

**(2+1) BOYUTLU DISPERSIVE DALGA
DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Naki ÇALTINER
DANIŞMAN
Yard.Doç.Dr, M. Eyüp KIRIŞ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Haziran, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(2+1) BOYUTLU DISPERSİVE DALGA
DENKLEMLERİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Naki ÇALTINER

DANIŞMAN

Yard.Doç.Dr. M. Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Naki ÇALTINER tarafından hazırlanan “(2+1) Boyutlu Dispersive Dalga Denklemlerinin Nümerik Çözümleri Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. M. Eyüp Kiriş

Başkan : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü ,

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(2+1) BOYUTLU DISPERSIVE DALGA DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Naki ÇALTINER

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Diferensiyel denklem sistemlerinin, kesin, yaklaşık, ve sadece nümerik şekilde çeşitli yöntemlerle çözümleri mevcuttur. Bu yöntemlerin birçoğu, yoğun bir hesaplama gerektirir çünkü ya deneme-yanılma ya da karmaşık sembolik hesaplamalardır. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi integral dönüşümleri çoğunlukla diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır ve bu integral dönüşümlerinin kullanılabilirliği, basit ve sistematik çözüm prosedürlerini sağlayan cebirsel eşitlikler içerisindeki diferensiyel denklemlerin dönüşümünde yatmaktadır. Ancak; integral dönüşümünün non-lineer problemlerde kullanılması karmaşıklığı arttırabilir.

Bu çalışma, (2+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemleri olarak adlandırılan, homogen olmayan başlangıç koşulları ile kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin, diferensiyel dönüşüm yöntemi ve ilk kez G. Adomian tarafından 1984 de ortaya konulan Adomian Ayrışım Yöntemi ile incelenmesini içermektedir. Bununla birlikte bu iki yöntem ile bulduğumuz sonuçlar ile analitik çözümü arasında bir karşılaştırma yapacağız. Sonuç olarak sistemimizin sonuçları bize bu iki yöntemin lineer ya da non-lineer yüksek mertebeden başlangıç-değer problemlerinin çözümünde

alternatif yollar olduğunu gösterecektir.

2013, ix + 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel Denklemler, Dalga Denklemleri, Adomian Ayrışım Yöntemi, Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi, Varasyonel İterasyon Yöntemi

ABSTRACT

M.Sc Thesis

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF WAVE EQUATION

Naki ÇALTINER

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet Eyüp KIRIŞ

There is various ways for solving differential equations as an exact, approximate and numerical. Most of these methods needs intensive computation because of there is a lot of symbolic and complex computations. Integral transforms like a Laplace and Fourier transforms in solving differential equations are used mostly and usability of these integral transforms, provides a simple and systematic procedures for the solution of algebraic equations. However, using the integral transformation may increase the complexity for non-linear problems.

This study includes that mainly Variational Iteration, Differential Transform and Adomian Decomposition solutions of partial differential equations referred to as (2+1) dimensional Dispersive Long Wave Equations. However, we found that the three methods will do a comparison with the results of the analytical solution. The results of our system as a result of these three methods of higher order linear or non-linear initial-value show that alternative ways of solving problems.

2013, ix+ 35 pages

Key Words: Differential Equations, Wave Equations, Adomian Decomposition Method, Differential Transformation Method, Variational Iteration Method,

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Eyüp KİRİŞ' e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı kıymetli eşime ve aileme teşekkür ederim.

Naki ÇALTINER
AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Amaç ve Kapsam	1
1.2 Literatür Özeti	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Adi Diferensiyel Denklemler	2
2.2 Kısmi Diferensiyel Denklemler	2
3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMERİ	3
3.1 Adomian Ayrışım Yöntemi	3
3.2 Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	5
3.2.1 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm	5
3.2.2 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm	6
3.3 Varyasyonel İterasyon Yöntemi	8
3.3.1 Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü	16
3.3.2 Yüksek Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü	16
4. DALGA DENKLEMLERİ	17
4.1 Bir Boyutlu Dalga Denklemi	17

4.2 Dalga Denklemine Elde EdiliŖi.....	18
4.3 İki Boyutlu Dalga Denklemi.....	19
4.3.1 Dikdörtgen Membran.....	20
4.3.2 Dairesel Membran.....	21
5. DALGA DEKLEMLERİNİN NÜMERİK (SAYISAL) ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ	24
5.1 Diferensyel Dönüşüm Yönteminin Dalga Denklemine Uygulanması.....	25
5.2 Adomian Ayrışım Yönteminin Dalga Denklemine Uygulanması.....	27
5.3 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Probleme Uygulanması	31
6. KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	36

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4.1.1 : Diapozon Yardımı ile Bir Ucu Sabit Gergin Telde Dalganın oluşturulması	18
Şekil 4.2.1 : Dalganın keyfi x , $x + \Delta x$ Aralığındaki Durumu	19
Şekil 4.3.1.1 : Dikdörtgen Membran	20
Şekil 4.3.2.1 : Dairesel Membran	22

TABLULAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 3.1: Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm	6
Tablo 3.2: İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm	7
Tablo 3.3: Genel Lagrange Çarpanının Elde Edilmesinde Kullanılan Maple Kodları	14
Tablo 3.4: Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Maple Kodları	15
Tablo 5.1: $z = -0.01$ için $u(z, t)$ nin karşılaştırılması	26
Tablo 5.2: $z = -0.01$ için $v(z, t)$ nin karşılaştırılması	26
Tablo 5.3: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi İçin Maple Kodları	27
Tablo 5.4: Adomian Ayrışım Yöntemi İçin Maple Kodları	30
Tablo 5.5: $z = -0.01$ için $u(z, t)$ 'nin karşılaştırılması	31
Tablo 5.6: $z = -0.01$ için $v(z, t)$ 'nin karşılaştırılması	31
Tablo 5.7: $z = -0.01$ için $u(z, t)$ 'nin karşılaştırılması	32
Tablo 5.8: $z = -0.01$ için $v(z, t)$ 'nin karşılaştırılması	32

1. GİRİŞ

1.1 Amaç ve Kapsam

Diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak tarih boyunca mühendislik ve fiziğin temel ihtiyacı olmuştur. Bu alandaki ihtiyaçları karşılamak birçok bilim insanı tarafından hedef edinilmiş ve çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Varyasyonel İterasyon Metodu başta olmak üzere literatürde çok çeşitli yöntemler mevcuttur. Bu çalışma içerisinde de bu nümerik metotlardan bazılarına değinilmiş, elde edilişleri araştırılıp basit örneklerle izah edilmiştir. Bu çalışmanın yegane maksadı nümerik yöntemlerin karşılaştırılıp avantajlı olanların kullanımlarını yaygınlaştırmaktır.

1.2 Literatür Özeti

Diferensiyel denklem sistemlerinin, kesin, yaklaşık, ve sadece nümerik şekilde çeşitli yöntemlerle çözümleri mevcuttur. Bu yöntemlerin birçoğu, yoğun bir hesaplama gerektirir çünkü ya deneme-yanılma ya da karmaşık sembolik hesaplamalardır. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi integral dönüşümleri çoğunlukla diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır ve bu integral dönüşümlerinin kullanılabilirliği, basit ve sistematik çözüm prosedürlerini sağlayan cebirsel eşitlikler içerisindeki diferensiyel denklemlerin dönüşümünde yatmaktadır. Ancak; integral dönüşümünün non-lineer problemlerde kullanılması karmaşıklığı arttırabilir.

Adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin ve özellikle çalışmamıza konu olan (2+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemleri olarak adlandırılan, homogen olmayan başlangıç koşulları ile kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri birçok bilim insanı tarafından incelenmiştir. Bu hazırladığımız tez son dönemlerde diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde sıklıkla kullanılan diferensiyel dönüşüm, adomian ayrışım ve varyasyonel iterasyon yöntemlerini içermektedir. Jang M.J., Chen C.L., Liu Y.C., “Two dimensional differential transform for partial differential equations” başlıklı çalışmada, diferensiyel dönüşüm yöntemi; Abdel-Halim Hassan I.H., “Different applications for the differential transformation method” isimli çalışmada, Ayaz F., “On the two dimensional differential transform method” ve Kurnaz A., Oturanç G., “The Differential Transform approximation for the system of ordinary differential equations” çalışmalarında uygulamaları ile birlikte diferensiyel dönüşüm yöntemi ile

İlgili çalışmalarını literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca Kiriş M.E., “Kesirli Türevlere Sahip Diferansiyel Denklemler ve Pantograf Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi Yöntemi ile Çözümlerinin İncelenmesi” isimli doktora tezi çalışmasında bu yönteme dair etkileyici örnekler ve uygulamalar literatüre kazandırılmıştır. İlk kez G. Adomian tarafından 1984 de ortaya konulan Adomian Ayrışım Yöntemi de çok çeşitli araştıra ve uygulamalara temel teşkil etmiştir. Bunların başında Abdul-Majid Wazwaz “A reliable modification of Adomian decomposition method” isimli çalışma gelmektedir. Son olarak Varyasyonel İterasyon Yöntemi Ji-Huan He tarafından ortaya konulmuş ve oldukça geniş çalışmalar yine kendisi ve diğer bilim insanlarınca yürütülmüştür. Konumuza yakın bir çalışma 2008 yılında A.A. Hemeda tarafından “Variational İteration Method for Solving Wave Equation” isimli makalede izah edilmiştir. Yine Dalga Denklemleri için aynı yıl J.Biazar ve H.Ghazvini tarafından yapılmış “An Analytical Approximation to the Solution of a Wave Equation by a Variational Iteration Method” isimli makale de literatüre oldukça faydalı katkı sağlamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Adi Diferansiyel Denklemler

Adi türevli diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n)=0$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklem n. mertebeden türevli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme adi türevli diferansiyel denklem denir.

