YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN
SALINIMLILIK DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emrah KARAMAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

EMRAH KARAMAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. MUSTAFA KEMAL YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2010

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ’ın danışmanlığında **Emrah KARAMAN** tarafından hazırlanan **‘Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Salınımlılık Davranışı’** başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca …../…..../…….. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/ oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Doç. Dr. Mehmet KARABACAK	
Üye(Danışman)	Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
…../…../…….. tarih ve ……………………
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN
SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Yüksek Lisans Tezi

Emrah KARAMAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: **Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, fark analizi, lineer fark denklemleri teorisi, lineer homogen sabit katsayılı fark denklemlerinin çözümleri ve fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili temel bilgiler verilip bunlara ilişkin bazı teorem ve lemmalar verilecektir. Üçüncü bölümde,

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-k}) + q_n f(y_{n-l}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

şeklindeki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral gecikmeli fark denklemi incelenmiştir. Bu bölümde, (1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar verilmiştir. Orijinal sonuçlarımızın yer aldığı dördüncü bölümde ise,

$$\Delta^m(y_n + p_n f(y_{\tau(n)}) + q_n h(y_{\sigma(n)}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

şeklindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemi ele alınmıştır ve bu denklemin sınırlı çözümünlerinin salınımlığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

2010, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, salınımlılık, neutral, gecikme, salınımsızlık.

ABSTRACT

OSCILLATORY BEHAVIOUR OF HIGHER ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

M. Sc. Thesis

Emrah KARAMAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some main topics for difference calculus, theory of linear difference equations, solutions of linear homogeneous autonomous difference equations, oscillations of difference equations have been given and some known theorems and lemmas concerning these concepts have also been recalled. In the third chapter, the higher order nonlinear neutral delay difference equation

$$\Delta^m (y_n + p_n y_{n-k}) + q_n f(y_{n-l}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

is studied. In this chapter, sufficient conditions for oscillation of all solutions of (1) are given. In the four chapter, where our original results are given, the higher order nonlinear delay difference equation

$$\Delta^m (y_n + p_n f(y_{\tau(n)}) + q_n h(y_{\sigma(n)}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

is considered and sufficient conditions for oscillation of bounded solutions of this equation are given.

2010, 38 pages

Key Words: Difference equation, oscillation, neutral, delay, nonoscillation.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a, Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a, Arş. Grv. Başak KARPUZ'a, Arş. Grv. Aziz SAĞLAM'a ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Emrah KARAMAN
AFYONKARAHİSAR, Haziran 2010

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Adı**
E	Kaydırma operatörü
Δ	İleri fark operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\sum$	Toplam operatörü
$\prod$	Çarpım operatörü
Δ^n	$\Delta^{n-1}(\Delta)$
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
λ	Karakteristik denklemin kökü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
e	Euler sayısı (2,71828182845…)
$\int$	Belirsiz integral
$\int_a^b$	Belirli integral

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Emrah KARAMAN
Doğum Yeri : EREĞLİ/KONYA
Doğum Tarihi : 22.04.1986
Medeni Hali : Bekar
Cinsiyeti : Erkek
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

İlköğretim : Konya Ereğli Dumlupınar İlköğretim Okulu (1992-2000)
Lise : Konya Ereğli Atatürk Lisesi (2000-2004)
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Böl. (2004-2008)
Yüksek Lisans :Afyon Kocatepe Üniversitesi (2008-)

Çalıştığı Kurum-Kurumlar ve Yıl

Söğüt Çözüm Dergisi Dershaneleri (2008-2009)
Afyonkarahisar Atatürk Lisesi (2010)

Yayınlar

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ele alınan

$$\Delta^m (y_n + p_n f(y_{\tau(n)}) + q_n h(y_{\sigma(n)}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını araştırdığımız ‘Oscillatory behaviour of a higher-order nonlinear neutral type functional difference equation with oscillating coefficients’ isimli çalışma AMG2010 da bildirili olarak sunulmuştur ve yayın için gönderilmiştir.

1 GİRİŞ

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır, zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların pek çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluşturur. Daha da önemlisi, fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi "ghost" çözümlere veya kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur. Sonuç olarak, fark denklem-leri teorisinin ilginç olduğunu ve yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağını gözlemleyebiliriz. Böylece, fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teori-sinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır. Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle, salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Ladas 1990 yılındaki çalışmasında

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

$p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer, otonom, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. Erbe ve Zhang 1989 yılındaki çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere lineer, otonom olmayan, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Yine aynı yıl 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Diferensiyel denklemler ile bu denklemlerin ayrık benzerleri olan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılıkları arasında ilgi çekici benzerlikler vardır. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \tag{1.3}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Fakat (1.2) fark denklemi $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1}(1-p_j)\right]x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm $\forall j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı çözüme sahiptir. Daha sonraki yıllarda, örneğin 1994 yılında Yu, Zhang ve Wang, 2001 yılında Tang ve Zhang çalışmalarında (1.2) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriterler elde etmişlerdir. Ayrıca, 1993 yılında Yu, Zhang ve Qian, 2000 yılında Yu ve Tang (1.2) fark denkleminde p_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir.

Fark denklem çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili olarak literatürde bulabildiğimiz ilk çalışmalardan birisinde Ladas, Philos ve Sficas 1989 yılında,

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

p_n negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere, lineer gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir. Bunun sonucunda (1.4) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

yeter şartını elde etmişlerdir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yüksek lisans tezimizde ihtiyaç duyacağımız, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz. İlk önce fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Son olarak fark denklemlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x_n$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak üzere, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned}\Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olduğu görülür.

Δ ve E nin temel özellikleri, Δy ve Ey nin değerlerini hesaplamak için önemlidir. c_1 ve c_2 keyfi sabitler, y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon ise

(a) $\Delta [y_1(k) + y_2(k)] = \Delta y_1(k) + \Delta y_2(k)$,

(b) $\Delta\left[cy(k)\right] = c\Delta y(k)$,

(c) $\Delta\left[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)\right] = c_1 \Delta y_1(k) + c_2 \Delta y_2(k)$,

(d) $y_1, y_2, ..., y_n$; n tane fonksiyon ve $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitler olsun. O zaman

$$\Delta\left[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + ... + c_n y_n(k)\right] = c_1 \Delta y_1(k) + c_2 \Delta y_2(k) + ... + c_n y_n(k),$$

(e) k bir tamsayı olmak üzere $y(k)$, y fonksiyonunun k daki değerini gösterirse ve $a, b(b \geq a)$ herhangi iki tamsayı ise $y(a) + y(a+1) + ... + y(b)$ toplamı yerine $\sum\limits_{k=a}^{b} y(k)$ yazılır.

(f) Toplam operatörü ile ilgili aşağıdaki kuralları bilmek gerekir. y ve z keyfi iki fonksiyon ve c keyfi bir sabit olmak üzere

(f$_1$) $\sum\limits_{k=1}^{n} c = nc$,

(f$_2$) $\sum\limits_{k=1}^{n} cy(k) = c \sum\limits_{k=1}^{n} y(k)$,

(f$_3$) $\sum\limits_{k=1}^{n} (y(k) \pm z(k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} y(k) \pm \sum\limits_{k=1}^{n} z(k)$,

(g) $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2.....k} A^k B^{n-k}$ veya $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$,

(h) $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ keyfi sabitler ve $a_n \neq 0$ olsun. O zaman y nin n. ileri farkı bir sabit fonksiyondur ve $\Delta^n y = n! h^n a_n$ dir. Eğer $p > n$ ise $\Delta^p y(k) = 0$ olur.

(i) $\Delta\left[u(k).v(k)\right] = Eu(x).\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x)$,

(j) $\Delta \equiv E - I$ ve $E \equiv \Delta + I$,

(k) $\Delta^0 \equiv I$ ve $E^0 \equiv I$,

(l) $\Delta^2 \equiv E^2 - 2E + I$ ve $\Delta^3 \equiv E^3 - 3E^2 + 3E - I$,

(m) $\Delta E \equiv E\Delta$

(n) Δ ve E dizin kuralına uysun. m ve n negatif olmayan tamsayıları için, $\Delta^m \Delta^n \equiv \Delta^n \Delta^m \equiv \Delta^{m+n}$ ve $E^m E^n \equiv E^n E^m \equiv E^{m+n}$,

(o) $\Delta^n \equiv (E - I)^n$,

(p) $\Delta^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$,

(r) n pozitif tamsayı olmak üzere $\Delta^n y(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k y(x)$(Goldberg 1958).

Tanım 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \tag{2.1}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) k ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 7x_{n+1} = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.2}$$

formunda verilirse k ıncı mertebeden olan (2.1) fark denklemine **lineerdir** denir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.2) fark denklemine **homogen olmayan** lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).
Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde verilirse (2.3) fark denklemine **homogen** lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.4. Fark denklerinde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin en yüksek mertebeden farkını içeren denklemlere **nötral (neutral)** tipten fark denklemi denir(Agarwal 2000).

