HALKALARIN KATI OLMASI İÇİN DENK KOŞULLAR

DOKTORA TEZİ

Fatma KAYNARCA

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2009

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HALKALARIN KATI OLMASI İÇİN DENK KOŞULLAR

Fatma KAYNARCA

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2009

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhittin BAŞER'in danışmanlığında, Fatma KAYNARCA tarafından hazırlanan "**Halkaların Katı (Rigid) Olması İçin Denk Koşullar**" başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15.05.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Abdullah HARMANCI	
Üye	Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU	
Üye	Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ	
Üye	Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN	
Danışman	Doç. Dr. Muhittin BAŞER	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

HALKALARIN KATI OLMASI İÇİN DENK KOŞULLAR

Fatma KAYNARCA

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, bazı halka sınıfları tanıtılarak bir halka üzerindeki polinom halkalarından ve matris halkalarından söz edilecektir. Üçüncü bölümde, katı halkalarla ilgili olarak bugüne kadar elde edilen bütün sonuçlar ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Dördüncü bölümde, katı halkaların genelleştirilmiş Armendariz halkalarla ilişkisi incelenerek bir halkanın katı olması için yeni karakterizasyonlar verilecektir.

2009, 58 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : İnmiş halka, katı halka, Armendariz halka, α-skew Armendariz halka, α-Armendariz halka.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

EQUIVALENCES TO BEING A RIGID RINGS

Fatma KAYNARCA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Muhittin BAŞER

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, by introducing some ring classes, some discussion about the polynomial rings and matrix rings will be given. In the third chapter, all the results connected to the rigid rings obtained so far will be examined in detail. In the fourth chapter, by investigating the relation between the rigid rings and generalized Armendariz rings, some new characterizations will be given for rigid rings.

2009, pages 58

KEY WORDS : Reduced ring, rigid ring, Armendariz ring, α-skew Armendariz ring, α-Armendariz ring.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, ayrıca çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Muhittin BAŞER (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'e, engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi)' ya, Sayın Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, Sayın Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ve Sayın Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, makale çalışmalarımdaki yardımlarından dolayı Kore Daejin Üniversitesinden Sayın Prof. Dr. Tai Keun KWAK'a, ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Arş. Gör. Başak KARPUZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Burak KAYNARCA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Fatma KAYNARCA

SİMGELER DİZİNİ

A	R halkasının Jordan genişlemesi
α	R halkasının bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R'nin bir α endomorfizmasının R'nin bir genişlemesine genişletilmişi
D	R halkasının Dorroh genişlemesi
δ	R halkasının α-türevi
E_{ij}	Matris birimleri
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
I_R	R halkasının birim endomorfizması
${}_RM_R$	$R - R$ bimodülü
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
$rann_R(a)$	R halkası içinde a elemanının sağ sıfırlayanı
R^A	Bir A kümesinden R halkasına tüm fonksiyonların kümesi
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[[x]]$	R üzerindeki kuvvet serilerinin halkası
$R[x; x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x; \alpha]$	R'nin skew polinom halkası
$R[[x; \alpha]]$	R üzerindeki skew kuvvet serilerinin halkası
$R[x; \alpha, \delta]$	R halkasının Ore genişlemesi
$Q(R)$	R halkasının klasik sağ kesirler halkası
$T(R, M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Son yıllarda pek çok halka nazariyecinin ilgi odağı haline gelen halkaların "Armendarizlik" özelliği ilk defa 1997'de Rege ve Chhawchharia tarafından verilmiştir. $R[x]$; R üzerindeki polinomların halkası olmak üzere $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılmıştır. Yukarıdaki özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin nedeni; inmiş (reduced) (yani; sıfırdan farklı üstel sıfır eleman bulundurmayan) bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974'de gösteren kişinin E.P. Armendariz olmasıdır. Bu kavram halka teoride oldukça fazla öneme sahiptir. Özellikle; bir R halkasının sıfırlayanları ile $R[x]$ polinom halkasının sıfırlayanları arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi bakımından önemlidir. Bu konuda ilk olarak, (Hirano 2002)'de Armendariz bir R halkası için R'nin sıfırlayanları ile $R[x]$'in sıfırlayanları arasında doğal bir birebir eşlemenin var olduğunu göstermiştir. Daha sonra Armendariz halkarın çeşitli özellikleri (Armendariz 1974), (Rege ve Chhawchharia 1997), (Anderson ve Camillo 1998), (Hong ve diğerleri 2000), (Kim ve Lee 2000), (Hong ve diğerleri 2003), (Lee ve Wong 2003), (Lee ve Zhou 2004), (Chen ve Tong 2005), (Hong ve diğerleri 2006), (Chen ve Tong 2007) gibi pekçok yazar tarafından farklı yaklaşımlarla çalışılmıştır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce α; herhangi bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere, R halkasının α-katı olmasından söz ederken α'yı ihmal ederek R halkasını sadece katı olarak ifade edeceğiz. Şimdi katı halkalarla ilgili bugüne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri hatırlatalım. İlk olarak (Krempa 1996)'da; α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa α'yı *katı* (*rigid*) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra (Hong ve diğerleri 2003)'te; bir R halkasının katı bir α endomorfizmasının var olması durumunda R'yi *α-katı* (*α-rigid*) halka olarak adlandırmışlardır. Kolayca görülebilir ki; I_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R'nin I_R-katı olmasıdır.

Bir R halkası üzerindeki polinom halkası kullanılarak verilen Armendariz halka tanımı, son yıllarda R halkasının skew polinom halkası kullanılarak aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir. (Hong ve diğerleri 2003, 2006)'da; aynı zamanda katı halkaların da genellemesi olan halka sınıflarını sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamışlardır: $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ ($a_ib_j = 0$) oluyorsa, bu durumda R halkası α-skew Armendariz (α-Armendariz) olarak adlandırılmıştır. Burada α, R'nin birim endomorfizması olarak alındığında yukarıdaki tanımlar Armendariz halka tanımına denk olmaktadır. Ayrıca R, α-skew Armendariz (α-Armendariz) bir halka ve S, $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde R'nin bir alt halkası ise, bu durumda S de α-skew Armendariz (α-Armendariz) dir.

Şimdi katı halkaların genelleştirilmiş Armendariz halkalarla olan ilişkisini kısaca özetleyelim: α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere, (Hong ve diğerleri 2003)'te; R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\alpha]$'nın inmiş olması gerektiğini ispatlayarak katı halkaların bir karakterizasyonunu vermişlerdir. Diğer taraftan (Hong ve diğerleri 2006)'da; her α-katı halkanın α-Armendariz olduğunu ve her α-Armendariz halkanın da α-skew Armendariz olduğunu ispatlamışlardır. Dolayısıyla α-katı halkaların aynı zamanda α-skew Armendariz olduğu açıktır. Fakat aynı çalışmalarında bu ifadelerin terslerinin doğru olmadığına dair örnekler vermişlerdir. Ayrıca (Chen ve Tong 2007)'de; α-katı halkaların α-skew Armendariz halkalarla olan ilişkisini özel tipteki bazı matris halkalarını kullanarak araştırmışlardır.

Yukarıda ifade edilen bilgilerin ışığı altında; doktora tez çalışmamızda, katı, α-Armendariz ve α-skew Armendariz halkalar hakkında bilinen sonuçları geliştirerek katı halkaların α-Armendariz halkalarla ilişkisini bazı özel tipteki matris halkalarını da kullanarak ortaya koymaya çalışacağız ve katı halkalar için bilinenlerden farklı karakterizasyonlar vereceğiz. Ayrıca Armendariz ve inmiş halkalarla ilgili bilinen bazı temel bilgiler ispatladığımız teoremlerin sonuçlarından kolayca elde edilebilecektir.

İkinci bölümde katı halkaları karakterize etmeye olanak sağlayan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Ayrıca ilerki bölümlerde kullanılacak olan, bir R halkasından elde edilen skew polinom halkası, matris halkası gibi halkalar verilecektir.

Üçüncü bölümde, bu güne kadar bilinen tüm katı halka karakterizasyonları ayrıntılı bir şekilde ispatlarıyla birlikte verilecektir. Bu bölümün ilk kısmında; (Hong ve diğerleri 2000)'de elde edilen, bir halkanın katı endomorfizmasının monomorfizma olduğu ve katı halkaların inmiş olduğu gibi sonuçlara değinilecektir. Ayrıca katı halkalar üzerinde sağlanan bazı özellikler gösterilecek ve Ore genişlemesi kullanılarak katı halkalar için bir karakterizasyon verilecektir. İkinci kısımda; (Hong ve diğerleri 2003)'te tanımlanan α-skew Armendariz halkaların katı halkalarla ilişkisi incelenerek (Matczuk 2004) ve (Chen ve Tong 2005)'de farklı yaklaşımlarla elde edilen bazı katı halka karakterizasyonları ortaya konacaktır. Üçüncü kısımda; (Hong ve diğerleri 2006)'da tanımlanan α-Armendariz halkalar yardımıyla katı halkalar için yeni denk koşullar verilerek (Chen ve Tong 2007)'de bazı özel tipdeki matris halkaları kullanılarak bir halkanın katı olması için farklı gerek ve yeter koşullar araştırılacaktır. Son olarak bugüne kadar katı halkalarla ilgili bilinen tüm sonuçlar listelenecektir.

Tez çalışmasının orjinal kısmını oluşturan son bölümdeki amacımız, katı halkaların önceden bilinen karakterizasyonlarını da içine alan yeni karakterizasyonlar elde etmektir. Bu bölümün birinci kısmında ; α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşulun $S_3(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğunu ispatlanacak ve böylece (Hong ve diğerleri 2003)'de açık bırakılan bir soruya olumlu cevap verilecektir. Ayrıca $n \geq 4$ için $\bar{\alpha}$-Armendariz olmadığı bilinen $S_n(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olan bazı alt halkaları da belirlenerek R halkasının katı olması için yeni denk koşullar verilecektir. Son olarak dördüncü bölümün ikinci kısmında; R ve S iki halka, $\sigma : R \to S$ bir halka izomorfizması ve α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşulun S'nin $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-katı olması gerektiği ispatlanarak katı halkalar için yeni bir karakterizasyon elde edilecektir. Bu sayede (Chen ve Tong 2007)'deki sonuçlar genelleştirilmiş olacaktır. Ayrıca R halkası üzerindeki bazı polinom halkaları kullanılarak R'nin katı olması için bazı denk koşullar verilecektir. R, değişmeli bir S halkası üzerinde cebir olmak üzere R'nin S ile Dorroh genişlemesinin hangi şartlar altında α-katı olduğu belirlenecektir. Son olarak yarıasal halkaların bir karakterizasyonuna benzer olarak katı halkalar için de bir denk koşul ispatlanacaktır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli ve birleşmeli bir halka olacaktır. Ayrıca halkanın toplamsal birimi 0 ve çarpımsal birimi 1 ile gösterilecektir.

2.1 Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda katı halkalarla ilişkileri olan bazı halka sınıflarının tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.1.1. Bir R halkasının bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa a elemanı *üstel sıfır* (*nilpotent*) olarak adlandırılır. Bu özelliği sağlayan en küçük n doğal sayısına da a elemanının *üstel sıfırlık indeksi* (*nilpotency index*) denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.2. Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare* (*idempotent*) denir. Bir halka her zaman 0 ve 1 eşkarelerine sahiptir. R halkasının bir e eşkare elemanı R'nin merkezinde ise, yani her $a \in R$ için $ae = ea$ oluyorsa e eşkare elemanı *merkezil eşkare* (*central idempotent*) olarak adlandırılır (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.3. Bir R halkasının tüm eşkareleri merkezil ise R halkası *abel* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R'ye *inmiş* (*reduced*) halka denir. İnmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğu açıktır.

Tanım 2.1.5. Habeb 1990'da; $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R'ye sıfır değişmeli (zero commutative) demiştir. Cohn 1999'da bu özelliği sağlayan halkaları *terslenebilir* (*reversible*) olarak adlandırmıştır. Terslenebilir halkalar aynı zamanda 1999'da Anderson ve Camillo tarafından sıfır çarpımlar değişir (zero products commute) özelliğine sahip halkalar olarak ZC_2 adı altında çalışılmıştır. Ayrıca 1977'de Krempa ve Niewieczerzal bu özelliği sağlayan halkalara C_0 halka adını vermişlerdir.

Tanım 2.1.6. $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (symmetric) olarak adlandırılır (Lambek 1971). Anderson ve Camillo 1999'da simetrik halkalar için ZC_3 notasyonunu kullanarak bu halka sınıfının özelliklerini incelemiştir.

Her inmiş halka simetriktir (Shin 1973). Şimdi bunu gösterelim; $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu eşitlik sağdan b ile çarpılırsa $abcb = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bcba = 0$ bulunur. Son eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $bcbac = 0$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $cbacb = 0$ dır. Bu durumda $(cba)^2 = cbacba = 0$ ve R inmiş olduğundan $cba = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $acb = 0$ bulunur. Fakat simetrik olupta, inmiş olmayan halkalar vardır (Anderson ve Camillo 1999).

Değişmeli halkaların simetrik olduğu açıktır. Simetrik halkaların terslenebilir olduğu da kolayca gösterilebilir; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $1ab = 0$ olup R simetrik olduğundan $1ba = ba = 0$ elde edilir. Fakat bu gerektirmenin tersi doğru olmayabilir (Anderson ve Camillo 1999) ve (Marks 2002).

Tanım 2.1.7. $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli* (*semicommutative*) olarak adlandırılır (Shin 1973). Bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ sağ sıfırlayan (ya da $l_R(a)$ sol sıfırlayan) kümesinin R'nin bir ideali olmasıdır. Shin yarıdeğişmeli halkalar için SI özelliğine sahip halkalar adını da kullanmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar aynı zamanda Habep tarafından zero insertive adı altında 1990 yılında çalışılmıştır.

Her terslenebilir halka yarıdeğişmelidir. Gerçekten; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan herhangi bir $r \in R$ ile çarpılırsa $bar = 0$ olur. Buradan R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$, yani R halkası yarıdeğişmelidir.

Diğer taraftan her yarıdeğişmeli halka abel halkadır. Şimdi bunu gösterelim; $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1-e) = 0$ dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ bulunur. Buradan $ere = er$ elde edilir. Diğer taraftan $(1-e)e = 0$ dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $(1-e)Re = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $(1-e)re = 0$ bulunur. Buradan $ere = re$ elde edilir. Sonuç olarak herhangi bir $r \in R$ için $er = re$ olduğundan e eşkare elemanı merkezildir, yani R halkası abeldir.

