ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIRLI DİZİLERİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Nurcan AŞILAR

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2008

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışmasında Bolzano-Weierstrass teoremi, ideal yakınsaklığa genelleştirilecektir. (Reel sayılarda her sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir). Bolzano-Weierstrass özelliğine sahip olan ya da olmayan ideal örnekleri verilecektir. Altölçümler ve maksimal bir P-ideale genişletilebilirlik açısından BW özelliğinin karakterize edilmesi verilecektir. İdeallerin farklı sıralamalarına ve Boolean cebirine uygulamalar gösterilecektir.

2008, Sayfa : 46

ANAHTAR KELİMELER: Bolzano-Weierstrass Teoremi, İstatistiksel Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal Yakınsaklık, Süzgeç Yakınsaklığı, Alt Dizi, Genişletilmiş İdealler, P-İdealler, P-noktaları, Analitik İdealler, Maksimal İdealler.

ABSTRACT

MsSc

IDEAL CONVERGENCE OF BOUNDED SEQUENCES

Nurcan AŞILAR

Afyonkarahisar Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2008

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

We generalize the Bolzano-Weierstrass theorem (that every bounded sequence of reals admits a convergent subsequence) on ideal convergence. We show examples of ideals with and without Bolzano-Weierstrass property, and give characterizations of BW property in terms of submeasures and extendability to a maximal P-ideal. We show applications to the various orderings of ideals and its Boolean algebras.

2008, Page: 46

KEY WORDS : Bolzano-Weierstrass Theorem, Statistical Density, Statistical Convergence, Filter Convergence, Subsequence, Extending İdeals, P-ideals, P-points, Analytic İdeals, Maximal İdeals.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda konumun belirlenmesinden başlayarak, çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Fatih NURAY'a , çalışmam boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme, en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Nurcan

AŞILAR

İÇİNDEKİLER

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI i
ÖZET ii
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR iv
İÇİNDEKİLER
v
SİMGELER vi
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 2
3. SINIRLI DİZLERİN İDEAL YAKINSAKLIĞI 10
3.1 P-idealler 14
3.2. Altölçüm ve Analitik İdealler 15
3.3. Temel Özellikler 17
3.4. Analitik İdealler 21
3.5. Yoğunluk İdealleri 28
4. GENİŞLEMELER 30
4.1 Boolean Cebiri 37
4.2 Sıralamalar 40
6. KAYNAKLAR 44
ÖZGEÇMİŞ 46

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n- boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$x=(x_k)$	: Reel sayı dizisi
I	: Pozitif tam sayıların alt kümelerinin ideali
$2^{\mathbb{N}}$	: $\mathbb{N}$ nin bütün alt kümelerinin ailesi
I - lim x_n	: x dizisinin I - limiti
$\mu(A)$	: A kümesinin ölçümü
$\varphi(\Omega)$	: Ω üzerindeki altölçüm
C^I	: I - kapsar
C^*	: Fin - kapsar
I_d	: Analitik ideal
l_∞	: Sınırlı diziler uzayı
$P(\Omega)$	: Ω nın bütün alt kümelerinin ailesi
İnt	: İç
diam	: Çap
$cl(U)$	: U nun yığılma noktalarının kümesi

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, ω üzerinde tanımlı dizilerin ideal yakınsaklığı (I −yakınsaklığı) incelenmiştir. İdeal yakınsaklık (I −yakınsaklık) fikri yakınsaklık fikrinin bir genellemesidir. (Sıradan yakınsaklık durumunda I ideali, ω nın sonlu alt kümelerinin idealine eşittir). İstatistiksel yoğunluğu 0 (sıfır) olan kümlerin ideali ilk kez Steinhaus ve Fast (1951) tarafından incelenmiştir (Bu durumda ideal yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa denktir). Bu fikrin daha kapsamlı biçimi Bernstain (1969/1970) (maksimal ideal için) ve Katetov un (1968) çalışmalarında ele alınmıştır. Her ikiside bu çalışmalarında süzgeç yakınsaklığının dual fikrini kullanmışlardır. Son birkaç yıl içinde bu fikir pek çok yönleriyle yeniden keşfedilmiş ve genelleştirilmiştir.

Ünlü Bolzano-Weierstrass teoremi reel sayıların herhangi bir sınırlı dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu ifade eder. Başka bir ifadeyle herhangi bir $(x_n) \subset [0,1]$ dizisi için $(x_n) \uparrow$ A yakınsak olacak şekilde A sonsuz kümesi vardır. Biz Bolzano-Weierstrass teoreminin verilen bir I ideali için geçerli olup olmadığını araştıracağız.

Öncelikle ideal ve I −yakınsaklık kavramları verilmiş ve bu kavramlarla ilgili olarak tanım, notasyon ve teoremlere değinilmiştir. Bolzano-Weierstrass özelliği olan ya da olmayan ideal örnekleri verilmiştir. Daha sonra bazı ideal sınıfları üzerinde Bolzano-Weierstrass özelliğinin tanımı verilmiştir. Son bölümde bir idealin $\beta\omega$ biçimindeki Cech-Stone kuralının P-noktasına genişletilebilme olasılığı ile ilgili özellikleri gösterilecektir.

Eğer açık ve sade bir yolla verilirse bir I idealin analitik olduğu hatırlanacaktır, örneğin istatistiksel yoğunluğu 0 olan kümelerin ideali

$$I_d = \left\{ A \subset \omega : \delta(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \le n : k \in A \} \right| = 0 \right\}$$

bir analitik idealdir.

Ancak Boolean $P(\omega)/I$ bölüm cebiri örneğindeki gibi basit ideallerle ilgili bazı nesneler oldukça karmaşık olabilir. Analitik idealler için Bolzano-Weierstrass özelliğinin, Boolean cebirinden nasıl ayrıldığı gösterilecektir. Son olarak; Bolzano-Weierstrass özelliğinin, Rudin-Keisler idealleri tarafından korunup korunmadığı ele alınacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda gerek duyulan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Fonksiyon) : A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı

(i) $\forall x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde $\exists\ y \in B$ var,

(ii) $(x,y) \in f$ ve $(x,z) \in f$ ise $y = z$

özelliklerine sahipse f ye A dan B ye bir *fonksiyon* denir.

Tanım 2.2 (Birebir Fonksiyon): $f : A \to B$ fonksiyonu için A tanım kümesinin farklı elemanlarının f altındaki görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna *birebir fonksiyon* denir.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa f foksiyonu *birebir* bir fonksiyondur.

Tanım 2.3 (Bir Fonksiyonun Tersi): $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir örten olsun.

$$\left(fog\right)\left(y\right) = y \quad \text{ve} \quad \left(gof\right)\left(x\right) = x$$

eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f nin *tersi* denir, f^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.4 (Açık Yuvar) : $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbb{R}^n$ de bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(a,\varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < \varepsilon\right\}$$

kümesine a merkezli ε yarıçaplı *açık yuvar* adı verilir.

Tanım 2.5 (Komşuluk) : $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \left\{x : \left|x - a\right| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\right\}$$

kümesine a *nın* ε *komşuluğu* denir.

Tanım 2.6 (Dizi) : Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir.

Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye rasyonel terimli dizi adı verilir. Dizi $x = (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.7 (Alt Dizi): $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **,** $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ k(n) = k_n$$

fonksiyon (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$$(xok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizsinin bir *alt dizisi* adı verilir ve

$$(xok)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8 (Sınırlı Dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 2.9 (Yakınsak Dizi): (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde, ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a ya *yakınsaktır* denir ve

$$\lim x_n = a \text{ veya } (x_n) \to a$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.10 (Yığılma Noktası): $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her $\delta -$komşuluğunda (x_n) dizisinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına (x_n) dizisinin bir *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.11 (Limit Noktası): (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_n) dizisinin bir *limit noktası* denir.

Tanım 2.12 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$ **,** $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna a noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.13 (Ayrık Kümeler): $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B kümeleri *ayrıktır* denir.

Tanım 2.14 (Topoloji): Bir X kümesi verilsin. X kümesinin alt kümelerinin bir τ ailesi aşağıdaki koşullara sahipse X e bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine de X bir *topolojik uzay* denir.

(i) $\mathrm{X}, \varnothing \in \tau$,

(ii) Herhangi sayıda $A_n \in X$ için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \tau$,

(iii) Sonlu sayıda $A_n \in X$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \tau$.

Tanım 2.15 (Filtre (Süzgeç)): $X \neq \varnothing$ olsun. X in alt kümelerinin boş olmayan bir $F \subseteq 2^X$ sınıfı; aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $F \subseteq 2^X$ e X in bir *filtresi* denir .

(i) $\varnothing \notin F$

(ii) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

(iii) $A \in F$ ve $A \subseteq B$ $\Rightarrow B \in F$

Tanım 2.16 (Supremum): Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırların en küçüğüne dizinin *en küçük üst sınırı* (eküs) veya *supremumu* denir.

Tanım 2.17 (İnfumum): Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin *en büyük alt sınırı* (ebas) veya *infumumu* denir.

Bir dizinin en büyük terimi varsa , o terim dizinin supremumu, en küçük terimi varsa o terim de dizinin infimumudur. Bir dizinin supremumu veya infumumu dizinin bir terimi olması gerekmez.

Tanım 2.18 (Monotonluk): Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona *kesin olarak monotondur*, artmayan veya azalmayansa *monotondur* denir.

Tanım 2.19 (Cisim): Değişmeli ve birimli bir $(F,+,.)$ halkasında halkanın sıfırı hariç F nin diğer her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa bu halkaya *cisim* denir.

$(F,+,.)$ matematik yapısının cisim olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki önermeleri sağlamasıdır.

$C_1)$ $(F,+)$ matematik yapısı değişmeli gruptur.

$C_2)$ $(F-\{0\},.)$ değişmeli gruptur.

$C_3)$ Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.20 (Vektör Uzayı): $(V,\oplus)$ değişmeli grup, $(F,+,.)$ bir cisim olsun.

$$\odot : F \times V \to V$$

$$\odot : (a,v) \to a \odot v$$

dış işlemi, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V ye $(F,+,.)$ cismi üstünde bir *vektör uzayı* denir.

$V_1)$ $\forall a \in F$ ve $\forall v \in V$ için $a \odot v \in V$,

$V_2)$ $\forall a \in F$ ve $\forall u, v \in V$ için $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$,

$V_3)$ $\forall a, b \in F$ ve $\forall v \in V$ için $(a+b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$,

V_4) $\forall a,b \in F$ ve $\forall v \in V$ için $(a.b) \odot v = a \odot (b \odot v)$,

V_5) $1 \in F$ ve $\forall v \in V$ için $1 \odot v = v$

dir. $(F,+,.)$ cismi üstündeki V vektör uzayı $((V,\oplus),(F,+,.),\odot)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.21 (Metrik Uzay): $X \neq \varnothing$ olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

M_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2) $d(x,y) = d(y,x)$

M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir *metrik* ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Bazen bu gösterim X_d ile gösterilir**.**

Tanım 2.22 (Norm): Gerçel veya karmaşık K cismi üzerinde bir vektör uzay V olsun. $n : V \to \mathbb{R},\ n(x) = \|x\|$ biçiminde bir n fonksiyonu aşağıdaki üç önermeyi doğrularsa n ye V üzerinde bir *norm* denir.

(i) $\forall x \in V,\ x \neq 0$ için $\|x\| > 0$

(ii) $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in V$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) $\forall x,y \in V$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 2.23 (Ölçüm Uzayı): (X,S),ölçülebilir bir uzay,

$$\eta : S \to \mathbb{R}$$

aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

i) $\eta(\varnothing) = 0$,

ii) $\forall A \in S$ için $\eta(A) \geq 0$,

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, S de ikişer ikişer ayrık kümelerin bir ailesi (dizisi) dir.

$\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$ (sayılabilirlik toplamsallık özelliği)

Bu taktirde η fonksiyonuna S üzerinde bir *ölçüm* denir. (X,S,η) ye de *ölçüm uzayı* denir.