2.2 Lineer Fark Denklemler Teorisi

Bu kısımda k ıncı mertebeden lineer fark denklemleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler verilecektir. k ıncı mertebeden, homogen olmayan, lineer fark denklemini

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.4}$$

formunda yazabiliriz. Burada p_{in} ve g_n, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemi bir tek x_n çözümüne sahiptir

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n$$

$$x_{n_0} = a_0\,,\ x_{n_0+1} = a_1\,, \ldots,\ x_{n_0+k-1} = a_{k-1}$$

(Elaydi 1999).

Şimdi (2.4) fark denkleminin

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = 0 \tag{2.5}$$

şeklindeki lineer, homogen şeklini yazalım ve aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 2.2.1. Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına **lineer bağımlıdır** denir.

Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

eşitliği sadece $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına **lineer bağımsızdır** denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.2. (2.5) fark denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, **temel çözümler kümesi** denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.3. $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{rn}$ çözümlerinin Casoration determinantı veya kısaca Casoration, C_n ile gösterilir ve

$$C_n = \det \begin{pmatrix} x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{rn} \\ x_{1(n+1)} & x_{2(n+1)} & \ldots & x_{r(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1(n+r-1)} & x_{2(n+r-1)} & \ldots & x_{r(n+r-1)} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ile verilir. Casoration determinantı diferensiyel denklemlerdeki wronskiyenin diskret benzeridir (Elaydi 1999, Kelley ve Peterson 1991).

Lemma 2.2.1. (Abel Lemması) $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}$ çözümleri (2.5) fark denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda Casoration determinantı $n \geq n_0$ için

$$C_n = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_{ki} \right) C_{n_0} \tag{2.7}$$

ile verilir (Elaydi 1999).

Teorem 2.2.2. (2.5) fark denkleminin $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}$ çözümlerinin, temel çözümler kümesi olması için gerek ve yeter şart, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için $C_{n_0} \neq 0$ olmasıdır (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.4. $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$, (2.5) fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ler keyfi sabitler olmak üzere (2.5) fark denkleminin genel çözümü $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ ile verilir(Elaydi 1999).

2.3 Lineer Homogen Sabit Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümleri

Bu kısımda ilk önce k ıncı mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen fark denkleminin çözümleri hakkında, daha sonrada k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan fark denkleminin çözümleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremleri hatırlatacağız. Şimdi aşağıdaki k ıncı mertebeden fark denklemini ele alalım.

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = 0 \tag{2.8}$$

Burada p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. (2.8) denkleminde λ^n i çözüm kabul edip denklemde yerine yazarsak

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0 \tag{2.9}$$

denklemi bulunur. Buna (2.9) fark denkleminin **karakteristik denklemi** ve λ lara ise (2.9) denkleminin **karakteristik kökleri** denir. (2.8) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak üç durum sözkonusudur;

1.Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ ifadesi (2.8) fark denkleminin temel çözümler kümesi olur ve (2.8) in genel çözümü, a_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i^n \tag{2.10}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

2.Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ kökleri reel ve sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ katlı ise (2.8) denklemini

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\ldots(E-\lambda_r)^{m_r}x_n = 0 \tag{2.11}$$

şeklinde yazabiliriz. $(E-\lambda_i)^{m_i}x_n = 0$, $1 \leq i \leq r$ denkleminin temel çözümler kümesi $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ olduğundan (2.11) in temel çözümler kümesi $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ olur ve (2.11) in genel çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \ldots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}) \tag{2.12}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

3.Durum: (2.9) karakteristik denklemi $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ kompleks köklerine ve $\lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \ldots \neq \lambda_k$ şeklindeki reel köklere sahip olsun. Bu durumda genel çözüm

$$x_n = c_1(\alpha+i\beta)^n + c_2(\alpha-i\beta)^n + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n$$

şeklinde olur. Burada $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$, $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$ olmak üzere

$$x_n = r^n[a_1\cos(n\theta) + a_2\sin(n\theta)] + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.13}$$

olur ve (2.13) de $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$, $w = \tan^{-1}(\frac{a_2}{a_1})$ alarak genel çözümü

$$x_n = Ar^n \cos(n\theta - w) + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.14}$$

şeklinde yazarız (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

Örnek 2.3.1. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

şeklinde olur ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Böylece denklemin genel çözümünü

$$x_n = (a_0 + na_1)2^n + b_1 3^n$$

şeklinde yazarız. Verilen başlangıç şartlarını denklemde yerine yazarsak $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ ve $b_1 = -3$ bulunur. Böylece problemin çözümü

$$x_n = (3 + 2n)2^n - 33^n$$

olur.

Şimdi k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.15}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır. (2.15) fark denkleminin çözümü, homogen kısmın genel çözümü x_{cn} ve homogen olmayan kısmın bir özel çözümü x_{pn} olmak üzere $x_n = x_{cn} + x_{pn}$ ile verilir. Aşağıdaki teorem bu gerçeği ifade eder.

Teorem 2.3.1. (2.15) fark denkleminin genel çözümü

$$x_n = x_{pn} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$$

şeklinde verilir. Burada $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$ (2.15) fark denkleminin homogen kısmının temel çözümler kümesidir (Elaydi 1999).
(2.15) fark denklemini belirsiz katsayılar metodu ile çözerken g_n in farklı durumlarında özel çözümler genel olarak aşağıdaki şekilde aranır;

(a) $g_n = a^n$ ise $\mathrm{x}_{pn} = c_1 a^n$,

(b) $g_n = n^k$ ise $x_{pn} = c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k$

(c) $g_n = n^k a^n$ ise $x_{pn} = c_0 a^n + c_1 n a^n + \ldots + c_k n^k a^n$

(d) $g_n = \sin b_n, \cos b_n$ ise $x_{pn} = c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$

(e) $g_n = a^n \sin b_n, a^n \cos b_n$ ise $x_{pn} = (c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$

(f) $g_n = a^n n^k \sin b_n, a^n n^k \cos b_n$ ise $x_{pn} = (c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k)a^n \sin(bn) + (d_0 + d_1 n + \ldots + d_k n^k)a^n \cos(bn)$.

2.4 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu kısımda fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin salınımlılığı ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremler verilecek.

Tanım 2.4.1. Eğer her pozitif N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında **salınımlıdır** denir. Aksi halde x_n çözümüne **salınımlı olmayan** çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 1999).

Tanım 2.4.2. k ıncı mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $\{x_n\}$ çözümü $x_n = [x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^r]^T$ olsun. Eğer her bir $\{x_n^i\}$ bileşeni salınımlı ise $\{x_n\}$ çözümüne **salınımlıdır** denir. Diğer durumda yani, bir $\{x_n^i\}$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif ya da negatif ise $\{x_n\}$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_n \in \mathbb{R}^r$ dir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.4.1. $k, l \in N$ ve $j = -k, \ldots, l$ için $p_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{j=-k}^{l} p_j x_{n+j} = 0 \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) (2.16) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) (2.16) fark denklemine ait

$$\lambda - 1 + \sum_{j=-k}^{l} p_j \lambda^j = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif kökü yoktur (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.4.2. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \tag{2.17}$$

şeklindeki $(k+1)$ inci mertebeden otonom fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda (2.17) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\ldots, -3, -2\} \bigcup \{1, 2, \ldots\}$ ise $p > \dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

(Györi ve Ladas 1991, Ladas vd 1989).

Teorem 2.4.3. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere eğer

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{s=n-l}^{n-1} q_s > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v_n + q_n v_{n+l} \geq 0 \tag{2.26}$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (E. Thandapani, R. Arul, P. S. Raja 2002).

Teorem 2.4.4. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=n}^{n+l-1} q_s > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v_n - q_n v_{n+l} \geq 0 \tag{2.27}$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (E. Thandapani, R. Arul, P. S. Raja 2002).

Teorem 2.4.5. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{2.28}$$

ise

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_{n-k} = 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (G. Ladas, Ch. G. Philos, Y. G. Sficas 1989).