Böylece yukarıda tanımları verilen halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Fakat bu gerektirmelerin herbirinin tersi doğru değildir.

$$R \text{ inmiş} \Rightarrow R \text{ simetrik} \Rightarrow R \text{ terslenebilir} \Rightarrow R \text{ yarıdeğişmeli halkadır.}$$

Tanım 2.1.8. $a \in R$ için $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkası *yarıasal* (semiprime) olarak adlandırılır. Yarıasal halkaların sınıfının, inmiş halkaların sınıfı tarafından kapsandığı çok açıktır.

2.2 Polinom Halkaları

R bir halka olmak üzere R üzerindeki polinomların halkası $R[x]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. R bir halka olmak üzere

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır ve R üzerindeki *kuvvet serilerinin halkası* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2. R bir halka olmak üzere

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ve bu halka *Laurent polinomlar halkası* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3. R bir halka ve $\alpha : R \longrightarrow R$ bir halka endomorfiması olsun. Bir $\delta : R \longrightarrow R$ toplamsal dönüşümü; her $a, b \in R$ için

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$$

özelliğini sağlarsa, bu durumda δ dönüşümüne R'nin bir *α-türevi* denir.

Tanım 2.2.4. R bir halka, α, R'nin bir endomorfizması ve δ, R'nin bir α-türevi olsun. R halkasının $R[x; \alpha, \delta]$ *Ore genişlemesi*; bilinen toplama ve herhangi bir $a \in R$ için

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte R üzerinde bir polinom halkasıdır. Eğer δ, R'nin sıfır endomorfizması ise, bu durumda $R[x;\alpha,0]$ yerine $R[x;\alpha]$ yazılır ve bu halka *endomorfizma tipinin bir Ore genişlemesi* (ya da *skew polinom halkası*) olarak adlandırılır. $R[[x;\alpha]]$ halkası ise *skew kuvvet serileri halkası* olarak adlandırılır.

Özel olarak α, R'nin birim endomorfizması ve δ, R'nin sıfır endomorfizması alınırsa $R[x;I_R,0]=R[x]$ olacağı açıktır.

2.3 Matris Halkaları

Bu bölümde bir R halkasından elde edilen bazı özel tipteki matris halkaları tanıtılacaktır. R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n\times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası $M_n(R)$ ve $n\times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası $UTM_n(R)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.1. R bir halka ve ${}_RM_R$ bir bimodül olsun. R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (trivial extension) olarak adlandırılan $T(R,M) = R\oplus M$; bilinen toplama ve aşağıda tanımlanan çarpma işlemine göre bir halkadır

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2)=(r_1r_2, r_1m_2+m_1r_2).$$

Bu halka, $r\in R$ ve $m\in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin halkasına izomorftur.

Tanım 2.3.2. Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrislere *matris birimleri* (matrix units) denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin herhangi bir R halkası üzerindeki tüm 3×2 tipindeki matris birimleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{dir.}$$

Tanım 2.3.3. Herhangi bir $A \in M_n(R)$ için, $RA = \{rA \mid \; r \in R\ \}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} :\ 1 \leq i,j \leq n\ \}$ matris birimleri kümesi olmak üzere, $V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,j+1}$ olsun.

$n = 2k \geq 2$ çift sayısı için,

$$A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \qquad B_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

ve $n = 2k+1 \geq 3$ tek sayısı için,

$$A_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \qquad B_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+2} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
n = 2k \;\text{ için} \qquad & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^e(R),\\
& B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^e(R),\\
n = 2k+1 \;\text{ için} \qquad & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^o(R),\\
& B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^o(R)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Örneğin;

$$A_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b \\ 0 & a_1 & a_2 & c \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a, b, c, \in R \right\},$$

$$B_4(R)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a & b & c \\ 0 & a_1 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1,a,b,c,d,r,s\in R\right\},$$

$$A_5(R)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b & c \\ 0 & a_1 & a_2 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1,a_2,a,b,c,d,r,s\in R\right\},$$

$$B_5(R)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a & b & c & d \\ 0 & a_1 & r & s & t \\ 0 & 0 & a_1 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1,a,b,c,d,r,s,t,u,v,w\in R\right\}$$

şeklindedir (Lee ve Zhou 2004).

3 KATI HALKALARIN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

3.1 Katı Halkalar

Bu bölüm için başlıca referansımız Hong, Kim ve Kwak tarafından 2000'de yazılan "Ore extensions of Baer and $p.p.$-rings" isimli makale olacaktır. Bu makale yardımıyla, tezin orjinal kısmını oluşturacak çalışmalarımız için temel teşkil edecek katı halkaların özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe α, R'nin birimden ve sıfırdan farklı bir endomorfizması olacaktır. Ayrıca aksi belirtilmedikçe α; herhangi bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere, R halkasının α-katı olmasından söz ederken α'yı ihmal ederek R halkasını sadece katı olarak ifade edeceğiz. Bu bölüme katı halkanın tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1.1. R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa α endomorfizması *katı* (*rigid*) olarak adlandırılır (Krempa 1996). Eğer bir R halkasının böyle katı bir α endomorfizması varsa R halkası α-*katı* (α-*rigid*) olarak adlandırılır (Hong ve diğerleri 2000).

Kolayca görülebilir ki; R bir α-katı halka ve S, R'nin $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan bir alt halkası olmak üzere S α-katı bir halkadır. Ayrıca I_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere R'nin I_R-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş olmasıdır. Şimdi α-katı halkaların bazı bilinen özelliklerini verelim.

Lemma 3.1.2. Herhangi bir halkanın katı bir endomorfizması bir monomorfizmadır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat α, R halkasının katı bir endomorfizması olsun. $a \in R$ için $\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a) = 0$ olup α katı endomorfizma olduğundan $a = 0$ olur. O halde α bir monomorfizmadır. $\square$

İnmiş olmayan bir halkanın birim endomorfizması bir monomorfizmadır fakat katı değildir. Yani yukarıdaki lemmanın tersi doğru değildir.

Lemma 3.1.3. Bir R halkası α-katı ise, bu durumda R inmiş halkadır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = 0$ olup, R α-katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve buradan $a = 0$ bulunur. $\square$

Böylece çalışmamızın Temel Kavramlar kısmında verilen bazı halka sınıflarıyla α-katı halkaların ilişkisi aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$R \ \alpha\text{-katı} \Rightarrow R \text{ inmiş} \Rightarrow R \text{ simetrik} \Rightarrow R \text{ terslenebilir} \Rightarrow R \text{ yarıdeğişmeli halkadır.}$$

Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi Lemma 3.1.3'ün tersi her zaman doğru değildir. Yani inmiş bir halkanın katı olmayan bir endomorfizması vardır.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasını göstermek üzere bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ halkasını gözönüne alalım. $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid \ a \equiv b \ (mod\ 2)\}$ halkası $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'nin değişmeli inmiş bir alt halkasıdır. Fakat R'nin $\alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlı α endomorfizması katı değildir. Gerçekten $(0,0) \neq (0,2) \in R$ için $(0,2)\alpha((0,2)) = (0,2)(2,0) = (0,0)$ dır.

Eğer α, inmiş bir R halkasının bir iç otomorfizması (yani; tersinir bir $u \in R$ için $\alpha(r) = u^{-1}ru$ biçiminde tanımlı) ise, bu durumda R α-katı olur. Şimdi bunu gösterelim; α, inmiş bir R halkasının bir iç otomorfizması ve $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda

$u \in R$ tersinir olmak üzere $a\alpha(a) = 0 \Rightarrow au^{-1}au = 0 \Rightarrow au^{-1}a = 0$ olur. Böylece $(au^{-1})^2 = au^{-1}au^{-1} = 0$ olup R inmiş olduğundan $au^{-1} = 0$ ve buradan $a = 0$ elde edilir. Böylece R α-katıdır.

İlerdeki sonuçlarımızın ispatlarında sıkça kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.5. R α-katı bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda;

(i) $ab = 0$ ise, herhangi bir pozitif n tamsayısı için $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$ dır.

(ii) $ab = 0$ ise, herhangi bir pozitif m tamsayısı için $a\delta^m(b) = \delta^m(a)b = 0$ dır.

(iii) Pozitif bir k tamsayısı için $a\alpha^k(b) = 0 = \alpha^k(a)b$ ise, $ab = 0$ dır.

(Hong ve diğerleri 2000)

İspat (i) $ab = 0$ olsun. $a\alpha(b) = \alpha(a)b = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $ab = 0$ olduğundan $b\alpha(a)\alpha(b\alpha(a)) = b\alpha(ab)\alpha^2(a) = 0$. R α-katı olduğundan $b\alpha(a) = 0$ dır. $(\alpha(a)b)^2 = 0$ ve R inmiş olduğundan $\alpha(a)b = 0$ dır. Benzer şekilde ba=0 olduğu kullanılarak $a\alpha(b) = 0$ olduğu gösterilebilir.
(ii) $ab = 0$ olsun. $a\delta(b) = \delta(a)b = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $ab = 0$ olduğundan $0 = \delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$ dır. (i) den $(\alpha(a)\delta(b))^2 = -\delta(a)b\alpha(a)\delta(b) = 0$ olup R inmiş olduğundan $\alpha(a)\delta(b) = 0$ elde edilir. Böylece (i) den $\alpha(a\delta(b)) = \alpha(a)\alpha(\delta(b)) = 0$ bulunur. R halkası α-katı iken α monomorfizma olduğundan $a\delta(b) = 0$ olur. Benzer şekilde $\delta(a)b = 0$ olduğu gösterilebilir.
(iii) Kabul edelim ki pozitif bir k tamsayısı için $a\alpha^k(b) = 0$ olsun. Bu durumda (i) den $\alpha^k(ab) = \alpha^k(a)\alpha^k(b) = 0$ olup α monomorfizma olduğundan $ab = 0$ bulunur. Benzer şekilde pozitif bir k tamsayısı için $\alpha^k(a)b = 0$ iken $ab = 0$ olduğu gösterilebilir. □

(Hong ve diğerleri 2000)'de, (Krempa 1996)'nın sonucunu genişleterek katı halkaların bir karakterizasyonunu Ore genişlemesini kullanarak aşağıdaki biçimde vermiştir.

Önerme 3.1.6. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha,\delta]$ Ore genişlemesinin inmiş ve α'nın monomorfizma olmasıdır. Bu denk koşullar altında bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ ve $\delta(e) = 0$ dır.

İspat R α-katı olsun. Lemma 3.1.2'den α bir monomorfizmadır. Şimdi $R[x;\alpha,\delta]$'nın inmiş halka olmadığını kabul edelim. Bu durumda $f^2 = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq f \in R[x;\alpha,\delta]$ vardır. R halkası α-katı iken inmiş olduğundan $f \notin R$ olur. Böylece $a_m \neq 0$ olmak üzere $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ yazabiliriz. $f^2 = 0$ olduğundan $a_m \alpha^m(a_m) = 0$ dır. Lemma 3.1.5'ten $a_m^2 = 0$ ve böylece R inmiş olduğundan $a_m = 0$ bulunur. Bu bir çelişki olup kabulümüz yanlıştır. Yani $R[x;\alpha,\delta]$ inmiş bir halkadır.
Tersine olarak $R[x;\alpha,\delta]$ inmiş ve α monomorfizma olsun. R halkası $R[x;\alpha,\delta]$'nın bir alt halkası olduğundan R halkası da inmiştir. Şimdi $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(a)xa = (\alpha(a))^2 x + \alpha(a)\delta(a) \in R[x;\alpha,\delta]$ için $(\alpha(a)xa)^2 = \alpha(a)xa\alpha(a)xa = 0$ olup $R[x;\alpha,\delta]$ inmiş olduğundan $\alpha(a)xa = 0$ dır. Yani $(\alpha(a))^2 x + \alpha(a)\delta(a) = 0$ olur ki buradan x'li terimin katsayısı olan $(\alpha(a))^2 = 0$ bulunur. Tekrar, R inmiş olduğundan $\alpha(a) = 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R α-katı bir halkadır.
Şimdi $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda e aynı zamanda $R[x;\alpha,\delta]$'da bir eşkaredir. $R[x;\alpha,\delta]$ inmiş olduğundan abeldir. Böylece e, $R[x;\alpha,\delta]$'da bir merkezil eşkaredir. Bu durumda $ex = xe = \alpha(e)x + \delta(e)$ olup $\alpha(e) = e$ ve $\delta(e) = 0$ elde edilir. □

Dikkat edilirse Önerme 3.1.6'da $R[x;\alpha,\delta]$ inmiş ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ ise, herhangi negatif olmayan m ve n tam sayıları için Lemma 3.1.5'ten $ax^m bx^n = 0$ olur.

Önerme 3.1.7. R α-katı bir halka ve $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha,\delta]$ olsun. Bu durumda $pq = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $a_i b_j = 0$ olmasıdır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat $p=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ q=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha,\delta]$ için $pq=0$ olsun. Bu durumda $0\leq k\leq m+n$ için $c_k=\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j)$ olmak üzere, $(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) = \sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i+j=k} a_i x^i b_j x^j) = c_{m+n}x^{m+n}+c_{m+n-1}x^{m+n-1}+\cdots+c_1x+c_0=0$ yazabiliriz. İddia ediyoruz ki $s+t\geq 0$ için $a_sb_t=0$ dır. İspatı $s+t$ üzerinde tümevarım metodunu uygulayarak yapalım. $pq=0$ olduğundan $c_{m+n}=a_m\alpha^m(b_n)=0$ olup Lemma 3.1.5'ten $a_mb_n=0$ dır. Yani $s+t=m+n$ için $a_sb_t=0$ olup iddia doğrudur. $0\leq k<s+t$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda Önerme 3.1.6'dan $l=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ m+n-1,\ m+n$ için $\sum_{i+j=l} a_i x^i b_j x^j=0$ elde edilir. Lemma 3.1.5'deki (i) ve (ii) tekrar tekrar kullanılırsa negatif olmayan her bir $i_1,i_2,\ldots,i_t,j_1,j_2,\ldots,j_t$ tam sayıları ve $i+j\geq k+1$ için x^{k-1}'li terimin katsayıları olan $a_i\alpha^{i_1}\delta^{j_1}\alpha^{i_2}\delta^{j_2}\ldots\alpha^{i_t}\delta^{j_t}(b_j)=0$ bulunur. Böylece

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j)=a_k\alpha^k(b_0)+a_{k-1}\alpha^{k-1}(b_1)+\cdots+a_1\alpha(b_{k-1})+a_0b_k=0 \qquad (3.1)$$

denklemi elde edilir. Tümevarım hipotezinden $0\leq k<s+t$ için $a_sb_t=0$ olup Lemma 3.1.5(i)'den $a_s\alpha^s(b_t)=0$ olur. Bu durumda R inmiş halka olduğundan $\alpha^s(b_t)a_s=0$ dır. (3.1) denklemi sağdan a_k ile çarpılırsa

$$\left(\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j)\right)a_k=a_k\alpha^k(b_0)a_k=0$$

bulunur. Böylece $(a_k\alpha^k(b_0))^2=0$ dır. R inmiş olduğundan $a_k\alpha^k(b_0)=0$ ve Lemma 3.1.5(iii)'den $a_kb_0=0$ olur. Böylece (3.1) denklemi

$$\sum_{i+j=k,\ 0\leq i\leq k-1} a_i\alpha^i(b_j)=0 \qquad (3.2)$$

denklemine dönüşür. (3.2) denklemi sağdan a_{k-1} ile çarpılıp yukarıdaki metot uygulanırsa $a_{k-1}b_1=0$ bulunur. Bu işlem devam ettirilirse $i+j=k$ olmak üzere her $0\leq i\leq m$ ve $0\leq j\leq n$ için $a_ib_j=0$ elde edilir.