Tanım 2.24 (Atomik Ölçüm): $A \in \mathrm{M}$, $A \subset E$ olması ya $\mu(A)=0$ ya da $\mu(A)=\mu(E)$ olmasını gerektirecek biçimde bir $E \in \mathrm{M}$ kümesini sağlayan $\mu : \mathrm{M} \to [0,\infty]$ küme fonksiyonudur.

Tanım 2.25 (Boolean Cebiri): Her $a \in A$ çin $\neg a$, a nın bir tümleyeni olmak üzere, üzerinde bir $\neg : A \to A$ işlemi bulunan dağılımlı bir A kafesidir.

Örneğin: X bir küme olmak üzere $A = P(x)$ kuvvet kümesi

$$S \le T \Leftrightarrow S \subseteq T$$

olsun. Bu durumda

$$S \wedge T = S \cap T, \quad S \vee T = S \cup T \text{ ve } \neg S = X \setminus \mathrm{S}$$

olur. A bir Boolean cebiri, toplama işlemi

$$a + b = (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$$

eşitliği ile tanımlanan simetrik fark, çarpma işlemi $\wedge$ olmak üzere $(A, +, \wedge)$ bir Borel halkasıdır. Bu sonuç, Borel cebiri ile Borel halkalarının denkliğinin bir yönünü gösterir.

Tanım 2.26 (Homomorfizm,İzomorfizm): $(A, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ ve $(B, \beta_1, ..., \beta_n)$ aynı türden matematik yapılar ve $f : A \to B$ ye bir fonksiyon olsun.Eğer f fonksiyonu $\{1, 2, ..., n\}$ cümlesinin $\forall i$ elemanı için α_i bağıntısını β_i bağıntısına dönüştürüyor ise f fonksiyonuna *homomorfizm* (denk yapı dönüşümü) denir.

Eğer f homomorfizması birebir ve örten ise *izomorfizm* (eş yapı dönüşümü) denir.

Tanım: 2.27 (Kompaktlık): X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X e *kompakt* denir.

Tanım 2.28 (Cantor Kümesi): $[0,1]$ kapalı aralığını göz önüne alalım. Sonra da bu aralığı üç eşit parçaya ayıralım ve ortadaki açık aralığı atalım. Geri kalan kısma

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

diyelim. Aynı şekilde C_1 deki iki kapalı aralığında üçte birlerini atalım. O zaman elimizde kalan küme

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olur. Bu şekilde devam edelim. Genel olarak bu çeşit aralıkların birleşimi C_n ise C_n deki birleşimde yer alan her bir aralığın üç eşit parçaya ayrılarak ortasında kalan üçte birlik açık aralığın atılması ile geri kalan kapalı aralıkların birleşimi C_{n+1} olur. Böylece ortaya çıkan

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

kümesine *Cantor kümesi* denir. İspat edilebilir ki

$a)$ C kümesi kompakt kümedir.

$b)$ C de sonsuz çoklukla gerçel sayı vardır.

$c)$ C kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.29 (F_σ Kümesi): Tümleyeni G_δ olan bir kümedir. Buna göre X topolojik uzayının A alt kümesinin bir F_σ kümesi olması için gerek ve yeter koşul,

$$A = \bigcap_{n=0}^{k} F_n$$

olacak şekilde F_n, $(n = 0,1,2,...)$ kapalı alt kümelerinin bulunmasıdır.

Tanım 2.30 (G_δ Kümesi) : X topolojik uzayının A alt kümesinin bir G_δ kümesi olması için gerek ve yeter koşul

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$$

olacak şekilde G_n, $(n = 0,1,2,...)$ açık alt kümelerinin olmasıdır.

Tanım 2.31 (İç Çarpım): $\mathbb{R}^n$ uzayında $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ olmak üzere $< x, y >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ biçiminde tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ işlemi bir *iç çarpımdır*. Bu çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayında *skaler çarpım* da denir.

Tanım 2.32 (Kartezyen Çarpım): A ve B herhangi iki küme olmak üzere, birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan bütün sıralı ikililerin kümesine, A ile B nin *kartezyen çarpımı* denir. A kartezyen çarpım B kümesi $A \times B$ ile gösterilir.

$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A$ ve $y \in B\}$ dir.

$A \neq B$ ise $A \times B = B \times A$ dır.

Tanım 2.33 (Karakteristik Fonksiyon): X bir küme, $A \subseteq X$ olmak üzere, X deki karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, x\in A\\ 0, x\in X\backslash A\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_A : X \to \{0,1\}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon A nın X deki *karakteristik fonksiyonudur.*

Tanım 2.34 (Yoğunluk) : A, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. χ_A , A nın kararkteristik fonksiyonu olmak üzere , eğer

$$\delta(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(k)$$

limiti mevcutsa A kümesine, $\delta(A)$ *yoğunluğuna sahiptir* denir.

$\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümeleri sıfır yoğunluğuna sahiptir.

Tanım 2.35 (İstatistiksel Yakınsaklık): $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise yani

$$K:=K(\varepsilon):=\left|\left\{k\in\mathbb{N} : \left|x_k-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st-\lim x=L$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.36 (I^* − yakınsaklık): Bir $(x_n)\in X$ dizisinin

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_{m_k},\xi)=0$$

olacak şekilde bir alt dizisinin indeks kümesi

$$M=\{m_1<m_2<\ldots<m_k<\ldots\},\ M\in F(I)$$

(yani $N\setminus M\in I$) var ise , $(x_n)\in X$ dizisi $\xi\in X$ ye I^*-*yakınsaktır* denir.

Tanım 2.37 (Maximal İdeal) : R bir halka ve R nin bir gerçel I ideali verilsin. ($I\ne R$). $I\subset J$ olacak şekilde eğer R nin gerçel J idealinden başka ideali yoksa I idealine *maximal ideal* denir.

Tanım 2.38 (P-noktası) : X topolojik uzayının bir elemanı x , onu kapsayan G_δ alt kümesinin her birinin içine uzanırsa buna $P-$*noktası* denir.

Tanım 2.39 (Dual Uzay) : $L: A \to A^*$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde A^* uzayına A uzayının *dual uzayı* denir.

Teorem 2.1 (Bolzano-Weierstrass Teoremi) : Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

Cech-Stone Kuralı : X in tamamen düzenli uzay olduğunu kabul edelim. O zaman X, $[0,1]^{C_X}$ içine yerleştirilirse $\beta = \Delta_{f \in C} f$ elde edilir. $[0,1]^{C_X}$ içindeki $\beta[X]$ in kapanışı X in kuralı olur. Buna X in Cech-Stone kuralı denir ve βX biçiminde gösterilir.

Continuum Hipotezi : Hiçbir kümenin eleman sayısı kesin olarak tamsayılar kümesinin eleman sayısı ile reel sayılar kümesinin eleman sayısının arasında değildir.

Pigeon-Hole Kuralı : İki sonlu küme arasında bire bir eşleme olması için gerekli ve yeterli koşul bu iki kümenin eleman sayısının eşit olmasıdır.

König Lemması : G sonsuz sayıda tepe noktaları ile bağlantılı olsun ve bu tepe noktaları sonlu dereceye sahip olsun. Sonlu derece, her bir tepenin sonlu sayıdaki başka tepelerle komşu olması demektir. Bu durumda G nin her bir tepesi sonsuz uzunluktaki basit yörüngelerin bir parçasıdır. Ve bu yörünge tekrarlı tepe içermez. En yaygın özel durumu, bir ağaçtır. Ağaç sonsuz sayıda tepeye sahiptir ve bu tepeler sonlu dereceye sahiptir ve en az bir tane sonsuz yörüngesi vardır. Belirtelim ki tepe derecesi sonlu olmak zorundadır. Ancak sınırlı olmak zorunda değildir: Örneğin bir tepe derecesi 10 iken diğeri 100 ve bir başkası 1000, … olması mümkündür.

3. SINIRLI DİZİLERİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde ilk olarak ideal ve $I-$yakınsaklık kavramı verilecek, daha sonra bu kavramlarla ilgili ihtiyaç duyulduğu oranda tanım ve teoremlere değinilecektir.

Tanım 3.1: $\omega \neq \emptyset$ olsun. Eğer ω nın alt kümelerinin bir $I \subset 2^{\omega}$ ailesi

(i) $\emptyset \in I$

(ii) Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$

(iii) Her $A \in I$ ve $B \subset A$ için $B \in I$

şartlarını sağlıyorsa I ailesine bir *ideal* denir.

Açıkça belirtilmediği takdirde bir idealin öz olduğunu $(\neq P(\omega))$ ve bütün sonlu kümeleri kapsadığını kabul edeceğiz. Fin gösterimi, ω nın bütün sonlu alt kümelerinden oluşan ideal anlamına gelecektir.

Eğer $A \notin I$ ise $A \subset \omega$ ye I $-$pozitif denir.

ω üzerindeki bir I ideali için I^* dual süzgeci gösterecektir. ω üzerindeki bu süzgeç I nın elemanlarının tümleyeninden oluşur. $A \notin I$ kümesi için bir ideal

$$I \uparrow A = \{B \cap A : B \in I\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bir I ideali için $A \subset \omega$ nın, $B \subset \omega$ tarafından $I-$kapsandığını (B $I-$kapsar A) söyleyebiliriz ve $A \subset^I B$ $(B \supset^I A)$ olması için gerek ve yeter şart $A \setminus B \in I$ olmasıdır.

A nın hemen hemen B tarafından kapsandığını (B hemen hemen A yı kapsar) söyleyebiliriz ve eğer A, B içinde Fin kapsanmışsa $A \subset^* B$ $(B \supset^* A$ birbirine eşit olmak üzere) biçiminde yazılır.

Tanım 3.2: $(x_n)_{n \in \omega}$ reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \omega : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \in I$$

oluyorsa $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisi x e $I-$*yakınsaktır* denir ve $x = I - \lim x_n$ biçiminde gösterilir.

$(x_n)_{n\in\omega}$ dizisinin bir $I-$alt dizisi ile bazı $A \notin I$ için $(x_n)\upharpoonright A$ olduğunu kastederiz. $I-$alt dizisi yerine alt dizi terimi kullanılacaktır.

Bu tezde ω üzerindeki ideallerin aşağıdaki özelliklerini inceleyeceğiz.

BW: Eğer reel sayıların herhangi bir sınırlı $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisi için $(x_n)\upharpoonright A$, $I-$yakınsak olacak şekilde $A \notin I$ varsa I ideali BW (Bolzano-Weierstrass) özelliğini sağlar denir.

FinBW: Eğer reel sayıların herhangi bir sınırlı $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisi için $(x_n)\upharpoonright A$, $\text{Fin}-$yakınsak olacak şekilde $A \notin I$ varsa I ideali FinBW (sonlu Bolzano-Weierstrass) özelliğini sağlar denir.

hBW: Eğer reel sayıların herhangi bir sınırlı $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisi için ve $A \notin I$ için $(x_n)\upharpoonright B$, $I-$yakınsak olacak şekilde $B \subset A$, $B \notin I$, varsa I ideali hBW (kalıtsal Bolzano-Weierstrass) özelliğini sağlar denir.

Eğer I Bolzano-Weierstrass özelliğine sahipse (ayrıca I, hBW ve FinBW özelliğine sahipse) $I \in$ BW ($I \in$ hBW, $I \in$ FinBW) biçiminde yazılır.

Sonuç olarak aşağıdaki şema çizilir.

("$A \to B$" demek, "eğer $I \in A$ ise $I \in B$" demektir.)

$$\begin{tikzcd}
 & \text{hFinBW} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{FinBW} \arrow[dr] & & \text{hBW} \arrow[dl] \\
 & \text{BW} &
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.3 : Eğer bir (x_n) dizisi $I-$yakınsak bir $(x_n)\upharpoonright A$ alt dizisine sahipse ve $I - \lim (x_n)\upharpoonright A = x$ ise x, (x_n) dizisinin $I-$*yığılma noktasıdır* denir. Yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n : |x_n - x| < \varepsilon\} \notin I$$

dır fakat ters kapsama sağlanmaz.

Gerçekten her sınırlı dizi bir $I-$yığılma noktasına sahiptir. Fakat daha sonra Bolzano-Weierstrass özelliğine sahip olmayan ideal örnekleri vereceğiz.