İspat. Kabul edelim ki (2.29) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{A_n\}$ olsun. Yani $\{A_n\}$ belirli bir n den sonra pozitif olsun. Bu durumda

$$A_{n+1} - A_n = -p_n A_{n-k} \leq 0$$

bulunur ve buradan $\{A_n\}$ nin pozitif sayıların azalan bir dizisi olduğu görülür. (2.28) denkleminden ve $\{A_n\}$ nin azalan olmasından

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_n \leq 0$$

yada

$$p_n \leq 1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

elde edilir. Bunun sonucun da

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}\right) \tag{2.30}$$

bulunur.

$$\alpha = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{2.31}$$

olmak üzere (2.28) den yeterince büyük n için

$$\alpha < \beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \tag{2.32}$$

olacak şekilde bir β sabiti seçebiliriz. Böylece (2.30) dan yeterince büyük n için

$$\beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}\right) \tag{2.33}$$

elde edilir. (2.33) gözönüne alınarak, aritmetik ve geommetrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten yeterince büyük n için

$$\begin{aligned} \beta &\leq \tfrac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \tfrac{A_{i+1}}{A_i}\right) = 1 - \tfrac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\tfrac{A_{i+1}}{A_i} \\ &\leq 1 - \left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\tfrac{A_{i+1}}{A_i}\right)^{1/k} = 1 - \left(\tfrac{A_{n+1}}{A_{n-k}}\right)^{1/k} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da yeterince büyük n için

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_{n-k}}\right)^{1/k} \leq 1 - \beta \tag{2.34}$$

bulunur. Buda gösterir ki $0 < \beta < 1$ dir. Şimdi görülür ki

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1}[(1-\lambda)\lambda^{1/k}] = \frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}} = \alpha^{\frac{1}{k}}$$

dır. Sonuç olarak $0 < \lambda \leq 1$ için

$$1 - \lambda \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\lambda^{\frac{-1}{k}}$$

elde edilir ve (2.34) den yeterince büyük n ler için

$$\frac{\beta}{\alpha}A_n \leq A_{n-k} \tag{2.35}$$

dır. (2.35) eşitsizliğinin (2.29) denkleminde kullanılmasıyla yeterince büyük n ler için

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 A_n \leq A_{n-k}$$

elde edilir. Bundan yararlanarak her $m = 1, 2, \ldots$ için bir N_m vardır öyle ki $n \geq N_m$ için

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m A_n \leq A_{n-k} \tag{2.36}$$

bulunur. (2.32) den görülür ki yeterince büyük n için

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \geq k\beta$$

dır. Böylece yeterince büyük n için $M \geq k\beta > 0$ olmak üzere

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq M \tag{2.37}$$

dir. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak sekilde m yi seçelim.

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m > \left(\frac{2}{M}\right)^2 \tag{2.38}$$

Bu eşitsizliği seçmek mümkündür. Çünkü (2.32) den $\beta > \alpha$ dır. Bu durumda yeterince büyük n için $n \geq n_0$ olmak üzere (2.38) de seçilen özel m için (2.36) sağlanır. Aynı zamanda (2.32) ve (2.37) sağlanır ve $n \geq n_0$ için $\{A_n\}$ azalandır. Şimdi (2.37) den ve $n \geq n_0 + k$ için bir $n - k \leq n^* \leq n$ olacak şekilde n^* tam sayısı vardır öyle ki

$$\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i \geq \frac{M}{2} \text{ ve } \sum_{i=n^*}^{n} p_i \leq \frac{M}{2}$$

dir. (2.29) denkleminden ve $\{A_n\}$ nin azalan olması gerçeğinden

$$\begin{aligned}
A_{n^*-1} - A_{n-k} &= \sum_{i=n-k}^{n^*} (A_{i+1} - A_i) \\
&= -\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i A_{i-k} \\
&\leq -\left(\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i\right) A_{n^*-k} \\
&\leq -\tfrac{M}{2} A_{n^*-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{M}{2} A_{n^*-k} \leq A_{n-k} \tag{2.39}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_{n^*} &= \sum_{i=n^*}^{n} (A_{i+1} - A_i) \\ &= -\sum_{i=n^*}^{n} p_i A_{i-k} \\ &\leq -\left(\sum_{i=n^*}^{n} p_i\right) A_{n^*-k} \\ &\leq -\tfrac{M}{2} A_{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{M}{2} A_{n-k} \leq A_{n^*} \tag{2.40}$$

bulunur. (2.39) ve (2.40) dan

$$\left(\frac{M}{2}\right)^2 A_{n^*-k} \leq A_{n^*}$$

bulunur ki (2.36) nın uygulanmasıyla

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \frac{A_{n^*-k}}{A_{n^*}} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2$$

elde edilir. Bu da (2.38) ile çelişir ki böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.4.6. Kabul edelim ki $0 \leq p < 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Delta(x_n - p x_{n-l}) + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$$

dur (G. Zhang 2002).

Lemma 2.4.1. $1 \leq m \leq n-1$ olsun ve $u(k)$ fonksiyonuda $\mathbb{N}(a) = \{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, ...\}$ da tanımlansın. Bu durumda,

(i) $\liminf\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) > 0$ ise, $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = \infty$,

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) < 0$ ise, $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = -\infty$ dur (R. P. Agarwal, 2000).

İspat. $\liminf\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) > 0$ demek her $k \in \mathbb{N}(k_1)$ için $\Delta^m u(k) \geq c > 0$ olacak şekilde yeterince büyük $k_1 \in \mathbb{N}(a)$ vardır anlamına gelir.

$$\Delta^m u(l) = \Delta(\Delta^{m-1}u(k)) = \Delta^{m-1}u(l+1) - \Delta^{m-1}u(l)$$

$$\Delta^{m-1}u(l+1) - \Delta^{m-1}u(l) = \Delta^m u(l) \sum_{l=k_1}^{k-1} \left(\Delta^{m-1}u(l+1) - \Delta^{m-1}u(l)\right) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l)$$

$$\Delta^{m-1}u(k) - \Delta^{m-1}u(k_1) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l)$$

$$\Delta^{m-1}u(k) = \Delta^{m-1}u(k_1) + \sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l)$$

$$\Delta^{m-1}u(k) \geq \Delta^{m-1}u(k_1) + c(k - k_1)$$

olur ve buradan $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) = \infty$ elde edilir. $i = m-1$ için ispat tamamlanmış olur. Şimdi daha küçük mertebeden için (i) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) = \infty$ olması $\liminf\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) > 0$ anlamına gelir. Yukarıdaki adımlar takip edilerek $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-2}u(k) = \infty$ elde edilir. Bu adımlar ardışık olarak tekrarlandığında (i) ifadesinin ispatı tamamlanır.

(ii) durumu da benzer şekilde ispatlanır. $\limsup\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) < 0$ demek her $k \in \mathbb{N}(k_2)$ için $\Delta^m u(k) \leq c < 0$ olacak şekilde yeterince büyük $k_2 \in \mathbb{N}(a)$ vardır anlamına gelir.

$$\Delta^{m-1}u(k) = \Delta^{m-1}u(k_2) + \sum_{l=k_2}^{k-1} \Delta^m u(l)$$

$$\Delta^{m-1}u(k) \leq \Delta^{m-1}u(k_2) + c(k - k_2)$$

ise

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) = -\infty$$

dır.

3 YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NEUTRAL GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK SONUÇLARI

3.1 Yüksek Mertebeden Liner Olmayan Neutral Gecikmeli Fark Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılık Davranışı

Çalışmanın bu kısmında

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-k}) + q_n f(y_{n-l}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\} \tag{3.1}$$

tipindeki yüksek mertebeden neutral gecikmeli fark denklemi ele alınmıştır. Burada Δ operatörü $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ şeklinde tanımlanan bilinen fark operatörü, k ve l negatif olmayan tamsayılar, $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ reel diziler ile $q_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve tüm $u \neq 0$ için $f : R \to R$ ve $uf(u) > 0$ olan sürekli bir fonksiyondur, $\sigma = \max\{k, l\}$ ve $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tamsayılardır. Her $n \geq \mathbb{N}_0$ için (3.1) denkleminin bir çözümü $\{y_n\}$ olsun her y_n sabit işaretli ise y_n salınımlı değilidir aksi taktirde y_n çözümü salınımlıdır denir. Burada (3.1) denklemini sınırlandıralım ve

(A_1) $\{q_n\}$ sıfır olmasın ve

(A_2) $F : R \to R$ sürekli bir fonksiyonu azalmayan ve $u, v > 0$ için

$$-F(-uv) \geq F(uv) \geq KF(u)F(v)$$

$u \neq 0$ için

$$|f(u)| \geq |F(u)|, \ \frac{F(u)}{u} \geq \gamma > 0 \ \text{ ve } \ uF(u) > 0$$

olsun, burada K pozitif bir sabittir.

Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık davranışlarıyla ilgili olarak bir çok çalışma yapılmıştır. 1996 yılında R. P. Agarwal, E. Thandanpani ve P. J. Y. Wong yüksek mertebeden neutral olan (3.1) denkleminin salınımlılık davranışını incelemişlerdir.

Aşağıda vereceğimiz teoremlerde (3.1) denkleminin çözümünün salınımlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Bunun için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

(C_1) $0 \le p_n < 1$;

(C_2) $0 \le p_n \le P_1 < 1$, burada P_1 bir sabit;

(C_3) $-1 < -P_2 \le p_n \le 0$, burada $P_2 > 0$ bir sabit;

(C_4) $\liminf\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{s=n-l}^{n-1} q_s F\left((1-p_{s-l}) \left(\frac{s-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \right) \right] > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1} \frac{1}{K^2 \gamma F(1/(m-1)!)}$;

(C_5) her $M \in (0,1)$ için $\liminf\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{s=n-l}^{n-1} q_s F\left(\left(\frac{s-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \right) \right] > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1} \frac{1}{K^2 \gamma F(M)}$;

(C_6) $\sum\limits^{\infty} q_s = \infty$.

Vereceğimiz teoremlerde (3.1) denkleminin çözümünün salınımlılık kriterlerini elde etmek için aşağıdaki lemmalar kullanılmıştır.

Lemma 3.1.1. Kabul edelimki tüm $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \ge 0$ olsun ve

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\sum_{s=n-l}^{n-1} q_s \right] > \left(\frac{l}{l+1} \right)^{l+1} \tag{3.2}$$

ise

(i) $v_{n+1} - v_n + q_n v_{n-l} \le 0$, $n \in \mathbb{N}$ ise pozitif çözüme sahiğ değildir;

(ii) $v_{n+1} - v_n + q_n v_{n-l} \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$ ise negatif çözüme sahiğ değildir;

(iii) $v_{n+1} - v_n + q_n v_{n-l} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ ise salınımlıdır.

Lemma 3.1.2. (Ayrık Kneser Teoremi) $n \ge a \in \mathbb{N}$ için z_n tanımlı olsun. Burada $n \ge a$ için $\Delta^m z_n$ sabit işaretli olmak üzere $z_n > 0$ ve $z_n \equiv 0$ olsun. Bu durumda $0 \le j \le m$ olmak üzere $\Delta^m z_n \le 0$ için $(m+j)$ tek ve $\Delta^m z_n \ge 0$ için $(m+j)$ çift olacak şekilde bir j tamsayısı vardır öyle ki

$$j \le m-1 \text{ ise } (-1)^{j+i} \Delta^i z_n > 0; \;\; n \ge a, \;\; j \le i \le m-1$$

ve

$$j \geq 1 \text{ ise } \Delta^i z_n > 0; \quad n \geq a, \ 1 \leq i \leq j-1$$

dir (R. P. Agarwal, 2000).

İspat. İspat için iki durum söz konusudur.

Durum 1. $n \geq a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m z_n \leq 0$ olsun. İlk olarak $n \geq a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^{m-1} z_n > 0$ olduğunu ispatlayalım. Eğer bunun aksini düşünürsek $\mathbb{N}(a)$ da $n_1 \geq a$ sayısı vardır öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_{n_1} \leq 0$$

dır. $\Delta^{m-1} z_n$ azalan olduğundan $\mathbb{N}(a)$ da sabit olarak tanımlanamaz. Bu durumda bir $n_2 \in \mathbb{N}(n_1)$ vardır öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_n \leq \Delta^{m-1} z_{n_2} \leq \Delta^{m-1} z_{n_1} \leq 0, \text{ bütün } n \in \mathbb{N}(n_2)$$

dır. Fakat Lemma 2.4.1'den

$$\lim_{k \to \infty} z_n = -\infty$$

bulunur. Bu da $z_n > 0$ olması ile çelişir. Böylece $\mathbb{N}(a)$ da $\Delta^{m-1} z_n > 0$ dır ve bir yeterince küçük j sayısı vardır öyle ki $m + j$ toplamı tek, $0 \leq j \leq m-1$ ve

$$(-1)^{j+i} \Delta^i z_n > 0; \ n \geq a, \ \ j \leq i \leq m-1$$

dir. Şimdi de $j > 1$ ve

$$\Delta^{j-1} z_n < 0, \ n \in \mathbb{N}(a)$$

olsun. Yine Lemma 2.4.1'den

$$\Delta^{j-2} z_n > 0, \ n \in \mathbb{N}(a)$$

bulunur. Bu iki eşitsizliğin sonucu olarak,

$$(-1)^{j-2+i} \Delta^i z_n > 0; \ n \geq a, \ \ j-2 \leq i \leq m-1$$

elde edilir. Bu da j'nin tanımıyla çelişir. Böylece $\Delta^{j-1} z_n < 0$, $n \in \mathbb{N}(a)$ eşitsizliği yanlıştır ve $\Delta^{j-1} z_n \geq 0$ dır. $(-1)^{j+i} \Delta^i z_n > 0; \ n \geq a, \ \ j \leq i \leq m-1$ eşitsizliğinden $\Delta^{j-1} z_n$ azalmayandır ve böylece

$$\lim_{k \to \infty} \Delta^{j-1} z_n > 0$$

olur. Eğer $j > 2$ ise Lemma 2.4.1'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^i z_n = \infty,\ 1 \le i \le j-2$$

elde edilir. Böylece bütün büyük $n \in \mathbb{N}(a)$ ve $1 \le i \le j-1$ için

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Böylece ispatın birinci kısmı tamamlanır.

Durum 2. $n \ge a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m z_n \ge 0$ olsun. $n_3 \in \mathbb{N}(n_2)$ olsun öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_{n_3} \ge 0$$

dır. Bu durumda $\Delta^{m-1} z_n$ azalmayan olduğundan sabit olarak tanımlanamaz ve bir $n_4 \in \mathbb{N}(n_3)$ sayısı vardır öyle ki bütün $n \in \mathbb{N}(n_4)$ ler için

$$\Delta^{m-1} z_n > 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1} z_n > 0$$

bulunur ve Lemma 2.4.1'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^i z_n = \infty,\ 1 \le i \le j-2$$

elde edilir. Böylece bütün büyük $n \in \mathbb{N}(a)$ ve $1 \le i \le j-1$ için

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Bu $m = j$ için teoremi sağlar. Bütün $n \in \mathbb{N}(a)$ için $\Delta^{m-1} z_n < 0$ olması durumunda Lemma 2.4.1'den bütün $n \in \mathbb{N}(a)$ için

$$\Delta^{m-2} z_n > 0$$

bulunur. İspatın bundan sonraki kısmı Durum 1'in benzeridir.

Lemma 3.1.3. *$n \ge a \in \mathbb{N}$ için z_n tanımlansın ve $\Delta^m z_n \le 0$ olmak üzere $z_n > 0$ olsun ve özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda yeterince büyük bir $n_1 \ge a \in \mathbb{N}$ vardır bu durumda*

$$z_n \ge \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1}n}\ ;\ \ n \ge n_1$$

dir. Burada j Lemma 3.1.2 deki gibi tanımlanmıştır. Ayrıca eğer z_n artan ise

$$z_n \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1} z_n \ ; \ n \geq 2^{m-1} n_1$$

dir (R. P. Agarwal, 2000).

İspat. Lemma 3.1.2 den söyleyebiliriz ki $\mathbb{N}(a)$ da $j \leq i \leq m-1$ olmak üzere

$$(-1)^{j+i-1}\Delta^i z_n > 0, \ j \leq i \leq m-1$$

olur ve bütün büyük $n \geq n_1 \in \mathbb{N}(a)$ için $1 \leq i \leq j-1$ olmak üzere

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-2} z_n &= -\Delta^{m-2} z_\infty + \sum_{l=n}^{\infty} \Delta^{m-1} z_l \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} \Delta^{m-1} z_l \\
&\geq \Delta^{m-1} z_{2n(n)^{(1)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-3} z_n &= \Delta^{m-3} z_\infty - \sum_{l=n}^{\infty} \Delta^{m-2} z_l \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} (l)^{(1)} \Delta^{m-1} z_{2l} \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} (l-n)^{(1)} \Delta^{m-1} z_{2l} \\
&\geq \Delta^{m-1} z_{2^2 n} \tfrac{1}{2!} (n)^{(2)} \\
&\quad \ldots \quad \ldots \\
\Delta^j z_n &\geq \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1} n} \tfrac{1}{(m-j-1)!} (n)^{(j-m-1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta^{j-1} z_n &= \Delta^{m-} z_{n_1} + \sum_{l=n_1}^{n-1} \Delta^m z_l \\
&\geq \sum_{l=n_1}^{n-1} \tfrac{1}{(m-j-1)!} (l-n_1)^{(j-m-1)} \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1} l} \\
&\geq \tfrac{1}{(m-j)!} (n-n_1)^{(j-m)} \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1} n}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $(j-1)$ kez tekrardan sonra

$$z_n \geq \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1} n} \ ; \ n \geq n_1$$

elde edilir.

3.2 (3.1) Denkleminin Salınımlılığı için Yeter Şartlar

Teorem 3.2.1.

(a) (3.1) denkleminde m çift olsun. Eğer (C_1) ve (C_4) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) (3.1) denkleminde m tek olsun. Eğer (C_2) ve (C_5) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider(Agarwal, Thandapani, Wong 1996).

İspat. (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_0$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır.

$$z_n = y_n + p_n y_{n-l}$$

olmak üzere $n \geq n_0$ için $z_n \geq y_n > 0$ ve

$$\Delta^m z_n = -q_n y_{n-k}^{\alpha} < 0, \tag{3.2}$$

olduğundan,

$$\Delta^m z_n = -q_n y_{n-k}^{\alpha} < 0$$

dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.2 den $m \geq 2$ için

$$\Delta^{m-1} z_n > 0\,, \quad n \geq n_0 \tag{3.3}$$

olur. İddia ediyoruz ki $\Delta z_n \leq 0$ dır. Eğer $m = 1$ ise, (3.1) denkleminden $\Delta z_n \leq 0$ olduğu açıktır. $m \geq 2$ için bunun aksini kabul edelim. Yani $n \geq n_1 \geq n_0$ için $\Delta z_n > 0$ olsun. Bu durumda $n \geq n_2 \geq n_1$ için

$$\begin{aligned}(1-p_n)z_n &\leq z_n - p_n z_{n-k} \\ &= y_n + p_n p_{n-k} y_{n-2k} \\ &\leq y_n,\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.. z_n pozitif ve artan olduğundan, Lemma 3.1.3 ve (3.4) eşitsizliği gözönüne alındığında

$$y_n \geq (1-p_n)z_n \geq \frac{(1-p_n)}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \;\; , \; n \geq 2^{m-1} n_2 \tag{3.5}$$

bulunur. (A_2) ve (3.5) eşitsizliğini kullanarak $n \geq n_3 \geq n_2$ için

$$\begin{aligned} f(y_{n-l}) &\geq F(y_{n-l}) \\ &\geq F\left(\frac{(1-p_{n-l})}{(m-1)!}\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_{n-l}\right) \\ &\geq K^2 \gamma F\left(\frac{1}{(m-1)!}\right) F\left((1-p_{n-l})\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\right) \Delta^{m-1} z_n \,. \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n K^2 \gamma F\left(\frac{1}{(m-1)!}\right) F\left((1-p_{n-l})\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\right) \Delta w_{n-l} \leq 0$$

eşitsizliğinin pozif bir çözümü olduğu görülür. Bu durum (C_4) şartından bu Lemma 3.1.1 ile çelişir. Dolayısıyla $\Delta z_n \leq 0$ dır. Lemma 3.1.2 de $\Delta z_n \leq 0$ olduğundan $j = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$(-1)^i \Delta^i z_n > 0, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad n \geq n_0 \tag{3.6}$$

olur. Eğer m çift ise (3.6) eşitsizliği ile (3.3) eşitsizliği çelişir. Böylece Teoremin (a) kısmının ispatı tamamlanır.

Şimdi m tek olsun. Kabul edelim ki $n \to \infty$ iken y_n sıfıra gitmesin. $\Delta z_n \leq 0$ olduğu için $n \to \infty$ iken $z_n \downarrow c$ dır. Burada $0 < c < \infty$ dır. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ ve bir $n_4 > n_0$ tamsayısı vardır öyle ki

$$o < \varepsilon < c\frac{1-P_1}{1+P_1} < c,$$

ve

$$c - \varepsilon < z_n \leq z_{n-k} < c + \varepsilon, \qquad n \geq n_4 \tag{3.7}$$

bulunur. Böylece (3.4) eşitsizliği ve (3.7) eşitsizliğinden $n \geq n_4$ için

$$\begin{aligned} y_n &\geq z_n - p_n z_{n-k} \\ &\geq z_n - P_1 z_{n-k} \\ &> (c-\varepsilon) - P_1(c+\varepsilon) \\ &= c_1 z_n \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Burada

$$c_1 = [(c-\varepsilon) - P_1(c+\varepsilon)]/(c+\varepsilon) \in (0,1)$$

dır. j, Lemma 3.1.3 deki gibi tanımlansın, $n \geq n_5 \geq n_4$ için

$$z_n = \frac{z_n}{z_{2^{j+1-m}n}} z_{2^{j+1-m}n} > c_2 z_{2^{j+1-m}n} \tag{3.9}$$

elde edilir, burada $c_2 = (c - \varepsilon)/(c + \varepsilon) \in (0, 1)$ dir. Lemma 3.1.3, (3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri kullanılarak $n \geq n_6 \geq n_5$ için

$$\begin{aligned} y_n &> c_1 c_2 z_{2^{j+1-m}n} \\ &\geq c_1 c_2 \tfrac{(2^{j+1-m}n - n_6)^{(m-1)}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq \tfrac{c_1 c_2}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} (n - 2^m n_6)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $n \geq 2^{m+1} n_6 + m - 2$ için

$$\begin{aligned} y_n &\geq \tfrac{c_1 c_2}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} \tfrac{1}{2^{m-1}} n^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq c_3 \left(\tfrac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir, burada

$$c_3 = c_1 c_2 2^{(j-m)(m-1)}/(m-1)! \in (0, 1)$$

dır. (3.10) ve (A_2)eşitsizliklerinden $n \geq n_7 \geq n_6$ için

$$f(y_{n-l}) \geq F(y_{n-l}) \geq K^2 \gamma F(c_3) F\left(\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\right) \Delta^{m-1} z_{n-l}$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n K^2 \gamma F(c_3) F\left(\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\right) \Delta w_{n-l} \leq 0$$

eşitsizliğinin pozif bir çözümü olduğu görülür. Bu durum, (C_5) şartından dolayı Lemma 3.1.1 ile çelişir. Böylece Teoremin (b) kısmının da ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2. Eğer (C_3) ve (C_5) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider(Agarwal, Thandapani, Wong 1996).

İspat. (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_0$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır. Bundan başka kabul edelim ki $n \to \infty$ için y_n sıfıra gitimesin. $z_n = y_n + p_n y_{n-l}$ olmak üzere $n \geq n_0$ için $z_n \leq y_n$ ve aynı zamanda (3.2) eşitsizliği sağlansın.

İddia ediyoruz ki $\Delta y_n \leq 0$ dır. Bunun aksini kabul edelim yani $n \geq n_1 > n_0$ için $\Delta y_n > 0$ olsun. Bu durumda (C_3) şartı dikkate alındığında $n \geq n_2 \geq n_1$ için

$$z_n \geq y_n + p_n y_n \geq (1 - P_2) y_n > 0 \tag{3.11}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1.2 ve (3.3) eşitsizliğinden y_n sınırsız olduğundan (3.11) den aynı zamanda z_n nin de sınırsız olduğu görülür. Böylece $n \geq n_2$ için $\Delta z_n > 0$ dır. Lemma 3.1.3 den dolayı,

$$y_n \geq z_n \geq \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \ ; \ \ n \geq 2^{m-1} n_2$$

elde edilir. Sonuç olarak yukarıdaki son eşitsizlikten ve (A_2)den, $n \geq n_3 \geq n_2$ için

$$f(y_{n-l}) \geq F(y_{n-l}) \geq K^2 \gamma F \left(\frac{1}{(m-1)!}\right) F \left(\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \right) \Delta^{m-1} z_{n-l}$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n K^2 \gamma F \left(\frac{1}{(m-1)!}\right) F \left(\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \right) \Delta w_{n-l} \leq 0 \tag{3.12}$$

eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu durum (C_5) şartından dolayı Lemma 3.1.1 ile çelişir. Böylece $\Delta y_n \leq 0$ dır. Sonuç olarak $n \to \infty$ iken $y_n \downarrow c$ dir, burada $0 < c < \infty$ dur. z_n nin tanımından ve (C_3) şartından dolayı

$$\liminf_{n \to \infty} z_n = (1 + \liminf_{n \to \infty} p_n) c \geq (1 - P_2) c > 0$$

bulunur. Dolayısıyla z_n pozitif ve (3.3) eşitsizliğini sağlar. $z_n \leq y_n$ ve y_n artmayan olduğundan z_n de artmayandır. Böylece $n \to \infty$ iken $z_n \downarrow d$ dır, burada $0 < d < \infty$ dur. $\varepsilon \in (0, d)$ verilsin. Bir $n_4 > n_0$ tam sayısı vardır öyle ki

$$d - \varepsilon < z_n < d + \varepsilon, \qquad n \geq n_4 \tag{3.13}$$

dır. j, Lemma 3.1.3 deki gibi tanımlansın. Bu durumda $n \geq n_5 \geq n_4$ için sırasıyla (3.13) eşitsizliğinin ve Lemma 3.1.3 ün kullanımıyla

$$\begin{aligned} z_n &= \tfrac{z_n}{z_{2^{j+1-m} n}} z_{2^{j+1-m} n} \\ &> \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} z_{2^{j+1-m} n} \\ &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} \tfrac{(2^{j+1-m} n - n_5)^{(m-1)}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} \tfrac{1}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} (n - 2^m n_5)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 2^{m+1}n_5 + m - 2$ için

$$\begin{aligned} z_n &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon}\tfrac{1}{(m-1)!}2^{(j+1-m)(m-1)}\tfrac{1}{2^{m-1}}n^{(m-1)}\Delta^{m-1}z_n \\ &\geq d_1\left(\tfrac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\Delta^{m-1}z_n \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir, burada

$$d_1 = 2^{(j-m)(m-1)}(d-\varepsilon)/\left[(d+\varepsilon)(m-1)!\right] \in (0,1)$$

dır. (3.14) ve (A_2) den $n \geq n_6 \geq n_5$ için

$$f(y_{n-l}) \geq F(y_{n-l}) \geq F(z_{n-l}) \geq K^2\gamma F(d_1)\, F\left(\left(\frac{n-l}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)}\right)\Delta^{m-1}z_{n-l}$$

yazılır. Eğer $\Delta^{m-1}z_n = w_n$ alınırsa

$$\Delta w_n + q_n(n-k)^{\alpha(m-1)}(d_1)^{\alpha}\left(\frac{1}{(m-1)!}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^{\alpha} \leq 0$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1}z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n(n-k)^{\alpha(m-1)}(d_1)^{\alpha}\left(\frac{1}{(m-1)!}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^{\alpha} \leq 0 \tag{3.15}$$

eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu durum (C_5) şartından Lemma 3.1.1 ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. $p_n \equiv 1$ olsun ve (C_6) sağlansın.

(a) Eğer m çift ise, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) Eğer m tek ise, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider(Agarwal, Thandapani, Wong 1996).

İspat. (1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_0$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır. $z_n = y_n + p_n y_{n-l}$ olmak üzere $n \geq n_0$ için $z_n \geq y_n > 0$ ve aynı zamanda (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri sağlansın. (3.1) denkleminde n_0 dan $(n-1)$'e kadar toplam alır ve (3.3) ve (A_2)eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\Delta^{m-1}z_{n_0} = \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s f(y_{s-l}) + \Delta^{m-1}z_n > \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s f(y_{s-k}) \geq \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s\gamma y_{s-l}$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s y_{s-l} < \infty \tag{3.16}$$

bulunur. İddia ediyoruz ki,

$$\liminf_{n\to\infty} y_n > 0$$

ise

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s < \infty$$

dur. Bunu ispatlamak için aksini kabul edelim. Yani

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s = \infty$$

ve

$$L = \inf_{s\geq n_0} y_{s-l} > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s y_{s-l} \geq L \sum_{s=n_0}^{\infty} q_s = \infty$$

yazılır. Böylece elde dilen bu sonuç (3.16) ile çelişir.

Durum (**a**) m çift olsun. Lemma 3.1.2 den görülür ki j tekdir ve böylece $\Delta z_n > 0, n \geq n_0$ dır. Buradan $n \geq n_1 > n_0$ için

$$0 < z_n - z_{n-k} = y_n - y_{n-2k}$$

elde edilir ve $y_n > y_{n-2k}$, $n \geq n_1$ dır. Sonuç olarak

$$\liminf_{n\to\infty} y_n > 0$$

dır. Böylece (3.16) dan

$$\sum_{s=0}^{\infty} q_s < \infty$$

dur. Bu sonuçta (C_6) şartı ile çelişir.

Durum (**b**) : m tek olsun ve $n \to \infty$ iken y_n sıfıra gitmesin. Lemma 3.1.2 den görebiliriz ki j çifttir. Eğer $j \geq 2$ ise $\Delta z_n > 0, n \geq n_0$ olduğu görülür. Durum (a) daki gibi bir çelişki elde edilecektir. Eğer $j = 0$ ise Lemma 3.1.2 den $\Delta z_n < 0, n \geq n_0$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken $z_n \to \beta$ dır, burada $0 < \beta < \infty$ dur. $\varepsilon \in (0, \beta)$ için bir $n_1 > n_0$ tam sayısı vardır öyle ki

$$z_n = y_n + y_{n-k} > \beta - \varepsilon > 0, \quad n \geq n_1$$

dir. Böylece

$$\liminf_{n \to \infty} y_n > 0$$

dır. Buradan

$$\sum_{s=0}^{\infty} q_s < \infty$$

olduğu görülür. Bu sonuçta (C_6) şartı ile çelişir.
Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.4. $p_n \equiv 1$ olsun. Eğer (C_5) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ için sıfıra gider(Agarwal, Thandapani, Wong 1996).

İspat. (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_o$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır. bundan başka kabul edelim ki y_n, $n \to \infty$ için sıfıra gitmesin ve $z_n = y_n + p_n y_{n-k}$ olmak üzere $z_n < y_n$ ve (3.2) eşitsizliklerini sağlasın. Eğer $z_n < 0$ ise o zaman $y_n < y_{n-k}$ olur ve böylece $\{y_n\}$ sınırlıdır. Bu da $\{z_n\}$ in sınırlı olduğunu gösterir. Eğer $z_n > 0$ ise o zaman $\{z_n\}$ sınırlıdır. Burada yeterince büyük n ler için $\{z_n\}$ in sınırlı olmadığını göstereceğiz. Lemma 3.1.3 ve Teorem 3.2.2 nin ispatındaki işlemler kullanılarak (C_5) şartı ile bir çelişki elde edilir. Bu sonuç (3.12) nin bir pozitif çözümünün $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ olduğunu verir. Böylece $\{z_n\}$ sınırlıdır. $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \mu > 0$, $\epsilon \in (0, \mu)$ verilsin, $n \geq n_1$ için $n_1 > n_0$ olduğunda $y_{n-l} > \mu - \epsilon$ olacak şekilde y_{n-l} vardır. Dolayısıyla

$$f(y_{n-l}) > F(y_{n-l}) \geq F(\mu - \epsilon) \quad n \geq n_1 \tag{3.17}$$

yazılır. (3.2) denklemi $(s-l)^{(m-1)}$ ile çarpılır ve n_1 den n e kadar toplam alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{s=n_1}^{n}(s-l)^{(m-1)}q_s f\left(y_{s-l}\right) &= -\sum_{s=n_1}^{n}(s-l)^{(m-1)}q_s\Delta^m z_s \\ &\leq -\sum_{s=n_1}^{n}s^{(m-1)}\Delta^m z_s \\ &= -\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\,\Delta^i s^{(m-1)}q_s\Delta^{m-i-1}z_{s+i} \\ &< \infty,\ \ n\geq n_1,\end{aligned}\tag{3.18}$$

elde edilir. En son eşitsizlikte $\{\Delta^{m-i-1}z_s\}$ de $\{z_n\}$ in sınırlı olduğunu kullandık ve bu son eşitsizliğin sınırlı olduğu görülür. (3.17) ve (3.18) den

$$F(\mu-\epsilon)\sum_{s=n_1}^{n}(s-l)^{(m-1)}q_s<\infty,\ \ n\geq n_1,$$

olduğu görülür ve buna denk olarak

$$\sum_{s=n_1}^{\infty}(s-l)^{(m-1)}q_s<\infty.\tag{3.19}$$

yazılır. Ancak, (C_5) şartındaki

$$\sum_{s=n_1}^{\infty}(s-l)^{(m-1)}q_s<\infty,$$

bu durum (3.19) ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

4 SALINIMLI KATSAYILI YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

4.1 Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Neutral Gecikmeli Salınımlı Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salı-nımlılık Davranışı

Çalışmanın bu bölümde

$$\Delta^m \left[y_n + p_n f\left(y_{\tau(n)}\right)\right] + q_n h\left(y_{\sigma(n)}\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümünün salınımlılık sonuçları araştırılacaktır. Burada Δ ileri fark operatörü, $m \in \{2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel değerli dizi, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ve $q : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ salınımlı bir fonksiyondur. $\tau(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\tau(n) \leq n$, ve $n \to \infty$ için $\tau(n) \to \infty$ dur. $\sigma(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(n) \leq n$ ve $n \to \infty$ için $\sigma(n) \to \infty$, $f, h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ azalmayan fonksiyonlar, her $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $uh(u) > 0$ dır. Her $n \geq \min_{i\geq 0}\{\tau(i), \sigma(i)\}$ için $y_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın ve yeterince büyük n ler için (4.1) denklemini sağlsın.

Son yıllarda yüksek mertebeden gecikmeli ve gecikmeli neutral fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ve asimtotik davranışları ile ilgili bir çok araştırma yapılmıştır. Bu bölümdeki amacımız (4.1) denkleminin sınırlı çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenecektir, buradaki z_n fonksiyonu

$$z_n = y_n + p_n f\left(y_{\tau(n)}\right) \tag{4.2}$$

ve $\mathbb{N}(a) = \{a, a+1, \ldots\}$, $\mathbb{N}(a, b) = \{a, a+1, \ldots, b\}$ dır.

Teorem 4.1.1. Kabul edelim ki m çift olsun.

(C_1) $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun ve $u,v>0$ için

$$-H(-uv)\geq H(uv)\geq KH(u)H(v),$$

$u\neq 0$ için

$$|h(u)|\geq |H(u)|, \quad \frac{H(u)}{u}\geq\gamma>0 \quad \text{ve} \quad H(u)>0$$

eşitsizlikleri sağlansın. Burada K pozitif bir sabittir.

(C_2) $\lim_{n\to\infty}p_n=0,$

(C_3) $\sum_{s=n_0}^{\infty}s^{m-1}q_s=\infty$ ve

$$\Delta w_n+q_nK\gamma H\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right)w_{\sigma(n)}=0 \tag{4.3}$$

birinci mertebeden fark denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin sınırlı her çözümü ya salınımlıdır ya da $n\to\infty$ iken sıfıra gider.

İspat. Kabul edelim ki (4.1) denklemi salınımlı olmayan sınırlı bir y çözüme sahip olsun. Yani y pozitif olsun(y negatif olduğu zaman da ispat benzer şekilde yapılabilir). O halde $n\geq n_1\geq n_0$ için $y_n>0$, $y_{\tau(n)}>0$ ve $y_{\sigma(n)}>0$ dır. Ayrıca kabul edelim ki $n\to\infty$ için y sıfıra gitmesin. (4.1) ve (4.2) den

$$\Delta^m z_n=-q_nh\left(y_{\sigma(n)}\right)\leq 0, \quad n\geq n_1. \tag{4.4}$$

olur. Dolayısıyla $\Delta^\alpha z_n$ $(\alpha=0,1,2,\ldots,m-1)$ monoton ve sabit işaretlidir. y sınırlı ve $n\to\infty$ için sıfıra gitmediğinden ve (C_2) den $\lim_{n\to\infty}p_nf\left(y_{\tau(n)}\right)=0$ dır. Bir $n_2\geq n_1$ için öyle bir $z_n=y_n+p_nf\left(y_{\tau(n)}\right)>0$ vardır öyle ki yeterince büyük $n\geq n_2$ için z_n sınırlıdır. Çünkü m çift ve $\Delta^m z_n\leq 0$ olduğundan $(n+m)$ tektir. $j=1$ için Lemma 3.1.2 den $z_n>0$ sınırlıdır. Çünkü (Aksi taktirde z_n sınırlı olmaz). $n\geq n_3$ için

$$(-1)^{i+1}\Delta^i z_n>0 \quad (i=0,1,2,\ldots,m-1) \tag{4.5}$$

olacak şekilde $n_3\geq n_2$ vardır. Özellikle $n\geq n_3$ için $\Delta z_n>0$ olduğundan z artandır. y sınırlı olduğu için (C_2) den $\lim_{n\to\infty}p_nf\left(y_{\tau(n)}\right)=0$ dır. Bu durumda $n\geq n_4$ için (4.2) den

$$y_n=z_n-p_nf\left(y_{\tau(n)}\right)\geq\frac{1}{2}z_n>0,$$

olacak şekilde $n_4 \geq n_3$ vardır. $n \geq n_5$ için

$$y_{\sigma(n)} \geq \frac{1}{2} z_{\sigma(n)} > 0 \tag{4.6}$$

olacak şekilde bir $n_5 \geq n_4$ bulunabilir. $n \geq n_5$ için (4.4) ve (4.6) dan

$$\Delta^m z_n + q_n h\left(\frac{1}{2} z_{\sigma(n)}\right) \leq 0,$$

sonucu elde edilir. $n \geq n_2$ için z tanımlı olduğundan, Lemma 3.1.3 direk uygulandığında $n \geq n_2$ için $\Delta^m z_n \leq 0$ dır. $z_n > 0$ olur. Yani z sıfır olamaz (z pozitif ve artan olduğu için Lemmanın 2. kısmı uygulanır). Dolayısıyla Lemma 3.1.3 den

$$y_{\sigma(n)} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1} z_{\sigma(n)}, \quad n \geq 2^{m-1} n_1. \tag{4.7}$$

olur. $n \geq n_6 \geq n_5$ için (C_1) ve (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
h(y_{\sigma(n)}) &\geq H(y_{\sigma(n)}) \\
&\geq H\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1} z_{\sigma(n)}\right) \\
&\geq KH\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right) H(\Delta^{m-1} z_{\sigma(n)}) \\
&\geq K\gamma H\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right) \Delta^{m-1} z_{\sigma(n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.4) ve yukarıdaki eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n K\gamma H\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right) w_{\sigma(n)} \leq 0$$

eşitsizliğinin bir pozitif çözümü olduğu görülür. O halde

$$\Delta w_n + q_n K\gamma H\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right) w_{\sigma(n)} = 0, \quad n \geq n_7 \geq n_6$$

deklemi pozitif çözüme sahiptir. Bu (4.1) denkleminin salınımlılığı ile çelişir ve ispat tamamlanmış olur.

Böylece Teorem 4.1.1 den aşağıdaki Sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1. Eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=\sigma(n)}^{n-1} q_s H\left(\frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\sigma(s)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right) > \frac{1}{\mathrm{e}K\gamma},$$

olursa (4.1) denkleminin sınırlı her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider. $p_n \equiv 1$ ve $m = 2$ için Sonuç 4.1.1 den

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=\sigma(n)}^{n-1} q_n H\left(\frac{1}{4}\sigma(s)\right) > \frac{1}{\mathrm{e}K\gamma},$$

olduğu için

$$\Delta^2 y_n + q_n h\left(y_{\sigma(n)}\right) = 0, \quad n \geq n_0$$

fark denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.1.2. Kabul edelim ki m tek ve (C_2), (C_3) sağlansın. Bu durumda (4.1) denkleminin sınırlı her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider.

İspat. Kabul edelim ki (4.1) denklemi salınımlı olmayan sınırlı bir y çözüme sahip olsun. Yani y pozitif olsun(y negatif olduğu zaman da ispat benzer şekilde yapılabilir). O halde $n \geq n_1 \geq n_0$ için $y_n > 0$, $y_{\tau(n)} > 0$ ve $y_{\sigma(n)} > 0$ dır. Ayrıca kabul edelim ki $n \to \infty$ iken y sıfıra gitmesin. (4.1) ve (4.2) den

$$\Delta^m z_n = -q_n h\left(y_{\sigma(n)}\right) \leq 0, \quad n \geq n_1. \tag{4.8}$$

yani $\Delta^m z_n \leq 0$ dır. Dolayısıyla $\Delta^\alpha z_n \, (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ monoton ve sabit işaretlidir. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ olduğundan öyle bir $n_2 \geq n_1$ vardır öyle ki $n \geq n_2$ için $z_n > 0$ dır. y sınırlı olduğundan (C_2) ve (4.2) den $n_3 \geq n_2$ vardır öyle ki $n \geq n_3$ için z_n sınırlıdır. m tek ve z sınırlı olduğundan Lemma 3.1.2 den $j = 0$ (Aksi taktirde z sınırlı olmaz) için bir $n_4 \geq n_3$ vardır ve $n > n_4$ için $(-1)^i \Delta^i z_n > 0 \, (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ dır. Özellikle $n \geq n_4$ için $\Delta z_n < 0$ olduğundan z azalandır. z sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, $(-\infty < L < \infty)$ yazılabilir. Kabul edelim ki $0 \leq L < \infty$ olsun. Eğer $L > 0$ olduğu zaman $n \geq n_5$ için $z_n > c > 0$ olacak şekilde bir $n_5 > n_4$ ve bir $c > 0$ vardır. y sınırlı olduğu için (C_2) den $\lim_{n\to\infty} p_n f\left(y_{\tau(n)}\right) = 0$ olur. Böylece $n \geq n_6$ için $y_n = z_n - p_n f\left(y_{\tau(n)}\right) > c_1 > 0$ olacak şekilde $n_6 > n_5$ ve bir $c_1 > 0$ vardır. Böylece $n \geq n_7$ için $y_{\sigma(n)} > c_1 > 0$ olacak şekilde $n_7 > n_6$ vardır. (4.8) den

$$\Delta^m z_n \leq -q_n h c_1 \quad n \geq n_7 \tag{4.9}$$

olur. (4.9) n^{m-1} ile çarpıldıktan sonra n_7 den $n-1$ e kadar toplam alınırsa

$$F(n) - F(n_7) \leq -h(c_1) \sum_{s=n_7}^{n-1} q_s s^{m-1}, \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada

$$F(n) = \sum_{\gamma=2}^{n-1} (-1)^{\gamma} \Delta^{\gamma} n^{m-1} \Delta^{m-\gamma-1} z(n+\gamma)$$

dır. $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ve $n \geq n_4$ için $(-1)^i \Delta^i z_n > 0$ olduğundan $n \geq n_7$ için $F(n) > 0$ dır. (4.10) dan

$$-F(n_7) \leq -h(c_1) \sum_{s=n_7}^{n-1} q(s) s^{m-1}$$

yazılır. $n \to \infty$ iken (C_3) den

$$-F(n_7) \leq -h(c_1) \sum_{s=n_7}^{n-1} q_s s^{m-1} = -\infty$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $L > 0$ olamaz. Bu sadece $L = 0$ durumunda sağlanır. Yani $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ dır. y sınırlı olduğu için (C_2) ve (4.2) den

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} p_n f\left(y_{\tau(n)}\right) = 0$$

elde edilir. Şimdi $n \geq n_1$ için $y_n < 0$ durumunu inceleyelim. (4.1) ve (4.2) den

$$\Delta^m z_n = -q_n h\left(y_{\sigma(n)}\right) \geq 0 \quad (n \geq n_1)$$

elde edilir. Yani $\Delta^m z_n \leq 0$ dır. Dolayısıyla $\Delta^{\alpha} z_n \, (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ monoton ve sabit işaretlidir. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ olduğundan öyle bir $n_2 \geq n_1$ vardır öyle ki $n \geq n_2$ için $z_n < 0$ dır. y sınırlı olduğundan (C_2) ve (4.2) den $n_3 \geq n_2$ vardır öyle ki $n \geq n_3$ için z_n sınırlıdır. Kabul edelim ki $x_n = -z_n$ olsun. Bu durumda $\Delta^m x_n = -\Delta^m z_n$ olur. Böylece $x_n > 0$ ve $n \geq n_3$ için $\Delta^m x_n \leq 0$ dır. Buradan da x_n nin sınırlı olduğu görülür. m tek ve z sınırlı olduğundan Lemma 3.1.2 den $j = 0$ (Aksi taktirde z sınırlı olmaz) için bir $n_4 \geq n_3$ vardır ve $n > n_4$ için $(-1)^i \Delta^i z_n > 0 \, (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ dır.. Yani $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ve $n \geq n_4$ için $(-1)^i \Delta^i z_n < 0$ dır. Özellikle $n \geq n_4$ için $\Delta z_n > 0$ dır. Böylece z_n artandır. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, $(-\infty < L \leq 0)$. $y_n > 0$ ının ispatı için $L = 0$ olduğu gösterilebilir. Kalan kısım yani $y_n > 0$ için ispat benzer şekilde gösterilebilir. Yani $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ dır. Bu da bizim kabulümüz ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.4

$$\Delta^4 \left[y_n + \left(-\frac{1}{2} \right)^n y_{n-2}^3 \right] + \frac{1}{n^2} \left(y_{n-3}^3 + y_{n-3} \right) = 0, \qquad (4.11)$$

burada $m = 4$, $\tau(n) = n - 2$, $p_n = (-1/2)^n$, $q_n = 1/n^2$, $\sigma(n) = n - 3$, $f(y) = y^3$, $h(y) = y^3 + y$. $H(u) = u$ olsun, indirgenmiş denklem ve $K = \gamma = 1$ olup,

$$\Delta w_n + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{12} \left(\frac{n-3}{8} \right)^3 \right) w_{n-3} = 0$$

olur.

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=n-3}^{n-1} \frac{1}{s^2} \frac{1}{2} \frac{1}{3!} \left(\frac{s-3}{2^3} \right)^3 > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

olduğundan dolayı, Teorem 4.1.1 den (4.11) denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır.

Örnek 4.1.5

$$\Delta^3 \left[y_n + e^{-5n^2} \left[y_{n-5}^2 + 2y_{n-5} \right] \right] + \frac{1}{n^3} y_{n-3}^2 = 0, \quad n \geq 2 \qquad (4.12)$$

burada $m = 3$, $q_n = 1/n^3$, $\sigma(n) = n - 3$, $\tau(n) = n - 5$, $p_n = e^{-5n^2}$ $f(y) = y^2 - 2y$ $h(y) = y^2$dır.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{5n^2}} = 0$$

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} s^{m-1} q_s = \sum_{s=n_0}^{\infty} s^{-1} = \infty.$$

yazılabilir. Teorem 4.1.2 nin şartlarını sağladığı için (4.12) denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır.

5 KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., 2000, "Difference Equations and Inequalities", Marcel Dekker, New York.

Agarwal, R. P., 1997, "Advanced Topics in Difference Equation", Kluwer Academic, London.

Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D., 2000, "Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations", Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Agarwal, R. P., Thandapani, E., Wong, P. J. Y., 1997, "Oscillations of higher-order neutral difference equations", Appl. Math. Lett. **10** (1), 71-78.

Agarwal, R. P., Grace, S. R., 1999, "Oscillation of higher-order nonlinear difference equations of neutral type", Appl. Math. Lett. **12**, 77-83.

Agarwal, R. P. and Grace, S. R., 2000, "Oscillation of higher-order difference equations", Appl. Math. Lett. **13**, 81-88.

Agarwal, R. P. and Grace, S. R., 1999, "Oscillation of certain difference equations", Mathematical and Computer Modelling, **29**, 1-8.

Agarwal, R. P. and Patricia, Y. J. W., 1997, "Advanced topics in difference equations", Kluwer Academic Publishers, Boston.

Berezansky, L. and Braverman, E., 2006, "On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays", Adv. Dyn. Syst. Appl., 1, 29-47.

Bohner, M., Karpuz, B. and Öcalan, Ö., 2008, "Iterated oscillation criteria for delay dynamic equations of first order", Adv. Difference Equ., 458687, 12.

Bolat, Y., Akın, Ö., 2004, "Oscillatory behaviour of a higher-order nonlinear neutral type functional difference equation with oscillating coefficients", Appl. Math. Lett., 17, 1073-1078.

Bolat, Y., Akın, Ö. and Yildirim, H., 2009, "Oscillation criteria for a certain even order neutral difference equation with an oscillating coefficients", Appl. Math. Lett., 22, 590-594.

Chuanxi, Q. , Kuruklis, S. A. and Ladas, G., 1990, "Oscillations of linear autonomous systems of difference equations", Applicable Analysis", 36; 51-63

Elaydi, S., 1999, "An introduction to difference equations", Springer-Verlag, Newyork.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G., 1989, "Oscillation of discrete analogues of delay equations", Differential and Integral Equations, 2; 300-309.

Goldberg, S., 1958, "Introduction to difference equations", Newyork.

Guan, X., Yang, J., Liu S. T. and Cheng, S. S., 1999, "Oscillatory behavior of higher order nonlinear neutral difference equation", Hokkaido Mathematical J., 28, 393–403.

Györi, I. and Ladas, G., 1991, "Oscillation theory of delay differential equations", Clarendon press. ,Oxford.

Kelley, W. C. and Peterson, A. C., 1991, "Difference equations an introduction with applications", Academic Press., San Diego.

Ladas, G. , Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G., 1989, "Sharp condition for the oscillation of delay difference equations", Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2; 101-112.

Ladas, G., 1990, "Explicit conditions for the oscillation of difference equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153; 276-287.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D., 1988, "Theory of difference equations; Nümerical methods and applications", Academic Press. , San Diego.

Li, X. and Jiang, J., 2002, "Oscillation of second-order linear difference equation", Math. Comput. Modelling, 35, 983–990.

Tang, X. H. and Zhang, R. Y., 2001, "New oscillation criteria for delay difference equations", Computers and Mathematics With Applications, 42; 1319-1330.

Tang, X. H. and Liu, Y. J., 2001, "Oscillation for nonlinear delay difference equations", Tamkang J. Math. **32**, 275-280.

Thandapani, E., Arul, R. and Raja, P. S., 2003, "Oscillation of first order neutral delay difference equations", Applied Mathematics E-Notes, **3**, 88-94.

Szmanda, B., 1998, "Properties of Solutions of higher order difference equations", Math. Comput. Modelling, 28(10), 95–101.

Yildiz, M. K. and Öcalan, Ö., 2007, "Oscillation results for higher order nonlinear neutral difference equations", Appl. Math. Lett., 20, 243-247.

Yuecai F., 1999, "Oscillatory behaviour of higher order nonlinear neutral functional differential equation with oscillating coefficients", J. South China Normal Univ., 3, 6–11.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Qian, X. Z., 1993, "Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 177; 432-444.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Wang, Z. C., 1994, "Oscillation of delay difference equations", Applicable Analysis, 53; 117-124.

Yu, J. S. and Tang, X. H., 2000, "Sufficient conditions for the oscillation of linear delay difference equations with oscillating coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 250; 735-742.

Zhang, G., 2002, "Oscillation for nonlinear difference equations", Applied Mathematics E-Notes, **2**, 22-24.

Zhang, G., and Gao, Y., 1999, "Positive solution of higer order nonlinear difference equation", Sys. Sci & Math. Scis **19**, 157-167.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Emrah KARAMAN

Doğum Yeri : EREĞLİ/KONYA

Doğum Tarihi : 22.04.1986

Medeni Hali : Bekar

Cinsiyeti : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

İlköğretim : Konya Ereğli Dumlupınar İlköğretim Okulu (1992-2000)

Lise : Konya Ereğli Atatürk Lisesi (2000-2004)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2004-2008)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2008-)

Çalıştığı Kurum-Kurumlar ve Yıl

Söğüt Çözüm Dergisi Dershanesi (2008-2009)

Afyonkarahisar Atatürk Lisesi(2010)

Yayınlar

Bu çalışmanın dördüncü bölümüde ele alınan

$$\Delta^m \left[y_n + p_n f\left(y_{\tau(n)}\right)\right] + q_n h\left(y_{\sigma(n)}\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını araştırdığımız "Oscillatory behaviour of a higher-order nonlinear neutral type functional difference equation with oscillating coefficients" isimli çalışma AMG 2010 da bildirili olarak sunulmuştur ve yayın için gönderilmiştir.