Tersine her $0\leq i\leq m$ ve $0\leq j\leq n$ için $a_ib_j=0$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.5'ten $pq=0$ elde edilir. □

Sonuç 3.1.8. R bir α-katı halka olsun. $e = e_0 + e_1x + \ldots + e_nx^n$ olmak üzere $e^2 = e \in R[x;\alpha,\delta]$ ise $e = e_0$ dır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat $1 - e = (1 - e_0) - \sum_{i=1}^{n} e_ix^i$ dır. $e(1 - e) = 0 = (1 - e)e$ olduğundan Önerme 3.1.7'den $e_0(1 - e_0) = 0$ ve her $1 \le i \le n$ için $e_i^2 = 0$ olur. Böylece her $1 \le i \le n$ için $e_i = 0$ olduğundan $e = e_0 \in R$ dir. Sonuç olarak $R[x;\alpha,\delta]$'daki her eşkare eleman R'dedir.
□

Önerme 3.1.9. R, α-katı bir halka ve $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, q = \sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j \in R[[x;\alpha]]$ olsun. Bu durumda, $pq = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $i \ge 0$ ve $j \ge 0$ için $a_ib_j = 0$ olmasıdır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat $pq = 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_ix^ib_jx^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j)x^{i+j}\right) = 0 \tag{3.3}$$

dir. Her i, j için $a_ib_j = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. (3.3) denkleminden $i + j = 0$ için $a_0b_0 = 0$ olur. R inmiş olduğundan $b_0a_0 = 0$ ve Lemma 3.1.5(i)'den $\alpha(b_0)a_0 = 0$ bulunur. Kabul edelim ki $i + j \le n - 1$ için $a_ib_j = 0$ olsun. (3.3) denkleminden x^n'in katsayısı

$$\sum_{i+j=n} a_i\alpha^i(b_j) = 0 \tag{3.4}$$

olup bu (3.4) denklemi sağdan a_0 ile çarpılırsa Lemma 3.1.5(iii)'den $a_0b_na_0 = 0$ olur ve R inmiş olduğundan da $a_0b_n = 0$ elde edilir. Bu durumda (3.4) denklemi

$$\sum_{i+j=n, 1\le i\le n} a_i\alpha^i(b_j) = 0 \tag{3.5}$$

denklemine dönüşür. (3.5) denklemi sağdan a_1 ile çarpılırsa yukarıdakine benzer metotla $a_1b_{n-1} = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse her $i \ge 0$ ve $j \ge 0$ için $a_ib_j = 0$ olur. İspatın ters yönü Lemma 3.1.5'den elde edilir. □

Sonuç 3.1.10. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul $R[[x;\alpha]]$ skew kuvvet seriler halkasının inmiş ve α'nın monomorfizma olmasıdır (Hong ve diğerleri 2000).

İspat R, α-katı olsun. Lemma 3.1.2'den α bir monomorfizmadır. Şimdi $R[[x;\alpha]]$'nın inmiş olmadığını kabul edelim. Bu durumda $f^2 = 0$ fakat $f \neq 0$ olacak şekilde $f \in R[[x;\alpha]]$ vardır. R inmiş olduğundan $f \notin R$ dir. Böylece $a_s \neq 0$ olmak üzere $f = \sum_{i=s}^{\infty} a_i x^i$ şeklindedir. $f^2 = 0$ olduğundan $0 = a_s x^s a_s x^s = a_s \alpha^s(a_s) x^{s+s}$ olup $a_s \alpha^s(a_s) = 0$'dır. Lemma 3.1.5(iii)'den $a_s^2 = 0$ ve R inmiş olduğundan $a_s = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $R[[x;\alpha]]$ inmiştir.
Tersine $R[[x;\alpha]]$'nın inmiş ve α'nın monomorfizma olduğunu kabul edelim. Bu durumda $R[x;\alpha]$ alt halka olduğundan inmiştir. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $ax \in R[x;\alpha]$ polinomu için $(ax)^2 = axax = a\alpha(a)x^2 = 0$ ve $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $ax = 0$ ve dolayısıyla $a = 0$ elde edilir. Böylece R α-katıdır. $\square$

3.2 Katı Halkalar ve α-Skew Armendariz Halkalar

Çalışmamızın temelini teşkil eden α-katı halkalar inmiş halkaların bir genellemesidir. Diğer taraftan Rege ve Chhawchharia 1997 yılında inmiş halkaların bir başka genellemesi olan Armendariz halkaların tanımını aşağıdaki biçimde vermiştir.

Tanım 3.2.1. $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i b_j = 0$ oluyorsa R halkası Armendariz olarak adlandırılır.

Bu halka sınıfına Armendariz ismi verilmiştir çünkü 1974'te E. P. Armendariz, inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını göstermiştir. Yani inmiş (dolayısıyla α-katı) halkalar

Armendarizdir. Armendariz halkaların alt halkaları da Armendarizdir. Armendariz halkaların özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri son yıllarda oldukça fazla çalışılmıştır. Hong, Kim ve Kwak 2003'te, α-katı ve Armendariz halkaların bir genellemesi olan α-skew Armendariz halkaları aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır.

Tanım 3.2.2. $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x; \alpha]$ polinomları için $pq = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R halkası *α-endomorfizması ile birlikte bir skew Armendariz halka* (kısaca, *α-skew Armendariz halka*) olarak adlandırılır.

R Armendariz bir halka ise, bu durumda I_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere R, I_R-skew Armendariz halkadır ve böylece her inmiş halka I_R-skew Armendarizdir. Fakat I_R-katı olmayan, yani inmiş olmayan, I_R-skew Armendariz halkalar vardır. Örneğin; n (≥ 2) bir pozitif tam sayı olmak üzere, $R = \mathbb{Z}_{n^2}$, n^2 modülüne göre tam sayılar halkası olsun. Bu durumda R inmiş olmayan değişmeli Armendariz halkadır. Böylece R I_R-skew Armendarizdir fakat I_R-katı değildir. Diğer taraftan R, α-skew Armendariz bir halka ve S, R'nin $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan bir halkası olmak üzere S de α-skew Armendarizdir.

Hong, Kim ve Kwak 2003'te, α-katı halkaların bir karakterizasyonunu aşağıdaki biçimde vermişlerdir.

Önerme 3.2.3. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. Bu durumda R inmiş bir halkadır. Şimdi $R[x; \alpha]$'nın inmiş olduğunu gösterelim. $p^2 = 0$ olacak şekilde $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \in R[x; \alpha]$ olsun.

$p^2 = 0$ olduğundan aşağıdaki denklemlere sahibiz:

$$a_0^2 = 0 \tag{3.6}$$

$$a_0 a_1 + a_1 \alpha(a_0) = 0 \tag{3.7}$$

$$a_0 a_2 + a_1 \alpha(a_1) + a_2 \alpha^2(a_0) = 0 \tag{3.8}$$

$$\vdots$$

$$a_m \alpha^m(a_m) = 0 \tag{3.9}$$

R inmiş olduğundan (3.6) denkleminden $a_0 = 0$ bulunur. R α-katı olduğundan (3.8) denkleminden $a_1 = 0$ olur. Bu şekilde devam edilirse $a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$ yani $p = 0$ elde edilir. Böylece $R[x;\alpha]$ inmiştir.
Tersine $R[x;\alpha]$ inmiş olsun. Bunun için Önerme 3.1.6 gereğince α'nın monomorfizma olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Kabul edelim ki α monomorfizma olmasın. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. Buradan $ax \in R[x;\alpha]$ için $(ax)^2 = (ax)(ax) = a\alpha(a)x^2 = 0$ olup $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $ax = 0$ yani $a = 0$ bulunur. Bu bir çelişki olup kabulümüz yanlıştır. Sonuç olarak α bir monomorfizmadır.□

Aşağıdaki sonuç α-katı halkaların α-skew Armendariz olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.4. Bir R halkası α-katı ise, bu durumda α-skew Armendarizdir (Hong ve diğerleri 2003).

İspat R α-katı olsun. Önerme 3.2.3'ten $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır. Bu durumda $R[x;\alpha]$ Armendarizdir. Şimdi R'nin α-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. $R[x;\alpha]$ Armendariz olduğundan $a_i b_j = 0$ olur. Lemma 3.1.5(i)'den $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ elde edilir. Böylece R α-skew Armendarizdir. □

Aşağıdaki örnekler α-skew Armendariz olup ta α-katı olmayan halkaların var olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.5. (1) $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sırasıyla tam sayılar ve rasyonel sayılar halkası olmak üzere

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}\ ,\ t \in \mathbb{Q} \right\}$$

halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & t/2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha : R \longrightarrow R$ otomorfizmasını gözönüne alalım. R halkası α-skew Armendarizdir fakat α-katı değildir (Hong ve diğerleri 2003).

(2) $R = \mathbb{Z}_2[x]$ halkasını ve $f(x) \in R$ için $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. R halkası α-skew Armendarizdir fakat α-katı değildir (Hong ve diğerleri 2003).

Bir R halkasının bir I ideali için $\alpha(I) \subseteq I$ oluyorsa, bu durumda $\bar{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ ile tanımlı $\bar{\alpha} : R/I \to R/I$ dönüşümü R/I'nın bir endomorfizması olur.

Hong ve diğerleri 2003'te katı halkaların başka bir karakterizasyonunu aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Önerme 3.2.6. α, R halkasının $\alpha(1) = 1$ olacak şekildeki bir monomorfizması olsun. Bu durumda R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $\langle x^2 \rangle$, $R[x]$'in x^2 tarafından üretilen ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^2 \rangle$ bölüm halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. Bu durumda Önerme 3.2.3'ten $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır. $R[x]/\langle x^2 \rangle$'de bir $\bar{h}$ elemanını $h = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x]$ olmak üzere $\bar{h} = h + \langle x^2 \rangle = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \langle x^2 \rangle = a_0 + a_1x + \langle x^2 \rangle = a_0 + a_1\bar{x} \in R[x]/\langle x^2 \rangle$ biçiminde yazabiliriz. Burada $\bar{x} = x + \langle x^2 \rangle$ dir. Şimdi $R[x]/\langle x^2 \rangle$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $\bar{p} = \bar{f}_0 + \bar{f}_1y + \cdots + \bar{f}_my^m$, $\bar{q} = \bar{g}_0 + \bar{g}_1y + \cdots + \bar{g}_ny^n \in (R[x]/\langle x^2 \rangle)[y;\bar{\alpha}]$ için $\bar{p}\bar{q} = 0$

olsun. Burada her bir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}, a_{i_1}, b_{j_0}, b_{j_1} \in R$ olmak üzere $\bar{x}^2 = 0$ olduğundan $\bar{f}_i = a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x}$, $\bar{g}_j = b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x}$ yazılabilir. Ayrıca $\alpha(1) = 1$ olduğu kullanılarak $y\bar{x} = y(x + \langle x^2 \rangle) = \bar{\alpha}(x + \langle x^2 \rangle)y = (\alpha(x) + \langle x^2 \rangle)y = (x + \langle x^2 \rangle)y = \bar{x}y$ olduğu görülür. Diğer taraftan herhangi bir $a \in R$ için $a\bar{x} = \bar{x}a$ olur. Böylece

$$h_0 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_0} y^i,\ h_1 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_1} y^i,\ k_0 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_0} y^j,\ k_1 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_1} y^j \in R[y]$$

olmak üzere $\bar{p} = h_0 + h_1\bar{x}$, $\bar{q} = k_0 + k_1\bar{x}$ yazılır. $\bar{p}\bar{q} = 0$ ve $\bar{x}^2 = \bar{0}$ olduğundan

$$\bar{0} = \bar{p}\bar{q} = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x} + h_1k_1\bar{x}^2 = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x}$$

elde edilir. Böylece $R[y;\alpha]$'da $h_0k_0 = 0$ ve $h_0k_1 + h_1k_0 = 0$ bulunur. $R[y;\alpha](\cong R[x;\alpha])$ inmiş olduğundan $k_0h_0 = 0$ ve $0 = k_0(h_0k_1 + h_1k_0)h_1 = (k_0h_1)^2$ olur. Böylece $k_0h_1 = 0$ ve buradan $h_1k_0 = 0$ dır. Sonuç olarak $h_0k_1 = 0$ olur. Sonuç 3.2.4'ten R α-skew Armendarizdir. Böylece her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}\alpha^i(b_{j_0}) = 0$, $a_{i_0}\alpha^i(b_{j_1}) = 0$, $a_{i_1}\alpha^i(b_{j_0}) = 0$ olur. Buna göre $0 = a_{i_0}\alpha^i(b_{j_0}) + [a_{i_0}\alpha^i(b_{j_1}) + a_{i_1}\alpha^i(b_{j_0})]\bar{x} + [a_{i_1}\alpha^i(b_{j_1})]\bar{x}^2 = (a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x})\bar{\alpha}^i(b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x}) = \bar{f}_i\bar{\alpha}^i(\bar{g}_j)$ olduğundan $R[x]/\langle x^2 \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.
Tersine $R[x]/\langle x^2 \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. Şimdi R'nin α-katı olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. $\bar{x} = x + \langle x^2 \rangle \in R[x]/\langle x^2 \rangle$ olmak üzere $(\alpha(a) - \bar{x}y)$, $(a + \bar{x}y) \in (R[x]/\langle x^2 \rangle)[y;\bar{\alpha}]$ polinomlarını gözönüne alalım. $(R[x]/\langle x^2 \rangle)[y;\bar{\alpha}]$'da $\alpha(a)\bar{x} = \bar{x}\alpha(a)$ olduğundan $(\alpha(a) - \bar{x}y)(a + \bar{x}y) = \alpha(a)a + [\alpha(a)\bar{x} - \bar{x}\alpha(a)]y - \alpha(1)\bar{x}^2y^2 = \bar{0}$ ve $R[x]/\langle x^2 \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğundan $\alpha(a)\bar{x} = 0$ olur. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Böylece R α-katıdır. □

α, bir R halkasının bir endomorfizması ve $M_n(R)$, R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası olsun. $(\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k) \in M_n(R[x;\alpha])$ için $\phi((\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k)) = \sum_{k=0}^{m} (a_{ij}^{(k)}) x^k$ ile tanımlanan ϕ dönüşümü bir halka izomorfizmasıdır. Yani $M_n(R[x;\alpha]) \cong M_n(R)[x;\bar{\alpha}]$ dır. Burada özel olarak α, R'nin birim endomorfizması olarak alınırsa $M_n(R)[x] \cong M_n(R[x])$ olduğu görülür.