(Fatih Nuray ve William H. Ruckle 2000, Teorem 13)

I ve J idealleri için $\omega \times \{0,1\}$ üzerindeki ideal olarak $I \oplus J$ direkt toplamı şöyle tanımlanır:

$A \in I \oplus J$ olması için gerek ve yeter şart

$$\{n \in \omega :< n,0 >\in A\} \in I \qquad \text{ve} \qquad \{n \in \omega :< n,1 >\in A\} \in J$$

olmasıdır.

$A \subset \omega \times \omega$ ve $n \in \omega$ için A_n ile A nın n deki dikey kısmını gösterelim. Yani

$$A_n = \{m \in \omega :< n, m >\in A\}$$

olsun.

I ve J nin $\omega \times \omega$ üzerindeki $I \times J$ Fubini çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır: $A \in I \times J$ oması için gerek ve yeter şart

$$\{n \in \omega : A_n \notin J\} \in I$$

olmasıdır.

I ve J, ω üzerindeki iki ideal olsun. Eğer $A \in I$ olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(A) \in J$ olacak şekilde bir $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu varsa $I \leq_{RK} J$ (Rudin-Keisler sıralaması ile J, I nın üstündedir) biçiminde yazılır. Eğer f fonksiyonu sonlu tane elemanı bir elemana dönüştürüyorsa $I \leq_{RB} J$ (Rudin-Blass sıralaması ile J, I nın üstündedir) biçiminde yazılır. Eğer f, m ye bir fonksiyon ise $I \leq_m J$ biçiminde yazılır.

İdealler için literatürde bilinen aşağıdaki gösterim kullanılır. İstatistiksel yoğunluğu sıfır olan kümelerin ideali;

$$I_d = \left\{ A \subset \omega : \delta(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : k \in A \} \right| = 0 \right\}$$

biçiminde gösterilir.

Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali;

$NWD\left(\mathbb{Q}\right)$={ $A \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1] : A$ hiçbir yerde yoğun değildir.}

biçiminde gösterilir.

“Boş ideal” $\{\varnothing\}$ biçiminde gösterilir (bazen $\{\varnothing\}$ yerine $\varnothing$ kullanılır). “$\varnothing$” = $\{\varnothing\}$’dir. $\varnothing$ bir ideal değildir. ($\varnothing$, bütün sonlu kümeleri içermez). Fakat $\varnothing$ nin diğer ideallerle Fubini çarpımı bizim tanımımızdaki ideali verir.

3.1. P − İdealler

Tanım 3.1.1 : I idealindeki kümelerin her $(A_n)_{n\in\omega}$ dizisi için, tüm $n\in\mathbb{N}$ ler için $A_n \subset^* A$ olacak şekilde bir $A\in I$ varsa I idealine $P-ideal$ denir.

$P-$idealler in aşağıdaki özelliğini daha sonra kullanacağız.

Teorem 3.1.1 : Eğer I, bir $P-$ideal ise $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisinin $I-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $F\in I^*$ için $(x_n)\upharpoonright F$ alt dizisinin Fin$-$yakınsak olmasıdır. (Pavel Kostyrko, Tibor Salat ve Wladyslaw Wilczynski, 2000)

Eğer her $P-$ideal I ve $A\notin I$ ise bu takdirde $I\upharpoonright A$ da bir $P-$idealdir. Böylece aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1.2 : I nın bir $P-$ideal ve $A\notin I$ olduğunu kabul edelim. Eğer $(x_n)\upharpoonright A$ alt dizisi $I-$yakınsak ise $(x_n)\upharpoonright B$ Fin$-$yakınsak olacak şekilde $B\subset A$, $B\notin I$ vardır.

Sonuç 3.1.3 : Bolzano-Weierstrass özelliğine sahip her $P-$ideali, sonlu Bolzano-Weierstrass özelliğini sağlar.

Tanım 3.1.2: Sonlu kümeler içinde her $n\in\omega$ ve ω nın her $(A_n)_{n\in\omega}$ parçalanması için $|S\cap A_n|\le 1$ olmak üzere $S\in I^*$ varsa ω üzerindeki I idealine Q$-$*ideal* denir.

(J. E. Baumgartner, A.D. Taylor ve S. Wagon, 1982)

3.2. Altölçüm ve Analitik İdealler

Doğal sayıların kümelerini onların karakteristik fonksiyonlarıyla tanımlayarak $P(\omega)$ yı Cantor-uzay topolojisiyle düşünürsek böylece topolojik karmaşıklığı tamsayılar küme ideallerine taşıyabiliriz. Özellikle eğer I ideali Cantor-uzayının bir F_σ alt kümesi ise I, F_σ (analitik) dır.

$\phi : P(\omega) \to [0,\infty]$ olsun. Her $A, B \subset \omega$ için

$$\phi(\varnothing) = 0 \quad \text{ve} \quad \phi(A) \leq \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

ise ϕ, ω üzerinde bir altölçümdür.Eğer her $A \subset \omega$ için

$$\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \phi(\{k \leq n : k \in A\})$$

oluyorsa bu altölçüm alt yarısüreklidir.

ω üzerindeki herhangi bir alt yarısürekli altölçüm $\|.\|_\phi : P(\omega) \to [0,\infty]$ olsun. Bu altölçüm

$$\|A\|_\phi = \lim_{n\to\infty} \sup \phi(A \setminus n) = \lim_{n\to\infty} \phi(A \setminus n)$$

biçiminde tanımlansın. Burada ikinci eşitlik ϕ nin monotonluğundan çıkar.

$$\mathrm{Exh}(\phi) = \left\{A \subset \omega : \|A\|_\phi = 0\right\},$$

$$\mathrm{Fin}(\phi) = \left\{A \subset \omega : \phi(A) < \infty\right\}$$

olsun. Keyfi bir ϕ altölçümü için $\mathrm{Exh}(\phi)$ ve $\mathrm{Fin}(\phi)$ nin ideal oldukları (öz ideal olması gerekli değil) açıktır.

Bütün analitik $P-$idealler, Solecki'nin aşağıdaki teoremi tarafından karakterize edilir.

Teorem 3.2.1: ω üzerindeki bir I ideali için aşağıdaki şartlar denktir.

(1) I, bir analitik $P-$ idealdir.

(2) ω üzerindeki alt yarısürekli altölçüm ϕ için $I = \mathrm{Exh}(\phi)$ dir.

(Slawomir Solecki,1999)

Bundan başka F_σ idealleri için aşağıdaki karakterizasyon vardır.

Teorem 3.2.2 . ω üzerindeki bir I ideali için aşağıdaki şartlar denktir.

(1) I , bir F_σ idealidir.

(2) ω üzerindeki alt yarısürekli altölçüm ϕ için I =Fin(ϕ) dir.

(Krzysztof Mazur, 1991)

Tanım 3.2.1 :

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = +\infty \qquad \text{ve} \qquad I = \left\{ A : \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in A\cap n} f(i)}{\sum_{i\in n} f(i)} = 0 \right\}$$

olacak şekilde $f:\omega \to \left[0,+\infty\right)$ fonksiyonu varsa I idealine *Erdös-Ulam ideali* denir.

$$\phi_f(A) = \sup_{n\in\omega} \frac{\sum_{i\in A\cap n} f(i)}{\sum_{i\in n} f(i)}$$ olmak üzere Erdös-Ulam ideali Exh(ϕ_f) formunda bir analitik $P-$idealdir.

Uyarı : Yukarıda tanımlanan I_d ideali herhangi bir sabit pozitif f fonksiyonu tarafından üretilen Erdös-Ulam idealidir.

3.3. Temel Özellikler

Şimdi BW özelliği olmayan ideallere örnekler verilecektir. Ünlü Bolzano-Weierstrass teoreminden, ω nın sonlu alt kümelerin ideali BW özelliğini sağlar. 3.3.1 teoreminden aynısı her maximal ideal için de geçerlidir.

Teorem 3.3.1 (Folklore) : I , maximal ideal olsun. Bu durumda her sınırlı alt dizi $I-$yakınsaktır (Böylece I , hBW özelliğini sağlar).

Aşağıda Bolzano-Weierstrass özelliği olmayan çok iyi bilinen bazı idealleri göstereceğiz.

Önerme 3.3.2 : NWD($\mathbb{Q}$) ideali BW özelliğini sağlamaz.

İspat : $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ üzerindeki bir dizi $x_q = q$ ve $A \notin$ NWD($\mathbb{Q}$) olmak üzere kabul edelim ki

$$\text{NWD}(\mathbb{Q}) - \lim x_q = x$$

olsun. $A \notin$ NWD($\mathbb{Q}$) olduğundan A nın yoğun olduğu boş olmayan açık bir U kümesi vardır. $x \notin cl(V)$ olacak şekilde boş olmayan açık $V \subset U$ kümesi bulabiliriz. x ve V arasındaki uzaklık ε olsun. Bu durumda

$$V \cap A \subset \left\{ q \in A : \left| x_q - x \right| \geq \varepsilon \right\} \qquad \text{ve} \qquad V \cap A \notin \text{NWD}(\mathbb{Q})$$

dur. Böylece $(x_q) \uparrow A$, x e NWD($\mathbb{Q}$) yakınsak değildir.

Önerme 3.3.3 : I_d ideali BW özelliğini sağlamaz.

İspat : $n \in \omega$ ve $k \in \left\{0,...,2^n - 1\right\}$ i $\limsup\limits_{n\to\infty}$ çin (x_n) dizisi

$$x_{2^n+k} = \frac{k}{2^n}$$

biçiminde tanımlansın. Bir $A \notin I_d$ için $\left(x_n\right) \uparrow A$ nın $x \in \mathbb{R}$ ye $I-$yakınsak olduğunu kabul edelim. $A \notin I_d$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in A \right\} \right| = \alpha > 0$$

olur. $2^{-K} < \alpha$ olacak şekilde K olsun.

$$B = \left\{ n \in A : \left| x_n - x \right| < 2^{-(K+1)} \right\}$$

dir.

$$\left\{ i \in \left\{ 2^n, ..., 2^{n+1} - 1 \right\} : \left| x_i - x \right| < 2^{-(K+1)} \right\}$$

kümesinin eleman sayısı en fazla 2^{n-K} olduğundan

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in B \right\} \right| \leq 2^{-K}$$

dır.

$$C = \left\{ n \in A : \left| x_n - x \right| \geq 2^{-(K+1)} \right\}$$

olsun. $(x_n) \upharpoonright A$ nın I_d yakınsaklığından $C \in I_d$ elde ederiz. Yani C nin yoğunluğu 0 a eşit olur. $A = B \cup C$ olduğundan

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in A \right\} \right| = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in B \right\} \right| + \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in C \right\} \right| \right)$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in B \right\} \right| + \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in C \right\} \right|) \leq 2^{-K}$$

elde edilir. Fakat 2^{-K} keyfi küçüklükte olabilir, böylece $\alpha = 0$ dır ve bu $A \notin I_d$ ile çelişir.

Uyarı : Teorem 3.5.2. de sadece I_d idealinin BW özelliğini sağlamadığını değil, aynı zamanda her Erdös-Ulam idealinin bu özelliği sağlamadığını göstereceğiz.

Şimdi BW özellikli ya da BW özelliksiz ideal örneklerinin nasıl oluştuğunu göstereceğiz. İlk olarak $I \oplus J$ nin BW özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şartın I veya J nin BW özeliğini sağlaması gerektiğini görmek çok basittir.

Önerme 3.3.4 : $I \times J$ nin BW özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul I nın BW özelliğini sağlamasıdır.

İspat : ($\Rightarrow$): $I \times J \in \mathrm{BW}$ olduğunu kabul edelim. (x_n), ω üzerinde sınırlı bir dizi olsun. $\omega \times \omega$ üzerindeki dizi $x_{n,m} = x_n$ biçiminde tanımlansın. BW özelliğinden

$A \notin I \times J$ ve $(x_{n,m}) \upharpoonright A$ nın $I \times J$ –limit noktası olacak şekilde bir x noktası vardır.

$B = \{n \in \omega : A_n \notin J\} \notin I$ ve $\{n \in B : |x_n - x| \geq \varepsilon\} = \{n \in B : (\forall m \in \omega)|x_{n,m} - x| \geq \varepsilon\}$ ve $(x_{n,m}) \upharpoonright A$, $I \times J$ –yakınsak olduğundan son küme I ya aittir. Bu da $(x_n) \upharpoonright B$ nin x e I –yakınsak olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: Bunun tersini ispatlamak için $I \in$ BW ve $(x_{n,m})$ nin $\omega \times \omega$ üzerinde sınırlı bir dizi olduğunu kabul edelim. $(x_{n,m}) \subset [0,1]$ kabul edebiliriz. Her $n \in \omega$ ve $k \in \{0,...,2^n - 1\}$ için

$$A_{n,k} = \left(i \in \omega : x_{n,i} \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right)$$

biçiminde tanımlansın. Her n için ω, $A_{n,k}$ kümelerinin birleşimi olduğundan $A_{n,k_n} \notin J$ olacak şekilde bir k_n bulunur. (y_n) dizisini

$$(y_n) = \frac{(2k_n + 1)}{2^{n+1}}$$

biçiminde tanımlayalım. I nın BW özelliğinden $(y_n) \upharpoonright B$, y ye I –yakınsak olacak şekilde $B \notin I$ vardır.

$$C = \bigcup_{i \in B} \{i\} \times A_{i,k_i}$$

olsun. $C \notin I \times J$ olduğu açıktır. Aşağıda $(x_{n,m}) \upharpoonright C$ nin y ye $I \times J$ –yakınsak olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu takdirde

$$B(\varepsilon) = \{n \in B : |y_n - y| \geq \varepsilon\} \in I$$

ve $2^{-K} < \varepsilon$ olacak şekilde K bulunur. Böylece

$$\{(n,m) \in C : |x_{n,m} - y| \geq \varepsilon\} \subset (B(\varepsilon) \cup (K+1)) \times \omega =$$

$$= (B(\varepsilon) \times \omega) \cup ((K+1) \times \omega) \in I \times J$$

ve $\left(x_{n,m}\right)\uparrow C,\ I\times J-$yakınsaktır.

Uyarı : $A\in\prod_{i\in\omega} I_i$ olması için gerek ve yeter şart $\left\{n\in\omega : A_n\notin I_{n+1}\right\}\in I_0$ olmasıdır formulünü kullanarak Fubini çarpımının tanımını $\left\{I_0, I_1, \ldots\right\}$ ideallerinin sayılabilen $\prod_{i\in\omega} I_i$ Fubini çarpımına genişletebiliriz.

Hemen hemen aynı ispat ile $\prod_{i\in\omega} I_i$ nin BW özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşulun I_0 ın BW özelliğini sağlaması gerektiğini gösterebiliriz.

Bu bölümü, daha sonra kullanacağımız bir önerme ile bitireceğiz.

Önerme 3.3.5 : $\left(x_n\right)_n$ reel sayıların bir dizisi olsun ve $\left(x_n\right)_n$ in bütün $I-$yığılma noktaları kümesi C olsun. Eğer $x\in C$ ve $U\cap C=\left\{x\right\}$ olacak şekilde açık bir $U\subset\mathbb{R}$ kümesi var ise $\left(x_n\right)\uparrow A$ x e $I-$yakınsak olacak şekilde $A\notin I$ vardır.

İspat : $U^{'}\subset U$, $cl(U')\subset U$ kompakt olacak şekilde x in açık komşuluğu ve $A=\left\{n : x_n\in U'\right\}$ olsun. x, bir $I-$yığılma noktası olduğundan $A\notin I$ dır. $\varepsilon>0$ olsun. $cl(U^{'})\cap C=\left\{x\right\}$ olduğundan $y\in cl(U')\setminus\left\{x\right\}$ için

$$\left\{n\in A : \left|y-x_n\right|<\delta_y\right\}\in I$$

olmak üzere bir $\delta_y>0$ vardır. Böylece

$$cl(U')\setminus\left(x-\varepsilon, x+\varepsilon\right)\subset\bigcup_{i=1}^{N}\left(y_i-\delta_{y_i}, y_i+\delta_{y_i}\right)$$

olmak üzere $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ler vardır. Buradan

$$\left\{n\in A : \left|x-x_n\right|\geq\varepsilon\right\}\subset\bigcup_{i=1}^{N}\left\{n\in A : \left|y_i-x_n\right|<\delta_{y_i}\right\}\in I$$

dır. Böylece $\left(x_n\right)\uparrow A$, $I-$yakınsaktır.

Sonuç 3.3.6 : Eğer bir $\left(x_n\right)_n$ dizisinin $I-$ yığılma noktalarının kümesi sonlu ise, $I-$yakınsak bir alt diziye sahiptir.

3.4. Analitik İdealler

Burada Bolzano-Weierstrass özelliğinin bazı ideal grupları için alt yarısürekli altölçümlerdeki tanımını vereceğiz.

Teorem 3.4.1 : Her F_σ ideali, hBW ve FinBW özelliğini (böylece BW özelliğini) sağlar.

İspat : I bir F_σ ideali olsun. 3.2.2 teoreminden $I = Fin(\phi)$ olmak üzere ϕ alt yarısürekli altölçümü vardır.

(x_n) herhangi bir sınırlı dizi ve $A \notin I$ olsun. $(x_n) \subset [0,1]$ olduğunu kabul edebiliriz.

Tümevarımla $C_n \notin I$ kümelerini ve I_n aralıklarını tanımlayalım. $C_1 = A$ ve $\mathrm{I}_1 = [0,1]$ olsun. C_k, I_k nın $k \le n$ için seçilmiş olduğunu kabul edelim. $\mathrm{I}_n = [a,b]$ ve $c = \dfrac{a+b}{2}$ olsun.

$$C_{n+1}^0 = \{n \in C_n : x_n \in [a,c]\},$$

$$C_{n+1}^1 = \{n \in C_n : x_n \in [c,b]\}$$

olsun. Eğer $C_{n+1}^0 \notin I$ ise

$$C_{n+1} = C_{n+1}^0 \text{ ve } \mathrm{I}_{n+1} = [a,c]$$

dir. Aksi takdirde

$$C_{n+1} = C_{n+1}^1 \text{ ve } \mathrm{I}_{n+1} = [c,b]$$

dir.

ϕ nin alt yarısürekliliğinden her n için $\phi(B_n) > n$ olacak şekilde $B_n \subset C_n$ sonlu kümeleri vardır. $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ alalım. Açıkça $\phi(B) = \infty$ dur ve böylece $B \notin I$ dır.

Aşağıda $(x_n) \upharpoonright B$ nin $x \in \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{I}_n$ ye yakınsak olduğunu göstereceğiz.(diam (I_n) nin

0 a gittiğini ve böylelikle tam bir tane böyle x in olduğunu hatırlayalım.) diam(I_n) $< \frac{\varepsilon}{2}$ olmak üzere N, minimal n olsun. Bu durumda

$$\{n \in B : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \subset \{n \in B : x_n \notin \mathrm{I}_N\}$$

dir. En son küme sonlu olan $\bigcup_{n \leq N} B_n$ içinde yer alır. Böylece $(x_n) \upharpoonright B$, x e Fin − yakınsaktır.

3.2.1 teoreminden aşağıdaki şartlar bütün analitik $P-$idealler için BW özelliğini karakterize eder.

Teorem 3.4.2 : ϕ alt yarısürekli altölçüm olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) Exh(ϕ) ideali, BW özelliğini sağlar.

(2) Bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki ω nın herhangi bir $A_1, A_2, ..., A_n$ parçalanması ve her $k \in \omega$ için $\phi(A_i \setminus k) > \delta$ olacak şekilde bir $i \leq n$ vardır.

(3) Bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki ω nın herhangi bir $A_1, A_2, ..., A_n$ parçalanması için $\|A_i\| \geq \delta$ olacak şekilde bir $i \leq n$ vardır.

İspat : I = Exh(ϕ) olsun.

(1)⇒(2): Kabul edelim ki her $l > 0$ için k_l ve her $i \leq n_l$ için $\phi(A_i^l \setminus k_l) < \frac{1}{2^l}$ olmak üzere ω nın bir parçalanması $A_1^l, A_2^l, ..., A_{n_l}^l$ olsun. Genelliği bozmaksızın her $i \in \{1, ..., n_{l+1}\}$ için $A_i^{l+1} \subset A_j^l$ olacak şekilde $j \in \{1, ..., n_l\}$ vardır.

(1) $i \neq j$ için $\mathrm{I}_i^l \cap \mathrm{I}_j^l = \varnothing$

(2) $|\mathrm{I}_i^l| < \frac{1}{2^l}$

(3) Eğer $A_i^{l+1} \subset A_j^l$ ise $\mathrm{I}_i^{l+1} \subset \mathrm{int}(\mathrm{I}_j^l)$

olacak şekilde $[0,1]$ in kapalı alt aralıklarının bir ailesi

$$\left\{\mathrm{I}_i^l : l \in \omega, i = 1,2,...,n_l\right\}$$

olsun. $n \in \omega$ olsun. Her $l \in \omega$ için $n \in A_{i_l^n}^l$ olmak üzere yalnız bir tane i_l^n vardır.

$$\{x_n\} = \bigcap_{l \in \omega} \mathrm{I}_{i_l^n}^l$$

olacak şekilde $x_n \in [0,1]$ olsun.

İddia 3.4.2.1: $x_n \in \mathrm{I}_i^l \Leftrightarrow n \in A_i^l$ dir.

$(x_n) \upharpoonright B$ $I-$yakınsak olacak şekilde $B \notin I$ olsun. ($x = I - \lim (x_n) \upharpoonright B$ diyelim.) I, $P-$ideal olduğundan $(x_n) \upharpoonright B$ nin Fin-yakınsak olduğunu kabul edebiliriz.

Her $l \in \omega$ için $x \in \mathrm{I}_{\xi(l)}^l$ olacak şekilde $\xi \in \omega^\omega$ olsun. $(x_n) \upharpoonright B$, x e yakınsak olduğundan her l için

$$B \setminus \left\{n \in B : x_n \in \mathrm{I}_{\xi(l)}^l\right\}$$

sonludur. Bu takdirde

$$B \setminus N \subset A_{\xi(l)}^l \setminus k_l$$

olacak şekilde $N > k_l$ vardır, buradan

$$\phi(B \setminus N) \le \phi(A_{\xi(l)}^l \setminus k_l) < \frac{1}{2^l}$$

olduğundan $B \in I$ yazılır ki bu bir çelişkidir.

(2)$\Rightarrow$(1): (x_n) sınırlı bir dizi olsun. ($(x_n) \subset [0,1]$ olduğunu kabul edebiliriz.)

(1) $\bigcup_{s \in 2^n} \mathrm{I}_s = [0,1]$,

(2) Her $s,t \in 2^n$, $s \ne t$ için $|\mathrm{I}_s \cap \mathrm{I}_t| \le 1$,

(3) $\mathrm{I}_{s^\wedge 0} \cup \mathrm{I}_{s^\wedge 1} = \mathrm{I}_s$,

(4) $\mathrm{diam}(\mathrm{I}_s) < \frac{1}{|s|}$

olacak şekilde $[0,1]$ in kapalı alt aralıklarının bir ailesi $\left(\mathrm{I}_s : s \in 2^{<\omega}\right)$ olsun.

Her $s \in 2^{<\omega}$ için $A_s = \{n \in \omega : x_n \in \mathrm{I}_s\}$ olsun.

Her $n \in \omega$ için $\phi(A_s \setminus n) > \delta$ yı sağlayan en az bir $s \in 2^n$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

$$T = \{s \in 2^{<\omega} : \phi(A_s \setminus |s|) > \delta\}$$

olsun. T nin bütün seviyeleri sonlu olacak şekilde $T \subset 2^{<\omega}$ ω yükseklik ağacıdır (tree of height). König Lemmasından T nin sonsuz tane kolu vardır. $\xi \uparrow n \in T$ olacak şekilde $\xi \in 2^{\omega}$ olsun. (Yani her $n \in \omega$ için $\phi\ (A_{\xi \uparrow n} \setminus n) > \delta$ dır.) Altölçüm ϕ, alt yarısüreklidir. Böylece her n için $\phi\ (A_{\xi \uparrow n} \setminus n) \geq \phi\left(B_n\right) > \delta$ yı sağlayan sonlu bir $B_n \subset A_{\xi \uparrow n} \setminus n$ kümesi vardır.

$B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$ olsun.

$$\phi\ (B \setminus n) \geq \phi(B_n \setminus n) > \delta > 0$$

olduğundan $B \notin I$ elde edilir.

Son olarak $(x_n) \uparrow B$ nin yakınsak olduğunu göstereceğiz. $\{x\} = \bigcap_n \mathrm{I}_{\xi \uparrow n}$ olacak şekilde $x \in [0,1]$ olsun. $n \in \omega$ alalım. Her $m > n$ için eğer $i \in B_m$ ise

$$x_i \in \mathrm{I}_{\xi \uparrow m} \subset \mathrm{I}_{\xi \uparrow n}$$

dir. Böylece

$$\left\{i \in B : x_i \in \mathrm{I}_{\xi \uparrow n}\right\} \subset B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n \in \mathrm{Fin}$$

dir. Buradan $(x_n) \uparrow B = x$ tir.

(2)$\Rightarrow$(3) : ω nın bir parçalanması $A_1, A_2, \ldots, A_n$ olsun. (2) den her k için

$\phi(A_{i(k)} \setminus k) > \delta$ olacak şekilde bir $i(k)$ vardır. Herhangi bir k için $i(k) \leq n$

olduğundan sonsuz tane k için $i(k)=i$ olacak şekilde $i \le n$ vardır. İspatı bitirmek için $\|A_i\| \ge \delta$ olduğunu dikkate alalım.

(3)$\Rightarrow$(2) : Bu gerektirme $\|.\|$ nın tanımından elde edilir. (Koşul (2) deki δ_2 sabiti örneğin, $\delta_3/2$ ye eşit olabilir. Buradaki δ_3, koşul (3) teki bir sabittir.)

BW ve hBW özelliklerinin aynı özellikler olup olmadığı sorulabilir. (sınırlayıcı kurala bağlı olarak) Yani BW özellikli her idealin , en az bir tanesi hBW özelliğine sahip iki idealin direkt toplamı olup olmadığı sorulabilir. Aşağıdaki önerme bu soruya olumsuz yanıt verir.

Önerme 3.4.3: Her $A \notin I$ için bir $A^{'} \subset A$, $A^{'} \notin I$, $I \uparrow A^{'} \notin \mathrm{BW}$ var olacak şekilde bir $I \in \mathrm{BW}$ ideali vardır.

İspat : A_i nin kardinalitesi $i.2^i$ ye eşit olmak üzere sonlu kümeler üzerinde ω nın bir parçalanması $(A_i)_{i\in\omega}$ olsun. Her bir i için $\mu_i : P(\omega) \to [0,\infty]$,

$$\mu_i(A) = \frac{1}{2^i}|A \cap A_i|$$

ölçümünü tanımlayalım. Her bir i için $\mu_i(A_i) = i$ olduğuna dikkat edelim.

$$\mu(A) = \sup_{i\in\omega} \mu_i(A)$$

olsun. Ölçüm supremumu, bir altölçüm olduğundan, μ her bir i için $\mu(A_i) = i$ olacak şekilde ω üzerindeki bir altölçümdür. $I = \mathrm{Exh}(\mu)$ olsun.

İlk olarak $I \in \mathrm{BW}$ olduğunu göstereceğiz. 3.4.2 teoreminden ω nın herhangi bir $B_1, B_2, \ldots, B_n$ parçalanması ve her $k \in \omega$ için $\mu(B_i \setminus k) > 1$ olmak üzere $i \le n$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Pigeon-hole kuralından her $t > n$ doğal sayısı için $B_{i(t)} \cap A_t$ kümesinin kardinalitesi 2^t den daha büyük olmak üzere $i(t)$ indisi bulabiliriz. Bu takdirde

$$\mu_t\left(B_{i(t)}\right) = \frac{1}{2^t}\left|B_{i(t)} \cap A_t\right| > 1$$

dir. Eğer $A_t \cap k = \varnothing$ ise

$$\mu(B_{i(t)} \setminus k) \geq \mu_t(B_{i(t)} \setminus k) = \mu_t(B_{i(t)}) > 1$$

dir. $A_t \cap k = \varnothing$ ve $i(t) \leq n$ olacak şekilde sonsuz çoklukta t olduğundan , $i(.)$ fonksiyonu sonsuz çoklukta argüman için en azından bir değer alır. Sonsuz çoklukta t için $i(t) = i$ diyelim. Bu takdirde her bir k için $A_t \cap k = \varnothing$ ve $i(t) = i$ olacak şekilde t bulunur. Böylece

$$\mu(B_i \setminus k) \geq \mu_t(B_i) > 1$$

dir. Böylece I , Bolzano-Weierstrass özelliğine sahiptir.

Şimdi herhangi bir sınırlı I üzerindeki herhangi bir sınırlamanın hBW özelliğine ait olmadığını göstereceğiz. $A \notin I$ olsun. $I \uparrow A' \notin$ BW olacak şekilde $A' \subset A$, $A' \notin I$ bulacağız. Yani her $\delta > 0$ için $i \leq n$ olmak üzere

$$\mu(A_i' \setminus k) < \delta$$

olmak üzere A' nün $A_1', A_2', ..., A_n'$ parçalanması ve $k \in \omega$ var olduğunu göstereceğiz.

$A \notin I$ olduğundan sonsuz çoklukta t için

$$\mu_t(A \cap A_t) = \mu_t(A) > c$$

olacak şekilde $c > 0$ vardır.

$$T = \{t \in \omega : \mu_t(A \cap A_t) > c\}$$

olsun.

(1) Her bir $t \in T$ için $2.c > \mu_t(A' \cap A_t) > c$

(2) Aksi halde $A' \cap A_t = \varnothing$

olacak şekilde $A' \subset A$ olsun.T sonsuz olduğundan $\mu(A') > 0$ ve $A' \notin I$ dır.

Verilen herhangi bir $\delta > 0$ için $n > \frac{4.c}{\delta}$ alalım. Her bir $t \in T$ için hemen hemen eşit kardinaliteye sahip kümelerin üzerindeki $A_t^{'} = A^{'} \cap A_t$ nin bir parçalanması $A_1^{''}, A_2^{''}, ..., A_n^{''}$ olsun. Yani her bir $i, j \leq n$ için

$$\left\| A_i^{''} \right| - \left| A_j^{''} \right\| \leq 1$$

dir. Bu takdirde

$$\mu_t(A_i^{''}) < \frac{2c}{\frac{4c}{\delta}} + \frac{1}{2^t} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^t}$$

dir. $i = 1, 2, ..., n$ için

$$A_i^{'} = \bigcup_{t \in T} A_i^{''}$$

olsun. k yı her $A_t \not\subset k$ ve $2^{-t} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde alalım. Bu durumda her bir $i \leq n$ ve her bir t için

$$\mu_t(A_i^{''} \setminus k) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^t} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

dır. Böylece

$$\mu(A_i^{'} \setminus k) \leq \delta$$

olur. 3.4.2 teoreminden $I \uparrow A^{'} \notin$BW dir.

3.5. Yoğunluk İdealleri

Tanım 3.5.1: I_n yi ω üzerinde ikişerli ayrık aralıklar ve μ_n yi I_n üzerinde bir ölçüm olarak kabul edelim. Bu durumda

$$\phi = \sup_n \ \mu_n$$

alt yarısürekli altölçümdür ve $\mathcal{Z}_\phi = \mathrm{Exh}(\phi)$ ye *yoğunluk ideali* denir.

Bütün yoğunluk idealleri aşağıdaki gibi karakterize edilir.

Lemma 3.5.1: $\mathcal{Z}_\mu$ yoğunluk idealinin dört ayrı sınıfı vardır ve her yoğunluk ideali bunlardan birine aittir.

$$at^+(\phi) = \sup\left\{\phi\left(\{k\}\right) : k \notin \phi^{-1}(0)\right\} \quad , \qquad at^-(\phi) = \inf\left\{\phi\left(\{k\}\right) : k \notin \phi^{-1}(0)\right\}$$

ve $\|\mu\| = \mu(\omega)$ olmak üzere

($\mathcal{Z}_1$) *Atomik idealler:* $\inf_n at^-(\mu_n) > 0$

($\mathcal{Z}_2$) *Yoğun olmayan non-atomik idealler :*

$$\inf_n at^-(\mu_n) = 0 \quad ve \quad \limsup_n at^+(\mu_n) > 0\,,$$

($\mathcal{Z}_3$) *Erdös-Ulam idealleri :*

$$\lim_n at^+(\mu_n) = 0 \quad \text{ve} \quad \sup_n \|\mu_n\| < \infty$$

($\mathcal{Z}_4$) $\lim_n at^+(\mu_n) = 0 \quad \text{ve} \quad \sup_n \|\mu_n\| = \infty$

dur. (Ilijas Farah, 2000, yardımcı önerme 1.13.9)

Aşağıdaki 3.5.2 teoreminde sadece I_d idealinin BW özelliğini sağlamadığını değil, aynı zamanda her Erdös-Ulam idealinin bu özelliği sağlamadığını göstereceğiz.

Teorem 3.5.2 : I yoğunluk idealinin BW özelliği sağlaması için gerek yeter şart ($\mathcal{Z}_1$) , ($\mathcal{Z}_2$) ya da ($\mathcal{Z}_4$) sınıfına ait olmasıdır.

İspat : $(\mathcal{Z}_1)$ ve $(\mathcal{Z}_2)$ durumu: Bu durumlarda idealler yoğun değildir. (yani idealden sonsuz alt küme olmaksızın, sonsuz bir alt küme vardır.) Bunların BW özelliğini sağladığını görmek kolaydır.

$(\mathcal{Z}_3)$ durumu : Herhangi bir $\delta > 0$ alalım. Her $n \in \omega$ için $\|\mu_n\| < M$ olacak şekilde $M > 0$ olsun.

Her $x \in \mathrm{I}_m$ ve $m \geq K$ için $\mu_m(\{x\}) < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $K \in \omega$ olsun.

$N \geq \frac{2M}{\delta}$ olsun. Bu durumda her $n \geq K$ için $i \leq N$ olduğunda $\mu_n(B_i^n) < \delta$ olacak şekilde I_n nin bir $B_1^n, ..., B_N^n$ parçalanması vardır.

$m = 1, 2, ..., N$ için

$$A_m = \bigcup_{n \geq K} B_m^n$$

olsun.

Şimdi $A_1, ..., A_N$ parçalanması 3.4.2 teoremi ile birlikte I idealinin BW özelliğini sağlamadığını görmek kolaydır.

$(\mathcal{Z}_4)$ durumu : $\delta = 1$ olsun. $k \in \omega$ ve ω nın herhangi bir parçalanması $A_1, ..., A_N$ olsun. Burada

(1) $\|\mu_L\| \geq N.\delta + 1$,

(2) $\min(\mathrm{I}_L) > k$

yı sağlayan bir $L \in \omega$ vardır.

Şimdi her $i \leq N$ için $\phi(A_i \setminus k) \leq \delta$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$N.\delta + 1 \leq \|\mu_L\| = \mu_L(\mathrm{I}_L) = \mu_L(\mathrm{I}_L \setminus k) = \mu_L(A_1 \cup ... \cup A_N \setminus k)$$

$$\leq \mu_L(A_1 \setminus k) + ... + \mu_L(A_N \setminus k) \leq \phi(A_1 \setminus k) + ... + \phi(A_N \setminus k) \leq N.\delta$$

bir çelişkidir. Böylece 3.4.2 teoreminden I ideali BW özelliğini sağlar.

4. GENİŞLEMELER

Bu bölümde bir idealin $\beta\omega$ biçimindeki Cech-Stone kuralının $P-$noktasına genişletilebilme olasılığı ile bağlantılı olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.1 : Eğer bir I ideali, FinBW özelliğini sağlayan bir J ideale genişletilebilirse, I FinBW özelliğini sağlar.

İspat : (x_n) sınırlı bir dizi olsun. $(x_n)\upharpoonright A$ Fin-yakınsak olacak şekilde $A \notin J$ vardır. Fakat $I \subset J$ olduğundan $A \notin I$ dır.

3.1.3 sonucundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2: Eğer bir I ideali, BW özelliğini sağlayan bir $P-$idealine genişletilebiliyorsa I, FinBW özelliğini sağlar (ve buradan $I \in$BW).

3.4.2 teoreminin, bütün analitik $P-$ideallerinin sınıfında BW özelliğinin karakterizasyonunu verdiğini hatırlayalım. Aşağıda bu ideal sınıfı için BW özelliği hakkında alternatif karakterizasyon vereceğiz.

Teorem 4.3 : Continuum Hipotezini kabul edelim. ϕ, alt yarısürekli altölçüm ve $I = \text{Exh}(\phi)$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $I \in$BW ;

(2) I, bir maximal $P-$ideale genişletilebilir.

4.3 teoremini ispatlamak için bazı Lemma ve tanımlar verelim.

Tanım 4.1 : Bir I ideali için eğer , $\mathcal{B}$ aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{B} \subset P(\omega)$ ailesi, $I-$*büyük küme ailesidir* denir.

(B1) Eğer $B \in \mathcal{B}$ ve $B' \supset B$ ise $B' \in \mathcal{B}$

(B2) Eğer $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ ise $B_1 \in \mathcal{B}$ veya $B_2 \in \mathcal{B}$ dir.

(B3-I) Her bir $i \in \omega$ için $\{ B_i \}_{i\in\omega} \subset \mathcal{B}$ kümelerinin azalan bir dizisi için (yani her $i \leq j$ için $B_i \supset B_j$) $B \subset^I B_i$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır.

Eğer $\mathcal{B}$ ailesi, Fin-büyük kümelerinin bir ailesi ise $\mathcal{B}$ ye, büyük kümelerin $P-$ailesidir denir.

Lemma 4.4 : Continuum Hipotezini kabul edelim. Bir I idealinin bir maximal $P-$idealine genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart $\mathcal{B} \cap I = \varnothing$ olacak şekilde büyük kümelerin boş olmayan bir $P-$ailesi $\mathcal{B} \subset P(\omega)$ olmasıdır.

İspat : İlk olarak $I^{'}$, I yı içeren bir maximal $P-$ideal ise büyük kümelerin $P-$ailesinin $\mathcal{B} = I^{'*}$ ailesi olduğunu göreceğiz. Aksini ispatlamak için $\mathcal{B} \cap I = \varnothing$ olmak üzere büyük kümelerin herhangi bir boş olmayan $P-$ailesi $\mathcal{B}$ yı alalım.

$\mathcal{B} \cap I = \varnothing$ olduğundan, eğer $B \in \mathcal{B}$ ise, her sonlu F kümesi için $B \setminus F \in \mathcal{B}$ dir. Eğer $\mathcal{B}$ boş değilse $\omega \in \mathcal{B}$ olduğunu görebiliriz.

İddia 4.4.1 :

(1) Her $\alpha < \beta$ için $Z_\alpha \supset^* Z_\beta$,

(2) ($\forall A \subset \omega$) $(\exists \alpha < \omega_1)$ $(Z_\alpha \subset^* A$ veya $Z_\alpha \subset^* \omega \setminus A)$

olacak şekilde $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \subset \mathcal{B}$ transsonlu dizisi vardır.

Her bir $A \in P(\omega)$ için $A = A_\alpha$ olacak şekilde bir α bulunacak şekilde ω nın alt kümelerinin bir dizisi $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ olsun.

$\{Z_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ i transsonlu tümevarımla tanımlayalım. $\alpha < \omega_1$ bir ordinal sayı olmak üzere

(1) Her $\beta_1 \le \beta_2 < \alpha$ için $Z_{\beta_1} \supset^* Z_{\beta_2}$,

(2) Her ardışık $\beta < \alpha$ için $Z_\beta \subset A_\beta$ veya $Z_\beta \subset \omega \setminus A_\beta$

olacak şekilde $\{Z_\beta\}_{\beta<\alpha} \subset \mathcal{B}$ olsun.

$\alpha = 0$ için $Z_\alpha = \omega$ olsun.

Ardışık bir $\alpha = \gamma + 1$ için Z_γ ,büyük kümelerin $\mathcal{B}$ ailesine ait olduğundan

$$Z_\gamma \cap A_\alpha \in \mathcal{B} \quad \text{veya} \quad Z_\gamma \cap (\omega \setminus A_\alpha) \in \mathcal{B}$$

dır. $Z_\gamma \cap A_\alpha$ veya $Z_\gamma \cap (\omega \setminus A_\alpha)$ kümelerinden biri $Z_\alpha \in \mathcal{B}$ olsun.

Bir α limiti için, her bir $i \in \omega$ için

$$B_i = \bigcap_{j \le i} Z_i^{'}$$

ve

$$\{Z_i^{'}\}_{i<\omega} = \{Z_\beta\}_{\beta<\alpha}$$

alalım. Her bir B_i , $Z_j^{'}$ kümelerinden birine eşit olduğundan (modulo sonlu küme), $\{B_i\}_{i\in\omega}$, $\mathcal{B}$ büyük kümelerinin $P-$ailesindeki kümelerin azalan bir dizisidir. $Z_\alpha \subset^* B_i$ olmak üzere $Z_\alpha \in \mathcal{B}$ elde edilir. Açık bir şekilde her $\beta < \alpha$ için $Z_\alpha \subset^* Z_\beta$ dır.

$I^{'}$, $\{\omega \setminus Z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ailesi tarafından üretilen bir ideal olsun.

İddia 4.4.2 : $I^{'}$ **,** I yı içeren bir maximal $P-$idealdir.

Her $A \subset \omega$ için ya $A \in I^{'}$ ya da $\omega \setminus A \in I^{'}$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten $\alpha < \omega_1$ in ardışık ordinal olduğu bir $A = A_\alpha$ için ya $Z_\alpha \subset A_\alpha$ ya da $Z_\alpha \subset \omega \setminus A_\alpha$ dır.

Birinci durumda $A_\alpha \in I^{'*}$ dır. İkinci durumda $A_\alpha \subset \omega \setminus Z_\alpha$ dır ve böylece $A_\alpha \in I^{'}$ dür.

$I \subset I^{'}$ olduğunu göstermek için herhangi bir $\mathrm{I} \in I$ alarak ve $\mathrm{I} = A_\alpha$ olmak üzere ardışık $\alpha < \omega_1$ bulmalıyız. $\mathcal{B} \cap I = \varnothing$ olduğundan $\mathrm{I} = A_\alpha \subset \omega \setminus Z_\alpha$ dır. Bu durumda $\mathrm{I} \in I^{'}$ dır.

$\{\mathrm{I}_i\}_{i\in\omega} \subset I^{'}$ olsun. Her bir I_i nin $\omega \setminus Z_{\alpha(i)}$ kümesi tarafından kapsadığını kabul edelim. Her i için $\alpha(i) < \alpha$ olacak şekilde herhangi bir $\alpha < \omega_1$ alalım. Burada her $i \in \omega$ için $\mathrm{I} = \omega \setminus Z_\alpha \in I^{'}$ ve $\mathrm{I}_i \subset^* \mathrm{I}$ dır. Bu durumda $I^{'}$ bir $P-$ idealdir.

Lemma 4.5 : ϕ nin alt yarısürekli altölçüm olduğunu ve $\delta > 0$, $N \in \omega$, $A \subset \omega$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) A nın her $A_1,...,A_N$ parçalanması için $\|A_i\| \geq \delta$ olmak üzere $i \leq N$ vardır.

(2) Her $\varepsilon > 0$ ve $k \in \omega$ için $A \cap [k, k+r]$ nin bir $A_1,...,A_N$ parçalanması için $\phi(A_i) > \delta - \varepsilon$ şartını sağlayan $i \leq N$ var olmak üzere $r \in \omega$ vardır.

İspat : (2)$\Rightarrow$(1) : $\|.\|$ tanımından elde edilir.

(1) $\Rightarrow$(2) : N üzerindeki A nın her $A_1,...,A_N$ parçalanması için $\|A_i\| \geq \delta$ olmak üzere $i \leq N$ olduğunu kabul edelim. Yani her $\chi : \omega \to N$ fonksiyonu için $\|\chi^{-1}(i) \cap A\| \geq \delta$ olacak şekilde $i < N$ vardır.

Her $r \in \omega$ ve her $i \leq N$ için $\phi\left(\chi_r^{-1}(i)\right) \leq \delta - \varepsilon$ olduğunda

$$\chi_r : A \cap [k, k+r] \to N$$

kısmi fonksiyonu için $k \in \omega$ ve $\varepsilon > 0$ var olduğunu kabul edelim.

Tümevarımla $\chi_\omega : \omega \to N$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\chi_\omega(0), \chi_\omega(1), ..., \chi_\omega(n-1)$ ifadesinin

$$S_{n-1} = \{r : r \geq n-1 \text{ ve her } m \in A \cap [k, k+r] \cap [0, n-1] \text{ için } \chi_\omega(m) = \chi_r(m)\}$$

sonsuz olacak şekilde tanımlandığını farz edelim.

Eğer $n \in A \cap [k, k+r]$ ise N sınıfındaki S_{n-1} i $\chi_r(n)$ değerine bağlı olarak parçalara ayırırız. Bazı $c < N$ için

$$T = \{r \in S_{n-1} : \chi_r(n) = c\}$$

kümesi sonsuzdur. $\chi_\omega(n) = c$ ve $S_n = T$ alalım.

Aksi halde keyfi $\chi_\omega(n)$ alırsak $S_n = S_{n-1}$ i elde ederiz.

Her $i < N$ için $\|\chi_\omega^{-1}(i) \cap A\| < \delta$ olduğunu iddia ediyoruz ki bu bizim iddiamızla çelişir. Gerçekten her $i < N$ ve $r \in \omega$ için bazı $s \in S_{k+r}$ için

$$\chi_\omega^{-1}(i) \cap A \cap [k, k+r] = \chi_s^{-1}(i) \cap [k, k+r]$$

dir. Böylece

$$\phi(\chi_\omega^{-1}(i)\cap A\cap[k,k+r])\leq\delta-\varepsilon$$

ve

$$\phi(\chi_\omega^{-1}(i)\cap A\setminus k)\leq\delta-\varepsilon$$

olur. Buradan

$$\left\|\chi_\omega^{-1}(i)\cap A\right\|\leq\delta-\varepsilon<\delta$$

dır.

Lemma 4.6 : ϕ nin bir alt yarısürekli altölçüm ve A nın herhangi bir sonlu $A_1,\ldots,A_N$ parçalanması için ve en az bir $i\leq N$ için $\|A_i\|\geq\delta$ olacak şekilde $\mathcal{B}_\delta$ nın (muhtemelen boş) ω nın bütün A alt kümelerinin bir ailesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathcal{B}_\delta$ da, kümelerin azalan herhangi bir $B_1\supset B_2\supset\ldots$ dizisi için ve her bir $n\in\omega$ için $B\subset^* B_n$ olacak şekilde bir $B\in\mathcal{B}_\delta$ vardır.

İspat :

$$B_1^1=B_1\cap[0,r_1]$$

ile gösterilirse 4.5 Lemmasından bir r_1 vardır. Bu takdirde $\phi(B_1^1)>\delta-1$ dir.

$$B_2^1\cup B_2^2=B_2\cap[r_1+1,r_1+r_2]$$

ise $\phi(B_2^i)>\delta-\dfrac{1}{2}$ sağlanacak şekilde bir $i\leq 2$ varsa yine 4.5 Lemmasından bir r_2 vardır.

Sonuç olarak

$$\phi(B_n^i)>\delta-\frac{1}{n}$$

olmak üzere $i\leq n$ varsa

$$B_n^1\cup B_n^2\cup\ldots\cup B_n^n=B_n\cap[r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1,r_1+r_2+\ldots+r_n]$$

olacak şekilde r_n olsun.

$$B = \bigcup_{i \in \omega} B_i \cap \left[r_1 + r_2 + ... + r_{i-1} + 1, r_1 + r_2 + ... + r_i \right]$$

biçiminde tanımlayalım. Her bir i için

$$B \setminus B_i \subset \left[0, r_1 + r_2 + ... + r_{i-1} \right]$$

olduğuna dikkat edelim. Böylece $B \subset^* B_i$ dir.

$B \in \mathcal{B}_\delta$ olduğunu göstermek için B nin bir parçalanmasının $A_1, ..., A_N$ olduğunu kabul edelim. Her $n \geq N$ için

$$\phi(A_{i(n)} \cap \left[r_1 + r_2 + ... + r_{n-1} + 1, r_1 + r_2 + ... + r_n \right]) > \delta - \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $i(n)$ vardır.

Sonsuz çoklukta n için $i = i(n)$ olsun. Bu durumda sonsuz çoklukta n için

$$\phi(A_i \cap \left[r_1 + r_2 + ... + r_{n-1} + 1, r_1 + r_2 + ... + r_n \right]) > \delta - \frac{1}{n}$$

dir. Böylece $\|A_i\| \geq \delta$ olur.

Lemma 4.7 : ϕ nin bir alt yarısürekli altölçüm olduğunu kabul edelim. Eğer $I = Exh(\phi)$, BW özelliğine sahipse

$$\mathcal{B}_\delta = \{A \subset \omega : \ A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N \text{ ise } \|A_i\| \geq \delta \text{ yı sağlayan } i \leq N \text{ vardır}\}$$

kümesi I ile ayrık olan büyük kümelerin boş olmayan bir $P-$ailesi olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

İspat : 3.4.2 teoreminden ω nın herhangi bir $A_1, ..., A_N$ parçalanması için $\|A_i\| \geq \delta$ olduğunda $i \leq N$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Bu nedenle $\omega \in \mathcal{B}_\delta$ ve $\mathcal{B}_\delta \neq \varnothing$ dir. $\mathcal{B}_\delta$ nın tanımından (B1) ve (B2) şartları elde edilir. Sonuç olarak 4.6 Lemmasından (B3-Fin) şartı elde edilir. Böylece $\mathcal{B}_\delta$ büyük kümelerin bir $P-$ailesidir.

Her bir $B \in \mathcal{B}_\delta$ için $\|B\| \geq \delta$ olduğundan $\mathcal{B}_\delta \cap I = \varnothing$ dir.

Teorem 4.3 ün ispatı : 4.2 sonucundan eğer I, $P-$ ideal bir $J \in \mathrm{BW}$ ye genişletilebiliyorsa, $I \in \mathrm{BW}$ dır. Böylece sadece herhangi bir analitik $I \in \mathrm{BW}$ idealinin maximal bir $P-$ideale genişletilebileceğini göstermeliyiz.

4.7 Lemmasından A nın herhangi bir sonlu parçalanması $A_1,...,A_N$ için ve her bir $i \leq N$ için $\|A_i\| \geq \delta$ olmak üzere, ω nın bütün A alt kümelerinin $\mathcal{B}_\delta$ ailesi I ile ayrık olan büyük kümelerin bir $P-$ailesi olacak şekilde $\delta > 0$ bulunur. Böylece 4.4 Lemmasından I, maximal bir $P-$ ideale genişletilebilir.

4.5 ve 4.6 Lemma ispatlarının aynı zamanda $\delta = \infty$ şartında da sonuç verdiğine dikkat edelim. Böylece 4.7 Lemmasına benzer olarak 4.8 Lemmasını verebiliriz.

Lemma 4.8 : ϕ nin bir alt yarısürekli altölçüm olduğunu kabul edelim. Eğer $I = \mathrm{Fin}(\phi)$ ise

$$\mathcal{B}_\infty = \left\{A \subset \omega : \|A\| = \infty\right\} = P(\omega) \setminus I \text{ ,}$$

I ile ayrık olan büyük kümelerin boş olmayan bir $P-$ailesidir.

İspat : $\omega \notin I$ olduğundan , $\omega \in \mathcal{B}_\infty$ ve $\mathcal{B}_\infty \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{B}_\infty$ tanımından (B1) ve (B2) şartları elde edilir.

Son olarak 4.6 Lemmasından ($\delta = \infty$ için) (B3-Fin) şartı sağlanır. Böylece $\mathcal{B}_\infty$, büyük kümelerin bir $P-$ailesidir.

Her bir $B \in \mathcal{B}_\infty$ için $\phi(B) = \infty$ olduğundan $\mathcal{B}_\infty \cap I = \emptyset$ dir.

3.4.1 teoreminde her F_σ idealinin FinBW özelliğini sağladığını hatırlayalım. Aşağıda Continuum Hipotezini kabul ederek aynısı BW özellikli analitik $P-$idealleri için de geçerlidir.

Teorem 4.9 : Continuum Hipotezini kabul edelim. ϕ , bir alt yarısürekli altölçüm olsun. $I = \mathrm{Fin}(\phi)$ olsun. Bu durumda I , bir maximal $P-$ideale genişletilebilir.

4.3 teoremi ile aynı metodu kullanarak yukarıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

4.1. Boolean Cebirleri

Burada analitik idealler için Bolzano-Weierstrass özelliğinin Boolean cebirinden nasıl ayrıldığını göreceğiz.

$I, J \subset P(\omega)$ idealleri için

$$P(\omega)/I \cong P(\omega)/J$$

sembolü $P(\omega)/I$ ve $P(\omega)/J$ Boolean cebirlerinin izomorfizmini gösterecektir.

Önerme 4.1.1 : Eğer $P(\omega)/I \cong P(\omega)/J$ ve $\mathcal{B} \cap I = \varnothing$ olmak üzere $I-$büyük kümelerin boş olmayan bir $\mathcal{B}$ ailesi varsa J, BW özelliğine sahiptir.

İspat : $P(\omega)/I$ ve $P(\omega)/J$ Boolean cebirlerinin arasındaki bir izomorfizm, $h: P(\omega)/I \to P(\omega)/J$ olsun. $(x_n) \subset [0,1]$ olsun. (x_n) nin $J-$yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu göstereceğiz.

(1) $\bigcup \{ \mathrm{I}_s : s \in 2^n \} = [0,1]$,

(2) Her $s,t \in 2^n$ ve $s \neq t$ için $|\mathrm{I}_s \cap \mathrm{I}_t| \leq 1$,

(3) $\mathrm{I}_{s^\frown 0} \cup \mathrm{I}_{s^\frown 1} = \mathrm{I}_s$

(4) $\operatorname{diam}(\mathrm{I}_s) \leq \dfrac{1}{2^{|s|}}$

olacak şekilde $[0,1]$ in kapalı alt aralıklarının bir dizisi $(\mathrm{I}_s : s \in 2^{<\omega})$ olsun.

$$A_s = \{ n \in \omega : x_n \in \mathrm{I}_s \}$$

ve $h([A_s]_J)$ nin herhangi bir elemanı B_s olsun. (Yani $h([A_s]_J) = [B_s]_I$ dir.) Açık bir şekilde her bir n için

$$\sum_{s \in 2^n} [B_s]_I = 1 = [\omega]_I$$

dır. Böylece her $n \in \omega$ için

$$\omega \setminus \bigcup_{s \in 2^n} B_s \in I$$

dır. Bu durumda her n için $B_s \in \mathcal{B}$ olmak üzere $s \in 2^n$ elde edilir.

$$T = \{s \in 2^{<\omega} : B_s \in \mathcal{B}\}$$

olsun. T nin bütün seviyeleri sonlu olmak üzere $T \subset 2^{<\omega}$ nin ω nin yükseklik ağacı olduğu görülür. König Lemmasından T nin sonsuz tane kolu vardır. Her $n \in \omega$ için $\xi \uparrow n \in T$ olmak üzere $\xi \in 2^{\omega}$ olsun. (Yani her bir n için $B_{\xi\uparrow n} \in \mathcal{B}$ dir.)

$\{ B_{\xi\uparrow n}\}_{n\in\omega}$ nın $I-$büyük kümelerin $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının azalan bir dizisi

olduğu görülür. Böylece her $n \in \omega$ için $B \subset^I B_{\xi\uparrow n}$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır.

$h([A]_J) = [B]_I$ olmak üzere $A \subset \omega$ olsun. Açık bir şekilde

$$0 < [B]_I \le [B_{\xi\uparrow n}]_I$$

ve böylece her bir n için

$$0 < [A]_J \le [A_{\xi\uparrow n}]_J$$

dir. Bu durumda her $n \in \omega$ için $A \setminus A_{\xi\uparrow n} \in J$ dir.

Eğer

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{I}_{s\uparrow n}$$

ise her bir $k \in \omega$ için

$$\left\{ n \in A : |x_n - x| \ge \frac{1}{2^{k+1}} \right\} \subset \left\{ n \in A : x_n \notin \mathrm{I}_{s\uparrow k} \right\} = A \setminus A_{s\uparrow k} \in J$$

dir ve böylece $(x_n) \uparrow A$, $J-$yakınsaktır.

Uyarı : Yukarıdaki ispatta , h nın sadece "yoğunluk" özelliğini kullandık. Eğer h, Boolean cebirinin yoğun bir homomorfizmi ise ispatın geçerli olduğu görülebilir. Yani , her bir $[B]_I > 0$ ise $0 < h([A]_J) \le [B]_I$ olacak şekilde $[A]_J > 0$ vardır.

Sonuç 4.1.2 : Eğer $P(\omega)/I \cong P(\omega)/J$ ve I, BW özelliğine sahip analitik $P-$idealse (ya da I, bir F_σ ideali ise) J ,BW özelliğine sahiptir.

İspat : 4.7 Lemmasından $\mathcal{B} \cap I = \emptyset$ olmak üzere büyük kümelerin boş olmayan $P-$ailesi $\mathcal{B}$ vardır. 4.1.1 önermesinden $J \in \mathrm{BW}$ dir.

Yukarıdaki sonuçtan bütün analitik $P-$ideal sınıfında Boolean cebirinin, Bolzano-Weierstrass özelliğinden farklı olduğunu çıkartabiliriz.

4.1.1 önermesi ile 4.4 Lemmasını birleştirerek 4.1.3 sonucunu elde ederiz.

Sonuç 4.1.3 : Eğer $P(\omega)/I \cong P(\omega)/J$ ve I, bir maximal $P-$ ideale genişletilebiliyorsa J, BW özelliğine sahiptir.

4.2. Sıralamalar

Bu kısımda Bolzano-Weierstrass özelliğinin, ideallerin Rudin-Keisler sıralamasını koruyup korumadığı ele alınacaktır.

Önerme 4.2.1 : $m \in \omega$ için $I \leq_m J$ olsun. Bu taktirde

(1) Eğer J hBW özelliğini sağlarsa , I hBW özelliğini sağlar.

(2) Eğer I hBW özelliğini sağlarsa, J BW özelliğini sağlar.

İspat : $f:\omega \to \omega$ fonksiyonu $A \in I \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in J$ olacak şekilde m ye bir fonksiyon olsun.

(1). $(x_n)_{n\in\omega}$ sınırlı bir dizi ve $A \notin I$ olsun. Her $n \in \omega$ için $y_n = x_{f(n)}$ olsun.

$B = f^{-1}(A) \notin J$ olsun. f , m ye bir fonksiyon olduğundan $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m$ olmak üzere her $i \leq m$ için $f(B_i) = A$ ve $f \upharpoonright B_i$ birebirdir (B_i kümelerinin ikişerli ayrık olması gerekmez).

$C_1, C_2, ..., C_m$ kümelerini $f(C_m) \notin I$ olacak şekilde ve $(x_n)_{n\in f(C_m)}$ en fazla m tane $I-$yığılma noktasına sahip olacak şekilde tanımlayacağız.

Eğer $B_1 \notin J$ ise $(y_n)_{n\in C_1}$, y^1 e $J-$yakınsak ve $C_1 \notin J$ olacak şekilde $C_1 \subset B_1$ bulunur. Aksi takdirde $C_1 = B_1$ ve keyfi y^1 alalım.

Eğer $B_2 \cap f^{-1}(f(C_1)) \notin J$ ise $(y_n)_{n\in C_2}$, y^2 ye $J-$yakınsak ve $C_2 \notin J$ olacak şekilde $C_2 \subset B_2 \cap f^{-1}(f(C_1))$ bulunur. Aksi takdirde $C_2 = B_2 \cap f^{-1}(f(C_1))$ ve keyfi y^2 alalım.

Bunu m defa tekrarlarsak en az bir tane $B_i \notin J$ olduğundan $f(C_m) \notin I$ dır.

Aşağıda eğer $y \notin \{y^1, y^2, ..., y^m\}$ ise y nin $(x_n) \upharpoonright f(C_m)$ nin bir $\mathrm{I}-$yığılma noktası olmadığını göstereceğiz.

Gerçekten

$$(y-2.\varepsilon, y+2.\varepsilon) \cap \{y^1, y^2, ..., y^m\} = \varnothing$$

olacak şekildeki her $\varepsilon > 0$ için

$$f^{-1}(\{f(n) \in f(C_m) : |x_{f(n)} - y| < \varepsilon\}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in C_i : |y_n - y| < \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in C_i : |y_n - y^i| \geq \varepsilon\} \in J$$

elde edilir. Böylece 3.3.6 sonucundan $(x_n) \uparrow f(C_m)$ nin $I-$yakınsak bir alt diziye sahip olduğu çıkar.

(2). $(x_n)_{n\in\omega}$ sınırlı bir dizi olsun. $\omega = A_1 \cup ... \cup A_m$ olmak üzere her $i \leq m$ için $f_i = f \uparrow A_i$ birebir ve $f(A_i) \notin I$ olsun.

Sınırlı bir

$$\left(x_{f_1^{-1}(n)}\right)_{n\in f(A_1)}$$

dizisi için $\left(x_{f_1^{-1}(n)}\right)_{n\in B_1}$ $I-$yakınsak (x^1 e yakınsak olan diyebiliriz) ve $B_1 \notin I$ olacak şekilde $B_1 \subset f(A_1)$ bulabiliriz.

Eğer $f^{-1}(B_1) \cap A_1 \notin J$ ise $A = f^{-1}(B_1) \cap A_1$ dir. Aksi halde $f^{-1}(B_1) \cap A_{i_2} \notin J$ olmak üzere en az bir $i_2 \geq 2$ alalım. Ve bu durumda

$$\left(x_{f_{i_2}^{-1}(n)}\right)_{n\in B_{i_2}}$$

$I-$yakınsak olmak üzere (x^{i_2} ye yakınsak olan diyebiliriz.) $B_{i_2} \subset f(f^{-1}(B_1) \cap A_{i_2})$ vardır.

Bu yapı, en çok m basamağına sahip olduğumuzdan $j \neq i_k$ için $f^{-1}(B_{i_k}) \cap A_j \in J$ ve $\left(x_{f_{i_k}^{-1}(n)}\right)_{n\in B_{i_k}}$, $I-$yakınsak (x^{i_k} ya yakınsak olan diyebiliriz) olacak şekilde $A = f^{-1}(B_{i_k}) \cap A_{i_k} \notin J$ kümesini veren $k \leq m$ nin bazı basamaklarında eksik kalacaktır.

Bu, $(x_n)_{n\in A}$ nın $J-$yakınsak olduğunu göstermeyi hatırlatır.

$$\left\{n \in A : \left|x_n - x^{i_k}\right| > \varepsilon\right\} = \left\{n \in f^{-1}(B_{i_k}) \cap A_{i_k} : \left|x_n - x^{i_k}\right| > \varepsilon\right\} \subset$$

$$\subset f^{-1}\left(\left\{j \in B_{i_k} : \left|x_{f_{i_k}^{-1}(j)} - x^{i_k}\right| > \varepsilon\right\}\right) \in J$$

olduğundan $\left(x_n\right)_{n \in A}$, x^{ik} ya $J-$yakınsaktır.

Eğer, ideallerin hBW özelliğinin yerine BW özelliğini düşünürsek yukarıdaki önerme sağlanmaz.

Önerme 4.2.2 : $I \leq_2 J$ ve I BW özelliğini sağlamazken J BW özelliğini sağlayacak şekilde I ve J idealleri vardır.

İspat : I_m , I_d nin maximal bir genişlemesi ise $I = I_d$ ve $J = I_d \oplus I_m$ olsun. 3.3.3 önermesinden $I \notin$ BW ve 3.3.1 teoreminden $J \in$ BW çıkar. Aşağıda $I \leq_2 J$ olduğunu göstereceğiz.

J nin $\omega \times \{0,1\}$ kümeleri üzerinde $J \uparrow \omega \times \{0\}$ ın I_d ye izomorfik , $J \uparrow \omega \times \{1\}$ in I_m ye izomorfik şeklinde tanımlı bir ideal olduğunu kabul edelim. $\omega \times \{0,1\}$ in ω üzerindeki izdüşümü $f : \omega \times \{0,1\} \to \omega$ olsun. Yani her $b \in \{0,1\}$, $n \in \omega$ için $f(n,b) = n$ dir. f nin 2 ye bir fonksiyon ve $f^{-1}(A) \in J$ ise $A \in I$ olduğunu görmek basittir. Dolayısıyla $I \leq_2 J$ dir.

Teorem 4.2.3 : $I \leq_{RK} J$ ve J, bir $P-$ideal olsun. Eğer J BW özelliğini sağlarsa, I BW özelliğini sağlar.

İspat : $A \in I \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in J$ ve $\left(x_n\right)_{n \in \omega}$ bir sınırlı dizi olacak şekilde $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu olsun. Her bir n için $x_n^{'} = x_{f(n)}$ olsun. Açık bir şekilde $\left(x_n^{'}\right)_{n \in \omega}$ sınırlıdır. J nin BW özelliğinden $\left(x_n^{'}\right)_{n \in A^{'}}$, $x \in \mathbb{R}$ ye $J-$yakınsak olacak şekilde $A^{'} \notin J$ vardır. J bir $P-$ideal olduğundan 3.1.2 sonucundan $\left(x_n^{'}\right)_{n \in B^{'}}$, x e Fin$-$ yakınsak olacak şekilde $B^{'} \subset A^{'}$ ve $B^{'} \notin J$ vardır. $B = f\left(B^{'}\right)$ olsun. $B^{'} \notin J$ ve $B^{'} \subset f^{-1}(B)$ olduğundan $B \notin I$ dır.

$\left(x_n^{'}\right)_{n\in B^{'}}$ Fin $-$ yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$T = \left\{n \in B^{'} : \left|x_n^{'} - x\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{n \in B^{'} : \left|x_{f(n)} - x\right| \geq \varepsilon\right\}$$

sonludur ve

$$f\left(T\right) = \left\{f(n) \in B : \left|x_{f(n)} - x\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{m \in B : \left|x_m - x\right| \geq \varepsilon\right\}$$

sonludur. Bütün sonlu kümeler I ya ait olduğundan $\left(x_n\right) \upharpoonright B,\ I -$ yakınsaktır.

Teorem 4.2.4 : $I \leq_{RB} J$ ve J bir Q $-$ ideal olsun. Eğer J hBW özelliğini sağlarsa, I hBW özelliğini sağlar.

İspat: $f : \omega \to \omega$, $A \in I \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in J$ olacak şekilde sonlu elemana-bir olsun. J, Q $-$ ideal olduğundan $f \upharpoonright S$ birebir olmak üzere $S \in J^*$ vardır. $\left(x_n\right)$ sınırlı bir dizi ve $A \notin I$ olsun.

$$A^{'} = f^{-1}(A) \notin J$$

olduğundan

$$B^{'} = A^{'} \cap S \notin J$$

dir. J, hBW özelliğini sağladığından $\left(x_{f(n)}\right) \upharpoonright C^{'}$ $J -$ yakınsak ($J - \lim\left(x_{f(n)}\right) \upharpoonright C^{'} = x$ diyebiliriz) ve $C^{'} \notin J$ olacak şekilde $C^{'} \subset B^{'}$ vardır.

$C = f(C^{'}) \notin I$ olsun.

$$X = \{n \in C^{'} : \left|x_{f(n)} - x\right| > \varepsilon\}$$

diyelim. Bu durumda $X \in J$ dir. $\left(x_n\right) \upharpoonright C$ nin $I -$ yakınsak olduğunu göstereceğiz. $f(X) \in I$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Karşıt olarak $f(X) \notin I$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$Y = f^{-1}(f(X)) \notin J$$

olduğundan $Y \cap S \notin J$ dir. Fakat diğer yandan $Y \cap S = X$ dir. Bu bir çelişkidir.

***

KAYNAKLAR

Marek Balcerzak and Katarzyna Dems, Some types of convergence and related Baire systems, Real Anal. Exchange 30 (2004/05), no. 1, 267-276

J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, and S. Wagon, Structural properties of ideals, Dissertationes Math. (rozprawy Mat.) 197 (1982), 95.

Allen R. Bernstein, A. New kind of compactnes for topological spaces, Fund. Math. 66 (1969/1970), 185-193.

B. Boldjiev and V. Malyhin, The sequentiality is equivalent to the F-Frechet-Urysohn property, Comment. Math. Univ. Carolin. 31 (1990), no. 1, 23-25

Kamil Demirci, I −limit superior and limit inferior, Math. Commun. 6(2001), no. 2, 165-172

Ilijas Farah, Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers, Mem. Amer. Math. Soc. 148 (2000), no. 702, 151-177

H. Fast, Sur la convergence statistique. Colloquium Math. 2 (1951), 241-244 (1952).

R.Filipow, N.Mrozek, I.Reclaw and P.Szuca, Ideal Convergence of Bounded Sequence, J.Symbolic Logic. 72 (2) (2007) 501-512

S. Glasner, Divisible properties and the Stone-Cech compactification, Canad. J. Math. 32 (1980), no. 4, 993-1007.

Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer, Ramsey theory, second ed., Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley&Sons Inc., New York, 1980, A Wiley-Interscience Publication.

Miroslav Katetov, Products of filters Comment. Math. Soc. 130 (2002, no. 6, 1597-1602 (electronic).

Pavel Kostyrko, Tibor Salat, and Wladyslaw Wilczynski, I **-**convergence, Real Anal. Exchange 26 (2000/01) no. 2, 669-685

B. K. Lahiri and Pratulananda Das, Further results on I -limit superior and limit inferior Math. Common. 8 (2003), no. 2, 151-156

Krzysztof Mazur, F_σ **-**ideals and $\omega_1\omega_2^*$ -gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$ Fund. Math. 138 (1991) , no. 2, 103-111

Fatih Nuray and William H. Ruckle, Generalized statistical convergence and convergence free spaces, J. Math Anal. Appl. 245 (2000), no. 2, 513-527

Tibor Salat, Binod Chandra Tripathy and Milos Ziman, On some properties of I - convergence, Tarta Mt. Math. Publ. 28 (2004), 279-286.

Slawomir Solecki, Analytic ideals and their applications, Ann. Pure Appl. Logic 99 (1999), no. 1-3, 51-72.

Balcı M. 1999. "Matematik Analiz", Balcı Yayınları, Cilt I, 6. Baskı, Ankara

Balcı,M. 1997. "Matematik Analiz", Bilim Kitap Kırtasiye, Cilt II, 2. Baskı,Ankara

Ahmet Tuğran Gürkanlı, 1997. " Topoloji", 19 Mayıs Üniversitesi Yayınları

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nurcan AŞILAR
Doğum Yeri : Denizli
Doğum Tarihi : 14. 03. 1979
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Denizli Sağlık Meslek Lisesi-1997
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,1997-2001.

Çalıştığı Kurumlar

1998-2002 Sağlık Bakanlığı, Ebelik
2002-... Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmenliği