan tabakalarının hızında lineer bir değişim görülmektedir. Gerçekte böyle bir lineer değişim mümkün değildir, o halde aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi non-lineer (lineer olmayan) bir değişim olmaktadır. Bu durumda non-lineer değişimi karakterize edecek hız gradyanını $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ diferansiyel formunda yazmak daha doğrudur. Bu ifade viskozitenin Newton kanunu (Newtonyen viskozite) olarak bilinir. Bu denklemden $\frac{du}{dy}$ hız gradyanının sonsuz olduğu yerde kayma gerilmesinin de sonsuz olacağı sonucunu çıkartabiliriz. Fiziksel olarak sonsuz kayma gerilmesi dolayısıyla sonsuz hız gradyanı mümkün değildir. Hız gradyanı sadece hızdaki ani bir değişim esnasında sonsuz olur. O halde kayma gerilmesinin sonsuz olmaması için akım boyunca hız değişiminde herhangi bir ani değişim olmaksızın süreklilik olmalıdır. Böylece, hareketsiz sınırdaki akışkan tabakasının hareket etmemesi gerekir. Çünkü herhangi bir hareket hız gradyanına ani bir değişime neden olur. Dolayısıyla daima sabit sınırdaki ‘kaymama şartı’ söz konusudur.

Viskozitenin iki önemli sebebi vardır, bunlar; ‘moleküler çekim kuvveti’ ve ‘moleküler momentum transferi’dir. Daha önce de ifade edildiği gibi, sıvıların molekülleri birbirlerini çekerler ve bu karşılıklı çekim kuvveti bir tabakanın diğeri üzerinde kaymasını engelleyeceği için viskozite etkisini arttıracaktır. Moleküler çekim kuvveti bir tabakanın diğeri üzerinde kaymasını engelleyeceği için viskozite etkisini arttıracaktır. Moleküler çekim sıvılarda viskozitenin en önemli sebebidir. Sıcaklığın artmasıyla moleküler çekim zayıflayacağından, sıvının viskozitesi sıcaklıkla azalır. Normal şartlarda basıncın moleküler çekim üzerine dolayısıyla viskoziteye bir etkisi yoktur. Her ne kadar gazlarda moleküler çekim kuvveti ihmal edilebilirse de, viskozite etkisi vardır. Ancak gazlarda viskozitenin en önemli nedeni moleküler momentum transferidir. Bu etki şöyle açıklanabilir. Aşağıdaki şekilde görülen doğrusal ve paralel bir gaz akımı varsayalım, aa tabakasının bb tabakasından daha hızlı hareket ettiğini kabul edelim. Gaz molekülleri serbestçe hareket ettiklerinden, aa tabakasından daha hızlı hareket eden bazı moleküller bb tabakasına geçerler ve oradaki daha yavaş hareket eden moleküllere çarparlar. Bu olay bb tabakasının momentumunu hızlandırarak artırır. Benzer şekilde bb tabakasında daha yavaş hareket eden moleküller aa tabakasına girerler ve aa tabakasının

momentumunu azaltarak yavaşlatırlar. Bu hızlanma ve yavaşlama gazda viskoz kuvvetlerin artmasına sebep olur. Sıcaklıktaki artış moleküllerin hareketini artırdığı için gazın viskozitesi de sıcaklığın artmasıyla artar.



Şekil 2.4 İki tabaka arasında momentum transfer

Şekil 2.4’de iki tabaka arasındaki momentum transferi görülmektedir. Moleküler momentum transferi hali sıvılarda meydana gelse bile moleküler çekim kuvveti ile mukayese edildiğinde ihmal edilebilecek mertebededir.

2.5.4 Buharlaşma Basıncı

Sıvı içindeki moleküller sabit bir hareket kabiliyetine sahiptirler ancak bazı moleküller momentumlarından dolayı sıvı yüzeyinden diğer ortama buhar olarak geçerler. O halde bir cismin sıvı halden gaz hale geçmesine buharlaşma denir. Buhar gaz halindedir ve diğer gazlar gibi bir kısmi basınç uygular. Bu kısmi basınç buhar basıncı olarak bilinir. Verilen bir zaman içinde sadece sıvı yüzeyinden molekül kaçıışı olmaz, bir miktarı geri döner. Eğer buharlaşma miktarı ile geri dönüş miktarı eşit ise denge haline ulaşılmış olur. Bu durumda buharlaşma basıncı ‘doymuş buhar basıncı’ olarak bilinir. Bu durumda diğer ortam belirlenmiş bir sıcaklıkta tamamen doymuş hale gelmiştir yani daha fazla buhara yer kalmamıştır.

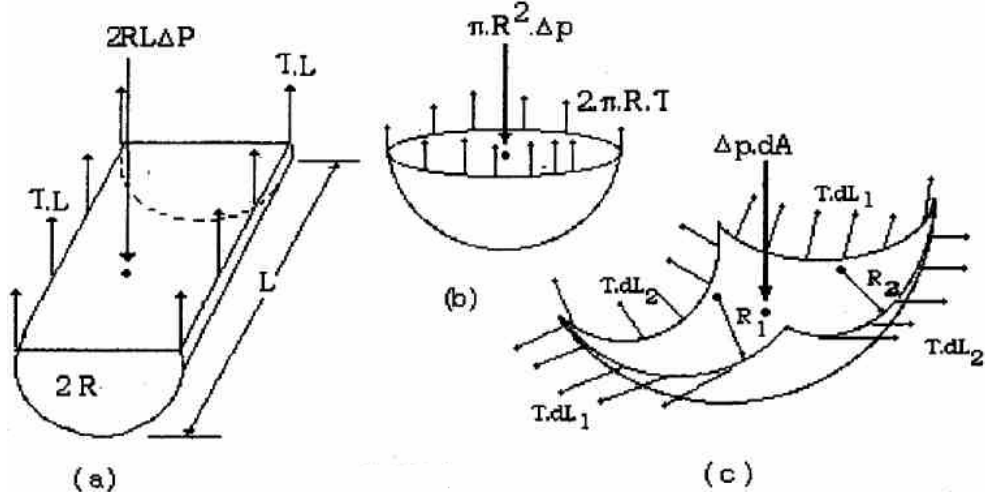
Moleküllerin hareket miktarı artan sıcaklıkla artacağından, moleküllerin sıvı yüzeyinden kaçma kabiliyetleri artar dolayısıyla buharlaşma basıncı da artar.

Eğer sıvı yüzeyi üzerindeki basınç, doymuş buhar basıncından az ise, denge hali bozulacak ve yüzeyden buhar transferi meydana gelecektir. Bu olay kaynama olarak bilinir. Kaynama, içten buharlaşmaya denir. Su cam bir balonda ısıtılırsa önce içindeki soğurulmuş gazlar kabarcıklar halinde çıkar, sonra sıcaklık yükselince sıvının içinde ısı kaynağına yakın yerlerde buhar kabarcıkları oluşur. Bunlar sıvının nispeten soğuk üst tabakalarında sıvılaşır. Soğurma sonucu tıktırtı sesi iştilir ve üst tabakalar da ısınır. Daha sonra yükselen kabarcıklar yukarıda sıvı basıncı az olduğunda genişler ve sıvı yüzeyinde patlarlar, böylece kaynama başlamıştır. Kaynama ancak kabarcık içindeki doymuş buharın sıvı yüzeyindeki basıncı eşit olduğunda başlar. Saf suyun deniz seviyesindeki kaynama sıcaklığı 100 C^0 'dir. Çünkü bu sıcaklıkta suyun doymuş buhar basıncı deniz seviyesindeki atmosfer basıncına eşittir. Kaynama eğer sıvı yüzeyindeki basınç deniz seviyesindeki atmosfer basıncından daha küçükse, daha düşük sıcaklıklarda da meydana gelebilir. Benzer olarak kaynama sıcaklığı sıvı yüzeyindeki basınç miktarı artırılarak yükseltilebilir. Bu olay yemeklerin daha yüksek sıcaklıklarda kaynaması sağlanarak daha iyi pişmelerine de yardım eder. Benzer şekilde eğer, sıvının basınç miktarı yeterince küçükse meydana gelecek kabarcıklardan çözünmüş gaz açığa çıkar. Bu kabarcıklar eğer yüksek basınç bölgelerinde transfer olursa kuvvetli şok kuvvetleri meydana getirerek patlarlar. Bu olay da kavitasyon olarak bilinir. Kavitasyon, su yapılarında meydana getireceği zarardan dolayı, mühendisler tarafından üzerinde durularak, tedbir alınması gereken en önemli bir problemdir (Uysal 2002).

2.5.5 Yüzey Gerilimi

Serbest genişleme yeteneği olmayan bir sıvı, ikinci bir sıvı veya gaz ile arakesit yaparak şekillenecektir. Böyle arayüzeylerin fiziksel yapısı oldukça karmaşıktır ki tüm bölümleri bu konuya tahsis edilmiş kitaplar dahi mevcuttur. Sıvılardaki ağır moleküller yakın temasları dolayısıyla birbirlerine iterler. Yüzeydeki moleküller ise daha az yoğun olduklarından birbirlerini çekerler. Yüzeydeki moleküllerin komşularının yarısı kaybolduğundan, buradaki mekanik etki "Yüzey Gerilimi" olarak ortaya çıkar. Akışkanlar mekaniğinde yüzeydeki bu etkiler "Yüzey Gerilimi" kavramıyla uygun bir şekilde hesaplanabilir. Arakesit yüzeyinde d_1 uzunluğunda bir kesit yapılırsa, $T.d_1$

değerinde, kesite normal ve yüzeye paralel, eşit ve zıt kutuplar ortaya çıkar. Burada T yüzey gerilim olup, boyutu PLT de FL^{-1} birimi ise, S1 birim sisteminde, N/m dir.



Şekil 2.5 Arakesit yüzeyi boyunca bir basınç farkının gösterilmesi

En yaygın, temiz bir yüzey ve $20\ ^\circ C$ sıcaklık şartlarında çeşitli sıvıların hava ile oluşturduğu yüzeylerde yüzey gerilim değerleri T (dyn/cm olarak): benzol 28.9, Tetraclorür 26.8, Etilalkol 22.3, cıva 465, Su 72.8 olarak ölçülmüştür. Bunlar hedef değerler olup, yüzeyler, deterjan veya yağla kirli olması halinde önemli ölçüde değişebilir. Genellikle yüzey gerilimi T, sıvı sıcaklığı ile azalmakta ve kritik noktada sıfır olmaktadır.

Arakesit yüzeyi bir eğri ise, mekanik denge şartı, arakesit yüzeyi boyunca bir basınç farkının mevcudiyetini gösterir ve basınç, konkav tarafta daha büyük olur. Bu, şekil 2.5’de gösterilmiştir. Şekil 2.5’a da bir sıvı silindirin iç kısmındaki basınç artışı iki yüzey gerilimi tarafından dengelenmektedir. Buna göre:

$$2RL\Delta p = 2T.L \Rightarrow \Delta p = \frac{T}{R}$$

olur. Bu hesaplamada sıvının ağırlığı göz önünde bulundurulmamıştır. Şekil 2.5 b’de ise, küresel bir damlanın iç kısmındaki basınç artışı dairesel bir yüzey gerilim kuvveti ile dengelenmektedir. Buna göre;

$$\pi R^2 \cdot \Delta p = 2\pi R \cdot T \Rightarrow \Delta p = \frac{2T}{R}$$

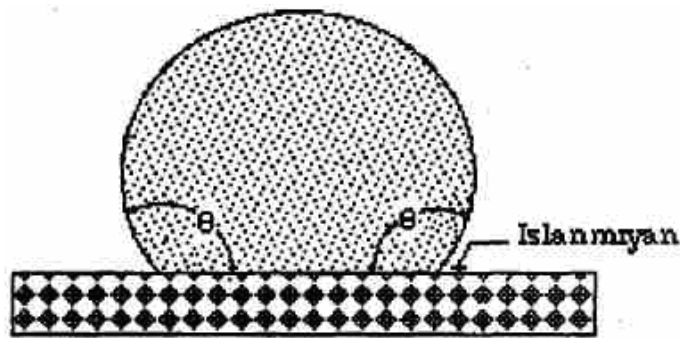
olur. Bu sonuç bir sabun köpüğü içindeki basınç artışı öngörülerek kullanılabilir ki bu hava ile iki ara yüzeye sahiptir. Aşağı yukarı aynı R çapında bir iç ve dış yüzey için;

$$\Delta p_{\text{köp.}} = 2 \cdot \Delta p_{\text{damla}} = \frac{4T}{R}$$

Şekil 2.5 c’de, ana eğrilik yarıçapları R_1 ve R_2 olan genişgüzel bir kesit yüzeyi konumunu göstermektedir. Yüzey normali doğrultusundaki dengeleyici kuvvet gösterecektir ki, konkav taraftaki basınç artışı;

$$\Delta p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ dir. Ayrıca bu denklemlerdeki genel bağıntılardan } R = R_1 \text{ ve } R_2 = \infty$$

için çıkarılabilir.



Şekil 2.6 İslanmayan bir katı cidar üzerinde sıvı damlası

İkinci önemli yüzey etkisi sıvı, şekil 2.6’daki gibi bir katı yüzeyle arakesit yüzey oluşturduğunda, temas açısı θ olarak ortaya çıkar. Bu takdirde kuvvet dengesi hem T ve

hem de θ 'yı içerir. Eğer temas açısı 90° 'den küçük ise, sıvı katı cidarı ıslatır. $\theta > 90^\circ$ ise, sıvı ıslatmayan sıvı olarak isimlendirilir. Mesela; su sabunu ıslatır, fakat mumu ıslatmaz. Su temiz bir cam yüzeyini $\theta = 0^\circ$ açısıyla güzelce ıslatır. Yüzey gerilim T gibi, temas açısı θ katı sıvı ara yüzeyinin gerçek fizikokimyasal şartlarına göre duyarlıdır. Temiz bir cıva hava cam ara yüzeyi için, temas açısı $\theta = 130^\circ$ dir. Özel olarak su gümüş temas yüzeyinde $\theta = 90^\circ$ C olmaktadır.

2.5.6 Bir Nokta Etrafında Basınç

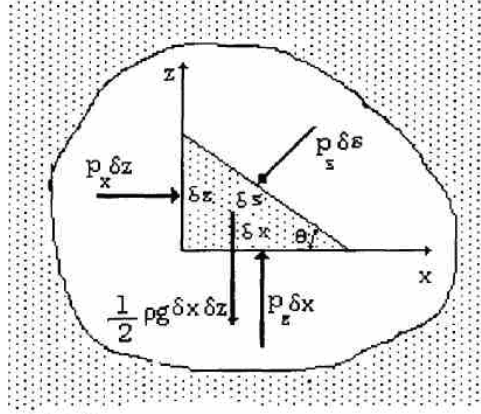
Bir yüzey üzerindeki ortalama basınç, yüzey normali doğrultusundaki kuvvetin yüzey alanına bölümü ile elde edilir. Bir noktadaki basınç ise; kuvvetinin normla bileşeninin yüzey alanına oranından, o noktada alan boyutlarının limit olarak sıfıra gitmesi halinde bulunmuş olur. Hareketsiz bir sıvıda bir noktada basınç her doğrultuda eşit olup, doğrultunun fonksiyonu değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki şekilde hareketsiz bir sıvı ortam içerisinde kenar uzunlukları $\delta x, \delta z$ olan üçgen şeklinde sonsuz küçük bir sıvı elemanı gözönüne alalım. Bu elemanın üzerindeki kuvvetlerin her eksene izdüşümlerinin toplamı ayrı ayrı sıfır olmalıdır. Buna göre aşağıdaki şekildeki elemanın denge şartını sağlayacak olursak: x 'e izdüşüm:

$p_x \delta z - p_s \delta s \sin \theta = 0$ olur. Burada $\delta s \sin \theta = \delta z$ olduğu kolayca görülmektedir. Bunu yerine yazacak olursak:

$$p_x \delta z - p_s \delta z = 0 \text{ dolayısıyla:}$$

$p_x = p_s$ olur. z 'e izdüşümü ise:

$$p_z \delta x - p_s \delta s \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \delta x \delta z = 0 \text{ olur.}$$



Şekil 2.7 Bir nokta etrafında basınç

Şekil 2.7’de bir nokta etrafındaki basınç gösterilmiştir. Burada $\delta s \cdot \cos \theta = \delta x$ olduğu göz önünde bulundurulursa ve graviteden doğan son terimin ikinci mertebeden sonsuz küçüklere nazaran ihmal edilebilir olduğu kabul edilirse:

$p_z - p_s = 0$ olduğu görülür. Düzlemde yazdığımız bu eşitliği uzaya aktarırsak:

$$p_x = p_y = p_z = p_s$$

Elde edilmiş olur. Burada θ rast gele bir açı olarak alındığından ve sonuç da açıya bağlı çıkmadığından, limit olarak elemanın boyutlarının sıfır götürdüğümüzde; bir nokta etrafında basınçlar doğrultunun fonksiyonu olmayıp, her doğrultuda birbirine eşittir sonucuna varılmış olur. Eğer sıvı hareket ettirilirse tabakalar arasında bağlı bir hareket oluşacağından kayma gerilmeleri meydana gelir ve genel olarak artık normal gerilme (yani basınç) bir noktada her doğrultuda eşit olmaz.

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$$

olarak tanımlanır. İdeal akışkanlarda viskozite sıfır olduğundan, akışkan hareket halinde olsa dahi, kayma gerilmesi meydana gelmeyeceğinden dolayı bir nokta etrafında basınç her doğrultuda aynıdır, sonucuna varılmıştır (Soğukoğlu 1995).

3. MATERYAL VE METOD

3.1 Kartezyen Koordinatlarda Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum Ve Enerji Denklemlerinin Çıkartılması

Bu bölümde kartezyen koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkışı yapılacaktır. Üçüncü derecede non-Newtonyen akışkanların momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler ve üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır. Bu bölümde elde edilen momentum ve enerji denklemleri iki boyutlu kararlı akışı ifade etmektedir.

3.1.1 Hareket Denklemleri

İkinci ve üçüncü derece akışkanlara ait bünye denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz (Fosdick ve Rajagopal,1980).

$$\mathbf{T} = p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1 \quad (3.1)$$

Burada p basınç, μ viskozite, α_1 , α_2 ve β akışkan sabitleri \mathbf{A}_1 ve \mathbf{A}_2 ilk iki Rivlin Ericksen tensörleridir. Bu tensörler şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \\ \mathbf{A}_2 &= \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Burada $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ 'dir ve lineer momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{div } \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Denklem (3.1) ve (3.2)'deki denklemler denklem (3.4)'e yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa ikinci ve üçüncü derece akışkanlara ait en genel hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) &= -\text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha_1 (\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \alpha_1 \text{grad} (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) \\ &+ \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) [\mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + 2 \text{div} ((\text{grad} \mathbf{v})(\text{grad} \mathbf{v})^T)] \\ &+ \beta \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.5)$$

İkinci ve üçüncü derece akışkanlara ait enerji denkleminin en genel hali ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{d}{dt} (|\mathbf{A}_1|^2) + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^3 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1|^4 + k \nabla^2 \theta \quad (3.6)$$

Burada ε iç enerji olup k ise ısı iletim katsayısıdır. Denklem (3.5) ve (3.6)'daki β üçüncü derece akışkan terimlerini ifade ederken α_1 ve α_2 ikinci derece akışkan terimlerini ifade etmektedir. Bu tez çalışmasında; sadece üçüncü dereceden akışkanlar üzerinde çalışma yapacağımızdan dolayı denklem (3.5) ve (3.6)'da yer alan ikinci derece akışkanlara ait denklemler çıkartılıp gerekli işlemler yapıldığı takdirde;

$$\rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1|^4 + k \nabla^2 \theta \quad (3.8)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca süreklilik denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.9)$$

Denklem (3.7)'de $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v})$ 'dir. Hız ve gradyan operatörünü şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j} \quad (3.10)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} \right) \quad (3.11)$$

Hız operatöründeki u, x yönündeki vektörel hızı ifade ederken v, y yönündeki hızı ifade etmektedir. Süreklilik denklemini açık bir biçimde ifade edersek;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Bundan sonraki aşamada ise (3.7) ve (3.8)'deki vektörel denklemler sırasıyla hesaplanacaktır. Hız operatörünün karesi aşağıdaki denkleme belirtildiği gibi ifade edilmektedir.

$$|\mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2 \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'de yer alan $|\mathbf{v}|^2$ ifadesinin gradyanı elde edilirse;

$$\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} \quad (3.14)$$

ifadesi elde edilir. $\boldsymbol{\omega}$ ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Denklem (3.15)'in determinantı alınırsa;

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.16)$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ İfadesi ise denklem (3.10) ve denklem (3.16)'nın vektörel çarpımıdır. Çarpım sonucu ise şu şekildedir.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} \quad (3.17)$$

Denklem (3.14) ve (3.17) toplanırsa;

$$\frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir. Basınç gradyanı ise;

$$\text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Akım sıkışmaz olduğu için hız vektörünün laplasiyeni şu şekilde hesaplanır.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) \quad (3.20)$$

Denklem (3.20)'nin eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{v}) = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Denklem (3.21)'in determinantı alındığı takdirde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} - \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} \quad (3.22)$$

Süreklilik denkleminin gradyanı alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} = 0 \quad (3.23)$$

(3.23) denklemi düzenlenirse;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} = 0 \quad (3.24)$$

denklem (3.22)'nin daha sade hale gelebilmesi için denklem (3.24)'deki süreklilik denklemini düzenlenmiş şekliyle denklem (3.22)'de yerine konulduğunda aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \quad (3.25)$$

Şimdi de denklem (3.7) ve (3.8)'de yer alan $|\mathbf{A}_1|^2$ 'sinin hesaplanması yapılacaktır.

$|\mathbf{A}_1|$ 'in eşiti aşağıdaki gibidir.

$$|\mathbf{A}_1| = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \quad (3.26)$$

Yukarıdaki $\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v}$ 'dir. \mathbf{L} ve \mathbf{v} (3.26)'nolu denklemde yerine yerleştirilirse \mathbf{A}_1 'in eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

Bundan sonraki aşamada ise $|\mathbf{A}_1|^2$ 'nin hesaplanması yapılacaktır.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Çarpım işlemi yapıp köşegen elemanları toplarsa $|\mathbf{A}_1|^2$ bulunmuş olur.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.28)$$

Buradan da $\text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 / 4$ 'ün eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{|\mathbf{A}_1|^2}{4} = & \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} \\ & + \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Şimdi de β katsayılı üçüncü derece akışkan terimleri hesaplanacaktır. İlk önce $\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$ 'nin hesabı yapılacaktır. Bu ifade için denklem (3.29)'un 4 ile çarpılması ve çıkan sonucun (3.27) ile skaler çarpılmasından elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 &= \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \left[8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\
&+ 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
&\left. + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

elde edilir. Matris çarpımı yapılırsa ifade aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 &= \left[2\frac{\partial u}{\partial x} \left(8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
&+ 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \left. \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
&+ 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \left. \right) \mathbf{i} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\
&+ 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \left. \right) + 2\frac{\partial v}{\partial y} \left(8\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
&\left. \left. + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Hareket denkleminin elde edilmesi için gereken en son terim olan $|\mathbf{A}_1|^2 \nabla^2 \mathbf{v}$ 'nin hesaplanması yapılacaktır. Bu ifade de açıkça görüldüğü gibi denklem (3.25) ve (3.28)'in çarpımı şeklindedir. Çarpım yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1|^2 \nabla^2 \mathbf{v} = & \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} \\
& + \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Hesaplanan bütün terimler denklem (3.7)'de yerleştirilir ve hareketin x bileşenleri ile y bileşenleri ayrıştırılırsa;

x bileşeni yönündeki hareket denklemi

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta \left(20 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\
& 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& \left. + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

y bileşeni yönündeki hareket denklemi

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta \left(20 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right. \\
& + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + 16 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& \left. + 12 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Böylece üçüncü dereceden akışkanlara ait hareket denklemlerinin hesaplanması tamamlanmış oldu. Bundan sonraki aşamada ise enerji denklemi elde edilecektir.

Denklem (3.8)'de belirtilen enerji denklemi aşağıdaki gibiydi.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{A}_1|^2 + \frac{\beta}{2}|\mathbf{A}_1|^4 + k\nabla^2\theta \quad (3.35)$$

Burada ilk olarak bulunması gereken $\frac{1}{2}\mu|\mathbf{A}_1|^2$ 'dir. $|\mathbf{A}_1|^2$ ifadesi denklem (3.28)'de elde edilmişti. Bu denklemi $\frac{1}{2}\mu$ 'ile çarpılması haline enerji denklemimiz için gerekli olan ifadeyi aşağıda gösterildiği gibi elde etmiş oluruz.

$$\frac{1}{2}\mu|\mathbf{A}_1|^2 = \mu \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) \quad (3.36)$$

Enerji denklemimizi ikinci kısmında ise $\frac{\beta}{2}|\mathbf{A}_1|^4$ ifadesinin köşegen elemanlarının dördüncü kuvveti istenmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2}|\mathbf{A}_1|^4 = \beta \left[8\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 + 16\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 8\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 8\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right. \\ \left. + 8\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Enerji denklemimizde eşitliğin sol tarafındaki ifade ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho C_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (3.38)$$

Enerji denklemimiz için gerekli olan dördüncü denklemimiz ise $\nabla^2\theta$ ifadesidir. Bu ifadeyi de elde ettiğimiz takdirde enerji denklemimiz için gerekli olan bütün terimleri elde etmiş oluyoruz. $\nabla^2\theta$ ifadesinin eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2\theta = \left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right] \quad (3.39)$$

Yukarıda bulmuş olduğumuz tüm bu ifadeleri enerji denklemimizde yerine koyduğumuz takdirde üçüncü derece akışkanlara ait enerji denklemi elde edilmiş olur.

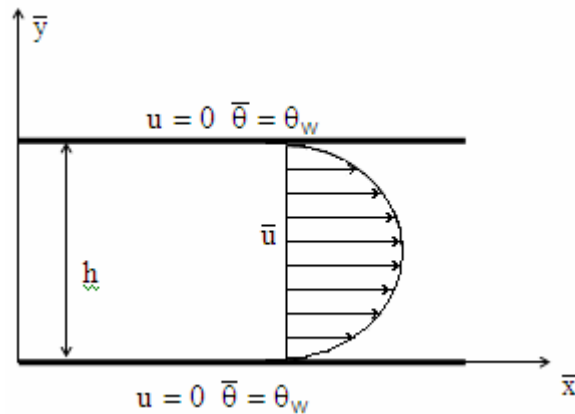
$$\begin{aligned} \rho C_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = & \mu \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \beta \left[32 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \right. \\ & \left. + 16 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 \right] + k \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Böylece denklem (3.33), (3.34) ve (3.40) ile sırası ile üçüncü derece akışkanlara ait en genel hareket denklemleri ile enerji denklemi elde edilmiş oldu. Üçüncü bölümde ise bu denklemlerden faydalanılarak ısıtılmış paralel iki levha arasındaki üçüncü derece akışkan akışına ait hareket ve enerji denklemleri elde edilecektir. Sonra elde edilen denklemler boyutsuzlaştırıldıktan sonra bu denklemlerin seri çözümleri yapılacaktır.

4. BULGULAR

4.1 Hız Ve Sıcaklık Profilleri İçin Analitik Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde; ikinci bölümde kartezyen koordinatlar için üçüncü derece akışkanlara ait elde edilen momentum ve enerji denklemlerinden faydalanılarak ısıtılmış paralel iki levha arasındaki tek boyutlu akım için momentum ve enerji denklemleri elde edilecektir. Bulunan bu denklemler için paralel iki levha arasındaki akışı ifade eden sınır şartları belirlenecektir. Elde edilen denklemler ve sınır şartları belli şartlar altında çözümlerin genel olabilmesi için boyutsuz hale getirilecektir. Sonuçta kartezyen koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilecektir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri araştırılacaktır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon metodu (bir tür seri açılım metodu) kullanılacaktır. Literatürde birçok perturbasyon yöntemi mevcuttur. Bu tezde yaya (pedestrian) açılımı metodu kullanılacaktır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilecek ve iki ayrı viskozite modeli olan Reynold ve Vogel modelleri kullanılacaktır. Her iki model için de bu tez çalışmasında hız ve sıcaklık profilleri için analitik çözümler elde edilecektir. Ayrıca bu tez çalışmasında analitik çözümlerin yanı sıra nümerik çözümler de yapılacaktır. Elde edilen analitik ve nümerik çözümler her iki modelde de karşılaştırılacaktır. Aynı zamanda elde edilen grafiklerle de newtonyen ve non-Newtonyen akışkan arasındaki farklar gösterilecektir.



Şekil 4.1 Paralel iki plaka arasındaki akışın şematik gösterimi

Paralel iki levha arasındaki akış sembolik olarak Şekil (4.1)'de gösterilmiştir. Paralel iki levha arasındaki tek boyutlu akış için hız ve sıcaklık ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$u(x,y)=u(y), \quad v(x,y)=0, \quad \theta(x,y)=\theta(y) \quad (4.1)$$

Denklem (3.1)'de hızın ve sıcaklığın sadece y 'ye göre değiştiği görülmektedir. Denklem (4.1) denklem (3.33), (3.34) ve (3.40)'da yerine yazılır ise

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mu} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} \right) + \beta \left(6 \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.3)$$

$$k \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu} \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^2 + 2\beta \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^4 = 0 \quad (4.4)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (4.3) dikkate alındığında basıncın yalnızca x koordinatına bağlı değiştiği görülür. Bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$p(x,y) = p(x) \quad (4.5)$$

Denklem (4.2) ve (4.3)'de yer alan denklemler hareket denklemlerini ifade ederken denklem (4.4) ise enerji denklemini ifade etmektedir. Denklem (4.5) dikkate alınarak denklem (4.2), (4.3) ve (4.4) düzenlenirse hareket ve enerji denklemi sırasıyla elde edilmiş olur. Bu denklemler üçüncü derece akışkanlarda paralel iki levha arasındaki tek boyutlu akışkan akışını ifade etmektedir.

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{y}} \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} + \bar{\mu} \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} + 6\beta \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \quad (4.6)$$

$$k \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\bar{y}^2} + \mu \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^2 + 2\beta \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)^4 = 0 \quad (4.7)$$

$$\bar{u}(0) = 0, \bar{u}(\bar{y}) = 0, \bar{\theta}(0) = 0, \bar{\theta}(\bar{y}) = 0 \quad (4.8)$$

Bu tez çalışmasında μ yani viskozite sıcaklığın bir fonksiyonu olarak alınmıştır. Bu nedenle ikinci bölümde denklem (3.1)'de gösterilen bünye denkleminin diverjansı alınırken viskoziteyi de dikkate almak gerekecektir. Denklem (4.6)'da gösterilen $\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}$ ifadesi buradan gelmektedir. Bu denklemlerdeki ifadeler boyutlu ifadelerdir. Çözümlerin genel olabilmesi için denklemlerin boyutsuz formda ifade edilmesi gerekmektedir. Boyutlu ve boyutsuz büyüklükler arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$y = \frac{\bar{y}}{h}, \quad \theta = \frac{\bar{\theta} - \theta_w}{\theta_m - \theta_w}, \quad u = \frac{\bar{u}}{V}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_*} \quad (4.9)$$

Burada h paralel iki levha arasındaki yüksekliği ifade ederken μ 'de boyutsuz viskoziteyi ifade etmektedir. Denklem (4.9)'da θ_m ortalama sıcaklığı, θ_w levha sıcaklığını, V_0 ortalama hızı ifade etmektedir. Denklem (4.9)'daki ifadeler denklem (4.6), (4.7) ve (4.8)'de yerine konulur ise boyutsuz denklemler ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) + 6\Lambda \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \frac{d^2 u}{dy^2} = C \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \Gamma \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + 2\Lambda \Gamma \left(\frac{du}{dy} \right)^4 = 0 \quad (4.11)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0, \theta(0) = 0, \theta(1) = 0 \quad (4.12)$$

Denklemlerde u boyutsuz akışkan hızını, θ boyutsuz sıcaklığı ifade etmektedir. Ayrıca elde edilen yeni boyutsuz sayılar ise aşağıdaki gibidir.

$$C = \frac{C_1 h^2}{\mu_* V_0} \quad C_1 = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \quad \Gamma = \frac{\mu_* V_0^2}{k(\theta_2 - \theta_1)} \quad \Lambda = \frac{\beta V_0^2}{\mu_* h^2} \quad (4.13)$$

Denklemin (4.13)'teki C_1 aksel yönündeki basınç değişimini, Γ Brinkman sayısını, Λ boyutsuz non-Newtonyen akışkan katsayısını, β boyutlu üçüncü derece akışkan katsayısını ve k ısı iletim katsayısını ifade etmektedir. Bundan sonraki bölümde ise iki ayrı viskozite modeli için yaklaşık analitik çözümler üretilecektir.

4.1 Reynold Viskozite Modeli

Reynold viskozite modeli sıcaklığa bağlı değişimin eksponansiyel olduğu modeldir (Szeri ve Rajagopal,1985).

$$\mu = e^{-M\theta} \quad (4.14)$$

Hareket denklemlerindeki hız ve sıcaklığın yaya açılımları aşağıdaki gibidir.

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (4.15)$$

$$\theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 \quad (4.16)$$

Burada ϵ perturbasyon parametresidir. Ayrıca denklem (4.14)'ün da seri açılımı yapılırsa;

$$\mu \cong 1 - \epsilon m\theta \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.10)'da viskozitenin türevinin olduğu görülmektedir. Bu yüzden denklem (3.17) türetilirse;

$$\frac{d\mu}{dy} \cong -\epsilon m\theta' \quad (4.18)$$

denklemini elde edilmiş olur. Ayrıca çözümlerde boyutsuz non-Newtonyen katsayısı Λ ve viskozite sabiti M de aşağıdaki gibi seçilecektir.

$$\Lambda = \epsilon \lambda, \quad M = \epsilon m \quad (4.19)$$

Yani denklem (4.19)'daki tanımlama ile Λ ve M , ϵ mertebesinde kabul edilmiştir. Şimdi bu tanımlama ve kabullerden sonra denklem (4.17), (4.18) ve (4.19) denklemleri (4.10)'daki denkleme yerleştirilip mertebelerine göre ayrıştırılacaktır.

1 Mertebesi

$$u_0'' = C \quad (4.20)$$

$$\theta_0'' = -\Gamma(u_0')^2 \quad (4.21)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = \theta_0(0) = \theta_0(1) = 0 \quad (4.22)$$

ϵ Mertebesi

$$u_1'' = m\theta_0' u_0' + m\theta_0 u_0'' - 6\lambda(u_0')^2 u_0'' \quad (4.23)$$

$$\theta_1'' = m\Gamma\theta_0(u_0')^2 - 2\Gamma u_0' u_1' - 2\lambda\Gamma(u_0')^4 \quad (4.24)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(1) = 0, \quad \theta_1(0) = 0, \quad \theta_1(1) = 0 \quad (4.25)$$

1 ve \in mertebesindeki denklemler elde edilir. Elde edilen denklemlerdeki türevler y cinsindedir. Bundan sonraki aşamada ise bu denklemlerin çözümü gerçekleştirilecektir. Denklem (4.20)'yi iki kez integre ettiğimizde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$u_0 = \frac{Cy^2}{2} + Ay + B \quad (4.26)$$

Denklem (4.26)'da yer alan A ve B gibi integral sabitleri elde edilir. Denklem (3.22)'de yer alan hıza ait sınır şartlarını denklem (4.26)'ya uyguladığımızda A ve B sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B = 0 \quad A = -\frac{C}{2} \quad (4.27)$$

Denklem (4.27)'de belirtilen integral sabitleri denklem (4.26)'da yerine koyduğumuzda ise;

$$u_0 = \frac{C}{2}(y^2 - y) \quad (4.28)$$

denklemini elde edilmiş olur. Elde etmiş olduğumuz denklem (4.28)'den faydalanılarak denklem (4.21)'in çözümü gerçekleştirilecektir. Denklem (4.21)'i integre ettiğimizde ise aşağıdaki denklemi elde edilmiş olur.

$$\theta_0 = -\Gamma C^2 \left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{8} \right) + Ay + B \quad (4.29)$$

Denklem (4.29)'da yer alan A ve B integral sabitlerinin bulunması gerekmektedir. Bunun için denklem (4.22)'deki sıcaklığa ait sınır şartları kullanılırsa A ve B sabitleri bulunmuş olur.

$$B = 0 \quad A = \frac{\Gamma C^2}{24} \quad (4.30)$$

Bulunan integral sabitleri denklem (4.29)'da yerine konulur ise sıcaklık değişiminin lineer kısmı elde edilmiş olur.

$$\theta_0 = -\frac{\Gamma C^2}{4} \left(\frac{y^4}{3} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{6} \right) \quad (4.31)$$

Denklem (4.28) ve (4.31) aynı zamanda newtonyen akışın karakteristiğini ifade etmektedir. Elde edilen bu çözümlerden faydalanılarak ϵ mertebesinin çözümleri gerçekleştirilecektir. Denklem (4.23) ve (4.24) nolu denklemlerin çözümünü gerçekleştirebilmek için denklem (4.28) ve (4.31) kullanılacaktır. Denklem (4.23) integre edildiğinde aşağıda yer alan denklem elde edilmiş olacaktır.

$$u_1 = -\frac{m\Gamma C^3}{4} \left(\frac{y^6}{18} - \frac{2y^5}{12} + \frac{5y^4}{24} - \frac{5y^3}{36} + \frac{y^2}{24} \right) - 6\lambda C^3 \left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{8} \right) + Ay + B \quad (4.32)$$

Denklem (4.32)'de yer alan integral sabitlerini çözmek için denklem (4.25)'deki hıza ait sınır şartlarını uyguladığımız takdirde A ve B sabitleri aşağıdaki denklemdeki gibi elde edilir.

$$B = 0 \quad A = \frac{\lambda C^3}{4} \quad (4.33)$$

Denklem (4.33)'de yer alan A ve B integral sabitlerini denklem (4.32)'ye koyduğumuzda hızın non-linear kısmı elde edilmiş olur.

$$u_1 = -\frac{m\Gamma C^3}{4} \left(\frac{y^6}{18} - \frac{y^5}{6} + \frac{5y^4}{24} - \frac{5y^3}{36} + \frac{y^2}{24} \right) - \lambda C^3 \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{y}{4} \right) \quad (4.34)$$

Şimdi de (4.24) nolu denklemin çözümü gerçekleştirilecektir. Bu denklemi integre ettiğimizde;

$$\theta_1 = \frac{\Gamma^2 MC^4}{4} \left(\frac{y^8}{168} - \frac{y^7}{42} + \frac{y^6}{24} - \frac{y^5}{24} + \frac{7y^4}{288} - \frac{y^3}{288} \right) + \Lambda \Gamma C^4 \left(\frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{16} \right) + Ay + B \quad (4.35)$$

denklemini elde edilmiş olur. Denklem (4.35)'de iki tane integral sabiti elde edilmiştir. Bu integral sabitlerini elde edebilmek için denklem (4.25)'de yer alan sıcaklık sınır şartlarını denklem (4.35)'de uyguladığımızda A ve B olan integral sabitleri elde edilecektir.

$$B = 0 \quad , \quad A = \left(\frac{m\Gamma^2 C^4}{8064} \right) - \lambda \Gamma C^4 \left(\frac{1}{80} \right) \quad (4.36)$$

Denklem (4.36)'da belirlenen integral sabitleri denklem (4.35)'de yerine koyulduğunda ise aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\theta_1 = \Gamma^2 MC^4 \left(\frac{y^8}{672} - \frac{y^7}{168} + \frac{y^6}{96} - \frac{y^5}{96} + \frac{7y^4}{1152} - \frac{y^3}{576} + \frac{y}{8064} \right) + \Lambda \Gamma C^4 \left(\frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{16} - \frac{y}{80} \right) \quad (4.37)$$

Böylece ϵ mertebesindeki çözümler tamamlanmış oldu. Bu mertebedeki çözümler non-Newtonyen akışkanın karakteristiğini ortaya çıkaracak olan terimlerdir. Hız ve sıcaklık profillerini tam olarak elde edebilmemiz için denklem (4.28) ve (4.34)'ün (4.15)'de (4.31) ve (4.37)'nin ise (4.16)'da yerine yazıldığında hız ve sıcaklık profilleri aşağıdaki denklemlerdeki gibi elde edilmiş olur.

$$u = \frac{C}{2} (y^2 - y) - \frac{\Gamma MC^3}{4} \left(\frac{y^6}{18} - \frac{y^5}{6} + \frac{5y^4}{24} - \frac{5y^3}{36} + \frac{y^2}{24} \right) - \Lambda C^3 \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{3y^2}{4} - \frac{y}{4} \right) \quad (4.38)$$

$$\theta = -\frac{\Gamma C^2}{4} \left(\frac{y^4}{3} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{6} \right) + \frac{\Gamma^2 MC^4}{4} \left(\frac{y^8}{168} - \frac{y^7}{42} + \frac{y^6}{24} - \frac{y^5}{24} + \frac{7y^4}{288} - \frac{y^3}{144} + \frac{y}{2016} \right) + \Lambda \Gamma C^4 \left(\frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{16} - \frac{y}{80} \right) \quad (4.39)$$

Bundan sonraki kısımda ise başka bir viskozite modeli için çözümler üretilecektir.

4.2 Vogel Viskozite Modeli

Vogel viskozite modeli aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Massoudi M., Christie I, 1995).

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\left(\frac{A}{B+\theta} - \theta_w\right)} \quad (4.40)$$

Burada A ve B viskozite sabitleridir. Vogel modelinde analitik çözümler için

$$\Lambda = \epsilon \lambda, \quad \Gamma = \epsilon \gamma \quad (4.41)$$

kabulleri yapılacaktır. Ayrıca hız ve sıcaklık aşağıdaki gibi seriye açılacaktır.

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (4.42)$$

$$\theta = \theta_0 + \epsilon^2 \theta_1 \quad (4.43)$$

Bu aşamada ise viskozitenin seriye açılıp y' ye göre türevinin alınması gerekmektedir.

Bu işlemler yapılırsa;

$$\mu \cong \mu_0 \cdot e^{\frac{A}{B} - \theta_w} \left(1 - \epsilon \frac{A\theta_0}{B^2}\right) \quad (4.44)$$

$$\frac{d\mu}{dy} \cong -\mu_0 \frac{A}{B^2} e^{\frac{A}{B} - \theta_w} \left(1 - \epsilon \frac{A\theta_0}{B^2}\right) \theta' \quad (4.45)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (4.41), (4.44) ve (4.45)'de yer alan eşitlikler (4.10) ve (4.11) denklemlerinde yazılıp mertebelerine göre ayrıştırılması işlemi yapılacaktır.

İlk Mertebe

$$u_0'' = C^* \quad (4.46)$$

$$\theta_0'' = -\gamma \left(u_0' \right)^2 \frac{C}{C^*} \quad (4.47)$$

$$u_0(0) = 0, u_0(1) = 0, \theta_0(0) = 0, \theta_0(1) = 0 \quad (4.48)$$

Düzeltilme Terimleri

$$u_1'' = \frac{A}{B^2} \theta_0' u_0' + \frac{A}{B^2} \theta_0 u_0'' - \frac{6\lambda C^*}{C} u_0' u_0'' \quad (4.49)$$

$$\theta_1'' = -\frac{2\gamma C}{C^*} u_0' u_1' + \frac{\gamma C A}{C^* B^2} \theta_0 \left(u_0' \right)^2 - 2\lambda \gamma u_0' u_0'' \quad (4.50)$$

$$u_1(0) = 0, u_1(1) = 0, \theta_1(0) = 0, \theta_1(1) = 0 \quad (4.51)$$

İlk ve ikinci mertebelerdeki denklemler elde edilmiş olmaktadır. Elde edilen denklemlerdeki türevler y cinsindedir. Bundan sonraki aşamada ise Reynold modelinde olduğu gibi bu denklemlerin çözümü gerçekleştirilecektir. Elde edilen denklemlerde ilk önce ilk mertebenin çözümü gerçekleştirilecektir. Bunun için aşağıdaki denklemde yer alan ifade denklem (4.46)'da kullanılmıştır.

$$C^* = \frac{C}{\mu_0 e^{\left(\frac{A}{B} - \theta_w \right)}} \quad (4.52)$$

Denklem (4.46)'da belirtilen ifadeyi iki kez integre ettiğimizde aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz.

$$u_0 = \frac{C^* y^2}{2} + Ay + B \quad (4.53)$$

Denklem (4.53)'de A ve B gibi iki tane integral sabiti meydana gelmektedir. Bu integral sabitlerinin sonuçlarını elde edebilmek için denklem (4.48)'de yer alan hıza ait sınır

şartlarını denklem (4.53)'de uyguladığımızda integral sabitlerini aşağıdaki denklemdeki gibi elde edilecektir.

$$B = 0 \quad A = -\frac{C^*}{2} \quad (4.54)$$

Denklem (4.54)'de elde edilen integral sabitleri denklem (4.53)'de yerine koyulup düzenlendiğinde;

$$u_0 = \frac{C^*}{2}(y^2 - y) \quad (4.55)$$

denklemini elde edilir. Bundan sonraki aşamada ise denklem (4.47)'nin çözümü gerçekleştirilecektir. Bunun için denklem (4.55) kullanılacaktır. Denklem (4.47)'yi iki kez integre ettiğimizde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\theta_0 = -\frac{\gamma CC^* y^4}{12} + \frac{\gamma CC^* y^3}{6} - \frac{\gamma CC^* y^2}{8} + Ay + B \quad (4.56)$$

Denklem (4.56)'da görüldüğü gibi A ve B gibi integral sabitleri oluşmuştur. Bunların çözümü için ise (4.48)'deki denklemde gösterilen sıcaklık sınır şartları uygulanacaktır. Bu sınır şartları uygulandığında

$$B = 0 \quad , \quad A = \frac{\gamma CC^*}{24} \quad (4.57)$$

denklem (4.57)'de de belirtildiği gibi A ve B integral sabitleri belirlenmiştir. Belirlenen bu integral sabitleri de denklem (4.56)'de yerine koyulup denklem düzenlendiği zaman ilk mertebenin son denklemini de elde etmiş oluruz.

$$\theta_0 = -\frac{\gamma CC^*}{4} \left(-\frac{y^4}{3} + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{6} \right) \quad (4.58)$$

Bu çözümler aynı zamanda Newtonyen akışın karakteristiğini ifade etmektedir. Elde edilen bu çözümlerden faydalanılarak ikinci mertebe denklemleri olan (4.49) ve (4.50) nolu denklemlerin çözümü gerçekleştirilecektir. Denklem (4.49)'i iki kez integre edildiğinde aşağıdaki denklem elde edilmiş olur.

$$u_1 = \frac{A\gamma C C^{*2}}{B^2} \left(-\frac{y^6}{72} + \frac{y^5}{24} - \frac{5y^4}{96} + \frac{5y^3}{144} - \frac{y^2}{96} \right) - \frac{6\lambda C^{*4}}{C} \left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{8} \right) + Ay + B \quad (4.59)$$

Denklem (4.59)'da da görüleceği gibi integral sabitleri elde edilmektedir. Bu integral sabitlerinin çözümü içinde denklem (4.51)'de belirtilen sıcaklığa ait sınır şartları uygulanacaktır. Sonuç olarak aşağıdaki denklem elde edilmiş olacaktır.

$$B = 0 \quad A = \frac{\lambda C^{*4}}{4C} \quad (4.60)$$

Denklem (4.60)'da yer alan bu integral sabitleri denklem (4.59)'da yazıldığında ise aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz.

$$u_1 = \frac{A\gamma C C^{*2}}{B^2} \left(-\frac{y^6}{72} + \frac{y^5}{24} - \frac{5y^4}{96} + \frac{5y^3}{144} - \frac{y^2}{96} \right) - \frac{\lambda C^{*4}}{C} \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{3y^2}{4} - \frac{y}{4} \right) \quad (4.61)$$

Bundan sonraki aşamada ise denklem (4.58)'in çözümü gerçekleştirilecektir. Denklem (4.58) iki kez integrale edildiğinde

$$\theta_1 = \frac{A\gamma^2 C^{*2} C^2}{B^2} \left(\frac{y^8}{672} - \frac{y^7}{168} + \frac{y^6}{96} - \frac{y^5}{96} + \frac{7y^4}{1152} - \frac{y^3}{576} \right) + \lambda C C^{*4} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{16} \right) + Ay + B \quad (4.62)$$

denklem (4.62) elde edilmiştir. Denklem (4.62)'de iki tane integral sabiti oluşmuştur. Bu integral sabitlerini elde edebilmek için denklem (4.51)'de yer alan sıcaklık sınır şartlarını uyguladığımızda

$$B = 0 \quad A = \frac{C^2 C^{*2} \gamma^2 A}{8064B^2} - \frac{C^{*4} \gamma \lambda}{80} \quad (4.63)$$

A ve B olan integral sabitleri elde edilmiş olur. Elde edilen bu integral sabitleri de denklem (4.62)'de yerine koyulup denklem düzenlendiği zaman ise

$$\theta_1 = \frac{A\gamma^2 C^{*2} C^2}{B^2} \left(\frac{y^8}{672} - \frac{y^7}{168} + \frac{y^6}{96} - \frac{y^5}{96} + \frac{7y^4}{1152} - \frac{y^3}{576} + \frac{y}{8064} \right) + \lambda C C^{*4} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{16} - \frac{y}{80} \right) \quad (4.64)$$

Denklem (4.64) bulunmaktadır. Bu mertebedeki çözümler non-Newtonyen akışkanın karakteristiğini ortaya çıkaracak olan terimlerdir. Böylece bütün mertebelerdeki çözümler tamamlanmış oldu. Hız ve sıcaklık profillerini tam olarak elde edebilmemiz için denklem (4.55) ve (4.61)'in (4.42)'de (4.58) ve (4.64)'ün ise (4.43)'de yerine yazıldığında hız ve sıcaklık profilleri aşağıdaki denklemlerdeki gibi elde edilmiş olur.

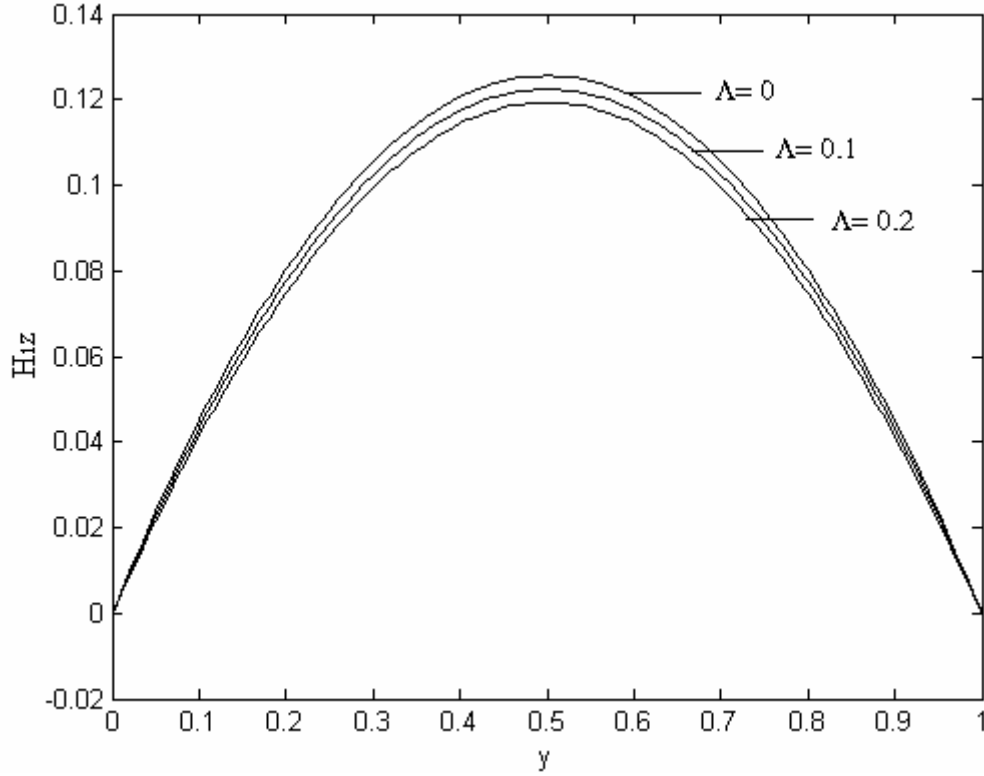
$$u = \frac{C^*}{2} (y^2 - y) + \frac{A\gamma C C^{*2}}{4B^2} \left(-\frac{y^6}{18} + \frac{y^5}{6} - \frac{5y^4}{24} + \frac{5y^3}{36} - \frac{y^2}{24} \right) - \frac{\lambda C^{*4}}{C} \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{3y^2}{4} - \frac{y}{4} \right) \quad (4.65)$$

$$\theta = -\gamma C C^* \left(-\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{8} + \frac{y}{24} \right) + \frac{A\gamma^2 C^{*2} C^2}{B^2} \left(\frac{y^8}{672} - \frac{y^7}{168} + \frac{y^6}{96} - \frac{y^5}{96} + \frac{7y^4}{1152} - \frac{y^3}{576} + \frac{y}{8064} \right) + \lambda \gamma C^{*4} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^6}{15} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{16} - \frac{y}{80} \right) \quad (4.66)$$

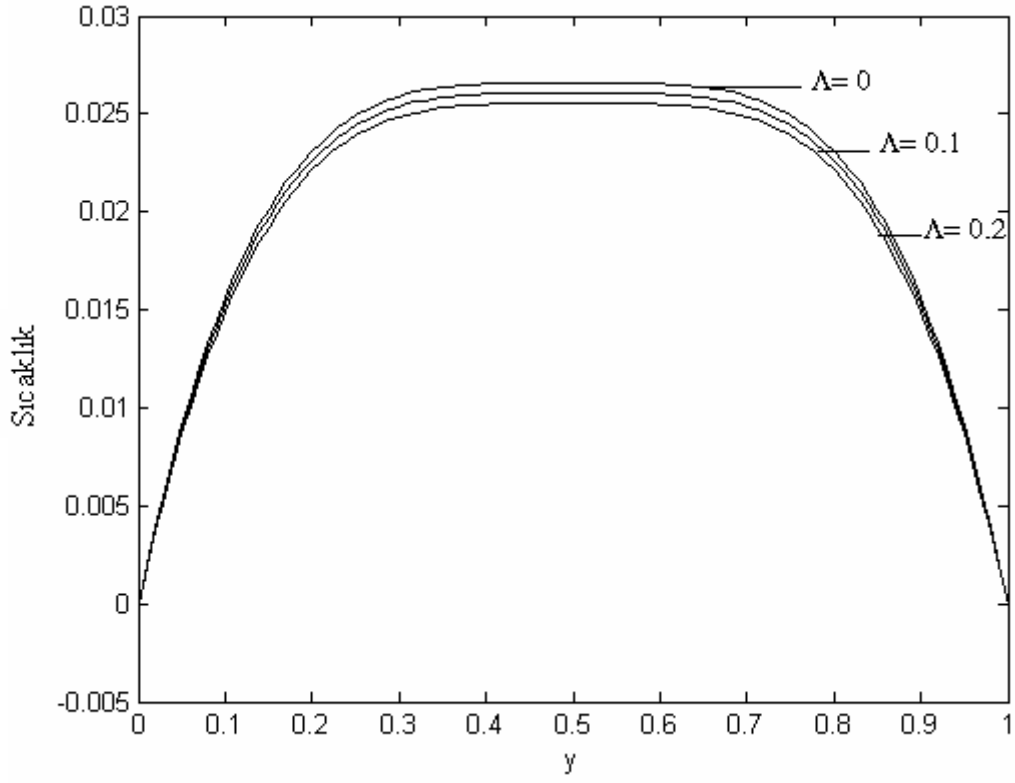
Hız ve sıcaklık profilleri tam olarak elde edilmiş oldu. Bundan sonraki bölümde her iki viskozite modeli için elde edilen çözümler kullanılarak çeşitli grafikler çizilecek değişik hız ve sıcaklık profilleri elde edilecektir. Ayrıca denklemlerin nümerik çözümleri de yapılarak analitik çözümleri ile karşılaştırma yapılacaktır. Elde edilecek grafikler genelde non-Newtonyen ve viskozite modellerindeki katsayıların farklı değerleri için olacaktır.

4.3 Reynold Viskozite Modeli Grafikleri

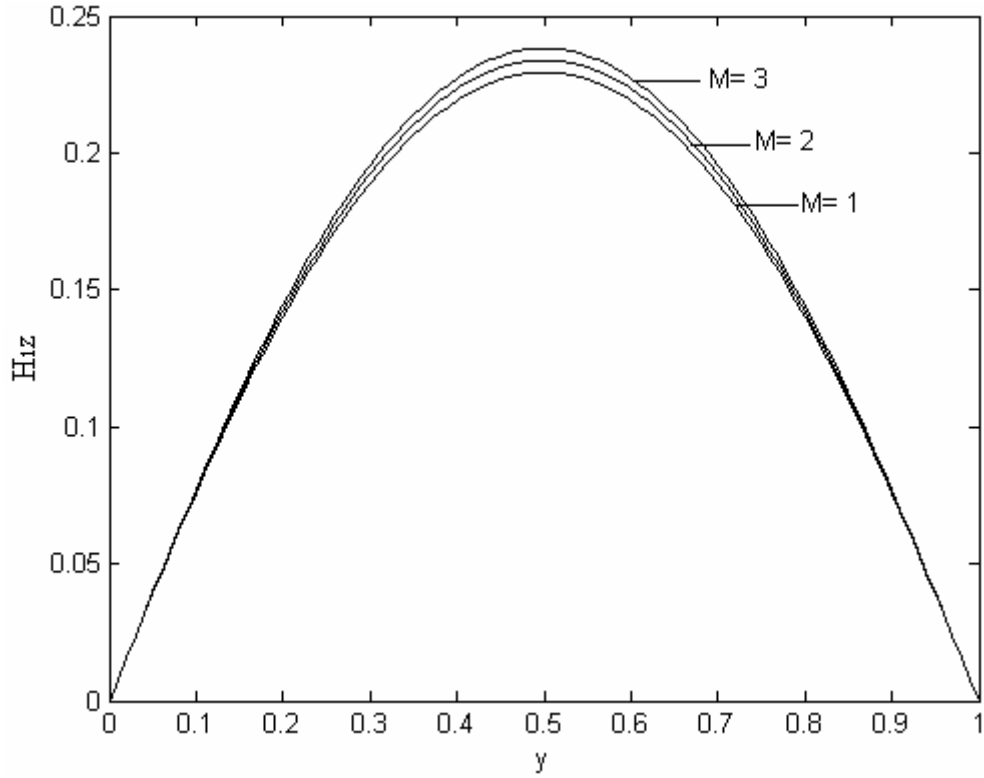
Bu kısımda daha önce elde edilen hız ve sıcaklık profilleri grafiksel olarak gösterilecektir. Ayrıca maple paket programı kullanılarak nümerik elde edilecek ve bu çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılacaktır. Çizilecek olan grafikler reynold ve vogel viskozite modelleri için olacaktır. Bu viskozite modellerindeki sabitlerin farklı değerleri için çeşitli grafikler elde edilecektir. Ayrıca elde edilecek bir diğer grafik çeşitleri de farklı non-Newtonyen katsayılar ve basınç farkı için olacaktır. Bu grafiklerde özellikle Newtonyen ve Newtonyen olamayan akışkanlar arasındaki fark açıkça ortaya konacaktır. Grafikler hız ve sıcaklık değişimini gösteren grafikler olacaktır.



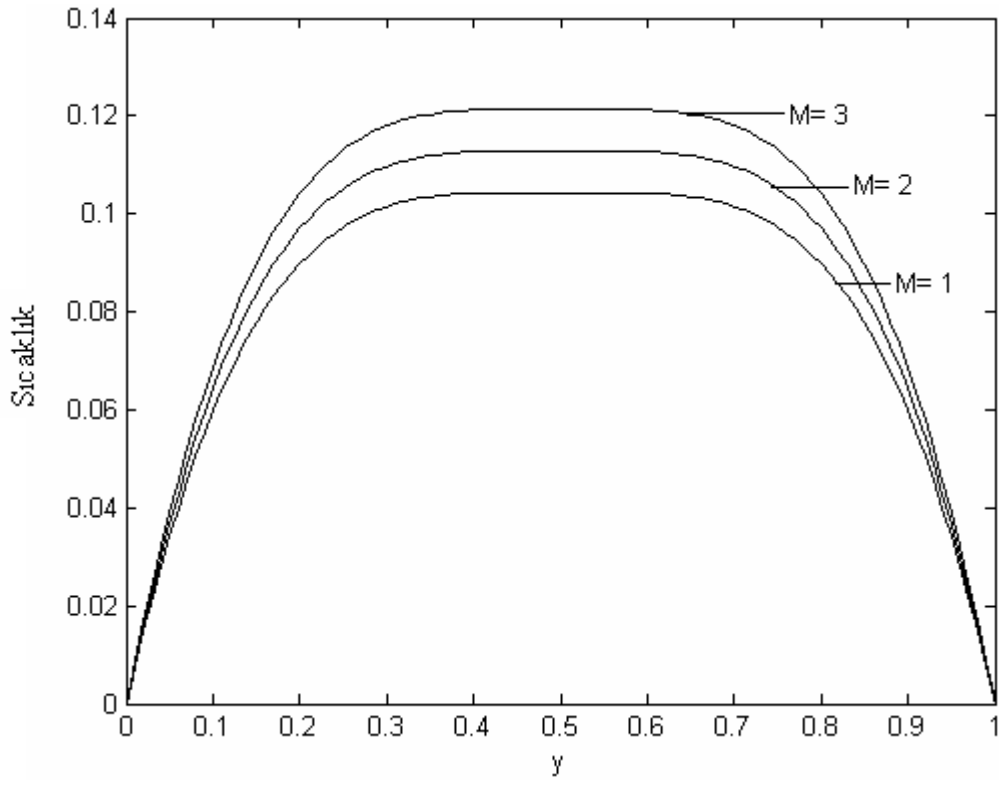
Şekil 4.2 Farklı Λ değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi ($M = 1, \Gamma = 5, C = -1$)



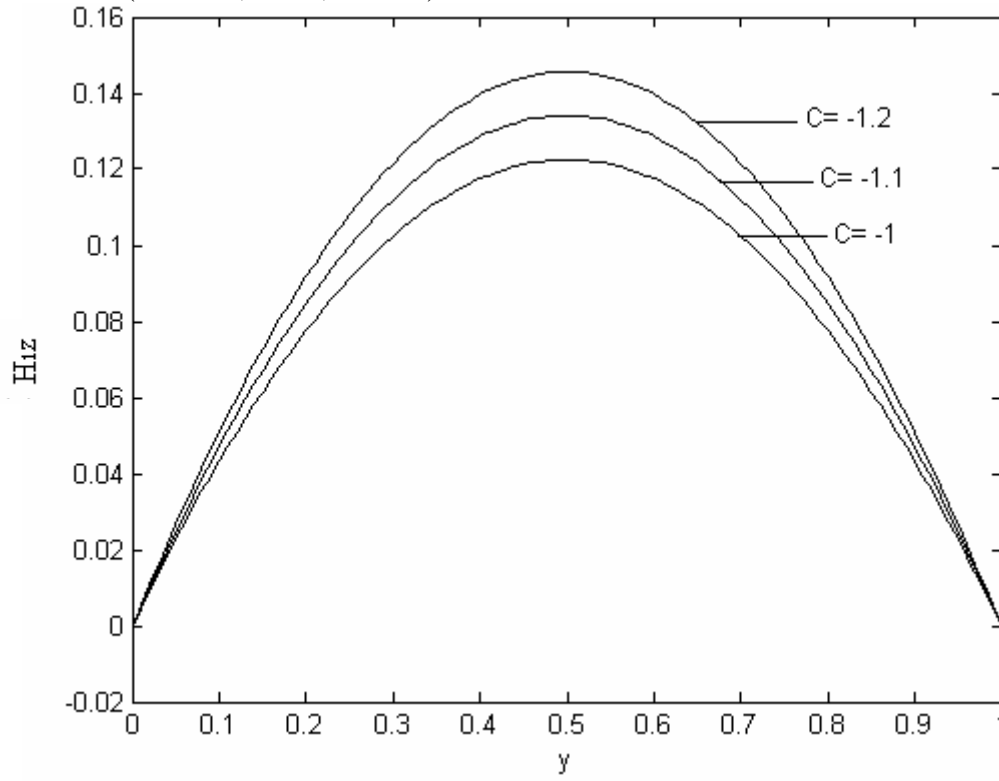
Şekil 4.3 Farklı Λ değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi ($M = 1, \Gamma = 5, C = -1$)



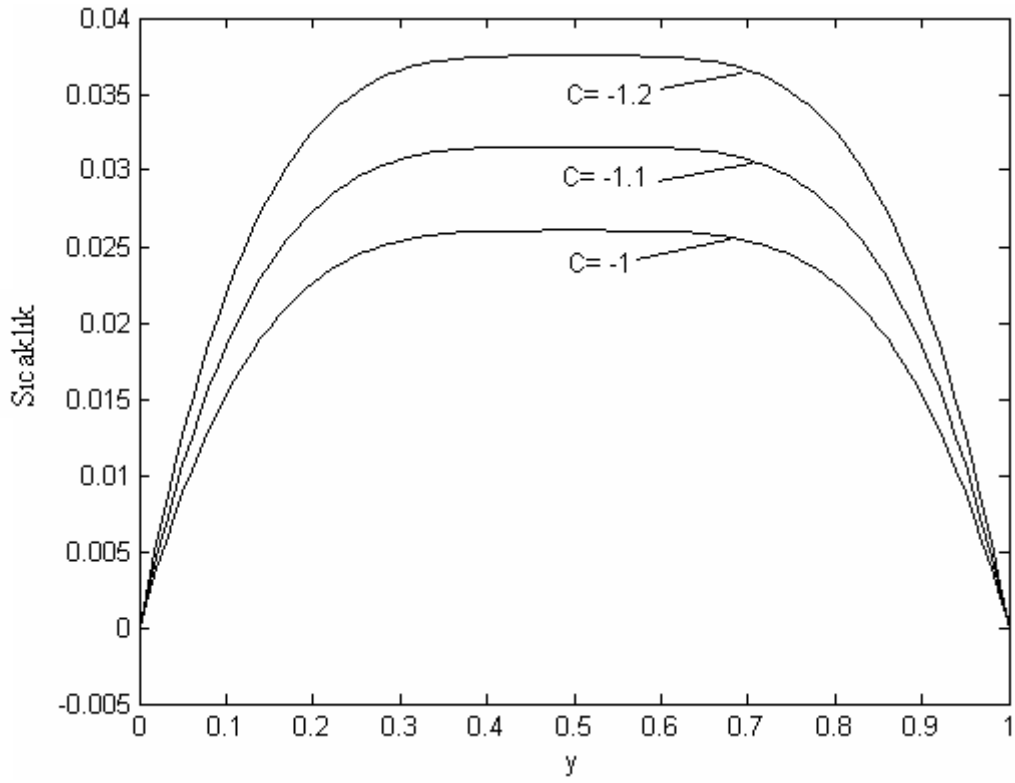
Şekil 4.4 Farklı M değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi ($\Lambda = 0.1, \Gamma = 5, C = -2$)



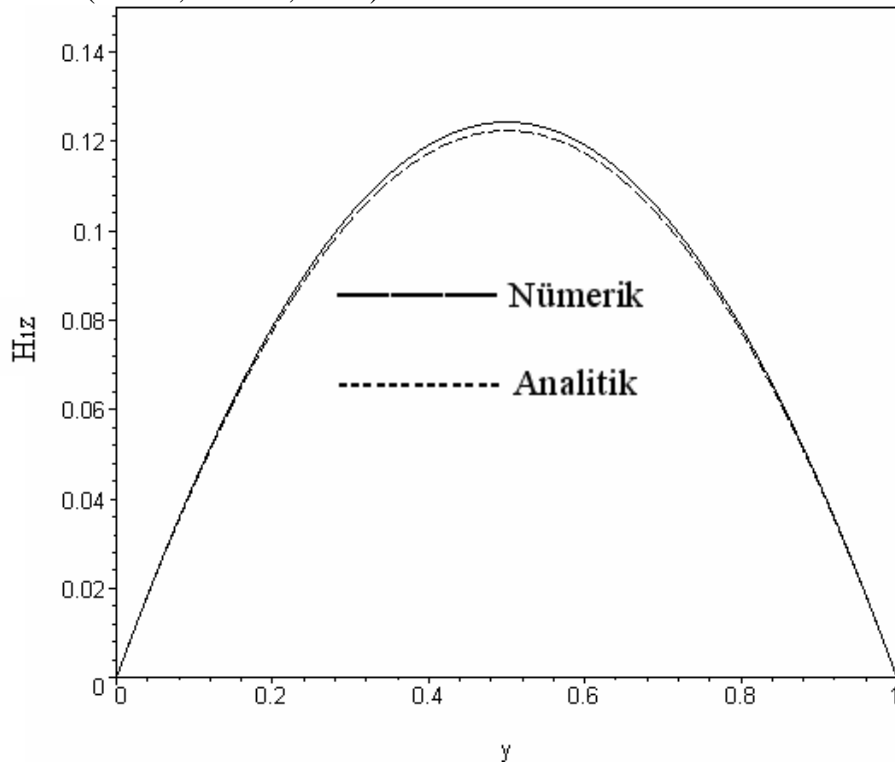
Şekil 4.5 Farklı M değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi ($\Lambda = 0.1, \Gamma = 5, C = -2$)



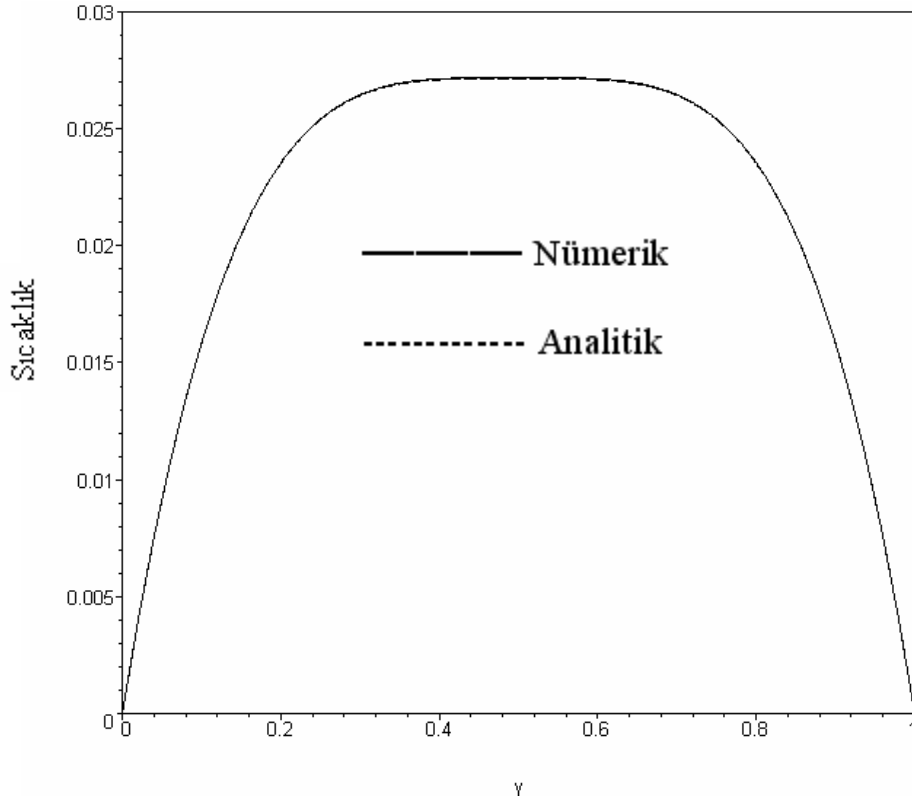
Şekil 4.6 Farklı C değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi ($M = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5$)



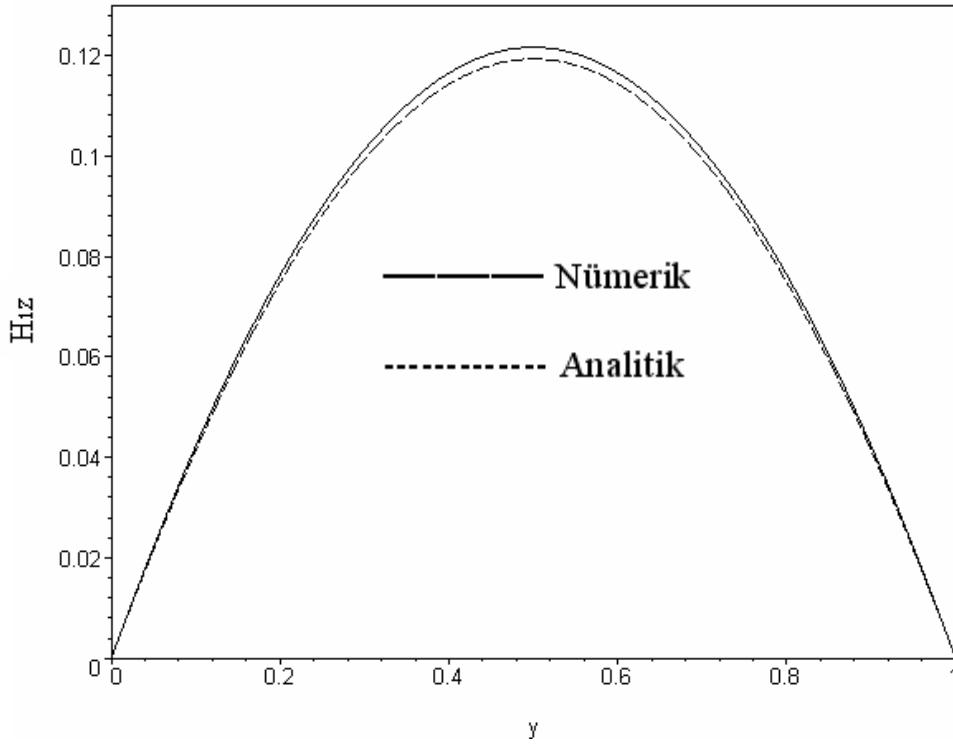
Şekil 4.7 Farklı C değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi ($M = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5$)



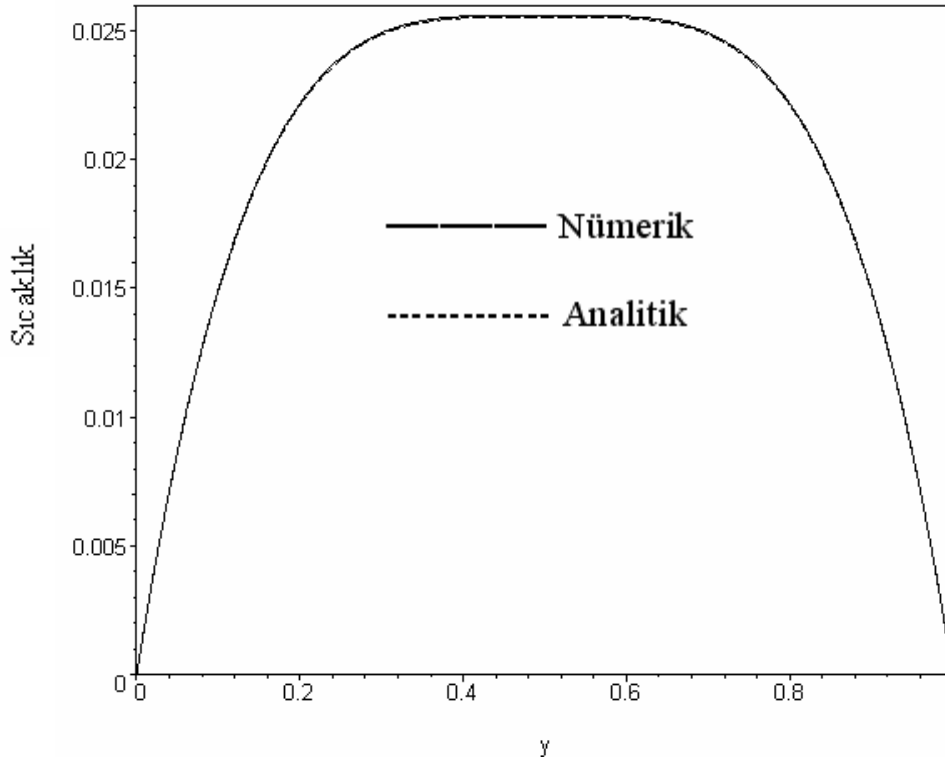
Şekil 4.8 M değeri için analitik ve nümerik hız profilleri ($M = 3, \Lambda = 0.2, \Gamma = 5.5, C = -1$)



Şekil 4.9 M değeri için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri
($M = 3, \Lambda = 0.2, \Gamma = 5.5, C = -1$)



Şekil 4.10 Λ değeri için analitik ve nümerik hız profilleri
($M = 1, \Gamma = 5, C = -1, \Lambda = 0.2$)



Şekil 4.11 Λ değeri için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri
($M = 1, \Gamma = 5, C = -1, \Lambda = 0.2$)

Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'de farklı non-Newtonyen katsayılar için sırası ile hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi gösterilmiştir. Bu grafiklerde $\Lambda = 0$ olması akışkanın Newtonyen akışkan olduğu anlamına gelmektedir. Şekil 4.2'de non-Newtonyen katsayı artırıldığında hızın azaldığı görülmektedir. Özellikle non-Newtonyen katsayı artırıldığında akışkanın deformasyonu azalacağından bu sonucun elde edilmesi mantıklıdır. Grafikte akışkanın deformasyonu özellikle plakalara yakın bölgelerde daha fazla arttığı görülmektedir. Yani hız gradyanı cidar bölgelerinde artmaktadır. Yine grafikten bu kez non-Newtonyen katsayı azaldıkça gradyanın arttığı görülmektedir. Bu da akışta sürtünmeyi daha fazla artırmaktadır ve kayıplara daha fazla sebebiyet vermektedir. İki plakanın tam merkezinde hız maksimum seviyeye ulaşmaktadır. Şekil 4.3'de ise non-Newtonyen katsayı artırıldıkça akış alanı içerisinde maksimum sıcaklığın düştüğü görülmektedir. Cidarlara yakın bölgelerde sıcaklık gradyanı artmaktadır. Non-Newtonyen katsayı artırıldığında sıcaklık gradyanının azaldığı görülmektedir. Yine bu sonuçlarda, non-Newtonyen katsayı artırıldığında akışkanın katı kıvamı fazlalaşacağı düşünüldüğünde sıcaklık gradyanının azaldığı

sonucu mantıklı bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır. Yine non-Newtonyen katsayı artırıldığında plakadan akışkana taşınım yolu ile olan ısı transferi azalmaktadır. Plakanın merkezinde ise sıcaklık gradyanının değişimi sifıra yakındır. Dolayısı ile cidara yakın bölgelerde sıcaklık gradyanı fazla olduğundan ısı transferinden kaynaklanan kayıplar daha fazla olmaktadır.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’de farklı viskozite parametresi (M) değerleri için sırası ile hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi gösterilmiştir. Denklem 4.14’de de görüldüğü gibi M viskozite parametresidir ve M değeri arttıkça viskozitenin azaldığı görülmektedir. Şekil 4.4 incelendiğinde viskozite parametresinin artmasıyla akış hızının arttığı görülmektedir. Hızın artması sonucu beklen bir sonuçtur. Çünkü M artırıldığı için viskozite azalmakta ve akışkanın akış özelliği artmaktadır. Ayrıca grafikte plakaya yakın bölgelerde hız gradyanının daha fazla olduğu görülmektedir. M arttıkça deformasyonunda arttığı sonucu elde edilmiştir. Plakanın merkezine doğru deformasyonun azaldığı gözlenmektedir. Bu durumda cidarlarda sürtünmeden kaynaklanan kayıpların daha fazla olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Özellikle M arttığında hız daha fazla arttığı için sürtünme viskozite parametresi arttığı zaman daha fazla artmaktadır.

Ayrıca iki plakanın merkezinde hızın maksimuma ulaştığı grafikten bakılarak söylenebilir. Şekil 4.5’de ise viskozite parametresinin azalmasıyla sıcaklığında azaldığı görülmektedir. Ayrıca cidar bölgelerinde sıcaklık gradyanının fazla olduğu ve viskozite parametresinin artması ile sıcaklık gradyanının da arttığı gözlenmektedir. Cidarlarda hız gradyanının artması, sıcaklık gradyanının artmasına yardımcı olmaktadır. Plakanın merkezine doğru ise sıcaklık gradyanının sifıra yaklaştığı görülmektedir. Elde edilen bu sonuçlarda, viskozite parametresinin artmasıyla akışkanın daha fazla sıvılaşıcağı düşünülürse sıcaklık gradyanının artması doğru bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca viskozite parametresinin artmasıyla taşınım yolu ile olan ısı transferinin arttığı sonucu ortaya çıkmaktadır.

Şekil 4.6 ve Şekil 4.7’de farklı değerlerdeki C (basınç farkı) parametresi için hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 4.6’da C

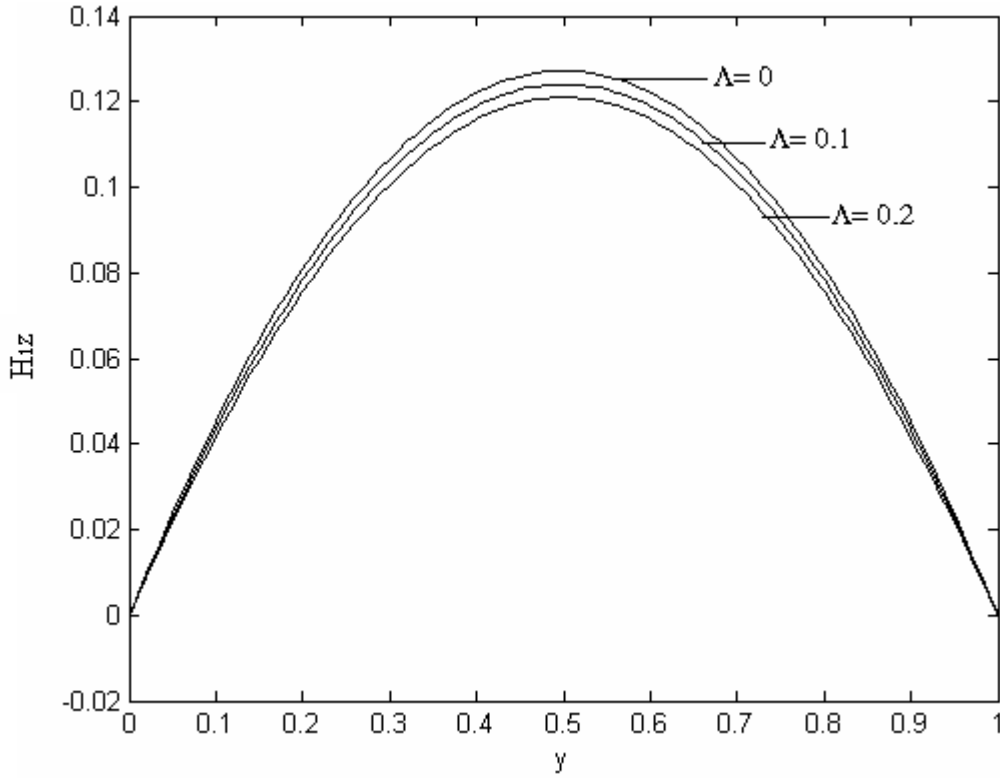
parametresinin mutlak olarak artmasıyla hızın arttığı görülmektedir. Plakaya yakın bölgede deformasyonun daha fazla olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle akışkanın hız gradyanı cidar bölgelerinde daha fazla olmakta merkeze doğru ise sifıra yaklaşmaktadır. Cidar bölgelerinde hız gradyanının fazla olması bu bölgelerdeki akışkanın daha fazla sürtünmeye maruz kaldığı anlamına gelmektedir. Sürtünmenin bu bölgelerde fazla olması akışkanda daha fazla ısı kaybına sebebiyet verecektir. İki plakanın merkezinde hızın maksimuma ulaştığı görülmektedir. Şekil 4.7’de ise C ’nin mutlak manadaki değerinin artmasıyla maksimum sıcaklığın da arttığı görülmektedir. Yine bu grafikte plakalara yakın bölgelerde sıcaklık gradyanı artarken plakanın ortalarına doğru azaldığı dikkati çekmektedir. Akışkana uygulanan basıncın artmasıyla akışkana taşınım yoluyla olan ısı transferi de artmaktadır. Yani akışkanın newtonyen akış karakteristiğini göstermeye başlamaktadır.

Bundan sonraki grafikler analitik ve nümerik çözümleri karşılaştırıldığı grafiklerdir. Nümerik çözümler Maple paket programı kullanılarak yapılmıştır. Şekil 3.8 ve Şekil 4.9’da M viskozite parametresinin en yüksek değeri baz alınarak nümerik ve analitik çözümler karşılaştırılmıştır. Karşılaştırılan bu grafiklerde hız ve sıcaklık eğrilerinin birbiri ile örtüştüğü görülmüştür. Bu da bu tezde yapılmış olan analitik çözümleri doğruluğunu ispat etmektedir. Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de non-Newtonyen parametresinin en yüksek değeri dikkate alınmıştır.

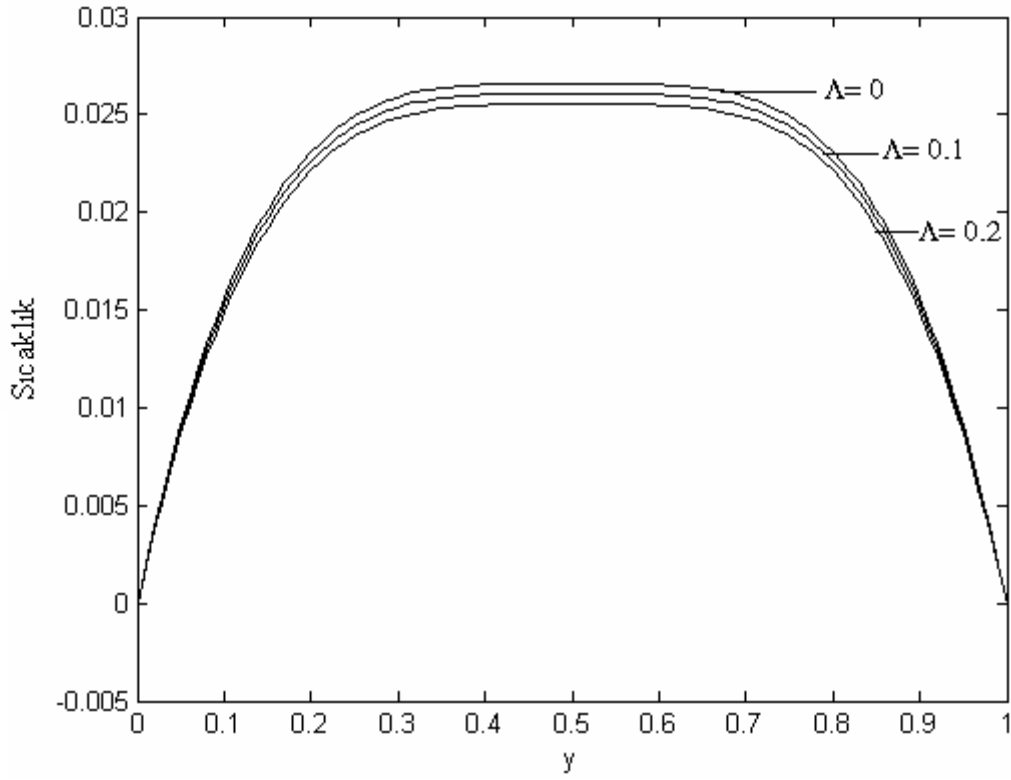
En yüksek değerini almaktaki amaç nümerik ve analitik değerler arasında herhangi bir fark varsa daha belirgin bir şekilde anlaşılmasıdır. Çünkü yapılan yaklaşık analitik çözümler belli değerler için doğru sonuçlar vermektedir. Sonuç olarak elde edilen bu grafiklerde hız ve sıcaklık eğrilerinin çakışması analitik sonuçların doğruluğunu göstermektedir.

4.4 Vogel Viskozite Modeli Grafikleri

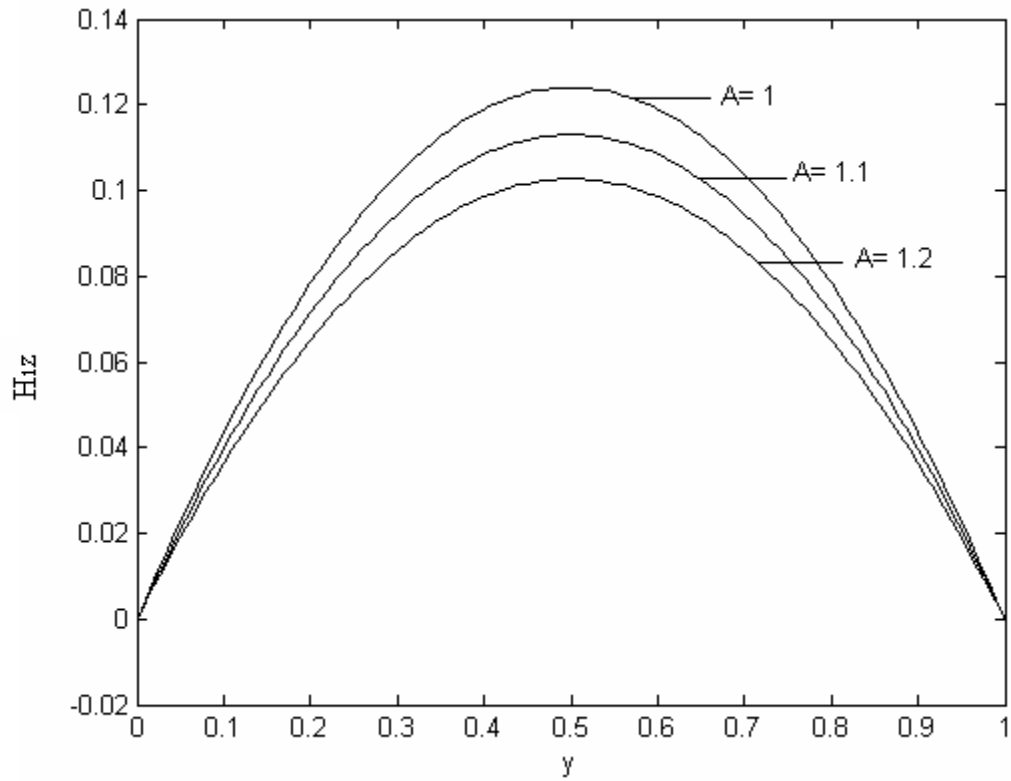
Vogel viskozite modeli için hız ve sıcaklık profilleri grafiksel olarak gösterilecektir. Ayrıca maple paket programı kullanılarak nümerik çözümler elde edilecek ve elde edilen çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılacaktır. Non-Newtonyen parametresi ve basınç farkı için grafikler elde edilecektir. Ayrıca vogel viskozite modelindeki sabitlerin farklı değerleri içinde grafikler elde edilecektir. Bu grafiklerde özellikle Newtonyen ve non-Newtonyen akışkanlar arasındaki farklar açıkça ortaya konacaktır. Grafikler hız ve sıcaklık dağılımını gösteren grafikler olacaktır.



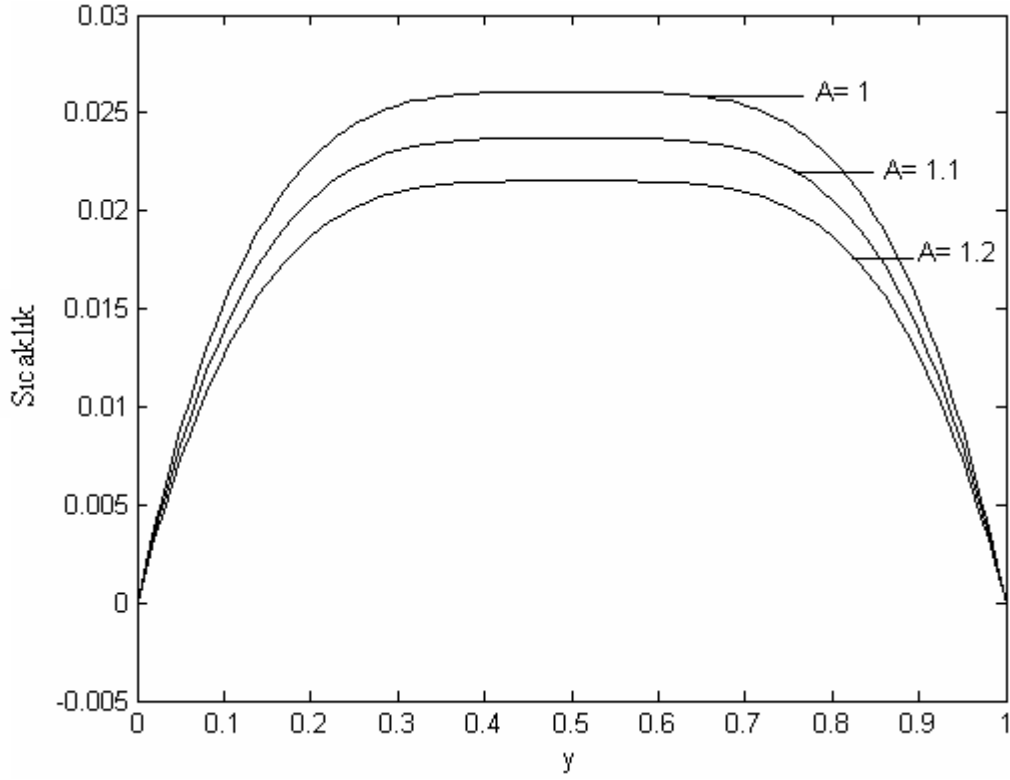
Şekil 4.12 Farklı Λ değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi
($A = 1, B = 1, C = -1, \Gamma = 5, \theta_w = 1, \mu_0 = 1$)



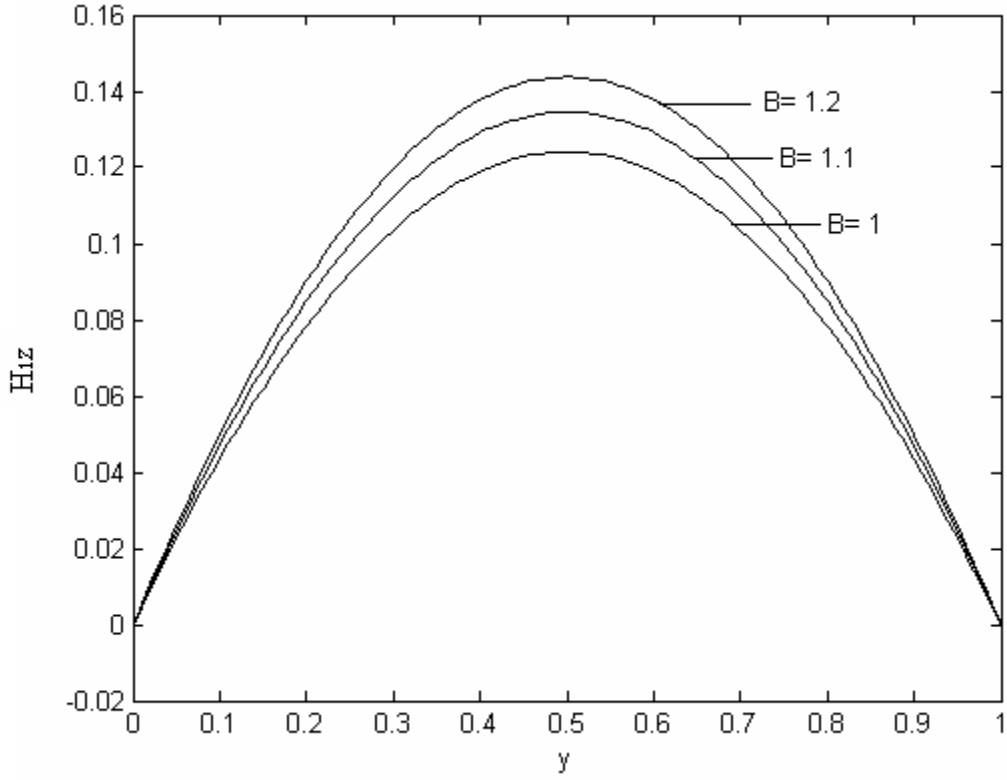
Şekil 4.13 Farklı Λ değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi ($A = 1, B = 1, C = -1, \Gamma = 5, \theta_w = 1, \mu_0 = 1$)



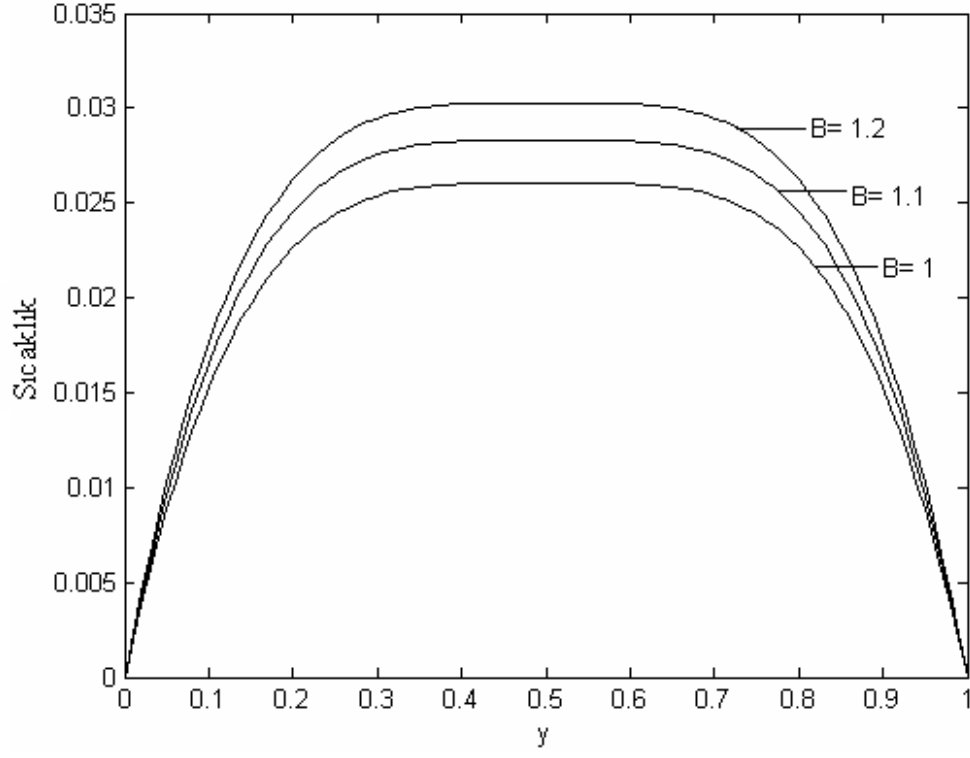
Şekil 4.14 Farklı A değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi ($B = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



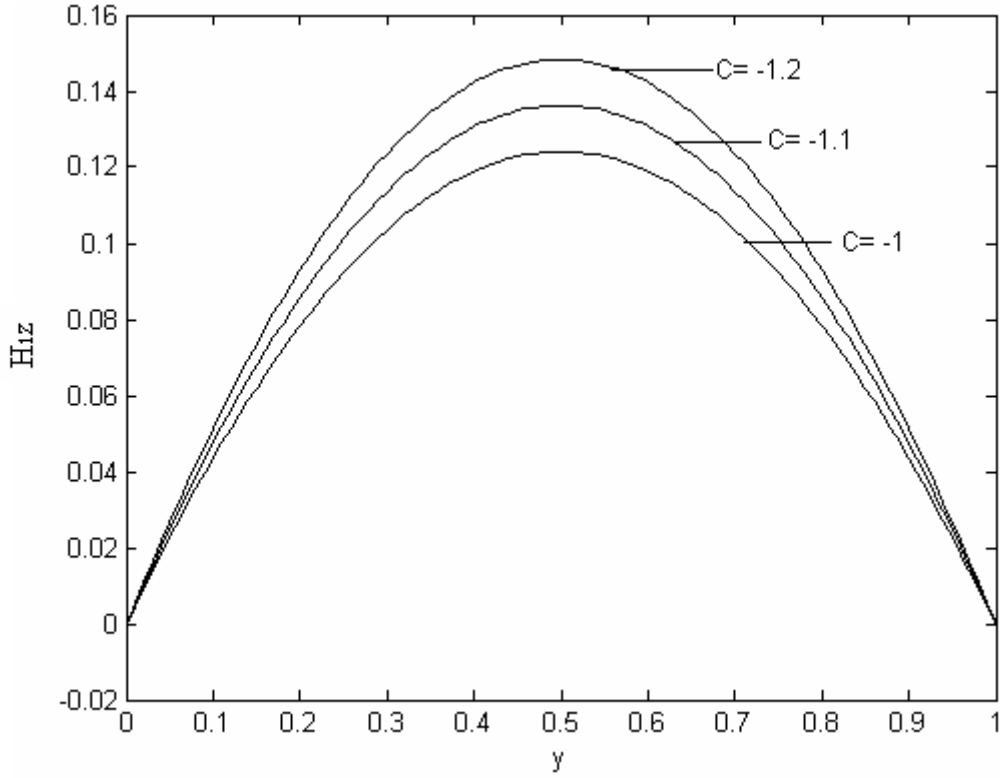
Şekil 4.15 Farklı A değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi
($B = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



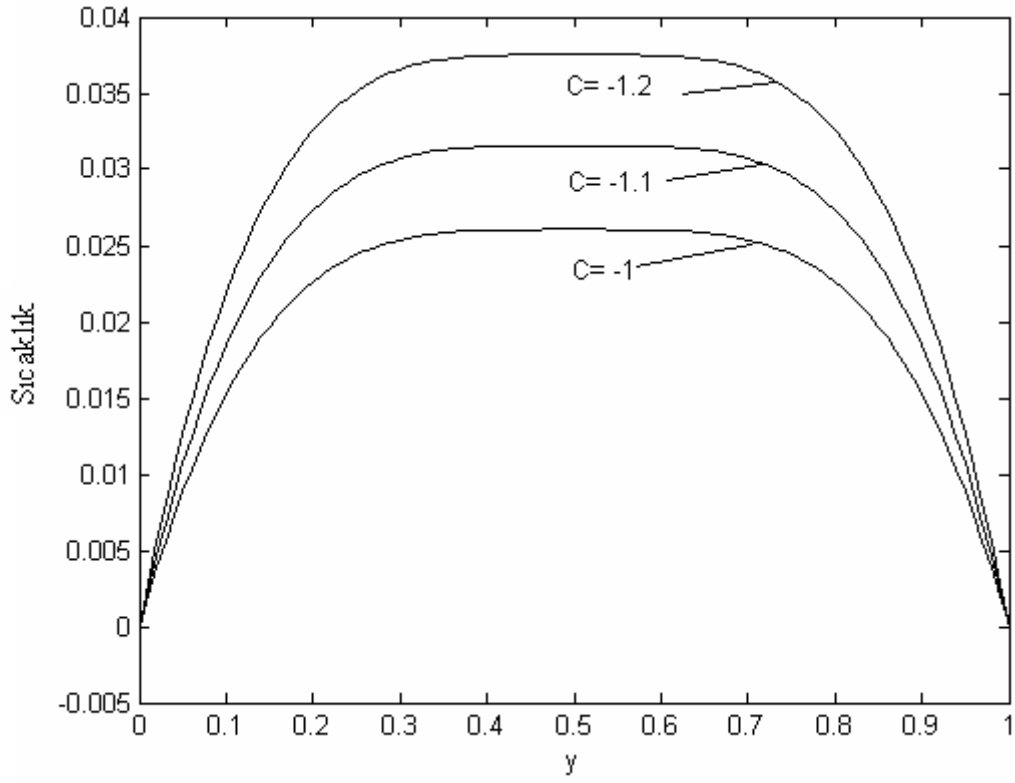
Şekil 4.16 Farklı B değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi
($A = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



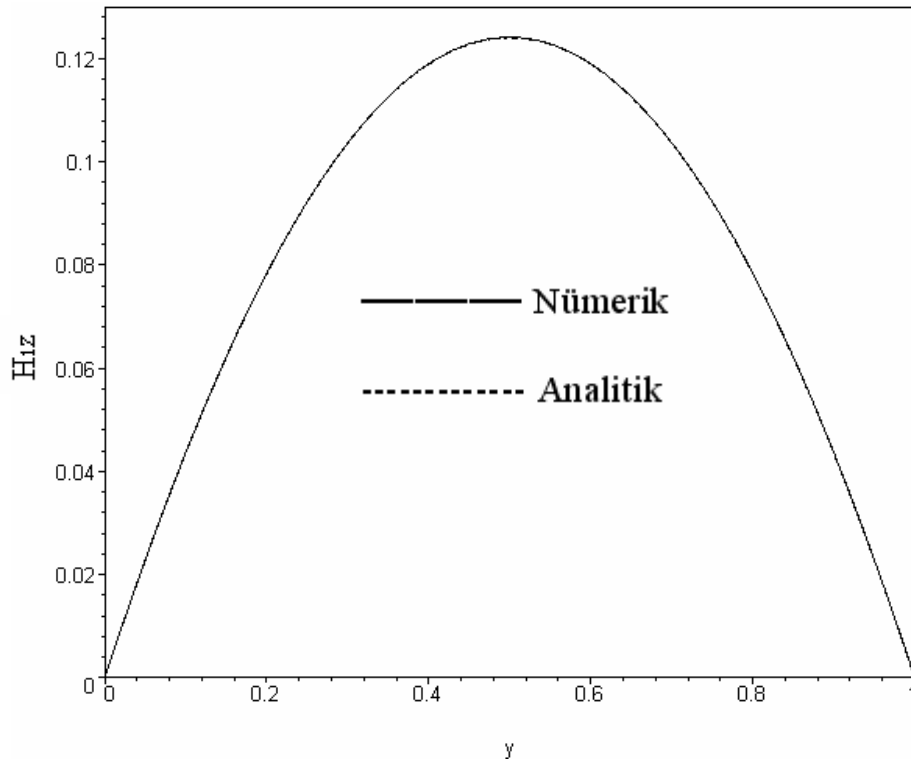
Şekil 4.17 Farklı B değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi
 ($A = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



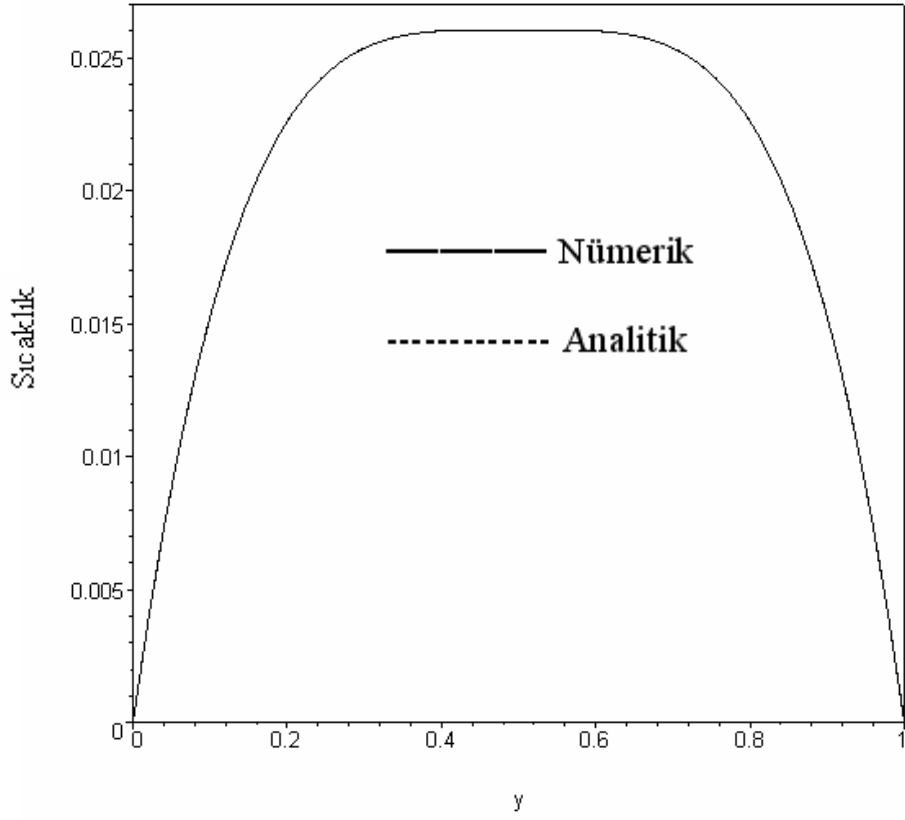
Şekil 4.18 Farklı C değerleri için hız profilinin y eksenini boyunca değişimi
 ($A = 1, B = 1, \theta_w = 1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1, \Lambda = 0.1$)



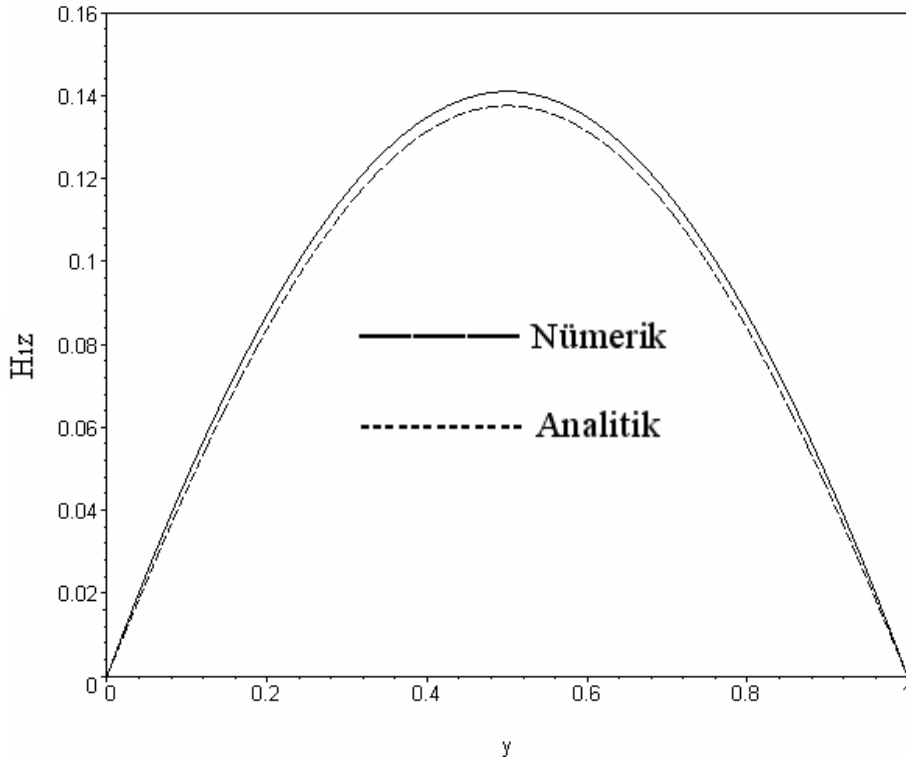
Şekil 4.19 Farklı C değerleri için sıcaklık profilinin y eksenini boyunca değişimi
($A = 1, B = 1, \theta_w = 1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1, \Lambda = 0.1$)



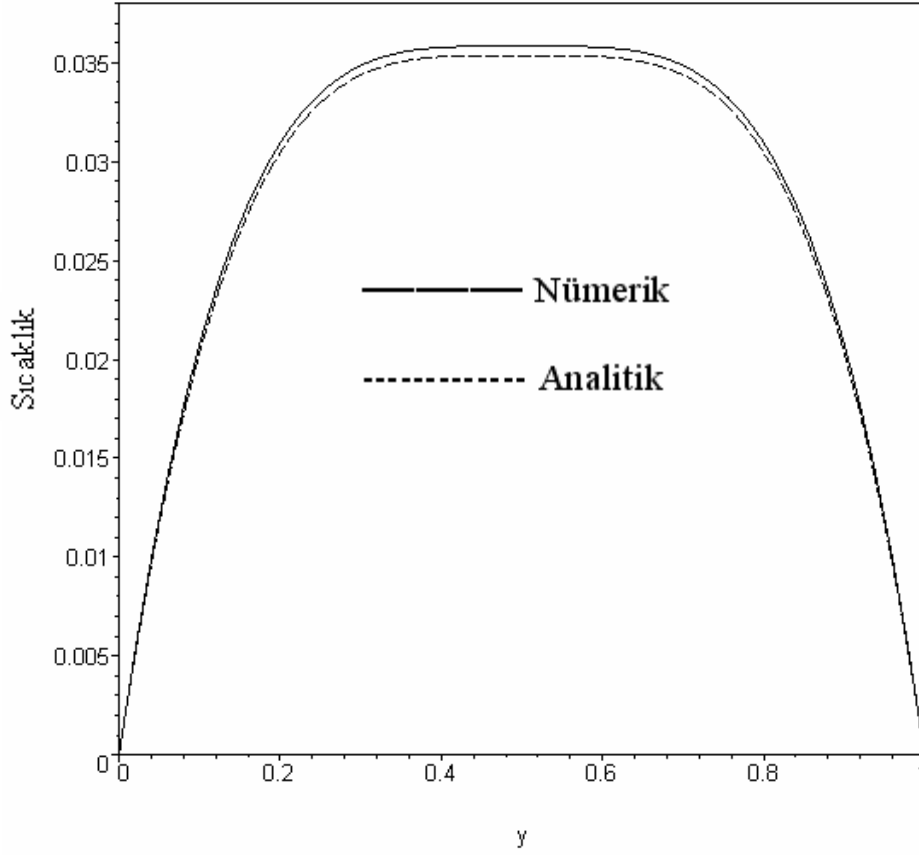
Şekil 4.20 A için analitik ve nümerik hız profilleri
($A = 1, B = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



Şekil 4.21 A için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri
 ($A = 1, B = 1, C = -1, \theta_w = 1, \Lambda = 0.1, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



Şekil 4.22 C için analitik ve nümerik hız profilleri
 ($A = 1, B = 1, C = -1.2, \theta_w = 1, \Lambda = 0.2, \Gamma = 5, \mu_0 = 1$)



Şekil 4.23 C için analitik ve nümerik sıcaklık profilleri

$$(A = 1, B = 1, C = -1.2, \theta_w = 1, \Lambda = 0.2, \Gamma = 5, \mu_0 = 1)$$

Şekil 4.12 ve Şekil 4.13’de farklı değerlerde non-Newtonyen parametresi için sırası ile hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi gösterilmiştir. Bu grafiklerde $\Lambda \neq 0$ olması akışkanın Newtonyen olmayan akışkan olduğu anlamına gelmektedir. Şekil 4.12’de non-Newtonyen parametresi arttıkça hızın azaldığı görülmektedir. Ayrıca non-Newtonyen parametresinin artmasıyla deformasyonunun azaldığı söylenebilir. Yine bu grafikte iki plaka merkezinde hızın maksimum seviyede olduğu ve non-Newtonyen parametresinin azalmasıyla maksimum hızın da arttığı görülmektedir. Non-Newtonyen parametresinin azalması ile akışkanın akış özelliğinin artacağından dolayı bu sonucun elde edilmesi doğaldır. Grafikte akışkanın plakalara yakın bölgelerinde hız gradyanının fazla olduğu ve non-Newtonyen parametresi azaldıkça hız gradyanının arttığı görülmektedir. Bu durumda sürtünmenin etkisiyle akışkan daha fazla kayıplara sebebiyet verecektir. Buda taşınım yoluyla gerçekleşen ısı transferinin azalmasına neden olacaktır. Şekil 4.13 de ise sıcaklık dağılımının grafiği gösterilmiştir. Non-Newtonyen parametresinin artmasıyla akış alanı içerisindeki maksimum sıcaklığın düştüğü

görülmektedir. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde deformasyonun daha fazla olduğu ve non-Newtonyen parametresinin azalması ile deformasyonun arttığı görülmektedir. Bu nedenle cidar bölgelerde sürtünmeden dolayı kayıplar oluşacaktır. Ayrıca cidar bölgelerinde sıcaklık gradyanı daha fazla olmakta merkezde ise sıfıra yaklaşmaktadır. Yine bu grafikte newtonyen akışkanın ($\Lambda = 0$) non-Newtonyen akışkana göre daha fazla akış özelliği gösterdiği görülmektedir. İki plakanın merkezinde sıcaklığın maksimuma ulaştığı yine bu grafikten bakılarak söylenebilir.

Şekil 4.14 ve Şekil 4.15’de farklı A (viskozite parametresi) değerleri için hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Denklem 4.44’de de görüldüğü gibi A viskozitenin bir parametresidir ve viskozite parametresinin artmasıyla viskozitenin de arttığı görülmektedir. Şekil 4.14 incelendiğinde viskozite parametresinin artmasıyla hızın azaldığı görülmektedir. Viskozite parametresinin artması akışkanın akış özelliğini azaltacağından dolayı akışkan hızının azalması doğru bir sonuçtur. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde deformasyonun daha fazla olduğu ve viskozite parametresinin artması ile deformasyonun azaldığı görülmektedir. Yine bu grafikte cidar bölgelerinde hız gradyanının fazla olduğu gözükmektedir. Buda akışkanda sürtünmenin artmasına ve taşınım yoluyla gerçekleşen ısıda kayıplara sebebiyet verecektir. Plakaların ortalarında hızın maksimum seviyeye ulaştığı yine grafikten bakılarak söylenebilir. Viskozite parametresinin (A) artmasıyla akışkanın non-Newtonyen akışkan karakterini sergilemeye başladığı görülmektedir. Şekil 4.15’de sıcaklık dağılımı gösterilmiştir. Viskozite parametresinin artmasıyla sıcaklığın azaldığı dikkati çekmektedir. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde deformasyonun fazla olduğu ve plakaların merkezine doğru oldukça azaldığı görülmektedir. Yine bu grafikte plakalara yakın bölgelerde sıcaklık gradyanının fazla olduğu ve viskozite parametresinin azalmasıyla sıcaklık gradyanının arttığı söylenebilir. Buda akışkanda sürtünmeden dolayı daha fazla kayıplara sebebiyet verecektir. Başka bir ifadeyle viskozite parametresinin artmasıyla taşınım yolu ile olan ısı transferinin azaldığı görülmektedir. İki plakanın merkezinde ise sıcaklığın maksimuma ulaştığı görülmektedir. Sonuç olarak viskozite parametresinin artmasıyla akışkan daha çok katılaşacağından dolayı non-Newtonyen bir akış karakteristiğini sergilemesi oldukça doğaldır.

Şekil 4.16 ve 4.17’de ise B (viskozite parametresi) için hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Denklem 4.44’de de B parametresinin A parametresine göre ters bir etki yaptığı ve B parametresinin artmasıyla viskozitenin azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla şekil 4.16 incelendiğinde B parametresi arttıkça hızın da arttığı görülmektedir. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde hız gradyanının daha fazla olduğu ve viskozite parametresinin artmasıyla hız gradyanının da arttığı görülmektedir. Buda akışkanda sürtünmeden dolayı daha fazla kayıplara sebebiyet verecektir. Yine bu grafikte merkeze gidildikçe hızdaki değişimin oldukça azaldığı dikkati çekmektedir. Viskozite parametresinin artmasıyla akışkanının viskozitesinin azalacağından dolayı akışkanın hızının artması doğru bir sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca cidar bölgelerinde deformasyonun daha fazla olduğu görülmektedir. Yine bu grafikte plakaların merkezinde maksimum hıza ulaşıldığı belirlenmiştir. Şekil 4.17’de viskozite parametresinin artmasıyla sıcaklığın da arttığı görülmektedir. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde deformasyonun daha fazla olduğu ve viskozite parametresinin artmasıyla deformasyonun da arttığı görülmektedir. Yine bu grafikte cidar bölgelerinde hız gradyanı diğer bölgelere oranla oldukça fazladır. Yalnız merkeze yaklaşıldıkça sıcaklık gradyanının da azalmaya başladığı görülmektedir. Sıcaklık gradyanının artması ile sürtünmenin de etkisiyle akışkanda daha fazla kayıp meydana gelecektir. Yani taşınım yoluyla akışkanın elde ettiği ısıda daha fazla bir kayıp oluşacaktır. Plakaların merkezinde sıcaklığın maksimum değerinde olduğu sonucu yine bu grafikten bakılarak söylenebilmektedir.

Şekil 4.18 ve Şekil 4.19’da farklı değerlerde C (basınç farkı) için hız ve sıcaklık profillerinin y eksenini boyunca değişimi sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 3.18’de basınç farkının artmasıyla hızın da arttığı görülmektedir. Ayrıca plakalara yakın bölgelerdeki deformasyonun iç bölgelere oranla daha fazla olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle akışkanın hız gradyanı cidar bölgelerinde daha fazla olmaktadır. Bu nedenle bu bölgelerde sürtünmenin de etkisiyle daha çok ısı kaybı meydana gelmektedir. Plakaların iç bölgelerine doğru yaklaştıkça ise hız gradyanının oldukça azaldığı görülmektedir. Plakaların ortalarında hızın maksimuma ulaştığı yine grafikten bakılarak söylenebilir. Sonuç olarak basınç parametresinin artmasıyla akışkanda taşınım yoluyla meydana gelen ısı kaybı artacaktır. Şekil 4.18’de ise basınç farkının artmasıyla sıcaklığın da

arttığı görülmektedir. Ayrıca cidar bölgelerinde deformasyonun daha fazla olduğu iç bölgelere yaklaştıkça azaldığı görülmektedir. Yine bu grafikte plakalara yakın bölgelerde hız gradyanı fazla merkeze yaklaştıkça azalmaktadır. Deformasyonun fazla olduğu bölgelerde sürtünme de artacak ve bundan dolayı daha fazla ısı kaybına sebebiyet verecektir. Yani akışkan viskozite parametresinin artmasıyla newtonyen akış karakteristiğini sergilediği söylenebilir.

Bundan sonraki grafikler analitik ve nümerik çözümleri karşılaştırıldığı grafiklerdir. Nümerik çözümler için Maple paket programı kullanılarak yapılmıştır. Şekil 4.20 ve 4.21'de A parametresi için analitik ve nümerik çözümler karşılaştırılmıştır. Yapmış olduğumuz analitik çözümlerde A parametresinin değeri >1 'den alınamamaktadır. Bu değerlerde yapmış olduğumuz analitik çözüm ile nümerik çözümü karşılaştırdığımızda değerlerin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da bu tezde yapılmış olan analitik çözümlerin almış olduğumuz değerlerdeki doğruluğunu ispat eder niteliktedir. Şekil 4.22 ve Şekil 4.23'de C parametresi için analitik ve nümerik çözümler karşılaştırılmıştır. Nümerik çözümler Maple paket programı kullanılarak yapılmıştır. Alınan bu değerlerde hız ve sıcaklık profillerinin birbiri ile örtüştüğü görülmektedir. Buda bize belirli aralıklarda yapmış olduğumuz analitik çözümlerin doğruluğunu göstermektedir.

SONUÇ

Paralel levhalar arasındaki non-Newtonyen akışkanlar incelenmiştir. Hız ve sıcaklık profilleri pertürbasyon metodu kullanılarak elde edilmiştir. Viskozite parametresinin ve non-Newtonyen parametresinin hız profilindeki etkileri daha çok akışkan gerilmesinin yüksek olduğu plakaya yakın bölgelerde görülmüştür. Non-Newtonyen parametresinin artması akışkanı, daha çok katılaştırdığı ve hızını azalttığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca non-Newtonyen parametresinin azalması ile akışkanda taşınım yolu ile gerçekleşen ısı transferini de artırdığı görülmüştür. Bunun yanında viskozite parametresinin ve non-Newtonyen parametresinin paralel levhaların merkezinde sıcaklık dağılımına etkileri fazla değildir. Viskozite azaldıkça akışkanın hızının ve sıcaklık değerlerinin arttığı görülmüştür. Ayrıca plakalara yakın bölgelerde akışkan daha fazla deformasyona uğramaktadır. Dolayısıyla buralarda kayıplar daha fazla meydana gelmektedir. Bunun haricinde maksimum hız ve sıcaklık değerlerinin plakaların merkezinde olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

A.Z. Szeri., K.R. Rajagopal., Flow of a non-Newtonian fluid between heated parallel plates, 1985.

Hayat, T., Kara., A.H., Momoniat. E., Exact flow of a third grade fluid on a porous wall, 2003.

M. Massoudi., I. Christie, Effects of variable viscosity and viscous dissipation on the flow of a third grade fluid in a pipe, 1995.

Pakdemirli M., Yılbaş B.S., Yürüsoy M., Entropy generation in non-Newtonian fluid flow in a slider bearing, 2004.

Pakdemirli M., Conventional and multiple deck boundary layer approach to second and third grade fluids, 1994.

Pakdemirli M., Yılbaş B.S., Entropy generation in a pipe due to non-Newtonian fluid flow constant viscosity case, 2006.

Soğukoğlu M., "Akışkanlar Mekaniği" Fatih Ofset Yayınevi, 1995.

Yurusoy M., Pakdemirli M., Lubrication of a slider bearing with a special third-grade fluid, Applied Mechanics and Engineering, 1999.

Yürüsoy M., Pakdemirli M., Approximate analytical solutions for the flow of a third grade fluid in a pipe, 2002.

Yürüsoy M., Bayrakçeken H., Numerical method in the analysis of slider bearing with Power-law fluid, 2005.

Yürüsoy M., Yilbaş B.S., Pakdemirli M., Non-Newtonian fluid flow in annular pipes an entropy generation: Temperature-dependent viscosity, 2005.

Z.Uysal B., "Akışkanlar Mekaniği" Alp Yayınevi, 18 Aralık 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	SERDAL YILMAZ
Doğum Yeri	Tokat / Niksar
Doğum Tarihi	01/07/1983
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dili	İngilizce
	Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise	Tophane Teknik Lisesi
Lisans	Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi Mak. Res. ve Konst. Öğr. (2001-2005)
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Makine Eğitimi Anabilim Dalı (2005-2008)
	Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl aralığı
Modsan Ltd.Şti	2006-2007(Tasarım Sorumlusu)
Metkal Ltd.Şti	2007-.....(Tasarım Sorumlusu)
	Yayımları (SCI ve diğer)
	Diğer konular