α, bir R halkasının bir endomorfizması ve $T(R,R)$, R'nin aşikar genişlemesi olmak üzere $(a,b) \in T(R,R)$ için $\bar{\alpha}((a,b)) = (\alpha(a), \alpha(b))$ ile tanımlı $\bar{\alpha} : T(R,R) \to T(R,R)$ dönüşümü $T(R,R)$'nin bir endomorfizmasıdır.

Hong ve diğerleri 2003'te; R inmiş ya da α bir monomorfizma olsa bile, R α-skew Armendariz iken $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması gerekmediğini göstermişlerdir. Fakat aşağıdaki önermeyi ispatlamışlardır.

Önerme 3.2.7. Bir R halkası α-katı (yani $R[x;\alpha]$ inmiş) ise, bu durumda $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

İspat R α-katı olsun. $p = \sum_{i=0}^{m}(a_i,b_i)x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n}(c_j,d_j)x^j \in T(R,R)[x;\bar{\alpha}]$ için $pq = 0$ olsun. $T(R,R)[x;\bar{\alpha}] \cong T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])$ olduğundan

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ p_1 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,\ q_0 = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,\ q_1 = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

olmak üzere $p = (p_0, p_1)$, $q = (q_0, q_1)$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$0 = pq = (p_0,p_1)(q_0,q_1) = (p_0q_0, p_0q_1 + p_1q_0)$$

olduğundan $R[x;\alpha]$'da $p_0q_0 = 0$ ve $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ elde edilir. $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $q_0p_0 = 0$ olur. $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_1 = 0$ olup, buradan $p_1q_0 = 0$ bulunur. Sonuç 3.2.4 gereğince R α-skew Armendariz olduğundan her i, j için $p_0q_0 = 0$ eşitliğinden $a_i\alpha^i(c_j) = 0$, $p_0q_1 = 0$ eşitliğinden $a_i\alpha^i(d_j) = 0$ ve $p_1q_0 = 0$ eşitliğinden $b_i\alpha^i(c_j) = 0$ elde edilir. Böylece $(a_i,b_i)\bar{\alpha}^i((c_j,d_j)) = 0$ olup $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir. □

Bir R halkasının $T(R,R)$ aşikar genişlemesi

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R \right\}$$

halkasına genişletilebilir. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $S_3(R)$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizması α yardımıyla $\bar{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ biçiminde tanımlanır. Buna göre Önerme 3.2.7'ye benzer olarak aşağıdaki önerme ispatlanabilir.

Önerme 3.2.8. Bir R halkası α-katı ise, bu durumda

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir (Hong ve diğerleri 2003).

n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a,\ a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. Önerme 3.2.8'in ışığı altında; $n \geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat Hong ve diğerleri 2003'te bunun olmadığını bir örnek vererek göstermişlerdir.

Hong ve diğerleri 2003'te; daha sonra, halka teori üzerine çalışmalar yapan pek çok araştırmacının ilgileneceği, "α, R'nin bir monomorfizması (otomorfizması) ve R (değişmeli) inmiş α-skew Armendariz halka iken R α-katı halka mıdır?" sorusunu açık bir problem olarak ortaya koymuşlardır.

Matczuk 2004'te aşağıdaki teoremi ispatlayarak bu soruya olumlu cevap vermiştir.

Teorem 3.2.9. α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R inmiş α-skew Armendariz halka ve α monomorfizmadır.

(ii) R α-katıdır.

(iii) $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır.

Yukarıdaki teoremde (ii)$\Leftrightarrow$(iii) denkliği (Krempa 1996) ve (Hong ve diğerleri 2000)'de şu şekilde gösterilmiştir: (Krempa 1996)'da; $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş ve α-katı olması gerektiğini söylemiştir. Daha sonra (Hong ve diğerleri 2000)'de; α-katı halkaların inmiş olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan (Matczuk 2004)'te bu denkliğin yeni bir ispatını vermek için Jordan genişlemesinden yararlanmıştır. Dolayısıyla yukarıdaki teoremin ispatına geçmeden önce ilk olarak Jordan genişlemesinin tanımını verelim.

Tanım 3.2.10. R bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olsun. A, R'nin bir üst halkası olmak üzere α, A'nın bir otomorfizmasına genişletilebilir ve $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k}(R)$ biçiminde yazılabilirse A'ya R'nin bir *Jordan genişlemesi* (*Jordan extension*) denir. Jordan 1982'de bir R halkasının $R[x;\alpha]$ Ore genişlemesinin sol lokalizasyonunu kullanarak böyle bir A Jordan genişlemesinin her zaman var olduğunu göstermiştir.

Şimdi Teoremin 3.2.9'un ispatı için gerekli olan ve aynı zamanda α-katı halkaların bir karakterizasyonunu da içeren aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.11. α, R halkasının bir monomorfizması ve A, R'nin Jordan genişlemesi olsun. Bu durumda;

(i) R'nin inmiş olması için gerek ve yeter koşul A'nın inmiş olmasıdır.

(ii) R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul A'nın α-skew Armendariz olmasıdır.

(iii) R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul A'nın α-katı olmasıdır.

(Matczuk 2004)

İspat R, A'nın bir alt halkası olduğundan yeter koşulların ispatları açıktır. Bundan dolayı sadece gerek koşulların ispatlanması yeterlidir.

(i) R inmiş olsun. A'nın inmiş olduğunu gösterelim. $a \in A$ için $a^2 = 0$ olsun. A, R'nin Jordan genişlemesi olduğundan $\alpha^k(a) \in R$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ vardır. $0 = \alpha^k(a^2) = \alpha^k(a)\alpha^k(a) = (\alpha^k(a))^2$ ve R inmiş olduğundan $\alpha^k(a) = 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Böylece A inmiştir.

(ii) R α-skew Armendariz olsun. $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in A[x;\alpha]$ için $pq = 0$ olsun. A, R'nin Jordan genişlemesi olduğundan her bir i, j için $\alpha^k(a_i), \alpha^k(b_j) \in R$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ vardır. $R[x;\alpha]$'da $\alpha^k(p) = \sum_{i=0}^{m} \alpha^k(a_i)x^i$, $\alpha^k(q) = \sum_{j=0}^{n} \alpha^k(b_j)x^j$ polinomları için $\alpha^k(p)\alpha^k(q) = 0$ olur. R α-skew Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $\alpha^k(a_i)\alpha^{k+i}(b_j) = 0$ bulunur. Buradan $\alpha^k(a_i\alpha^i(b_j)) = 0$ ve α monomorfizma olduğundan $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ elde edilir. Böylece A α-skew Armendarizdir.

(iii) R α-katı olsun. $a \in A$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. A, R'nin Jordan genişlemesi olduğundan $\alpha^k(a) \in R$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ vardır. $a\alpha(a) = 0$ olduğundan $\alpha^k(a\alpha(a)) = 0$ olur. Buradan $\alpha^k(a)\alpha(\alpha^k(a)) = 0$ olup R α-katı olduğundan $\alpha^k(a) = 0$ ve α monomorfizma olduğundan $a = 0$ bulunur. Sonuç olarak A α-katıdır. $\square$

Lemma 3.2.12. α, R'nin bir otomorfizması ve R, α-katı olsun. Bu durumda;

(i) R inmiş halkadır.

(ii) Herhangi bir $a \in R$ için $\alpha(ann_R(a)) = ann_R(a)$ dır.

(iii) $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha]$ için $rann_{R[x;\alpha]}(p) = ann_R(\{a_i \mid 0 \leq i \leq n\})R[x;\alpha]$ dır.

(Matczuk 2004).

İspat (i) Lemma 3.1.3'ten R inmiş halkadır.

(ii) $b \in ann_R(a)$ olsun. Bu durumda $ba = 0$ dır. Buradan $\alpha^{-1}(a)b\alpha(\alpha^{-1}(a)b) = \alpha^{-1}(a)b\alpha(\alpha^{-1}(a))\alpha(b) = \alpha^{-1}(a)ba\alpha(b) = 0$ olur. R α-katı olduğundan $\alpha^{-1}(a)b = 0$ ve buradan $a\alpha(b) = 0$ bulunur. Böylece $\alpha(b) \in ann_R(a)$ olur ki buradan $\alpha(ann_R(a)) \subseteq ann_R(a)$ elde edilir. Diğer taraftan $b \in ann_R(a)$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ dır. Buradan $b\alpha(a)\alpha(b\alpha(a)) = b\alpha(ab)\alpha^2(a) = 0$ ve R α-katı olduğundan $b\alpha(a) = 0$ olur. R inmiş olduğundan $\alpha(a)b = 0$ olup buradan $a\alpha^{-1}(b) = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha^{-1}(b) \in ann_R(a)$ dır. Yani $\alpha^{-1}(b) = c$ olacak şekilde $c \in ann_R(a)$ vardır. O halde $b = \alpha(c) \in \alpha(ann_R(a))$ ve böylece $ann_R(a) \subseteq \alpha(ann_R(a))$ olur ki istenen eşitlik elde edilir.

(iii) $I = ann_R(\{a_i \mid 0 \leq i \leq n\})R[x;\alpha]$ olsun. $b \in ann_R(\{a_i \mid 0 \leq i \leq n\})$ ve $f(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $bf(x) \in I$ olsun. $pbf(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)b(c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m)$ olup $b \in ann_R(\{a_i \mid 0 \leq i \leq n\})$ olduğundan $a_ib = 0$ ve (ii)'den $pbf(x) = (a_0b + a_1\alpha(b)x + \cdots + a_n\alpha^n(b)x^n)(c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $bf(x) \in rann_{R[x;\alpha]}(p)$, yani $I \subseteq rann_{R[x;\alpha]}(p)$ dir. Şimdi $rann_{R[x;\alpha]}(p) \subseteq I$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $rann_{R[x;\alpha]}(p) \nsubseteq I$ olsun. Bu durumda $q \notin I$ olacak şekilde bir $q \in rann_{R[x;\alpha]}(p)$ vardır. $deg(q) = m$ minimal olmak üzere $q = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ olsun. $q \in rann_{R[x;\alpha]}(p)$ olduğundan $pq = 0$ dır. $q \notin I$ olduğundan $a_k\alpha^k(b_m) \neq 0$ olacak şekilde $0 \leq k \leq n$ vardır. k, bu şekildeki en büyük indis olsun. $pq = 0$ olduğundan x^{k+m} li terimin katsayısı sıfır olacağından

$$a_k\alpha^k(b_m) + a_{k+1}\alpha^{k+1}(b_{m-1}) + a_{k+2}\alpha^{k+2}(b_{m-2}) + \cdots + a_{k+m}\alpha^{k+m}(b_0) = 0$$

elde edilir. k'nın seçiminden ve (ii)'den her $k+1 \leq i \leq n$ için $\alpha^k(b_m) \in ann_R(a_i)$ olur. Böylece yukarıdaki denklem soldan $\alpha^k(b_m)$ ile çarpılırsa $\alpha^k(b_m)a_k\alpha^k(b_m) = 0$ bulunur. Buradan $(a_k\alpha^k(b_m))^2 = 0$ ve R inmiş olduğundan $a_k\alpha^k(b_m) = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup $rann_{R[x;\alpha]}(p) = I$ dir. □

Şimdi Teorem 3.2.9'un ispatını verelim.

İspat (iii) $\Rightarrow$ (ii) $R[x;\alpha]$ inmiş halka olsun. R'nin α-katı olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \neq a \in R$ için $a\alpha(a) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \neq 0$ olduğundan $0 \neq ax \in R[x;\alpha]$ ve $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $0 \neq (ax)^2 = (ax)(ax) = a\alpha(a)x^2$ olup $a\alpha(a) \neq 0$ dır.
(i) $\Rightarrow$ (ii) α, R'nin bir monomorfizması ve R inmiş α-skew Armendariz halka olsun. A, R'nin Jordan genişlemesi olmak üzere α'nın A'ya genişlemesini de α ile gösterelim. Bu durumda α, A'nın bir otomorfizmasıdır. Lemma 3.2.11(i)-(ii)'den A inmiş α-skew Armendariz halkadır. Şimdi R'nin α-katı olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Aynı zamanda $a \in A$ için de $a\alpha(a) = 0$ olur. Buradan $\alpha^{-1}(a)a = 0$ dır. $p(x) = a + ax$, $q(x) = -\alpha^{-1}(a) + ax \in A[x;\alpha]$ polinomlarını gözönüne alalım. $p(x)q(x) = -a\alpha^{-1}(a) + (a^2 - a^2)x + a\alpha(a)x^2 = 0$ ve A α- skew Armnendariz olduğundan $aa = a^2 = 0$ dır. A inmiş halka olduğundan $a = 0$ bulunur. Böylece A α-katı halkadır. Sonuç olarak Lemma 3.2.11(iii)'den R α-katı halkadır.
(ii) $\Rightarrow$ (i),(iii) R α-katı olsun. Bu durumda Lemma 3.2.12(i)'den R inmiş halkadır. R'nin α-skew Armendariz olması ise Lemma 3.2.12(iii)-(ii)'nin direkt bir sonucudur. Şimdi $R[x;\alpha]$'nın inmiş olduğunu gösterelim. $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha]$ için $p^2 = 0$ olsun. Lemma 3.2.12(ii)'den $a_n^2 = 0$ olur. R inmiş olduğundan $a_n = 0$ dır. Böylece $R[x;\alpha]$ inmiştir. $\square$

Diğer taraftan Hong ve diğerlerinin 2003'te sordukları soruya, Matczuk'un 2004'teki ispatından bağımsız olarak, Chen ve Tong 2005'te ispatladıkları aşağıdaki teoremle olumlu cevap vermişlerdir.

Teorem 3.2.13. α, R'nin bir monomorfizması olmak üzere R inmiş α-skew Armendariz halka olsun. Bu durumda R α-katıdır.

İspat Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Yani $a\alpha(a) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ olsun. Bu durumda $\alpha(a)\alpha^2(a) = \alpha(a\alpha(a)) = \alpha(0) = 0$ dır. Diğer taraftan R inmiş iken terslenebilir olduğundan $\alpha(a)a = 0$ olur. $a \neq 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan

$\alpha(a) \neq 0$ dır. Aynı zamanda $\alpha(a) \neq 0$ ve R inmiş olduğundan $(\alpha(a))^2 = \alpha^2(a) \neq 0$ olur. Şimdi $a_0 = \alpha(a), a_1 = \alpha(a), b_0 = a$ ve $b_1 = -\alpha(a)$ olmak üzere $R[x;\alpha]$'da $p(x) = a_0 + a_1x$, $q(x) = b_0 + b_1x$ polinomlarını göz önüne alalım. $p(x)q(x) = \alpha(a)a + (-\alpha^2(a) + \alpha^2(a))x - (\alpha(a)\alpha^2(a))x^2 = 0$ olup R α-skew Armendariz olduğundan $a_0b_1 = \alpha(a)(-\alpha(a)) = -\alpha^2(a) = 0$ olmalıdır. Fakat bu çelişkidir. Sonuç olarak R α-katı bir halkadır. □

(Hong ve diğerleri 2003)'te bir R halkasının bir α endomorfizması için R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olması gerektiğini ispatlamışlardır. Aynı zamanda (Hong ve diğerleri 2003)'te R halkası α-katı iken R'nin α-skew Armendariz olduğunu göstermişlerdir. Bundan dolayı (Chen ve Tong 2005)'te Teorem 3.2.13'ü ve Hong ve diğerleri'nin 2003'te ispatladıkları Önerme 3.1.6'yı birleştirerek aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Sonuç 3.2.14. α, R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş α-skew Armendariz halka ve α'nın monomorfizma olmasıdır .

Sonuç 3.2.15. R inmiş bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır.

(ii) R α-skew Armendarizdir.

(iii) R α-katı halkadır.

Chen ve Tong 2005'te, Hong ve diğerlerinin 2003'te ispatladıkları Önerme 3.2.7 ve Önerme 3.2.8'i yeniden yorumlayarak aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Sonuç 3.2.16. α, R'nin bir monomorfizması olmak üzere R, inmiş α-skew Armendariz bir halka olsun. Bu durumda R'nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesi $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Sonuç 3.2.17. α, R'nin bir monomorfizması olmak üzere R, inmiş α-skew Arendariz bir halka olsun. Bu durumda

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

3.3 Katı Halkalar ve α- Armendariz Halkalar

Hong, Kwak ve Rizvi 2006'da α-katı ve Armendariz halkaların bir başka genellemesi olan α-Armendariz halkaları aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır.

Tanım 3.3.1. α R halkasının bir endomorfizması olsun. $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ için $a_i b_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası α-*Armendariz* olarak adlandırılır.

Her α-Armendariz halkanın α-skew Armendariz olduğu açıktır. Ayrıca bir R halkasının herhangi bir katı α endomorfizması için R halkasının α-Armendarizlik özelliği α-skew Armendarizlik özelliğine denktir. Diğer taraftan I_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere R Armendarizdir ancak ve ancak R I_R-skew Armendarizdir ancak ve ancak R I_R-Armendarizdir. Diğer taraftan R, α-Armendariz bir halka ve S, R'nin $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekildeki bir alt halkası olmak üzere S α-Armendarizdir. Ayrıca α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R α-Armendariz bir halka ise, bu durumda α bir monomorfizmadır.

Şimdi bunu gösterelim. Bunun için α'nın monomorfizma olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. $p(x) = x,\ q(x) = a \in R[x;\alpha]$ polinomları için $p(x)q(x) = xa = \alpha(a)x = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $1a = a = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak α bir monomorfizmadır.

Önerme 3.1.7'den her α-katı halka α-Armendarizdir. Fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir. Gerçekten; $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası olmak üzere $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Q}$ ile aşikar genişlemesi olan $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ halkasını ve $\alpha((a, s)) = (a, s/2)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ otomorfizmasını gözönüne alalım. R halkası α-katı değildir fakat α-Armendarizdir. Ayrıca, her inmiş halkanın I_R-Armendariz olduğu açıktır.

Hong ve diğerleri 2006'da, α-Armendariz halkalarla bağlantılı olarak α-katı halkalar için başka bir denk koşulu aşağıdaki önermede vermişlerdir.

Önerme 3.3.2. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş ve α-Armendariz olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. Bu durumda Lemma 3.1.3'den R inmiş ve Önerme 3.1.7'den R α-Armendarizdir. Tersine R halkası inmiş ve α-Armendariz olsun. Herhangi bir $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. $p = ax,\ q = a \in R[x;\alpha]$ polinomları için $pq = (ax)a = a\alpha(a)x = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $a^2 = 0$ dır ve R inmiş olduğundan $a = 0$ dır. Böylece R α-katıdır. □

Önerme 3.3.3. R α-Armendariz bir halka ve $a, b \in R$ olsun.

(i) $ab = 0$ ise, bu durumda herhangi bir pozitif n tam sayısı için $\alpha^n(a)b = 0$ dır.

(ii) Bir pozitif m tam sayısı için $a\alpha^m(b) = 0$ ise, bu durumda $ab = 0$ dır.

(Hong ve diğerleri 2006)

İspat (i) $ab = 0$ olsun. $\alpha(a)b = 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $p = \alpha(a)x$, $q = bx \in R[x;\alpha]$ polinomları için $pq = (\alpha(a)x)(bx) = \alpha(a)\alpha(b)x^2 = \alpha(ab)x^2 = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $\alpha(a)b = 0$ dır.
(ii) Pozitif bir m tam sayısı için $a\alpha^m(b) = 0$ olsun. $p = ax^m$, $q = bx \in R[x;\alpha]$ polinomları için $pq = (ax^m)(bx) = a\alpha^m(b)x^{m+1} = 0$ olup R α-Armendariz olduğundan $ab = 0$ olur. □

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak R α-Armendariz ise, bu durumda $\alpha(1) = 1$ dir. Gerçekten $(1 - \alpha(1))\alpha(1) = 0$ olup Önerme 3.3.3(i)'den $\alpha(1 - \alpha(1))\alpha(1) = 0$ dır. Buradan $(\alpha(1) - \alpha(\alpha(1)))\alpha(1) = 0$ olup $\alpha(1) = \alpha(\alpha(1))$ bulunur. R α-Armendariz iken α monomorfizma olduğundan $\alpha(1) = 1$ elde edilir.

(Hong ve diğerleri 2006)'da, Hong ve diğerlerinin 2003'te ispatladıkları Önerme 3.2.6'yı genelleştirerek aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Önerme 3.3.4. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $a \in R$ ve bir pozitif n tam sayısı için $\alpha^n(a)a = 0$ ise, bu durumda $a = 0$ dır.

(iii) $\langle x^2 \rangle$, $R[x]$'in x^2 tarafından üretilen ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^2 \rangle$ bölüm halkası $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

İspat (i) ⇒ (ii) R α-katı halka ve pozitif bir n tam sayısı için $\alpha^n(a)a = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $a\alpha^n(a) = 0$ dır. R α-katı iken α-Armendariz olduğundan Önerme 3.3.3(ii) gereğince $a^2 = 0$ olur. Tekrar R inmiş olduğundan $a = 0$ bulunur.
(ii) ⇒ (i) İlk olarak R'nin inmiş olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(\alpha(a)a)\alpha(a)a = \alpha^2(a)\alpha(a^2)a = 0$ olup kabulden $\alpha(a)a = 0$ ve buradan $a = 0$

olur. Böylece R inmiştir. Şimdi R'nin α-katı olduğunu gösterelim. Bir $r \in R$ için $r\alpha(r) = 0$ olsun. R inmiş olduğundan $\alpha(r)r = 0$ ve kabulden $r = 0$ elde edilir.

(i) $\Rightarrow$ (iii) R α-katı olsun. $R[x]/\langle x^2\rangle$'de bir $\bar{h}$ elemanını $h = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x]$ olmak üzere $\bar{h} = h + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1x + \langle x^2\rangle = a_0 + a_1\bar{x} \in R[x]/\langle x^2\rangle$ biçiminde yazabiliriz. Burada $\bar{x} = x + \langle x^2\rangle$ dir. Şimdi $R[x]/\langle x^2\rangle$'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğunu gösterelim. $\bar{p} = \bar{f_0} + \bar{f_1}y + \cdots + \bar{f_m}y^m,\ \bar{q} = \bar{g_0} + \bar{g_1}y + \cdots + \bar{g_n}y^n \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\bar{\alpha}]$ için $\bar{p}\bar{q} = 0$ olsun. Her i, j için $\bar{f_i}\bar{g_j} = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Burada herbir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}, a_{i_1}, b_{j_0}, b_{j_1} \in R$ olmak üzere $\bar{x}^2 = 0$ olduğundan $\bar{f_i} = a_{i_0} + a_{i_1}\bar{x},\ \bar{g_j} = b_{j_0} + b_{j_1}\bar{x}$ yazılabilir. R α-katı olduğundan Önerme 3.3.2'den R α-Armendarizdir. Ayrıca $\alpha(1) = 1$ olduğu da açıktır. Bundan dolayı $\bar{x}y = y\bar{x}$ ve herhangi bir $a \in R$ için $a\bar{x} = \bar{x}a$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$h_0 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_0}y^i,\ h_1 = \sum_{i=0}^{m} a_{i_1}y^i,\ k_0 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_0}y^j,\ k_1 = \sum_{j=0}^{n} b_{j_1}y^j \in R[y]$$

olmak üzere $\bar{p} = h_0 + h_1\bar{x},\ \bar{q} = k_0 + k_1\bar{x}$ yazılır. $\bar{p}\bar{q} = 0$ ve $\bar{x}^2 = \bar{0}$ olduğundan

$$\bar{0} = \bar{p}\bar{q} = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x} + h_1k_1\bar{x}^2 = h_0k_0 + (h_0k_1 + h_1k_0)\bar{x}$$

elde edilir. Böylece $R[y;\alpha]$'da $h_0k_0 = 0$ ve $h_0k_1 + h_1k_0 = 0$ bulunur. $R[y;\alpha](\cong R[x;\alpha])$ inmiş olduğundan $k_0h_0 = 0$ ve $0 = k_0(h_0k_1 + h_1k_0)h_1 = (k_0h_1)^2$ olur. Böylece $k_0h_1 = 0$ ve buradan $h_1k_0 = 0$ dır. Sonuç olarak $h_0k_1 = 0$ olur. R α-Armendariz olduğundan her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}b_{j_0} = 0,\ a_{i_0}b_{j_1} = 0,\ a_{i_1}b_{j_0} = 0$ olur. Sonuç olarak $\bar{f_i}\bar{g_j} = 0$ olduğundan $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olsun. Şimdi (ii)'den yararlanarak R'nin α-katı olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. $p = \alpha(a) - \bar{x}y,\ q = a + \bar{x}y \in (R[x]/\langle x^2\rangle)[y;\bar{\alpha}]$ polinomları için $\bar{\alpha}(\bar{1}) = \bar{\alpha}(1 + \langle x^2\rangle) = \alpha(1) + \langle x^2\rangle = 1 + \langle x^2\rangle = \bar{1}$ olduğu kullanılarak $pq = 0$ bulunur. $R[x]/\langle x^2\rangle$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğundan $\bar{x}a = \bar{0}$ olmalıdır. Buradan $\bar{x}a = (x + \langle x^2\rangle)a = xa + \langle x^2\rangle = \langle x^2\rangle = \bar{0}$ olduğundan $a = 0$ olur. Sonuç olarak R α-katıdır. $\square$

Chen ve Tong 2007'de, bir halkanın herhangi endomorfizmasının katı olması için gerek ve yeter koşulu aşağıdaki biçimde karakterize etmiştir.

Lemma 3.3.5. Bir R halkasının herhangi α endomorfizması için aşağıdakiler denktir:

(i) α katı endomorfizmadır.

(ii) $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ ise $a = 0$ dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. R α-katı olduğundan R inmiş halkadır. $(a\alpha(a))^2 = a\alpha(a)a\alpha(a) = a(\alpha(a)a)\alpha(a) = 0$ olduğundan $a\alpha(a) = 0$ dır. Böylece $a = 0$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) İlk olarak R'nin inmiş olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(\alpha(a)a)(\alpha(a)a) = \alpha^2(a)\alpha(a^2)a = 0$ ve buradan $\alpha(a)a = 0$ olup $a = 0$ elde edilir. Böylece R inmiş halkadır. $a\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $(\alpha(a)a)^2 = \alpha(a)(a\alpha(a))a = 0$ olduğundan $\alpha(a)a = 0$ olup kabulden $a = 0$ elde edilir. $\square$

Chen ve Tong 2007'de, katı halkalar için başka bir karakterizasyonu matris halkalarını kullanarak aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 3.3.6. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkasının $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \in S_3(R)$ elemanını (a_1, b_1, c_1, d_1) ile gösterelim.