2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve bu durumda denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak bir kısmi diferansiyel denklem; x, y, \dots lar bağımsız değişken ve

$u(x, y, \dots)$ bağımlı değişken olmak üzere;

$$F(x, y, \dots, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, \dots) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Bunun yanında matematik ve fiziğin temel operatörlerinden biri olan Δ Laplace Operatörü;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace Dönüşümü denir. Benzer biçimde n-boyutlu Laplace Operatörü'ne kadar tanımlanabilir. x, y bağımsız değişkenler u bağımlı değişken, $A, B, C; x, y, u, p, q$ nun fonksiyonu olmak üzere,

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + f(x, y, u, p, q) = 0$$

ikinci mertebeden genel kısmi türevli diferensiyel denklemini alalım. Denklemin katsayıları arasındaki $B^2 - 4AC$ diskriminant değerinin işaretine göre;

$$B^2 - 4AC > 0 \text{ ise hiperbolik}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \text{ ise parabolik}$$

$$B^2 - 4AC < 0 \text{ ise eliptik}$$

tip diferensiyel denklem denilir. Örneğin;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \text{ (Hiperbolik)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \text{ (Eliptik)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F \text{ (Parabolik)}$$

diyebiliriz.

3. DİFERESİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

3.1 Adomian Ayrışım Yöntemi

Bu metod yapısal olarak;

$$F[u(t)] = g(t) \quad (3.1.1)$$

denklemini dikkate alınarak denklemdaki lineer terim'in $L + R$ biçiminde ayrılmasına dayanır. Burada $u(t)$ bilinmeyen ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olup F' de lineer ve

lineer olmayan terimler içeren bir diferensiyel operatördür. Ayrıca L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferensiyel operatör ve R 'de lineer operatörün geri kalan kısmıdır. O halde (3.1.1) denklemi,

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada N lineer olmayan operatör olup, (3.1.2) eşitliğini her iki yanına L^{-1} operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.1.3)$$

yazılabilir. Adomian ayrışım yöntemi ile $u(t)$ 'nin çözümü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.1.4)$$

şeklinde seri formunda hesaplanır ve lineer olmayan Nu terimleri de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.5)$$

biçiminde ayrıştırılır. Burada A_n 'ler u_0, u_1, \dots, u_n 'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. u ve Nu lar sırasıyla

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \\ Nu &= N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n 'ler;

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.1.7)$$

şeklinindedir. (3.1.5) ve (3.1.6) ifadelerini (3.1.3)'te yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad (3.1.8)$$

elde ederiz. Burada $u(0) = \theta$ dir. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimlerini indirgeme formülü ile

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1}g \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

şeklinde bulunur. Böylece (3.1.2) ifadesinin çözümü seri formunda elde edilmiş olur. Uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin tüm terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= u_0 \\ \phi_2 &= u_0 + u_1 \\ &\vdots \\ \phi_{n+1} &= u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

şeklinde bulunur.

3.2 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik (sayısal) bir yöntem olup bu yöntem ilk defa elektrik devrelerinde, lineer ya da non-lineer başlangıç değer problemlerini çözen Zhou tarafından (1986) da tanımlanmıştır.

3.2.1 Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0}$$

(3.2.1.1)

biçiminde tanımlanır. Burada $Y(k)$, $y(x)$ ile verilen bir fonksiyonun diferansiyel dönüşümünü, $\frac{d^k}{dx^k}$ ise x 'e göre k . mertebeden türevi temsil etmektedir. $Y(k)$ nın ters diferansiyel dönüşümü ise

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.2.1.2)$$

olarak tanımlanır. (3.2.1.1) ve (3.2.1.2) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (3.2.1.3)$$

sonucu elde edilebilir. Yukarıdaki tanımlamalardan sonra diferansiyel dönüşüm kavramının Taylor seri açılımından türetildiği açıkça görülebilir. (3.2.1.1) ve (3.2.1.2) ifadeleri yardımıyla aşağıda Tablo1 de verilen özelliklerin doğruluğu kolayca görülebilir.

Tablo 3.1: Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

Fonksiyon Tipi	Dönüşüm Fonksiyonu	
$y(x) = \lambda \cdot u(x)$	$Y(k) = \lambda \cdot U(k)$	(3.2.1.4.a)
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$	(3.2.1.4.b)
$y(x) = \frac{d^m}{dx^m} u(x)$	$Y(k) = \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)$	(3.2.1.4.c)
$y(x) = u(x) \cdot v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r) \cdot V(k-r)$	(3.2.1.4.d)
$y(x) = x^m$	$Y(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$	(3.2.1.4.e)

3.2.2 İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm:

Benzer şekilde, iki değişkenli bir $w(x, y)$ fonksiyonunu de aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (3.2.2.1)$$

Burada, $W(k, h)$, iki değişkenli $w(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümüdür. $W(k, h)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu ise,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} W(k, h) \cdot x^k \cdot y^h \quad (3.2.2.2)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.2.2.1) ve (3.2.2.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.2.2.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h \quad (3.2.2.3)$$

Böylece, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm için temel matematiksel işlemler kullanılarak aşağıdaki Tablo2 elde edilebilir.

Tablo 3.2: İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

Fonksiyon Tipi	Dönüşüm Fonksiyonu	
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$	(3.2.2.4.a)
$w(x, y) = \alpha \cdot u(x, y)$	$W(k, h) = \alpha \cdot U(k, h)$	(3.2.2.4.b)
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = (k+1) \cdot U(k+1, h)$	(3.2.2.4.c)
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = (h+1) \cdot U(k, h+1)$	(3.2.2.4.d)
$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$	$W(k, h) = \frac{(k+r)!}{k!} \cdot \frac{(h+s)!}{s!} \cdot U(k+r, h+s)$	(3.2.2.4.e)
$w(x, y) = u(x, y) \cdot v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) \cdot V(k-r, s)$	(3.2.2.4.f)
$w(x, y) = x^m \cdot y^n$	$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1 & k=m \text{ ve } h=n \\ 0 & \text{Aksi Halde} \end{cases}$	(3.2.2.4.g)
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2) \cdot (k-r+1) \cdot U(r, h-s) \cdot V(k-r+2, s)$	(3.2.2.4.h)
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1) \cdot (k-r+1) \cdot U(r+1, h-s) \cdot V(k-r+1, s)$	(3.2.2.4.i)
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1) \cdot (h-s+1) \cdot U(k-r+1, s) \cdot V(r, h-s+1)$	(3.2.2.4.i)
$w(x, y) = u(x, y) \cdot v(x, y) \cdot \omega(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p) \cdot V(t, s) \cdot \Omega(k-r-t, p)$	(3.2.2.4.j)

3.3 Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Yöntemin ayrıntısına geçilmeden önce varyasyon tanımı üzerinde durulacaktır;

$$I = I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) \quad (3.3.1)$$

fonksiyoneli gözden geçirilsin. $y = y(x)$ deki değişikliğe karşılık $I(y)$ deki değişiklikler dikkate alınsın. Bu durumda;

1. $\forall x \in [x_1, x_2]$ için $y = y(x)$ eğrisi bulunabilirse öyle ki diğer tüm $Y = Y(x)$ eğrileri için;

$$a. I(y) \geq I(Y)$$

ise bu durumda y eğrisi $I(y)$ fonksiyoneli için bir maksimum değer üretir.

$$b. I(y) \leq I(Y)$$

ise bu durumda y eğrisi $I(y)$ fonksiyoneli için bir minimum değer üretir.

$Y = Y(x)$ eğrileri y eğrisinden biraz farklı olup y bir ekstremum değer üretir. Bu da; η keyfi bir eğri (integralin bitiş notaları boyunca yani $x_1 - x_2$ boyunca keyfi bir eğri) ve ϵ çok küçük bir değer olmak üzere,

$$Y = Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ϵ daki yapılacak değişiklik $I(y)$ fonksiyonelindeki fonksiyonun değişikliğini gerçekleştirir. (3.3.1) de $Y = Y(x)$ yazacak olursak;

$$I = I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx$$

yazılabilir. Bu durumda $\epsilon = 0$ noktasında bir ekstremum değeri vardır. Eğer $I(\epsilon)$, ϵ nun süreli bir fonksiyonu ise;

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$$

ifadesini sağlayan noktalarda fonksiyonelin bir sabit noktası vardır. I fonksiyonelinin ekstremum noktalarını üreten tüm ϵ eğrilerini bulmak için bu genel yaklaşım kullanılacaktır. Verilen ekstremum değere sahip fonksiyonelin tüm eğri ailelerinin her bir üyesinin sağladığı gerekli şartlar elde edilecektir. Verilen bir fonksiyonelin bir ekstremum değerini üreten bir eğriyi belirlemek için daha fazla şeye ihtiyaç vardır.

Burada belirtilmelidir ki ekstremum değerin varlığı için gerekli tek şart;

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$$

olmasıdır. Bu şart bize sabit noktaları verir. Sabit noktaların bir maximum-minimum veya eğer noktası olup olmadığını belirlemek için ikinci türev testine ihtiyaç vardır.

Bu aşamada bilinen basit fonksiyonlardan yararlanılarak bazı çıkarımlarda bulunulacaktır.

f ; (x_1, x_2) aralığı üzerinde $f \in C^2$ olmak üzere,

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx \quad (3.3.2)$$

integrandını alalım. (3.3.2) integralindeki $y(x)$ fonksiyonunun varyasyonu ve $y'(x)$ türevi varyasyonel problem olarak bilinir ve varyasyonel analizin içindeki en temel problemdir. Bu durumda (3.3.2) fonksiyoneline yerine yazılacak fonksiyonlar gereklidir, öyle ki;

- i. integral mevcut,
- ii. $y = y(x) \in C^2$; $R = \{x | x_1 \leq x \leq x_2\}$,
- iii. $y = y(x)$ fonksiyonu x_1 ve x_2 noktalarında tanımlı yani;
 $y(x_1) = y_1$ ve $y(x_2) = y_2$ olmalı.

(3.3.2) ifadesinde verilen ve sabit değere sahip I integralini çözüm ailesi olarak kabul eden bir diferensiyel denklem oluşturabilmek için bir yöntem sunulacak.

Kabul edilsin ki C eğrisini tanımlayabilen bir $y(x)$ fonksiyonu bulunsun. Bu y fonksiyonu sabit değere sahip bir fonksiyoneli sağlıyor olsun. Bu durumda;

$$Y = Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (3.3.3)$$

fonksiyonu dikkate alınsın.(ki bu fonksiyon C^* eğrisi tanımlar) Burada ϵ küçük bir parametre ve $\eta(x)$ $[x_1, x_2]$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon, $\eta(x_1) = 0$ ve $\eta(x_2) = 0$ olsun. Burada $\eta(x)$ üzerindeki bitiş şartları $Y(x)$ ve $y(x)$ in aynı sabit değeri üretecek şekilde seçilmiştir. Böylece $\forall \epsilon$ parametresi için;

$$Y(x_1) = y(x_1) = y_1 \quad \text{ve} \quad Y(x_2) = y(x_2) = y_2$$

olur. Eğer η, ϵ dan bağımsız ve limit durumunda $\epsilon \rightarrow 0$ iken $C^* \rightarrow C$ olursa ve aynı anda C^* eğrisi boyunca C eğrisi boyunca eğrilere yaklaşırsa $\forall (x_1 \leq x \leq x_2)$ için varyasyona zayıf varyasyon denir. Bu yüzden; $|Y(x) - y(x)|$ ve $|Y'(x) - y'(x)|$ her ikisi birden $\epsilon \rightarrow 0$ iken sıfıra yaklaşır ve $Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x, \epsilon)$ biçimindedir. Burada

(3.3.3) ifadesini (3.3.2) de yerine yazacak olursak;

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx$$

olup $\epsilon = 0$ da bir sabit değere sahiptir. Yani;

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad I'(\epsilon) = 0 \quad (3.3.4)$$

dir.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\epsilon} = I'(\epsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\epsilon} f(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx \end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla bu da ;

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

ifadesine denktir.

$$I'(0) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx$$

ifadesinde sağ taraftaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa, yani;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'} = u \quad \leftrightarrow \quad u' &= \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \eta' dx = d\vartheta \quad \leftrightarrow \quad \vartheta &= \eta \end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) dx + \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \right\} = 0$$

elde edilir. İntegral sınırları aynı olduğundan;

$$= \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

şeklinde birleştirilebilir. Buradan açıktır ki;

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0.$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx = 0$$

olur. Burada $\eta(x)$ keyfi olduğunda dolayı,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.3.5)$$

olmak zorundadır. (3.3.5) ifadesine (3.3.1) ile verilen denklemin Euler-Lagrange denklemi denir.

Varyasyonel İterasyon Yöntemi 1997'de Ji Huan He [1] tarafından tanıtılmıştır. Varyasyonel iterasyon yönteminde L lineer operatör N nonlineer operatör ve $g(x)$ homojenliği bozan ifade olmak üzere çözümü aranan diferensiyel denklem;

$$Lu + Nu = g(x) \quad (3.3.6)$$

formunda ele alınır. Varyasyonel iterasyon yöntemine göre denklemin;

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds \quad (3.3.7)$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada λ lagrange çarpanı olup varyasyon teorisinden hareketle Maple, Mathematica gibi programlarla tespit edilir. \tilde{u}_n sınırlanmış varyasyon olup (He 1999) $\delta\tilde{u}_n = 0$ dır. Son olarak çözüm;

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (3.3.8)$$

eşitliğinden elde edilir.

Lagrange çarpanı literatürde birçok yerde kullanılmasına rağmen Inekuti'nin 1978 [26] tarihi makalesinin dışında nasıl elde edildiğinden pek bahsedilmemiştir. Kısmi integrasyon ile elde edilen Lagrange Çarpanı'nın bulunuşu aşağıdaki örnekle izah edilmiştir.

Örnek 3.1

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

şeklinde verilen örnek varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülsün. Verilen örneğin düzeltme fonksiyonu;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y''_n(\tau) + \omega^2 y_n(\tau) - A \sin \omega \tau - B \sin \tau\} d\tau$$

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y''_n(\tau) + \omega^2 y_n(\tau) - A \sin \omega \tau - B \sin \tau\} d\tau$$

$$= \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda y''_n(\tau) d\tau + \delta \int_0^t \lambda \omega^2 y_n(\tau) d\tau - \delta \int_0^t \lambda A \sin \omega \tau d\tau$$

$$- \delta \int_0^t \lambda B \sin \tau d\tau$$

denklemdaki ilk integral için kısmi integrasyon uygulanırsa, yani;

$$\lambda(\tau) = u \quad \rightarrow \quad \lambda'(\tau) = du$$

$$y''_n(\tau) d\tau = d\vartheta \quad \rightarrow \quad y'_n(\tau) = \vartheta$$

olup edilip yerine yazılırsa;

$$= \delta y_n(t) + \delta \left[\lambda(\tau) y'_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \int_0^t y'_n(\tau) \lambda'(\tau) d\tau \right] + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \omega^2 y_n(\tau) d\tau$$

$$- \delta \int_0^t \lambda(\tau) A \sin \omega \tau d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) B \sin \tau d\tau$$

$$= \delta y_n(t) + \delta \lambda(\tau) y'_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \delta \int_0^t y'_n(\tau) \lambda'(\tau) d\tau + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \omega^2 y_n(\tau) d\tau$$

$$- \delta \int_0^t \lambda(\tau) A \sin \omega \tau d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) B \sin \tau d\tau$$

şeklinde yazılabilir. Denklemdaki ilk integral için tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa, yani;

$$\lambda'(\tau) = u \quad \rightarrow \quad \lambda''(\tau) = du$$

$$y'(\tau) d\tau = d\vartheta \quad \rightarrow \quad y_n(\tau) = \vartheta$$

kabul edilip yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&= \delta y_n(t) + \delta \lambda(\tau) y'_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \delta \left[\lambda'(\tau) y_n(\tau) - \int_0^t y_n(\tau) \lambda''(\tau) d\tau \right] \\
&\quad + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \omega^2 y_n(\tau) d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) A \sin \omega \tau d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) B \sin \tau d\tau \\
&= \delta y_n(t) + \delta \lambda(t) y'_n(t) - \delta \lambda'(\tau) y_n(\tau) \Big|_{\tau=t} + \delta \int_0^t y_n(\tau) \lambda''(\tau) d\tau + \\
&\quad + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \omega^2 y_n(\tau) d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) A \sin \omega \tau d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) B \sin \tau d\tau \\
&= \delta y_n(t) + \delta \lambda(t) y'_n(t) - \delta \lambda'(t) y_n(t) + \delta \int_0^t y_n(\tau) \lambda''(\tau) d\tau + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \omega^2 y_n(\tau) d\tau \\
&\quad - \delta \int_0^t \lambda(\tau) A \sin \omega \tau d\tau - \delta \int_0^t \lambda(\tau) B \sin \tau d\tau
\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}
&\delta y_n(t) (1 - \lambda'(t)) + \delta \lambda(t) y'_n(t) + \delta \int_0^t y_n(\tau) [\lambda''(\tau) + \omega^2 \lambda(\tau)] d\tau - \delta \int_0^t A \sin \omega \tau d\tau \\
&\quad - \delta \int_0^t B \sin \tau d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta y_{n+1}(t) = 0$ olduğuna göre bu eşitliğin sıfıra eşit olması için;

$$\begin{cases} \delta y_n : & \lambda''(\tau) + \omega^2 \lambda(\tau) = 0 \\ \delta y'_n : & \lambda(\tau)_{\tau=t} = 0 \\ \delta y_n : & 1 - \lambda'(\tau)_{\tau=t} = 0 \end{cases}$$

olması şarttır. Bu denklem çözülerek Lagrange Çarpanı;

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sin \omega(\tau - t)$$

olarak hesaplanır. Buna göre iterasyon formülü;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(\tau - t) \{ y''_n(\tau) + \omega^2 y_n(\tau) - A \sin \omega \tau - B \sin \tau \} d\tau$$

şeklinde elde edilir. $y_0 = y(0) = 1$ ile başlayarak yukarıdaki iterasyon formülü;

$$y_1(t) = 1 + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin\omega(\tau - t) \{\omega^2 - A\sin\omega\tau - B\sin\tau\} d\tau$$

$$= \cos\omega\tau - \frac{A}{2\omega} t\cos\omega\tau + \frac{A}{\omega} \sin\omega\tau + \frac{B}{\omega^2 - 1} (\sin t + \sin\omega t)$$

halini alır. Ayrıca bu aynı zamanda tam çözümdür.

Genel Lagrange Çarpanının hesaplanması her problem için aynı basitlikte değildir. Bu nedenle okuyucu ve araştırmacıların işini kolaylaştırmak için Maple kodları Tablo 3.3 de verilmiştir;

İterasyon adımları arttıkça işlemler karmaşıklaşacak ve bir süre sonra elle hesaplanamayacak kadar zor bir hal alacaktır. Sonuca kolay bir şekilde ve hızlıca ulaşabilmek için Maple programı kullanılmış olup kullanılan kodlar aşağıda Tablo 3.4 de verilmiştir;

Tablo 3.3: Genel Lagrange Çarpanının Elde Edilmesinde Kullanılan Maple Kodları

```
> restart;with(PDEtools):
linear_part:=diff(u(t),t);#lineer kısım
m:=1:#mertebe
equ[m]:=linear_part:
for h from m by -1 to 1 do
a[h]:=coeff(equ[h],diff(u(t),t$ h)):
equ[h-1]:=equ[h]-a[h]*diff(u(t),t$ h):
end do:a[0]:=coeff(equ[0],u(t)):
for il from 1 by 1 to m+1 do
b[il]:=0:end do:k:=m+1:n1:=1:
for r1 from 0 by 1 to m-1 do
k:=k-1:n1:=n1*(-1);
for r from 1 by 1 to k do
b[r]:=b[r]+a[r+r1]*n1*diff(lambda(s),s$(r1+1)):end do:end do:
for r2 from 1 by 1 to m+1 do
b[r2]:=b[r2]+a[r2-1]*lambda(s):
end do:b[2]:=b[2]+1:
for r3 from 1 by 1 to m do
b[r3]; end do:
for r4 from 2 by 1 to m+1 do
b[r4]:=eval(b[r4],s=t)=0:end do:
dsolve({seq(b[i],i=1..m+1)},lambda(s));
simplify(factor(%));
```

Tablo 3.4: Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Maple Kodları

```
> restart;
u[0]:=2+2*convert(taylor(tanh(z),z=0),polynom);
v[0]:=-1+2*convert((taylor(sech(z),z=0))^2,polynom);
for k from 0 to 2 do
u[k+1]:=u[k]-int(diff(u[k],t)-diff(v[k],z)+1/2*(diff(u[k],z))^2,t=0..t):
v[k+1]:=v[k]-
int(diff(v[k],t)+v[k]*diff(u[k],z)+u[k]*diff(v[k],z)+diff(u[k],z)+diff(u[k],z$3),t=0..t):
od:
subs(z=-0.01,u[k]);
subs(z=-0.01,v[k]);
```

Örnek 3.2

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (3.1.1)$$

diferensiyel denklemini varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözelim.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemin analitik çözümü; $y = \tan(t)$ olup burada;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(s) \{y_n'(s) - y_n^2(s) - 1\} ds \quad (3.1.3)$$

olur. Maple yardımı ile bulunan $\lambda(s) = -1$ ve başlangıç değeri ile;

$$y_0 = y(0) = 0 \quad (3.1.4)$$

$$y_1(t) = y_0(t) + \int_0^t -1 \{y_0'(s) - y_0^2(s) - 1\} ds \quad (3.1.5)$$

$$= 0 - \int_0^t \{0 + 0 + 1\} ds = t \quad (3.1.6)$$

$$y_2(t) = y_1(t) + \int_0^t -1 \{y_1'(s) - y_1^2(s) - 1\} ds \quad (3.1.7)$$

$$= t - \int_0^t \{1 - s^2 - 1\} ds = t + \frac{t^3}{3} \quad (3.1.8)$$

$$y_3(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{t^7}{63} \quad (3.1.9)$$

$$y_n(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \frac{62t^9}{2835} + \dots \quad (3.1.10)$$

elde edilir. Buradan; limit durumunda genel çözümün

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \tan(t)$$

(3.1.11)

olduğu görülür.

3.3.1 Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü

L_i lineer ve N_i nonlinear kısımları temsil etmek üzere m tane denklem $i = 1, 2, 3, \dots, m$ için;

$$L_i(y_i) + N_i(y_1, y_2, \dots, y_m) = g_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.3.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda varyasyon fonksiyonu;

$$y_{i(n+1)} = y_{in} + \int_0^x \lambda_i (L_i(y_{in}(s)) + N(\tilde{y}_{1n}(s), \tilde{y}_{2n}(s), \dots, \tilde{y}_{mn}(s)) - g(s)) ds \quad (3.3.1.2)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.2 Yüksek Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözümü

Yüksek mertebeli diferensiyel denklemlerde özellikle mertebe büyüdükçe Lagrange çarpanının hesaplanması zorlaşır. Bu durumla uğraşmak yerine;

$$y^{(n)} + f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = g(x) \quad (3.3.2.1)$$

şeklinde yüksek mertebeden verilen bir diferensiyel denklemi;

$$y_1 = y' \quad (3.3.2.2)$$

$$y_2 = y_1' \quad (3.3.2.3)$$

$$y_3 = y_2' \quad (3.3.2.4)$$

⋮

$$y_n' + f(y, y_1, y_2, \dots, y_{(n-1)}) = g(x) \quad (3.3.2.5)$$

gibi birinci mertebeden bir diferensiyel denklem sistemine dönüştürülür. Sonrasında ise varyasyon fonksiyonu;

$$y_{n(k+1)} = y_{nk} - \int_0^\tau [y_{nk}' + f(y_k, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{(n-1)k}) - g(\tau)] d\tau \quad (3.3.2.6)$$

⋮

$$y_{1(k+1)} = y_{1k} - \int_0^\tau [y_{1(k)}' - y_{2(k+1)}] d\tau \quad (3.3.2.7)$$

$$y_{(k+1)} = y_k - \int_0^\tau [y_{(k+1)}' - y_{1(k+1)k}] d\tau \quad (3.3.2.8)$$

şeklinde elde edilir

4. DALGA DENKLEMLERİ

Δ operatörü (2.2.1) de tanımlandığı gibi olmak üzere hiperbolik tipten bir denklem olan;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki bir denkleme Δ 'nın 1, 2, 3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1, 2, ve 3 boyutlu dalga denklemi denir. Buna göre 1, 2, ve 3 boyutlu dalga denklemleri sırasıyla;

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) &= 0 \\ u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır. Dalga denklemlerinin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine veya boyuna yer değiştirme dalgalarını vs. ifade eder.

(4.1) ile verilen dalga denkleminin daha genel bir hali olan;

$$u_{tt} + \beta u_t - c^2 \Delta u = F \quad (\beta \text{ sabit}) \quad (4.3)$$

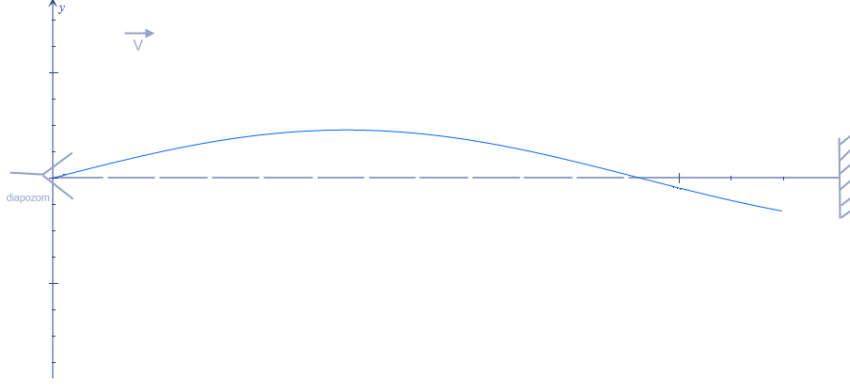
denklemine sönümlü dalga denklemi adı verilir. Dalganın yayılışına etki eden, enerji kaybına neden olan görünmeyen kuvvetler (sürtünme, ortam yoğunluğu vs.) bulunması halinde bu tip denklemlerle karşılaşırız.

Uygulamada $t \geq 0$ olmak üzere dalga denkleminin genel çözümünü veya parametrelere bağlı çözümlerini bulmaktan çok $t = 0$ için u ve u_t nin değerlerinin denklemlerle birlikte önceden verilmesi ve bu başlangıç verilerini sağlayan çözümün bulunması da önemlidir. Çünkü çoğunlukla uygulamalı bilim dallarının ortaya koyduğu diferensiyel denklemlerle birlikte bazı başlangıç ve sınır koşulları doğal olarak ortaya çıkar. Şimdi dalga denklemlerini biraz daha ayrıntılı inceleyelim.

4.1 Bir Boyutlu Dalga Denklemi

Bir ucundan bir yere ve diğer ucundan, sabit bir diyapozonun kollarından birine tesbit edilmiş sonsuz uzun, gergin, esnek ve homojen bir teli göz önüne alalım; telin birim uzunluğunun kütlesi p olsun. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi diyapozon titreştirilerek y eksenine doğrultusunda ω açısal hızına sahip küçük genlikli sönümsüz bir basit harmonik hareket yaptırıldığını düşünelim. O halde tel boyunca v hızı ile yayılan bir

enine dalga hareketi oluşacak ve gergin telin her partikülü, dalga hareketinin bu partiküle ulaşmasından sonra o kaynağın yaptığı basit harmonik hareketi yine y eksenı boyunca aynı genlik ve frekans ile fakat kaynağa göre t zaman gecikmesi ile aynen tekrar edecektir.

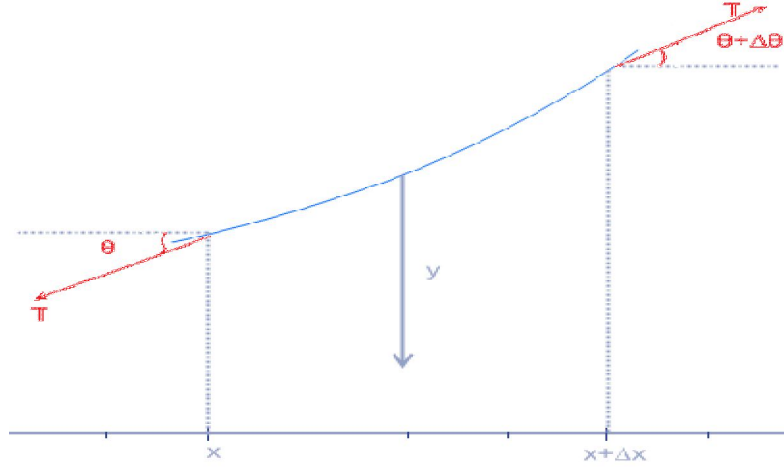


Şekil 4.1.1: Diapozon Yardımı ile Bir Ucu Sabit Gergin Telde Dalganın Oluşturulması

Burada maksat 0 dan herhangi bir x uzaklığında olan partikülün t anındaki denge konumuna olan uzaklığını veren $y = y(x, t)$ ifadesini bulmaktır. Açıkça görüyoruz ki bu başlangıç ve sınır şartları verilen bir kısmi diferensiyel denklemin çözümünden başka bir şey olamaz

4.2 Dalga Denkleminin Elde Edilişi

Önceki kısımda bahsettiğimiz dalga elde edilmesinde kullanılan ipin veya yayın bir partikülünü ele alalım;



Şekil 4.2.1: Dalganın keyfi x , $x + \Delta x$ Aralığındaki Durumu

Burada ipe etki eden y yönündeki kuvveti;

$$F_y = -T \sin(\theta) + T \sin(\theta + \Delta\theta) \quad (4.2.1)$$

şeklinde hesaplarız. Şayet $\sin(\theta)$ ifadesini Maclaurin Serisi'ne ve $\sin(\theta + \Delta\theta)$ ifadesini de Taylor Serisi'ne açıp birbirinden çıkardıktan sonra seriden kaynaklanan küçük terimli katsayıları ihmal edersek (4.2.1) eşitliği;

$$F_y = T \Delta\theta \quad (4.2.2)$$

şeklini alır.

4.3 İki Boyutlu Dalga Denklemi

Bir $x - y$ düzlemi içerisinde, çevresinden tespit edilmiş bir membran $x - y$ düzlemine dik, z eksenine doğrultusunda çok az miktarda denge konumundan uzaklaştırıldıktan sonra serbest bırakılırsa denge konumu etrafında titreşim hareketi yapar. Membranın herhangi bir (x, y) noktasındaki sonsuz küçük bir yüzey elemanına etki eden kuvvetler göz önüne alınırsa, bu yüzey elemanının herhangi bir t anında denge konumundan olan z uzaklığını veren $z = z(x, y, t)$ fonksiyonu;

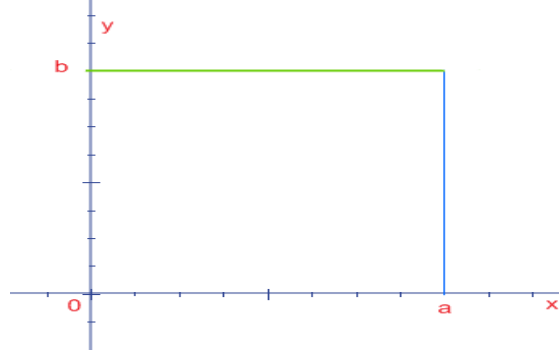
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (4.3.1)$$

dalga denkleminin bir çözüdür. Bu denkleme iki boyutlu dalga denklemi denir.

Bir membran iki şekilde olur. Bunlardan biri dikdörtgen diğeri ise daire şeklindedir.

4.3.1 Dikdörtgen Membran

Bir membran;



Şekil 4.3.1.1: Dikdörtgen Membran

şeklinde görüldüğü gibi bir dikdörtgen ise $z = z(x, y, t)$ çözüm fonksiyonunun sınır şartları;

$$z(0, y, t) = 0 \quad , \quad z(a, y, t) = 0 \quad (4.3.1.1)$$

$$z(x, 0, t) = 0 \quad , \quad z(x, b, t) = 0 \quad (4.3.1.2)$$

ve başlangıç şartları;

$$z(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (4.3.1.3)$$

olur. Burada $z = f(x, y)$ fonksiyonu membranın serbest bırakıldığı $t = 0$ anındaki yüzey denklemdir.

Denklem (4.3.1) de $z(x, y, t) = X(x)Y(y)Z(z)$ şeklinde ayrıştırılıp yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{c^2 T} \left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (4.3.1.4)$$

elde edilir. Bu denklem ancak, aşağıdaki şekilde her üç terimin uygun sabit sayılara eşit olması halinde çözüm verir:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad (4.3.1.5)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad (4.3.1.6)$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -(\alpha^2 + \beta^2) \quad (4.3.1.7)$$

Bu denklemlerin çözümleri ise;

$$X = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \quad (4.3.1.8)$$

$$Y = C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y) \quad (4.3.1.9)$$

$$T = E \cos(c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t) + F \sin(c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t) \quad (4.3.1.10)$$

dir. Yukarıdaki sınır şartları kullanılarak;

$$A = 0 \quad , \quad \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad C = 0 \quad , \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (4.3.1.11)$$

elde edilir. Burada m ve n ler tamsayıdır. İkinci başlangıç şartı kullanılarak $F = 0$ bulunur. Bu durumda (4.3.1) denkleminin çözümü;

$$z = C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) x \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right) y \cos\left(c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\right) t \quad (4.3.1.12)$$

elde edilir. Bu fonksiyon yalnız birinci başlangıç şartı dışında bütün sınır şartlarını ve başlangıç şartlarını sağlamaktadır.

$f(x, y)$ fonksiyonunun çiftli Fourier açılımı;

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) x \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right) y \quad (4.3.1.13)$$

yazılır ve buna göre birinci başlangıç şartı da uygulanırsa sonuç olarak;

$$z = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) x \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right) y \cos\left(c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\right) t \quad (4.3.1.14)$$

elde edilir.

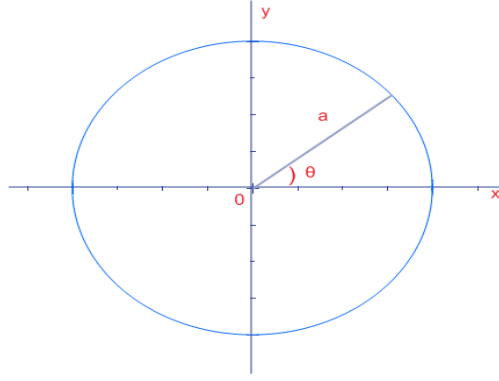
4.3.2 Dairesel Membran

Yarıçapı a olan bir dairesel membran $x - y$ düzlemi içerisinde çevresi boyunca tespit edilmiştir. z eksenini doğrultusunda membran bir miktar yer değiştirir ve sonra serbest bırakılırsa titreşim hareketi yapar. Hareketin dalga denklemi (4.3.1) denklemdir.

Burada (x, y) Kartezyen koordinatları yerine (r, θ) kutupsal koordinatları alınır,

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{ve} \quad y = r \sin(\theta) \quad (4.3.2.1)$$

olduğundan



Şekil 4.3.2.1: Dairesel Membran

(4.3.1) denkleminde polar koordinatları kullanarak dalga denkleminiz;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.3.2.2)$$

şeklini alır. Simetriden dolayı burada z nin değeri θ dan bağımsız olduğundan z yalnız r nin ve t nin fonksiyonu olacaktır. Buna göre sınır şartları;

$$z(a, t) = 0 \quad (4.3.2.3)$$

ve başlangıç şartları;

$$z(r, 0) = f(r) \quad , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (4.3.2.4)$$

olur. Burada $f(r)$ başlangıç anında membran yüzeyinin denklemdir. Denklem (4.3.2.2) de $z = T(t) \cdot R(r)$ ayrıştırması yapıldığında

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = -k^2 \quad (4.3.2.5)$$

bulunur böylece verilen kısmi diferensiyel denklem, sadece r ve t bağımsız değişkenlerine bağlı aşağıdaki iki adi diferensiyel denkleme indirgenmiş olur;

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0 \quad (4.3.2.6)$$

ve

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} R \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \quad (4.3.2.7)$$

olur. (4.3.2.6) ün çözümü;

$$T = A \cos(kct) + B \sin(kct) \quad (4.3.2.8)$$

bulunur. İkinci başlangıç şartı ile $B = 0$ elde edilir. Denklem (4.3.2.8) in çözümü olan R nin bulunması için önce $s = kr$ değişken değiştirmesi yapılır. O zaman (4.3.2.7) denklemi;

$$s \frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{dR}{ds} + sR = 0 \quad (4.3.2.9)$$

şeklinin alır. Bu denklem ise sıfırıncı mertebeden bir Bessel Diferensiyel Denklemi'dir.

Bu denklemin çözümü;

$$R = C J_0(s) = C J_0(kr) \quad (4.3.2.10)$$

elde edilir. Burada $C = 1$ kabul edilirse;

$$R(r) = J_0(kr) \quad (4.3.2.11)$$

olur. $r = a$ için ise;

$$R(a) = J_0(ka) = 0 \quad (4.3.2.12)$$

olacağından (4.3.2.12) denkleminde Bessel fonksiyonunun pozitif köklerini $k_m a = a_1, a_2, \dots$ ile gösterirsek;

$$k_m a = a_m \quad \text{veya} \quad k_m = \frac{\alpha_m}{a} \quad (4.3.2.13)$$

olur. Sonuç olarak (4.3.2.10) denkleminin çözümleri;

$$R_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right), \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.3.2.14)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.3.2.6) ün $\lambda_m = ck_m$ değerleri için çözümü;

$$T_m(t) = a_m \cos(\lambda_m t)$$

(4.3.2.15)

olacağından, iki boyutlu dalga denkleminin çözümü;

$$z_m(r, t) = a_m \cos(\lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) \quad (4.3.2.16)$$

olur. (4.3.2.16) fonksiyonları kısmi diferensiyel denklemin sınır koşullarını sağlayan çözüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar λ_m öz değerlerine karşı gelen problemin öz fonksiyonlarıdır. Öz fonksiyonların toplamı da diferensiyel denklemi sağlayacağından aşağıdaki seriyi göz önüne alır, başlangıç koşullarını kullanırsak;

$$z(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(\lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right)$$

(4.3.2.17)

elde edilir. Burada görülen a_m katsayılarının bulunmasına gelince $t = 0$ için;

$$z(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) = f(r) \quad (4.3.2.18)$$

olduğundan, bu bağlantıda a_m ler $f(r)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel açılımının katsayılarıdır ve bu katsayılar;

$$a_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) dr, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.3.2.19)$$

şeklinde elde edilir.

5. DALGA DENKLEMLERİNİN NÜMERİK (SAYISAL) ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

(2+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemleri (DLWE) denklemleri

$$u_{yt} - v_{xx} + \frac{1}{2}u_{xy}^2 = 0 \quad (5.1)$$

$$v_t - u \cdot v + u + u_{yyx} = 0 \quad (5.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemlere, $u(z, t) = u(x + y, t)$ ve $v(z, t) = v(x + y, t)$ dönüşümleri uygulanılarak sistem;

$$u_t - v_z + \frac{1}{2}u_z^2 = 0 \quad (5.3)$$

$$v_t + (u \cdot v + u + u_{zz})_z = 0 \quad (5.4)$$

olarak elde edilir. Burada (5.4) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$v_t + u_z v + u v_z + u_z + u_{zzz} = 0 \quad (5.4.a)$$

olarak bulunur. Böylece (5.1) ve (5.2) den oluşan (2+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemi (1+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemlerine indirgenmiş olur.

Bai ve arkadaşları 2006 yılındaki yayınlarında (5.3) ve (5.4.a) denklemlerini kullanarak bu denklemin

$$\left. \begin{aligned} u(z,0) &= 2 + 2 \tanh z \\ v(z,0) &= -1 + 2 \operatorname{sech}^2 z \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

başlangıç şartları altındaki analitik çözümünün, $u(z, t) = 2 + 2 \tanh(z - 2t)$ ve $v(z, t) = -1 + 2 \operatorname{sech}^2(z - 2t)$ olduğunu göstermişlerdir.

5.1 Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin Dalga Denklemine Uygulanması

(2+1) boyutlu Dispersive Long-Wave Dalga Denklemlerinden özel bir dönüşüm yardımıyla indirgenerek elde edilen ifadelerinin diferensiyel dönüşümü alınırsa,

$$(h+1)U(k, h+1) = -(k+1)V(k+1, h) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(r, h-s)U(k-r+1, s) \quad (5.1.1)$$

ve

$$\begin{aligned} (h+1)V(k, h+1) = & - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(r, h-s)V(k-r+1, s) \\ & - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)V(r, h-s)U(k-r+1, s) \\ & - (k+1)U(k+1, h) - (k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca (5.5) başlangıç koşullarından, lineer olmayan fonksiyonlar için diferensiyel dönüşüm dikkate alındığında $0 \leq k \leq 12$ için $U(k, 0)$ ve $V(k, 0)$ değerleri elde edilir. Ayrıca bulunan bu değerler (5.1.1) ve (5.1.2) de yerlerine yazılarak elde edilen $U(k, h)$ ve $V(k, h)$ değerleri;

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} W(k, h) \cdot x^k \cdot y^h$$

denkleminde yerine yazılırsa çözüm:

$$\begin{aligned} u(z, t) = & 2 + \frac{16}{3}t^3 + \frac{31744}{135}z^3t^6 - 8zt^2 + \frac{64}{3}zt^4 - \frac{2176}{45}zt^6 + \frac{31744}{315}zt^8 - \frac{2830336}{14175}zt^{10} \\ & + 4z^2t - \frac{64}{3}z^2t^3 + \frac{1088}{15}z^2t^5 - \frac{63448}{315}z^2t^7 + \frac{1415168}{2835}z^2t^9 + \frac{32}{3}z^3t^2 - \frac{544}{9}z^3t^4 \\ & - \frac{128}{15}t^5 - \frac{34}{315}z^7 + \frac{124}{2835}z^9 + \frac{4352}{315}t^7 - \frac{63488}{2835}t^9 - \frac{2}{3}z^3 + \dots \\ & + \frac{90902765976}{40186125}z^{10}t^9 + 2z - 4t \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned}
v(z,t) = & 1 - 8t^2 + 8zt - 2z^2 + 32z^2t^2 - \frac{31744}{45}z^3t^5 - \frac{128}{3}zt^3 + \frac{2176}{15}zt^5 - \frac{126926}{315}zt^7 \\
& + \frac{2830336}{2835}zt^9 - \frac{544}{3}z^2t^4 + \frac{31744}{45}z^2t^6 - \frac{707584}{315}z^2t^8 + \frac{89473024}{14175}z^2t^{10} \\
& - \frac{32}{3}z^3t + \dots - \frac{4545138298}{4465125}z^{10}t^8 + \frac{15473431460128}{200930625}z^{10}t^{10} + \frac{64}{3}t^4
\end{aligned}$$

(5.1.4)

elde edilir. Bu durumda sonuçlar Tablo 5.1 ve 5.2 deki gibi elde edilir.

Tablo 5.1: $z = -0.01$ için $u(z,t)$ nin karşılaştırılması

t	ANALİTİK	DTM	Hata
0,01	1.940017994	1.940017994	0,000000E+00
0,02	1.900083250	1.900083250	0,000000E+00
0,03	1.860228219	1.860228219	0,000000E+00
0,04	1.820484430	1.820484431	9,999999E-10
0,05	1.780883060	1.780883060	0,000000E+00
0,06	1.741454833	1.741454833	0,000000E+00
0,07	1.70229933	1.70229933	0,000000E+00
0,08	1.66237908	1.663237909	8,588290E-04
0,09	1.624507588	1.624507589	1,000000E-09
0,1	1.586067001	1.586067000	1,000000E-09

Tablo 5.2: $z = -0.01$ için $v(z,t)$ nin karşılaştırılması

t	ANALİTİK	DTM	Hata
0,01	0,9982010790	0,9982010796	6,00000050E-10
0,02	0,9950083220	0,9950083214	6,00000050E-10
0,03	0,9902319250	0,9902319247	3,00000025E-10
0,04	0,9838870800	0,9838870801	1,00000008E-10
0,05	0,9759938830	0,9759938832	2,00000017E-10
0,06	0,9665771980	0,9665771983	3,00000025E-10
0,07	0,9556664930	0,9556664934	4,00000033E-10
0,08	0,9432956470	0,9432956474	4,00000033E-10
0,09	0,9295027250	0,9295027242	7,99999955E-10
0,10	0,9143297360	0,9143297351	8,99999963E-10

Bu karmaşık sonuçların rahatça hesaplanabilmesi için Tablo 5.3 de verilen Maple kodları kullanılmıştır.

Tablo 5.3: Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi İçin Maple Kodları

```
#DİFRENSEYEL DONUSUM
ilk:=time():
for k from 0 to 40 do
u[0,k]:=coeftayl((2+2*tanh(z)),z=0,k):
v[0,k]:=coeftayl((-1+2*sech(z)^2),z=0,k):
od:
for h from 0 to 10 do
for k from 0 to 30 do
u[h+1,k]:=(-(k+1)*v[h,k+1]-add(add((k-r+1)*u[h-s,r]*u[s,k-r+1], s=0..h), r=0..k)/
(h+1):
v[h+1,k]:=(-add(add((k-r+1)*u[h-s,r]*v[s,k-r+1],s=0..h),r=0..k)-add(add((k-
r+1)*v[h-s,r]*u[s,k-r+1],s=0..h),r=0..k)-(k+1)*u[h,k+1]-(k+3)!*u[h,k+3]/k!)/(h+1):
od:od:
DTM1:=0:DTM2:=0:
for k from 0 to 10 do
for h from 0 to 10 do
DTM1:=DTM1+u[h,k]*z^k*t^h:
DTM2:=DTM2+v[h,k]*z^k*t^h:
od:od:
print(simplify(DTM1)):
print(simplify(DTM2)):
hesaplama zamani:=time()-ilk;
```

5.2 Adomian Ayrışım Yönteminin Dalga Denklemine Uygulanması

(5.3) ve (5.4.a) denklemleri

$$u_t = -v_z - \frac{1}{2}u_z^2 \quad (5.2.1)$$

$$v_t = -(uv + u + u_{zz})_z = -u_z v - uv_z - u_z - u_{zzz} \quad (5.2.2)$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada (5.2.1) denkleminin lineer olmayan kısmı $Nu = \frac{1}{2}u_z^2$ olarak alınırsa,

$$Nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} u^2 = \frac{1}{2} (u \cdot u_z + u_z \cdot u) = u \cdot u_z \quad (5.2.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.2.2) denkleminde nonlinear ifadeler, $\alpha(u, v) = u \cdot v_z$ ve $\beta(u, v) = v \cdot u_z$ olarak gösterilirse; $L_z = \frac{\partial}{\partial z}$, $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_{zzz} = \frac{\partial^3}{\partial z^3}$ olmak üzere (5.2.1) ve (5.2.2) ifadeleri operatör formunda

$$L_t u = -L_z v - Nu \quad (5.2.4)$$

$$L_t v = -\alpha(u, v) - \beta(u, v) - L_z u - L_{zzz} u \quad (5.2.5)$$

olarak elde edilir. Burada L tersi alınabilir bir operatör olduğundan (5.2.4) ve (5.2.5) eşitliklerinin her iki tarafına $L^{-1} = \int_0^t () dt$ operatörü uygulanırsa,

$$u(z, t) = u(z, 0) - L_t^{-1} L_z v - L_t^{-1} Nu \quad (5.2.6)$$

$$v(z, t) = v(z, 0) - L_t^{-1} \alpha(u, v) - L_t^{-1} \beta(u, v) - L_t^{-1} L_z u - L_t^{-1} L_{zzz} u \quad (5.2.7)$$

elde edilir.

Şimdi Lineer olmayan Nu için;

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z, t) \quad (5.2.8)$$

$$u_z(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n(z, t))_z \quad (5.2.9)$$

seri formunda ve indis toplamları dikkate alınarak düzenlersek,

$$\begin{aligned} Nu &= u \cdot u_z = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)_z \\ &= [u_0(u_0)_z] + [u_0(u_1)_z + u_1(u_0)_z] + [u_0(u_2)_z + u_1(u_1)_z + u_2(u_0)_z] + \dots \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

elde edilir. Böylece Nu nun Adomian polinomları indis toplamlarına göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0(u_0)_z \\ A_1 &= u_0(u_1)_z + u_1(u_0)_z \\ A_2 &= u_0(u_2)_z + u_1(u_1)_z + u_2(u_0)_z \\ A_3 &= u_0(u_3)_z + u_1(u_2)_z + u_2(u_1)_z + u_3(u_0)_z \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Benzer şekilde $\alpha(u, v) = u \cdot v_z$ ve $\beta(u, v) = v \cdot u_z$ nonlinear ifadelerini de seri formunda

ve indis toplamları dikkate alınarak düzenlersek,

$$\begin{aligned}\alpha(u, v) &= (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots)_z \\ &= [u_0(v_0)_z] + [u_0(v_1)_z + u_1(v_0)_z] + [u_0(v_2)_z + u_1(v_1)_z + u_2(v_0)_z] + \dots\end{aligned}\quad (5.2.12)$$

olup $\alpha(u, v)$ ' nin Adomian polinomları

$$\begin{aligned}D_0 &= u_0(v_0)_z \\ D_1 &= u_0(v_1)_z + u_1(v_0)_z \\ D_2 &= u_0(v_2)_z + u_1(v_1)_z + u_2(v_0)_z \\ &\vdots\end{aligned}\quad (5.2.13)$$

ve

$$\begin{aligned}\beta(u, v) &= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots)(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)_z \\ &= [v_0(u_0)_z] + [v_0(u_1)_z + v_1(u_0)_z] + [v_0(u_2)_z + v_1(u_1)_z + v_2(u_0)_z] + \dots\end{aligned}\quad (5.2.14)$$

olup $\beta(u, v)$ ' nin Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}M_0 &= v_0(u_0)_z \\ M_1 &= v_0(u_1)_z + v_1(u_0)_z \\ M_2 &= v_0(u_2)_z + v_1(u_1)_z + v_2(u_0)_z \\ &\vdots\end{aligned}\quad (5.2.15)$$

olarak elde edilmiş olur. Böylece (5.2.6) ve (5.2.7) ifadelerindeki nonlineer kısımların Adomian polinomları (5.2.11), (5.2.13) ve (5.2.15) ifadeleri ile elde edilmiş olur. Böylece

$$\begin{aligned}u_0 &= u(z, 0) = 2 + 2 \tanh(z) \\ u_1 &= -L_t^{-1} L_z v_0 - L_t^{-1} A_0 = -\frac{4t}{\cosh^2(z)} \\ u_2 &= -L_t^{-1} L_z v_1 - L_t^{-1} A_1 = -\frac{8t^2 \sinh(z)}{\cosh^3(z)} \\ &\vdots\end{aligned}\quad (5.2.16)$$

ve

$$\begin{aligned}v_0 &= v(z, 0) = -1 + 2 \sec h^2(z) \\ v_1 &= -L_t^{-1} D_0 - L_t^{-1} M_0 - L_t^{-1} L_z u_0 - L_t^{-1} L_{zzz} u_0 = 8t \sec h^2(z) \tanh(z) \\ v_2 &= \frac{8t^2 (2 \cosh^2(z) - 3)}{\cosh^4(z)} \\ &\vdots\end{aligned}\quad (5.2.17)$$

olup sistemin çözümü:

$$\begin{aligned}
 u(z,t) &= -\frac{2}{3} \frac{1}{\cosh^5(z)} \left(\begin{array}{l} -3\cosh^5(z) - 3\sinh(z)\cosh^4(z) + 6t\cosh^3(z) \\ +12t^2\sinh(z)\cosh^2(z) + 16t^3\cosh^3(z) - 24t^3\cosh(z) \\ +16t^4\sinh(z)\cosh^2(z) - 48t^4\sinh(z) \end{array} \right) \\
 v(z,t) &= \frac{1}{3} \frac{1}{\cosh^6(z)} \left(\begin{array}{l} -3\cosh^6(z) + 6\cosh^4(z) + 24t\sinh(z)\cosh^3(z) \\ +48t^2\cosh^4(z) - 72t^2\cosh^2(z) + 64t^3\sinh(z)\cosh^3(z) \\ -192t^3\sinh(z)\cosh(z) + 480t^4 - 480t^4\cosh^2(z) + 64t^4\cosh^4(z) \end{array} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.18}$$

olarak elde edilir. Bu karmaşık sonuçların rahatça hesaplanabilmesi için Tablo 5.4 de verilen Maple kodları kullanılmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar Tablo 5.5 ve 5.6 da gösterilmiştir.

Tablo 5.4: Adomian Ayrıştırma Yöntemi İçin Maple Kodları

```

#ADOMIAN ADIM TAKIP
restart:Digits:=10:ilk:=time():
uu[0]:=2+2*tanh(z):
vv[0]:=-1+2*sech(z)^2:
for k from 0 to 4 do
uu[k+1]:=-int(diff(vv[k],z),t)-int(add(uu[r]*diff(uu[k-r],z),r=0..k),t):
vv[k+1]:=-int(add(uu[r]*diff(vv[k-r],z),r=0..k),t)-int(add(vv[r]*diff(uu[k-r],z),r=0..k),t)-int(diff(uu[k],z),t)-int(diff(uu[k],z$3),t):
od:
ADM1:=0:ADM2:=0:
for k from 0 to 4 do
ADM1:=ADM1+simplify(uu[k]):
ADM2:=ADM2+simplify(vv[k]):
od:
print(simplify(ADM1)):
print(simplify(ADM2)):
hesaplama_zamani:=time()-ilk;

```

Tablo 5.5: $z = -0.01$ için $u(z,t)$ 'nin karşılaştırılması

t	ADM	ANALİTİK	Hata
0,01	1.940017995	1.940017994	1,000000E-09
0,02	1.900083278	1.900083250	2,800000E-08
0,03	1.860228425	1.860228219	2,060000E-07
0,04	1.820485300	1.820484430	8,700000E-07
0,05	1.780885706	1.780883060	2,646000E-06
0,06	1.741461402	1.741454833	6,569000E-06
0,07	1.702244094	1.70229933	5,523600E-05
0,08	1.663265436	1.66237908	8,863560E-04
0,09	1.624557030	1.624507588	4,944200E-05
0,1	1.586150430	1.586067001	8,342900E-05

Tablo 5.6: $z = -0.01$ için $v(z,t)$ 'nin karşılaştırılması

t	ADM	ANALİTİK	Hata
0,01	0,9982010824	0,9982010790	3,40000006E-09
0,02	0,9950083319	0,9950083220	9,90000004E-09
0,03	0,9902319976	0,9902319250	7,26000000E-08
0,04	0,9838874276	0,9838870800	3,47600000E-07
0,05	0,9759950863	0,9759938830	1,20330000E-06
0,06	0,9665805531	0,9665771980	3,35510000E-06
0,07	0,9556745235	0,9556664930	8,03050000E-06
0,08	0,9433128084	0,9432956470	1,71614000E-05
0,09	0,9295363345	0,9295027250	3,36095000E-05
0,10	0,9143911440	0,9143297360	6,14080000E-05

5.3 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Probleme Uygulanması

Problemimizin indirgenmiş formu olan;

$$\begin{cases} u_t - v_z + \frac{1}{2}u_z^2 = 0 \\ v_t + u_z v + uv_z + u_z + u_{zzz} = 0 \end{cases}$$

denklemleri için iterasyon formları ayrı ayrı;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1 \left\{ (u_n)_s - (v_n)_z + \frac{1}{2} (u_n)_z^2 \right\} ds$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2 \left\{ (v_n)_s - v_n (u_n)_z + u_n (v_n)_z + (u_n)_z + (u_n)_{zzz} \right\} ds$$

şeklinde yazılır. Tablo3.1 ve Tablo 3.2 de verilen Maple kodları yardımıyla $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ olarak elde edilir. Böylece problemin çözümü için aşağıdaki Tablo 5.7 ve Tablo 5.8 de verilen sonuçlara ulaşılır.

Tablo 5.7: $z = -0.01$ için $u(z,t)$ 'nin karşılaştırılması

t	VİM	ANALİTİK
0,01	1.96120947	1.940017994
0,02	1.94401693	1.900083250
0,03	1.92840639	1.860228219
0,04	1.91436122	1.820484430
0,05	1.90186480	1.780883060
0,06	1.89090049	1.741454833
0,07	1.88145165	1.70229933
0,08	1.87350166	1.66237908
0,09	1.86703387	1.624507588
0,10	1.86203166	1.586067001

Tablo 5.8: $z = -0.01$ için $v(z,t)$ 'nin karşılaştırılması

t	VİM	ANALİTİK
0,01	0.99697865	0,9982010790
0,02	0.99013480	0,9950083220
0,03	0.97929971	0,9902319250
0,04	0.96450432	0,9838870800
0,05	0.94577527	0,9759938830
0,06	0.92314840	0,9665771980
0,07	0.89665248	0,9556664930
0,08	0.86631821	0,9432956470
0,09	0.83217629	0,9295027250
0,10	0.79425740	0,9143297360

6. KAYNAKLAR

- Abdel-Halim Hassan, I.H. (2002). Different applications for the differential transformation method, *Appl. Math. Comput.* **129**:183-201.
- Abdel-Halim Hassan, I.H. (2002). On solving some eigenvalue problems by using differential transformation method, *Appl. Math. Comput.* **127**: 1-22.
- Arikoğlu, A., Özkol, I. (2006). Solution of difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, **174**: 1216-1228.
- Arikoğlu, A., Özkol, I. (2006). Solution of differential–difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, **181**: 153-162.
- Ayaz, F. (2003). On the two dimensional differential transform method, *Appl. Math. Comput.* **143**:361-374.
- Bai, C. L., Zhao, H., Ji, H.G. (2006). Application of an extended homogeneous balance method to new exact solutions of nonlinear evolution equations, *Czechoslovak Journal of Physics*, **Vol. 56**, No.3.
- Chen, C.K., Ho, S.H. (1996). Application of differential to eigenvalue problems, *Appl. Math. Comput.* **79** : 173-188.
- Dehghan, M., Tatari, M. (2009). Improvement of He's variational iteration method for solving systems of differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **58**: 2160-2166.
- He, J.H. (1997). A generalized variational principle for 3-D unsteady transonic rotational flow in rotor using Clebsch variables. *INTERNATIONAL JOURNAL OF TURBO & JET-ENGINES*, **14**:17-21
- He, J.H. (1998). Approximate Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **167**:69-73
- He, J.H. (1999). Variational Iteration Method-A Kind of Non-linear Analytical Technique: Some Examples. *International Journal of Non-linear Mechanics*,

34:699-708

- He, J.H. (2007). Variational Iteration Method-Some Recent Results and New Interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **207**:3-17
- Hilderbrand, B.H. (1976). Advanced Calculus for applications, second edition, Prentice-hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T. (1978). General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of solids, Pergamon Press, NewYork, , pp. 156–162.
- Jang, M.J., Chen, C.L., Liu, Y.C. (1999) Two dimensional differential transform for partial differantial equations, *Appl. Math. Comput.* **106**: 171-179.
- Jang, M.J., Chen, C.L., Liu, Y.C. (2002). On solving the İnitial value problems using the differential transformation, *Appl. Math. Comput.* **115**: 145-160.
- Keskin Y., Oturanç, G. (2011). Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi ile Diferensiyel Denklemlerin Çözülmesi. Aybil Yayınları, Konya.
- Keskin, Y. (2005). Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Keskin, Y. (2010). Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiriş, M.E., Oturanç, G. (2007). Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **8, 2**: 159-164.
- Kiriş, M.E. (2007). Kesirli Türevlere Sahip Diferensiyel Denklemler ve Pantograf Denklemlerin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi Yöntemi ile Çözümlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.
- Kiriş, M.E., Keskin, Y., Çaltın N. (2011). (2+1) Boyulu Dispersive Long Wave Dalga Denklemleri için Diferensiyel Dönüşüm yöntemi ve Adomian Ayrışım Yöntemi ile çözümlerinin karşılaştırılması, 3. *Kemal Akman MYO Ulusal Tebliğ Günleri*.

- Kurnaz, A., Oturañç, G. (2005) "The Differential Transform approximation for the system of ordinary differential equations", *Int. Jour. of Comput. Math.*, **3** 709-719.
- Kurnaz, A., Oturañç, G., Kiriş, M.E. (2005). n- Dimensional Transform Method Solving for PDE's, *Int. Jour. of Comput. Math.*, **3**: 369-380.
- Kuryel, B., Oturañç, G., Gündüz, G., Aydın, M. (1987). Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No:14, İzmir, Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi, 500-512.
- Lewin, W. M.I.T. <http://www.youtube.com/watch?v=r2GIY2ZmXPY>
- Mohamed, M. A. (2010). Comparison Differential Transformation Technique with Adomian Decomposition Method for Dispersive Long-wave Equations in (2+1)-Dimensions. *Applications and Applied Mathematics*, **Vol.5**, No.1:148-166
- Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu A. (2007). A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument, *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **200**: 217-225.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Naki ÇALTINER
Doğum Yeri ve Tarihi : Ankara-24.01.1987
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) :05055144712/naki.caltiner@iskur.gov.tr
naki_caltiner@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) Lisans (Afyon Kocatepe Üniversitesi-2010)

Lise : Sincan Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :Çalışma ve Sosyal Güvenlik Bakanlığı Türkiye
Çalışma ve İş Kurumu Ankara İl Müdürlüğü (2012-)