Buna göre $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S_3(R)$ elemanları için toplama ve çarpma işlemlerini

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2,a_1b_2+b_1a_2,a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2,a_1d_2+d_1a_2)$$

biçiminde gösterebiliriz. Böylece her $p\in S_3(R)[x;\bar{\alpha}]$ elemanını $p_i\in R[x;\alpha]$ olmak üzere $p=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ biçiminde yazabiliriz. Buna göre $p=(p_0,p_1,p_2,p_3), q=(q_0,q_1,q_2,q_3)\in S_3(R)[x;\bar{\alpha}]$ için $pq=0$ olsun. Bu durumda

$$p_0q_0=0 \tag{3.10}$$

$$p_0q_1+p_1q_0=0 \tag{3.11}$$

$$p_0q_2+p_1q_3+p_2q_0=0 \tag{3.12}$$

$$p_0q_3+p_3q_0=0 \tag{3.13}$$

denklemlerini elde ederiz. R α-katı olduğundan Önerme 3.2.3'den $R[x;\alpha]$ inmiştir. Bu durumda (3.10) denkleminden $q_0p_0=0$ olur. (3.11) denklemi sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_1p_0=0$ ve $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p_0q_1=0$ elde edilir. Bu sonuç (3.11) denkleminde yerine yazılırsa $p_1q_0=0$ olur. (3.13) denklemi sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_3p_0=0$ ve $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p_0q_3=0$ elde edilir. Bu sonuç (3.13) denkleminde yerine yazılırsa $p_3q_0=0$ bulunur. (3.12) denklemi sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_2=0$ olur ve sonuç (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$p_1q_3+p_2q_0=0 \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) denklemi sağdan p_1 ile çarpılırsa $p_1q_3=0$ ve sonuç (3.14) denkleminde yerine yazılırsa $p_2q_0=0$ bulunur. Böylece

$$p_0=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i, p_1=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i, p_2=\sum_{i=0}^{m}c_ix^i, p_3=\sum_{i=0}^{m}d_ix^i$$

$$q_0=\sum_{j=0}^{n}a'_jx^j, q_1=\sum_{j=0}^{n}b'_jx^j, p_2=\sum_{j=0}^{n}c'_jx^j, p_3=\sum_{j=0}^{n}d'_jx^j$$

olmak üzere

$$p=\sum_{i=0}^{m}\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}x^i, q=\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix}x^j$$

olsun. R α-katı olduğundan Sonuç 3.2.4'den R α-skew Armendarizdir. Böylece her i,j için $a_i\alpha^i(a'_j)=0, b_i\alpha^i(b'_j)=0, c_i\alpha^i(c'_j)=0, d_i\alpha^i(d'_j)=0$ bulunur. Sonuç olarak her i,j için

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}\bar{\alpha}^i\left(\begin{pmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ 0 & a'_j & d'_j \\ 0 & 0 & a'_j \end{pmatrix}\right)=O$$

olduğundan $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Tersine $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. Öncelikle α'nın monomorfizma olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki α monomorfizma olmasın. Bu durumda $\alpha(a)=0$ olacak şekilde $0\neq a\in R$ vardır. Bu durumda $S_3(R)[x;\bar{\alpha}]$ da

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}x\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}x\right]=O$$

elde edilir. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq O$ olur ki bu $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. O halde α bir monomorfizmadır. Şimdi R halkasının α-katı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Bu durumda Lemma 3.3.5(ii)'den $\alpha(a)a=0$ olacak şekilde bir $0\neq a\in R$ vardır. $a\neq 0$ ve α bir monomorfizma olduğundan $\alpha(a)\neq 0$ dır. Bu durumda $S_3(R)[x;\bar{\alpha}]$'da

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(a) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x\right]\left[\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x\right]=O$$

dır. Fakat $\begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(a) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha(a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ olur ki bu $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. Sonuç olarak R α-katıdır. $\square$

Chen ve Tong 2007'de, α, R'nin birim endomorfizması olarak alınırsa, Kim ve Lee'nin 2000'de ispatladıkları önermenin tersinin de doğru olduğunu yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki biçimde vermişlerdir.

Sonuç 3.3.7. Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkasının Armendariz olmasıdır.

Chen ve Tong 2007'de, katı halkalar için benzer bir karakterizasyonu halkanın aşikar genişlemesini kullanarak aşağıdaki teoremde göstermişlerdir.

Teorem 3.3.8. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul R'nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat R α-katı olsun. $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olduğunu gösterelim. $p = \sum_{i=0}^{m}(a_i, b_i)x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n}(c_j, d_j)x^j \in T(R,R)[x;\bar{\alpha}]$ için $pq = 0$ olsun. $T(R,R)[x;\bar{\alpha}] \cong T(R[x;\alpha], R[x;\alpha])$ olduğundan

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \; p_1 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \; q_0 = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j, \; q_1 = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

olmak üzere $p = (p_0, p_1)$, $q = (q_0, q_1)$ yazabiliriz. $0 = pq = (p_0q_0, p_0q_1 + p_1q_0)$ olduğundan $R[x;\alpha]$'da $p_0q_0 = 0$ ve $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ bulunur. R α-katı olduğundan Önerme 3.2.3'den

$R[x;\alpha]$ inmiştir. Bu durumda $q_0p_0 = 0$ olur. $p_0q_1 + p_1q_0 = 0$ eşitliği sağdan p_0 ile çarpılırsa $p_0q_1p_0 = 0$ olup buradan $p_0q_1 = 0$ ve $p_1q_0 = 0$ elde edilir. Böylece R α-skew Armendariz olduğundan her bir i, j için $a_i\alpha^i(c_j) = 0$, $a_i\alpha^i(d_j) = 0$, $b_i\alpha^i(c_j) = 0$ olup $(a_i, b_i)\bar{\alpha}^i((c_j, d_j)) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $T(R, R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Tersine $T(R, R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. Öncelikle α'nın monomorfizma olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki α monomorfizma olmasın. Bu durumda $\alpha(a) = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. $T(R, R)[x; \bar{\alpha}]$'da

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -a \\ 0 & -a \end{pmatrix} x\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} x\right] = O$$

dır. Fakat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \neq O$$

olması $T(R, R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup α bir monomorfizmadır. Şimdi R'nin α-katı olduğunu ispatlayalım. Kabul edelim ki R α-katı olmasın. Bu durumda $\alpha(a)a = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. α bir monomorfizma olduğundan $\alpha(a) \neq 0$ dır. $T(R, R)[x; \bar{\alpha}]$'da

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x\right]\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x\right] = O$$

dır. Fakat

$$\begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olur ki bu $T(R, R)$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması ile çelişir. O halde R α-katıdır. $\square$

Chen ve Tong 2007'de; Bölüm 2.3'de belirtilen $A_n(R)$, $A_n(R) + RE_{1k}$ ve $V_n(R)$ gibi $M_n(R)$'nin bazı özel tipdeki alt halkalarını kullanılarak bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşulları aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Teorem 3.3.9. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $n = 2k+1 \geq 3$ için $A_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(iii) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(iv) $n \geq 2$ için $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

Lemma 3.3.10. R ile S iki halka ve $\sigma : R \to S$ bir halka izomorfizması olmak üzere R α-skew Armendariz ise, bu durumda S $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-skew Armendarizdir (Chen ve Tong 2007).

Hong ve diğerleri 2003'te; α, R'nin $\alpha(1) = 1$ koşulunu sağlayan bir monomorfizması iken R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x]/\langle x^2 \rangle$'nin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması gerektiğini ispatlamışlardır. Chen ve Tong 2007'de aşağıdaki teoremi ispatlayarak bu sonucu genelleştirmişlerdir.

Teorem 3.3.11. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 2$ ve $\langle x^n \rangle$, $R[x]$'in x^n tarafından üretilen ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^n \rangle$'in $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olsun. $r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1} V^{n-1} \in V_n(R) = RI_n + RV + \cdots + RV^{n-1}$ için $\theta(r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1} V^{n-1}) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n \rangle$ ile tanımlı $\theta : V_n(R) \to R[x]/\langle x^n \rangle$ dönüşümü bir halka izomorfizmasıdır. $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendariz ve $\theta^{-1} : R[x]/\langle x^n \rangle \cong V_n(R)$ olduğundan Lemma 3.3.10 gereğince $V_n(R)$ $\theta^{-1}\bar{\alpha}\theta$-skew Armendarizdir. $\theta^{-1}\bar{\alpha}\theta(r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1} V^{n-1}) = \theta^{-1}\bar{\alpha}(r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n \rangle) = \theta^{-1}(\alpha(r_0) + \alpha(r_1) x + \cdots + \alpha(r_{n-1}) x^{n-1} + \langle x^n \rangle) = \alpha(r_0) I_n + \alpha(r_1) V + \cdots + \alpha(r_{n-1}) V^{n-1} = \bar{\alpha}(r_0 I_n + r_1 V + \cdots + r_{n-1} V^{n-1})$ olduğundan $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

Böylece Teorem 3.3.9'dan R α-katıdır.

Tersine R α-katı olsun. Teorem 3.3.9'dan $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$- skew Armendarizdir. Lemma 3.3.10'dan $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\theta\bar{\alpha}\theta^{-1}$- skew Armendarizdir. Böylece gerek koşulun ispatına benzer şekilde $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$- skew Armendariz bulunur. □

Chen ve Tong 2007'de; bir R halkasının α-katı olması için şu ana kadar bilinen denk koşullarla kendi belirledikleri karakterizasyonları birleştirerek aşağıdaki sonucu ifade etmişlerdir.

Teorem 3.3.12. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ iken $a = 0$ dır.

(iii) $R[x;\alpha]$ inmiş halkadır.

(iv) R inmiş halka ve R'nin her minimal P asal ideali için $\alpha^{-1}(P) \subseteq P$ dir.

(v) R inmiş halka, α monomorfizma ve R'nin her minimal P asal ideali için $\alpha^{-1}(P) \subseteq P$ dir.

(vi) R inmiş halka, α monomorfizma ve R'deki her bir sıfırlayan α tarafından korunur.

(vii) R inmiş α-skew Armendariz halka ve α monomorfizmadır.

(viii) R inmiş halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ için $f(x)g(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a_i b_j = 0$ olmasıdır.

(ix) $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(x) W $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(xi) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(xii) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(xiii) $n \geq 2$ için $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(xiv) $n \geq 2$ için $R[x]/\langle x^n \rangle$ $\bar{\alpha}$-skew Armendarizdir.

(xv) R α-skew Armendariz ve $R[x; \alpha]$'da $f(x)g(x) = 0$ ise, $f(x)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha]g(x) = 0$ dır.

4 HALKALARIN KATI OLMASI İÇİN DENK KOŞULLAR

Tezin orjinal kısmını oluşturan bu bölümde katı halkalar ve genelleştirilmiş Armendariz halkalar arasındaki ilişkiler incelenecek ve bir halkanın katı olması için yeni karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca Armendariz halkalarla ilgili bilinen sonuçlar genelleştirilecektir.

4.1 Katı Halkalar ve Genelleştirilmiş Armendariz Halkalar

(Rege ve Chhawchharia 1997)'de; I_R, R'nin birim endomorfizması olmak üzere $n \geq 2$ için herhangi bir R halkası üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrislerin $M_n(R)$ halkasının I_R-Armendariz olmadığını bir örnekle göstermişlerdir. Ayrıca (Hong ve diğerleri 2003)'te; 2×2 tipindeki tüm (ve aynı zamanda üst üçgensel) matris halkalarının α-Armendariz olmadığını göstermişlerdir. Diğer taraftan (Hong ve diğerleri 2006)'da; R halkası α-katı iken

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğunu ispatlamışlardır. İlk olarak aşağıdaki önermede; $S_3(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olması durumunda R'nin α-katı olduğu ispatlanacak ve böylece (Hong ve diğerleri 2006)'nın genellemesi elde edilecektir.

Teorem 4.1.1. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $S_3(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in R\right\}$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iii) R'nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesi $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) (Hong ve diğerleri 2006).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olsun. $T(R,R)$, $S_3(R)$'nin bir alt halkası olan

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in R\right\}$$

halkasına izomorftur. Ayrıca α-Armendariz bir halkanın alt halkası da α-Armendariz olduğundan $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-Armendariz olsun. R halkasının α-katı olmadığını kabul edelim. Bu durumda Lemma 3.3.5(ii)'den $\alpha(a)a=0$ olacak şekilde bir $0\neq a\in R$ vardır.
$p(x)=\begin{pmatrix}\alpha(a) & 0\\ 0 & \alpha(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x$, $q(x)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x\in T(R,R)[x;\bar{\alpha}]$ için $p(x)q(x)=O$ dır. Fakat $\begin{pmatrix}\alpha(a) & 0\\ 0 & \alpha(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq O$ olup bu $T(R,R)$'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olması ile çelişir. O halde R α-katıdır. □

Önerme 4.1.1'de α, R'nin birim endomorfizması olarak alınırsa (Kim ve Lee 2000) ve (Lee ve Wong 2005)'deki sonuçlarının genelleştirilmiş hali olan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R inmiş bir halkadır.

(ii) $S_3(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in R\right\}$ Armendarizdir.

(iii) R'nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesi Armendarizdir.

R halkası α-katı iken $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğu bilinmektedir. Bu gerçeği göz önünde bulundurarak; $n \geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olup olmadığı merak edilebilir. Fakat; Hong ve diğerleri 2003'te, R halkası α-katı olsa bile $n \geq 4$ için

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$$

halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olmadığını göstermişlerdir. Bununla beraber, Armendariz olmayan halkaların Armendariz olan alt halkaları olduğu gibi; α-Armendariz olmayan halkaların da α-Armendariz olan alt halkaları olabilir. Bu gerçekten hareketle; aşağıda $n \geq 4$ için $S_n(R)$'in $\bar{\alpha}$-Armendariz olan bazı alt halkalarını belirleyeceğiz. Bu sonuç aynı zamanda; Tanım 2.3.3'te verilen bazı matris halkaları yardımıyla bir halkanın α-katı olmasının karakterizasyonlarını verecektir. Teoreme geçmeden önce ispat için gerekli olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.3. *R inmiş bir halka olmak üzere her $n = 2k+1 \geq 3$ için $S = A_n(R)$ ve $n = 2k \geq 4$ için $S = A_n(R) + RE_{1k}$ olsun. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in S$ için $AB = 0$ ise, bu durumda $[AB]_{ij} = 0$ dır* (Chen ve Tong 2007).

Lemma 4.1.3'te; $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_n(R)$ için $[AB]_{ij} = O$ olması $l = 1, \ldots, n$ için $a_{il}b_{lj} = 0$ anlamındadır (Lee ve Zhou 2004).

Teorem 4.1.4. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iii) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iv) $n \geq 2$ için $V_n(R) = RI_n + RV + RV^2 + \cdots + RV^{n-1}$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) R α-katı olsun. $n = 2k + 1 \geq 3$ için $S = A_n(R)$ ve $n = 2k \geq 4$ için $S = A_n(R) + RE_{1k}$ olsun. Şimdi S'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olduğunu gösterelim. $P(x) = C_0 + C_1x + \cdots + C_ux^u$ ve $Q(x) = D_0 + D_1x + \cdots + D_vx^v \in S[x; \bar{\alpha}]$ polinomları için $P(x)Q(x) = O$ olsun. İddia ediyoruz ki her $0 \leq i \leq u$ ve $0 \leq j \leq v$ için $C_iD_j = O$ dır. $0 \leq i \leq u$ ve $0 \leq j \leq v$ için $c_{st}^{(i)}$ ve $d_{st}^{(j)}$ sırasıyla C_i ve D_j matrislerinin (s, t). bileşenleri olmak üzere $p_{st}(x) = c_{st}^{(0)} + c_{st}^{(1)}x + \cdots + c_{st}^{(u)}x^u$ ve $q_{st}(x) = d_{st}^{(0)} + d_{st}^{(1)}x + \cdots + d_{st}^{(v)}x^v$ olsun. Bu durumda $1 \leq s, t \leq n$ için $P(x) = (p_{st}(x))$ ve $Q(x) = (q_{st}(x))$ yazabiliriz. Böylece S'de $(p_{st}(x))(q_{st}(x)) = 0$ olur. R α-katı olduğundan Önerme 3.1.6 gereğince $R[x; \alpha]$ inmiştir. Lemma 4.1.3'ten $1 \leq s, t \leq n$ için $((p_{st}(x))(q_{st}(x)))_{st} = O$ olur. Bundan dolayı $1 \leq l \leq n$ için $R[x; \alpha]$ da $p_{sl}(x)q_{lt}(x) = O$ dır. Yani,

$$(c_{sl}^{(0)} + c_{sl}^{(1)}x + \cdots + c_{sl}^{(u)}x^u)(d_{lt}^{(0)} + d_{lt}^{(1)}x + \cdots + d_{lt}^{(v)}x^v) = O$$

dır. Diğer taraftan R α-katı olduğundan Önerme 3.3.2 gereğince R α-Armendarizdir. Böylece $1 \leq s, t, l \leq n$, $0 \leq i \leq u$ ve $0 \leq j \leq v$ için $c_{sl}^{(i)}d_{lt}^{(j)} = 0$ olup $C_iD_j = (c_{st}^{(i)})(d_{st}^{(j)}) = O$ bulunur. Sonuç olarak S $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(i) $\Rightarrow$ (iv) R α-katı olsun. $n = 2, 3$ için Teorem 4.1.1'den $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir. $n \geq 4$ için $V_n(R)$, $A_n(R)$ veya $A_n(R) + RE_{1k}$'nın $\alpha(V_n(R)) \subseteq V_n(R)$ koşulunu sağlayan bir alt halkası olduğundan $V_n(R)$ $\bar{\alpha}$-Armendarizdir.

(iv) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) ve (ii) $\Rightarrow$ (i) gerektirmeleri Teorem 4.1.1'ten açıktır. $\square$

Teorem 4.1.4'te α, R'nin birim endomorfizması olarak alınırsa aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.5. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) R inmiş halkadır.

(ii) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ Armendariz.

(iii) $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1k}$ Armendariz.

(iv) $n \geq 2$ için $V_n(R) = RI_n + RV + RV^2 + \cdots + RV^{n-1}$ Armendariz.

$\rho(a_0 I_n + a_1 V + \cdots + a_{n-1}V^{n-1}) = a_0 + a_x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n \rangle$ şeklinde tanımlanan $\rho : V_n(R) \to R[x]/\langle x^n \rangle$ dönüşümü halka izomorfizmasıdır. Böylece Önerme 3.3.4'ün genellemesi olan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.6. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 2$ için $\langle x^n \rangle$, x^n tarafından üretilen $R[x]$'in ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^n \rangle$ bölüm halkasının $\bar{\alpha}$-Armendariz olmasıdır.

Uyarı 4.1.7. α-Armendariz bir halkanın α endomorfizması birimi koruduğundan, Lee ve Zhou'nun 2004'te verdikleri örneğe benzer olarak, R halkası α-Armendariz olsa bile $n = 2k \geq 2$ için $B_n^e(R)$, $n = 2k+1 \geq 3$ için $B_n^o(R)$ ve $n \geq 2$ için $B_n(R)$'nin $\bar{\alpha}$-Armendariz olmadığı kolayca görülür.

Aşağıdaki örnekte; Armendariz halkaların α-skew Armendariz olması gerekmediği görülmektedir.

Örnek 4.1.8. $\mathbb{Z}_2$, tam sayıların 2 modülüne göre halkası olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun. R değişmeli inmiş bir halka olduğundan Armendarizdir. $\alpha : R \to R$, $\alpha((a,b)) = (b,a)$ ile tanımlanan endomorfizma olsun. (Hong ve diğerleri 2003)'ten R α-skew Armendariz değildir. Ayrıca (Hong ve diğerleri 2006)'dan R α-Armendariz de değildir.

Fakat yukarıdaki örnekle ilgili olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 4.1.9. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $R[x;\alpha]$ skew polinom halkası Armendariz ise, bu durumda R α-skew Armendarizdir.

İspat $R[x;\alpha]$ Armendariz olsun. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $(R[x;\alpha])[y]$ de $f(y) = a_0 + (a_1x)y + \cdots + (a_mx^m)y^m$ ve $g(y) = b_0 + (b_1x)y + \cdots + (b_nx^n)y^n$ polinomlarını gözönüne alalım. y ile x değişmeli ve $p(x)q(x) = 0$ olduğundan $f(y)g(y) = 0$ bulunur. $R[x;\alpha]$ Armendariz olduğundan $a_ix^ib_jx^j = 0$ olup buradan her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ dır. Böylece R α-skew Armendarizdir. □

Hong ve diğerlerinin 2003'te elde ettikleri sonuçları, Önerme 4.1.9'un bir sonucu olarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

Sonuç 4.1.10. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R α-katı ise, bu durumda R α-skew Armendarizdir.

İspat R α-katı olsun. Bu durumda Önerme 3.2.3'den $R[x;\alpha]$ inmiş halka ve böylece Armendarizdir. Sonuç olarak Önerme 4.1.9'dan R α-skew Armendarizdir. □

α-Armendariz halkaların α-skew Armendariz olduğu bilinmektedir. Fakat Önerme 4.1.9' daki "α-skew Armendariz" ifadesi yerine "α-Armendariz" ifadesinin getirilemeyeceği aşağıdaki örnekte görülür.

Örnek 4.1.11. $\mathbb{Z}_2$, tam sayıların 2 modülüne göre halkası olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2[x]$ ve $\alpha : R \longrightarrow R$, R'nin $\alpha(f(x)) = f(0)$ biçiminde tanımlanan endomorfizması olsun. (Hong ve diğerleri 2003)'ten R inmiş α-skew Armendariz bir halkadır fakat (Hong ve diğerleri

2006)'dan R α-Armendariz değildir. Şimdi $S = R[y;\alpha]$'nın Armendariz olduğunu gösterelim. $f(T) = f_0 + f_1T + \cdots + f_mT^m$, $g(T) = g_0 + g_1T + \cdots + g_nT^n \in S[T]$ için $f(T)g(T) = 0$ olsun. Her bir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $f_{i_s}, g_{j_t} \in \mathbb{Z}_2[x]$ olmak üzere $f_i = \sum_{s=0}^{u_i} f_{i_s}(x)y^s$ ve $g_j = \sum_{t=0}^{v_j} g_{j_t}(x)y^t$ olsun. Genelliği bozmaksızın her $0 \leq s \leq u_i$, $0 \leq t \leq v_j$, $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $\mathbb{Z}_2[x]$ de $f_{i_s}(x) \neq 0$ ve $g_{j_t}(x) \neq 0$ kabul edebiliriz. Bu durumda aşağıdaki denklemler sistemine sahibiz:

$$f_0g_0 = 0 \tag{4.1}$$

$$f_0g_1 + f_1g_0 = 0 \tag{4.2}$$

$$\vdots$$

$$f_0g_k + f_1g_{k-1} + \cdots + f_{k-1}g_1 + f_kg_0 = 0 \tag{4.3}$$

$$f_0g_{k+1} + f_1g_k + \cdots + f_kg_1 + f_{k+1}g_0 = 0 \tag{4.4}$$

$$\vdots$$

$$f_mg_n = 0 \tag{4.5}$$

İddia ediyoruz ki; $f_{0_0}(x) = f_{1_0}(x) = \cdots = f_{m_0}(x) = 0$ ve $0 \leq t \leq v_j$ ve $0 \leq j \leq n$ için her bir $g_{j_t}(x)$ sabit terime sahip değildir. İspatı $i + j$ üzerinde tümevarım uygulayarak yapalım. R α-skew Armendariz ve (4.1) denkleminden her $0 \leq s \leq u_0$ ve $0 \leq t \leq v_0$ için $f_{0_s}(x)\alpha^s(g_{0_t}(x)) = 0$ dır. Bundan dolayı $0 \leq t \leq v_0$ için $f_{0_0}(x)$ ve $g_{0_t}(0) = 0$ dır. Böylece $0 \leq t \leq v_0$ için her bir $g_{0_t}(x)$ sabit terime sahip değildir. Böylece $i + j = 0$ için iddia doğrudur. Şimdi $i + j \leq k - 1$ için iddiamızın doğru olduğunu kabul edelim. Tümevarım hipotezinden ve (4.3) denkleminden $0 = f_0g_k + f_kg_0 = (f_{0_1}(x)y + f_{0_2}(x)y^2 + \cdots + f_{0_{u_0}}(x)y^{u_0})(g_{k_0}(x) + g_{k_1}(x)y + \cdots + g_{k_{v_k}}(x)y^{v_k}) + f_{k_0}(x)(g_{0_0}(x) + g_{0_1}(x)y + \cdots + g_{0_{v_0}}(x)y^{v_0}) = f_{k_0}(x)g_{0_0}(x) + [f_{k_0}(x)g_{0_1}(x) + f_{0_1}(x)\alpha(g_{k_0}(x))]y + [f_{k_0}(x)g_{0_2}(x) + f_{0_1}(x)\alpha(g_{k_1}(x)) + f_{0_2}(x)\alpha^2(g_{k_0}(x))]y^2 + \cdots + f_{0_{u_0}}(x)\alpha^{u_0}(g_{k_{v_k}}(x))y^{u_0+v_k}$ elde edilir. Bu durumda $f_{k_0}(x) = 0$ dır ve böylece aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$f_{0_1}(x)\alpha(g_{k_0}(x)) = 0 \tag{4.6}$$

$$f_{0_1}(x)\alpha(g_{k_1}(x)) + f_{0_2}(x)\alpha^2(g_{k_0}(x)) = 0 \tag{4.7}$$

$$\vdots$$

$$f_{0_1}(x)\alpha(g_{k_{i-1}}(x)) + f_{0_2}(x)\alpha^2(g_{k_{i-2}}(x)) + \cdots + f_{0_i}(x)\alpha^i(g_{k_0}(x)) = 0 \tag{4.8}$$

$$\vdots$$

$$f_{0_{u_0}}(x)\alpha^{u_0}(g_{k_{v_k}}(x)) = 0 \tag{4.9}$$

Böylece, $g_{k_0}(0) = g_{k_1}(0) = \cdots = g_{k_{v_k}}(0) = 0$ ve her $0 \leq t \leq v_k$ için $g_{k_t}(x)$ sabit terime sahip değildir. Böylece $f_i = \sum_{s=1}^{u_i} f_{i_s}(x)y^s$, $g_j = \sum_{t=0}^{v_j} g_{j_t}(x)y^t$ ve $0 \leq i \leq m$, $0 \leq t \leq v_j$ ve $0 \leq j \leq n$ için her bir g_{j_t} sabit terime sahip değildir. Bundan dolayı her i, j için $f_i g_j = 0$ dir. Sonuç olarak $S = R[y;\alpha] = (\mathbb{Z}_2[x])[y;\alpha]$ Armendarizdir. □

4.2 Katı Halkaların Diğer Karakterizasyonları

Aşağıdaki önermeyle, (Chen ve Tong 2007)'de elde edilen sonuçları genelleştirmiş olduk.

Önerme 4.2.1. R ve S iki halka, $\sigma : R \longrightarrow S$ bir halka izomorfizması ve α, R nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda;

(i) R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul S'nin $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-katı olmasıdır.

(ii) R'nin α-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul S'nin $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-Armendariz olmasıdır.

(iii) R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul S'nin $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-skew Armendariz olmasıdır.

İspat (i) $a' \in S$ için σ örten olduğundan $\sigma(a) = a'$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. Bundan dolayı; $a\alpha(a) = 0 \Leftrightarrow \sigma(a)(\sigma\alpha\sigma^{-1})\sigma(a) = 0 \Leftrightarrow a'(\sigma\alpha\sigma^{-1})(a') = 0$ dır. O halde R α-katıdır $\Leftrightarrow$ S $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-katıdır.

(ii) ve (iii) $p'(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i' x^i$, $q'(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j' x^j \in S[x; \sigma\alpha\sigma^{-1}]$ olsun. σ örten olduğundan her i, j için $\sigma(a_i) = a_i'$ ve $\sigma(b_j) = b_j'$ olacak şekilde a_i', b_j' vardır. Bu durumda $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x; \alpha]$ olur. Böylece $R[x; \alpha]$'da $p(x)q(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ her bir $0 \leq k \leq m + n$ için $\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) = 0 \Leftrightarrow$ her bir $0 \leq k \leq m + n$ için $\sum_{i+j=k} \sigma(a_i \alpha^i(b_j)) = 0 \Leftrightarrow$ herhangi pozitif t tam sayısı için $(\sigma\alpha\sigma^{-1})^t = \sigma\alpha^t\sigma^{-1}$ olduğundan her bir $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} \sigma(a_i)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i \sigma(b_j) = 0 \Leftrightarrow$ her bir $0 \leq k \leq m+n$ için $\sum_{i+j=k} a_i'(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(b_j') = 0 \Leftrightarrow S[x; \sigma\alpha\sigma^{-1}]$'da $p'(x)q'(x) = 0$. Bu durumda her i, j için $a_i b_j = 0 \Leftrightarrow a_i' b_j' = 0$ olur. Diğer taraftan $a_i\alpha^i(b_j) = 0 \Leftrightarrow \sigma(a_i)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i\sigma(b_j) = 0 \Leftrightarrow$ $a_i'(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(b_j') = 0$ bulunur. $\square$

R'nin bir α endomorfizmasının, $R[x]$ polinom halkasının bir endomorfizmasına ve $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının bir endomorfizmasına genişletilebildiği gözönüne alınarak; R'nin α-katı olmasının diğer bir karakterizasyonu $R[x]$ ve $R[x; x^{-1}]$ kullanılarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.2.2. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $R[x]$ $\bar{\alpha}$-katı halkadır.

(iii) $R[x; x^{-1}]$ $\bar{\alpha}$-katı halkadır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R α-katı olsun. $R[x]$'in $\bar{\alpha}$-katı olmadığını farzedelim. Bu durumda $f(x)\bar{\alpha}(f(x)) = 0$ olacak şekilde $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ vardır. $0 \leq k \leq n$ için $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ ve $a_k \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 =$

$f(x)\bar{\alpha}(f(x)) = (a_k x^k + \cdots + a_n x^n)(\alpha(a_k)x^k + \cdots + \alpha(a_n x^n))$ olduğundan $a_k\alpha(a_k) = 0$ olur. R α-katı olduğundan $a_k = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $R[x]$ $\bar{\alpha}$-katıdır.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $R[x]$ $\bar{\alpha}$-katı olsun. Şimdi $R[x; x^{-1}]$'in $\bar{\alpha}$-katı olduğunu gösterelim. $f(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $f(x)\bar{\alpha}(f(x)) = 0$ olsun. $f_1(x) = f(x)x^n$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu durumda $f_1(x)\bar{\alpha}(f_1(x)) = 0$ olur. $R[x]$ $\bar{\alpha}$-katı olduğundan $f_1(x) = 0$ olup buradan $f(x) = 0$ bulunur. Böylece $R[x; x^{-1}]$ $\bar{\alpha}$-katıdır.
(iii) $\Rightarrow$ (i) $R[x; x^{-1}]$ $\bar{\alpha}$-katı olsun. R, $R[x; x^{-1}]$'in alt halkası olduğundan R'nin α-katı olduğu açıktır. $\square$

Her α-Armendariz halkanın α-skew Armendariz olduğu gerçeğini gözönüne alarak; Teorem 4.2.2'yi ve (Chen ve Tong 2005)'te ispatlanan Teorem 3.2.13'ü kullanarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 4.2.3.

(i) R inmiş bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R'nin α-Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in $\bar{\alpha}$-Armendariz olmasıdır.

(ii) R inmiş bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olmak üzere R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olmasıdır.

Sonuç 4.2.3'le ilgili olarak inmiş α-skew Armendariz olan fakat α-Armendariz olmayan halkaların var olduğunu Örnek 4.1.11'de göstermiştik.

Her bir $\gamma \in \Gamma$ için α_γ, R_γ halkasının bir endomorfizması olsun. $\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$, R_γ'ların çarpımı olmak üzere $\bar{\alpha}((a_\gamma)) = (\alpha_\gamma(a_\gamma))$ ile tanımlı $\bar{\alpha} : \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma \to \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ dönüşümü $\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$'nın bir endomorfizması olur. $\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$'nın $\bar{\alpha}$-katı olması için gerek ve yeter koşul her bir $\gamma \in \Gamma$ için R_γ'nın α_γ-katı olmasıdır.

R halkasının bir α endomorfizması ve bir I ideali için $\alpha(I) \subseteq I$ oluyorsa, bu durumda I ideali bir *α-ideal* olarak adlandırılır. I, R'nin bir α-ideali olmak üzere $a \in R$ için $\bar{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ biçiminde tanımlanan $\bar{\alpha} : R/I \to R/I$ dönüşümü R/I bölüm halkasının bir endomorfizması olur. Genelde α-katı bir halkanın homomorfik görüntüsü $\bar{\alpha}$-katı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekte; R'nin sıfırdan farklı bir I α-ideali ve bir α otomorfizması için R α-katı olmasa bile R/I bölüm halkasının $\bar{\alpha}$-katı olabileceği gösterilmiştir.

Örnek 4.2.4. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını ve R'nin

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı α endomorfizmasını gözönüne alalım. (Hong ve diğerleri 2006)'dan R α-Armendariz değildir. Fakat R'nin $\alpha(I) \subseteq I$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $I = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ideali için R/I $\bar{\alpha}$-katıdır.

α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere R'nin $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda b regüler ve $a, b \in R$ olmak üzere herhangi $ab^{-1} \in Q(R)$ için $\bar{\alpha}(ab^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)^{-1}$ ile tanımlı $\bar{\alpha} : Q(R) \to Q(R)$ dönüşümü $Q(R)$'nin bir endomorfizmasıdır. R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$'nin $\bar{\alpha}$-katı olmasıdır.

R, değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. R'nin S ile *Dorroh genişlemesi* $r_1, r_2 \in R$ ve $s_1, s_2 \in S$ için $(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ ve $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$ işlemleriyle birlikte $D = R \times S$ halkasıdır. α, R'nin bir endomorfizması ve D, R'nin S ile Dorroh genişlemesi olmak üzere $\bar{\alpha}((r, s)) = (\alpha(r), s)$ ile tanımlı

$\bar{\alpha} : D \to D$ dönüşümü bir S-cebir homomorfizmasıdır.

Aşağıdaki önerme ile farklı α-katı halka örnekleri verilmiştir.

Önerme 4.2.5. α, R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda;

(i) R'nin α-katı halka olması için gerek ve yeter koşul $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1-e)R$'nin α-katı olmasıdır.

(ii) R α-katı ve S inmiş bir halka ise, bu durumda R'nin S ile D Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$-katıdır.

İspat (i) α-katı halkaların alt halkaları da α-katı olduğundan yeter koşulu ispatlamak yeterlidir. eR ve $(1-e)R$ α-katı olmak üzere $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda $ea\alpha(ea) = 0$ ve $0 = (1-e)a\alpha((1-e)a)$ olup kabulden $ea = 0$ ve $(1-e)a = 0$ olur ki, buradan $a = 0$ bulunur. Böylece R α-katıdır.
(ii) R α-katı ve S inmiş bir halka olmak üzere $(r,s) \in D$ için $(r,s)\bar{\alpha}((r,s)) = 0$ olsun. Bu durumda $r\alpha(r) + s\alpha(r) + sr = 0$ ve $s^2 = 0$ dır. S inmiş halka olduğundan $s = 0$ olur. Buradan $r\alpha(r) = 0$ olup R α-katı olduğundan $r = 0$ bulunur. Sonuç olarak $(r,s) = 0$ olduğundan D $\bar{\alpha}$-katıdır.

α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere R yarıasal bir halka ise $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının yarıasal olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz.

Örnek 4.2.6. F bir cisim ve $i \in \mathbb{Z}$ için $F_i = F$ olmak üzere R, $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i$ ve $1_{\prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i}$ tarafından üretilen $\prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i$'nin bir F-alt cebiri olsun. $\alpha : R \longrightarrow R$ otomorfizması, $\alpha((a_i)) = (a_{i+1})$ ile tanımlansın. Bu durumda

$$R = \{(a_i) \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} F_i \mid a_i \quad \text{hemen} \quad \text{hemen} \quad \text{sabit}\}$$

halkası inmiş ve von Neumann regulerdir fakat (Kamal 1994)'den $R[x;\alpha]$ yarıasal değildir.

Şimdi yarıasal halkaların bir karakterizasyonunu ifade eden aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.2.7. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R yarıasal halkadır.

(ii) $a, b \in R$ için, $aRb = 0$ ise $aR \cap Rb = 0$ dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R yarıasal halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. $c \in aR \cap Rb$ alalım. Bu durumda $c = ar = sb$ olacak şekilde $r, s \in R$ vardır. Bundan dolayı $cRc = (ar)R(sb) \subseteq aRb = 0$ ve R yarıasal olduğundan $c = 0$ olur. Sonuç olarak $aR \cap Rb = 0$ dır.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. □

Son olarak; bir halkanın skew polinom halkasını kullanarak bu halkanın katı olması için yeni bir karakterizasyon verelim.

Teorem 4.2.8. α, R halkasının bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R α-katı halkadır.

(ii) $p(x), q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ iken $p(x)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha]q(x) = 0$ dır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) R α-katı olsun. Önerme 3.2.3'den $R[x; \alpha]$ inmiş halka böylece yarıasal ve yarıdeğişmelidir. $p(x), q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda $p(x)R[x; \alpha]q(x) = 0$ olup Lemma 4.2.7'den $p(x)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha]q(x) = 0$ dır.
(ii) $\Rightarrow$ (i) $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. $p(x) = ax = q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = a\alpha(a)x^2 = 0$ olup kabulden $(ax)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha](ax) = 0$ dır. O halde $ax = 0$ olup buradan $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R α-katıdır.

Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.8'dan elde edilen aşağıdaki sonucu ifade edelim.

Sonuç 4.2.9. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) R inmiş halkadır.

(ii) $R[x]$ inmiş halkadır.

(iii) $a, b \in R$ için $ab = 0$ ise, bu durumda $aR \cap Rb = 0$ dır.

(iv) $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ ise, bu durumda $f(x)R[x] \cap R[x]g(x) = 0$ dır.

Uyarı 4.2.10. Teorem 4.1.2 ve Önerme 4.1.4'e paralel olarak, (Chen ve Tong 2007)'de α-katı halkalar ve $\bar{\alpha}$-skew Armendariz halkalar arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. Bununla beraber çalışmamızdaki Teorem 4.2.8 dikkatle incelendiğinde, Chen ve Tong'un 2007'de verdikleri iki teoremin anlamsız olduğu görülür. Gerçekten; Chen ve Tong 2007'de verdikleri Teorem 3.11 ve Teorem 3.12(15) ile, bir R halkasının $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz olması için gerek ve yeter koşulun R'nin α-skew Armendariz ve $p(x),\ q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ iken $p(x)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha]q(x) = 0$ olması gerektiğini ispatlamışlardır. Fakat biz Teorem 4.2.8 ile $T(R, R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-skew Armendariz (yani, Teorem 4.1.1'den R'nin α-katı) olması için gerek ve yeter koşulun sadece $p(x), q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ iken $p(x)R[x; \alpha] \cap R[x; \alpha]q(x) = 0$ olması gerektiğini gösterdik.

Son olarak, bir R halkası ve bir A kümesi yardımıyla elde edilen R^A halkasının inmiş olması ile R halkasının inmiş olmasının birbirine denk olduğunu göstereceğiz. Hatta, daha genel olarak R^A halkası yardımıyla R halkasının katı olması için yeni bir karakterizasyon vereceğiz.

A boştan farklı bir küme ve R bir halka olmak üzere

$$R^A = \{f \mid f : A \to R \ \text{ bir fonksiyon}\}$$

kümesi her $a \in A$ için;

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(fg)(a) = f(a)g(a)$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir halkadır. R halkasının toplamsal birimi her $a \in A$ için $O(a) = 0$ ile tanımlı sıfır fonksiyonudur. R'nin bir α endomorfizması için; $f \in R^A$ olmak üzere $\bar{\alpha}(f) = \alpha \circ f$ biçiminde tanımlı $\bar{\alpha} : R^A \to R^A$ dönüşümü R^A'nın bir endomorfizmasıdır.

Önerme 4.2.11. Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter koşul R^A'nın $\bar{\alpha}$-katı olmasıdır.

İspat R α-katı ve $f \in R^A$ için $f\bar{\alpha}(f) = O$ olsun. Bu durumda her $a \in A$ için $[f\bar{\alpha}(f)](a) = O(a)$ olur. Buradan $f(a)(\alpha \circ f)(a) = f(a)\alpha(f(a)) = 0$ olup $f(a) \in R$ ve R α-katı olduğundan $f(a) = 0$, yani $f = O$ bulunur. Sonuç olarak R^A $\bar{\alpha}$-katıdır. Tersine R^A $\bar{\alpha}$-katı ve $r \in R$ için $r\alpha(r) = 0$ olsun. Her $a \in A$ için $f(a) = r$ sabit fonksiyonu gözönüne alınırsa R^A'da $[f\bar{\alpha}(f)](a) = f(a)(\alpha(f(a))) = r\alpha(r) = 0$ olur. R^A $\bar{\alpha}$-katı olduğundan her $a \in A$ için $f(a) = 0$, yani $r = 0$ dır. Böylece R α-katıdır.

Sonuç 4.2.12. Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R^A halkasının inmiş olmasıdır.

İspat Yukarıdaki önermede $\alpha = I_R$ birim endomorfizması alınırsa ispat açıktır.

KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. 1999. Semigroups and rings whose zero products com mute. Comm. Algebra, 27(6), 2847-2852.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer Verlag.

Armendariz, E.P. 1974. A note on extensions of baer and p.p. Rings. Australian Mathe matical Society, 18, 470-473.

Chen, W. and Tong, W. 2005. A note on skew Armendariz rings. Comm. Algebra, 33, 1137-1140.

Chen, W. and Tong, W. 2007. On skew Armendariz rings and rigid rings. Houston J. Math, 33(2), 341-353.

Cohn, P.M. 1999. Reversible rings. Bull. London Math. Soc., 31, 641-648.

Habeb, J.M. 1990. A note on zero commutative and duo rings. Math. J. Okayama Univ., 32, 73-76.

Hirano, Y. 2002. On annihilator ideals of polynomial ring over a noncommutative ring. J. Pure Appl. Algebra, 168, 45-52.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2000. Ore extensions of baer and p.p.-rings. J. Pure and Appl. Algebra, 151(3), 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2003. On skew Armendariz rings. Comm. Algebra, 31(1), 103-122.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. 2006. Extensions of generalized Armendariz rings. Algebra Colloq., 13(2), 253-266.

Hungerford T.W. 1974. Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Kamal, A.A. 1994. Some Remarks on Ore extension Rings. Comm. Algebra, 22, 3637-3667.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2000. Armendariz Rings and Reduced Rings. J. Algebra, 223, 477-488.

Krempa, J. 1996. Some Examples of reduced rings. Algebra Colloq., 3(4), 289-300.

Krempa, J. and Niewieczerzal, D. 1977. Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci., Math. Astronom, Phys., 25, 851-856.

Lambek, J. 1971. On the representation of modules by sheaves of factor modules. Canad. Math. Bull., 14, 359-368.

Lee, T.K. and Wong, T.L. 2005. On Armendariz rings. Houston J. Math. 3, 583-593.

Lee, T.K. and Zhou, Y.Q. 2004. Armendariz and reduced rings. Comm. Algebra, 32, 2287-2299.

Marks, G. 2002. Reversible and symmetric rings. J. Pure Appl. Algebra, 174, 311-318.

Matczuk J. 2004. A characterization of σ-rigid rings. Comm. Algebra, 32(11), 4333-4336.

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. 1997. Armendariz rings. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 73, 14-17.

Shin, G.Y. 1973. Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. Trans. Amer. Math. Soc., 184, 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fatma KAYNARCA
Doğum Yeri	: Afyonkarahisar
Doğum Tarihi	: 1978
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Ali Çetinkaya Kız Meslek Lisesi, Afyonkarahisar, 1995.
Lisans	: Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Eskişehir, 2000.
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar, 2004.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2001-

Yayınları (SCI ve diğer)

Doktora tez çalışmasının orjinal kısmı olan dördüncü bölümden derlenen; Muhittin BAŞER, Fatma KAYNARCA and Tai Keun KWAK tarafından hazırlanan "Rigidness and extended Armendariz property" başlıklı makale 27 Mart 2008 tarihinde "Acta Mathematica Sinica English Series Sci." isimli dergide yayına sunulmuştur.

Diğer konular: