T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HERMİT VE KAEHLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ KOMPLEKS YAPILARIN YÜKSELTİLMİŞLERİ

Mehmet TEKKOYUN

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne
"Yüksek Matematikçi"
ünvanı verilmesi için kabul edilen tezdir.

Tezin enstitüye verildiği tarih: 26. 08.1996

Tezin sözlü savunma tarihi : 12. 09.1996

Tezin Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Jüri Üyesi : Prof. Dr. M.Ali SARIGÖL 57047

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Hikmet RENDE

EYLÜL 1996
DENİZLİ

Mehmet TEKKOYUN'un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Hermit ve Kaehler Manifoldları Üzerindeki Kompleks Yapıların yükseltilmişleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

12/09/1996

Üye : Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL Ali Sarıgöl

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK Ş. Civelek

Üye : Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13.09.1996 gün ve 18/19 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

H. Rende
Prof. Dr. Hikmet RENDE
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır.

Diferensiyel geometrideki reel topolojik manifoldlar ele alınarak kompleksleştirilmeleri üzerinde durulmuş, cebirsel, topolojik ve geometrik özellikleri detaylı olarak verilmiştir.

Çalışma konusunu öneren, görüş ve eleştirilerinden büyük ölçüde yararlandığım tez yöneticisi Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK'e teşekkürü görev sayarım. Ayrıca, tezimde katkısı olan Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Mehmet TEKKOYUN

Denizli, 1996

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet TEKKOYUN 1968 yılında Denizli'de doğdu. 1985' te lise eğitimini Denizli Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladı. 1990 yılında lisans eğitimini Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi-Matematik proğramında başarı ile tamamladı. 1990-1994 yılları arasında matematik öğretmeni olarak çalıştı.1994 yılında Pamukkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı programında yüksek lisans çalışmasına başladı. 1995 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü geometri anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada; bir reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi gözönüne alınarak, kompleks vektör uzayları ve kompleks manifoldlar üzerinde kompleks yapıların cebirsel, topolojik ve geometrik özellikleri detaylı olarak verildi. Hermit ve Kaehler metrikleri tanımlanarak, Hermit ve Kaehler manifoldlarının yapıları incelenerek, bu kompleks manifoldlar üzerindeki eğrilik özdeşlikleri verildi. Reel topolojik manifoldlarda tanımlı diferensiyellenebilir tensör alanlarının, tanjant manifoldlara dikey ve tam yükseltilmiş tensör alanları verildi. Bu yükseltme metodu gözönüne alınarak, kompleks topolojik manifoldlar üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir kompleks tensör alanlarının, kompleks topolojik tanjant manifoldlara dikey ve tam yükseltilmiş tensör alanları elde edildi. Ayrıca, iyi bilinen kompleks manifoldlar(Hermit ve Kaehler) üzerindeki cebirsel, topolojik ve geometrik özellikler, yükseltme metodu kullanılarak kompleks tanjant manifoldlara taşındı.

SUMMARY

In the study, The algebraic, topologic and geometric properties of complex structures over the complex vector spaces and complex manifolds have been given in detail considering a complexification of a real vector space. the properties of the curvature identities over this complex manifolds have been given which the structures of Hermitian and Kaehler manifolds have been examined defining the Hermitian and Kaehler metrics. The vertical and complete lifted tensor fields to the tangent manifolds of the differentiable tensor fields on defining the real topologic manifolds have been given. The vertical and complete lifted tensor fields to the complex tangent manifolds of the differentiable complex tensor fields on defining the complex topologic manifolds have been obtained considering this lifting method. In addition, The algebraic, topologic and geometric properties of the well-known complex manifolds(Hermit and Kaehler) have been carried to the complex tangent manifolds using the lifting method.

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR VE GİRİŞ

/1,3,7/ önceki çalışmalarında, Riemann ve Kaehler manifoldları arasındaki bir çok geometrik cebirsel ve topolojik yapılar elde edilmiş olup, bir Kaehler manifoldun eğrilik tensörü özel bir özdeşlikleri olan $R_{WXYZ} = R_{WXJYJZ}$ 'yi sağladığından bu özdeşliğe Kaehler özdeşlikleri denilmiştir. Bu özdeşlik Riemann eğrilik tensörü ile beraber Yaklaşık Hermit manifoldlarına genelleştirilmiştir.

Hermit ve Yarı(Quasi) Kaehler manifoldları için eğrilik özdeşliği verilip bu özdeşlikten yararlanılarak çeşitli teoremler ve bu teoremlerden bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Yarı(Quasi) Kaehler manifoldları önemi, Yaklaşık(almost) Kaehler ve Yakın(nearly) Kaehler manifoldlarını kapsamasına dayandırılmıştır.Ayrıca, Kaehler manifoldlarının geometrik ve topolojik özellikleri Yakın(nearly) Kaehler manifoldlarında ele alınmıştır.

Riemann reel topolojik manifoldları üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir tensör alanlarının, tanjant manifoldlara birinci mertebeden dikey ve tam yükseltilmiş tensör alanları 1970'li yıllarda detaylı olarak elde edildi. Bu yükseltme metodu gözönüne alınarak, reel topolojik manifoldlar üzerindeki afin konneksiyona bağlı olarak bir çok geometrik özellikler verilmiştir./17-30/

Bundan başka, /12-16/ çalışmalarında ise, bir M topolojik reel manifoldu üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir tensör alanlarının, M'nin TTM ikinci mertebeden tanjant manifolduna ikinci mertebeden dikey ve tam yükseltilmişleri elde edilmiş, ayrıca, TTM'nin altmanifoldu olan ve M'nin ikinci mertebeden kanonik genişletilmiş manifoldu ^2M üzerinde de ikinci mertebeden kanonik dikey ve tam yükseltmeler elde edilmiştir.

Özellikle, /13/ çalışmasında ise; bir π vektör demeti üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir tensör alanlarının, π'nin π^k genişletilmiş vektör demeti üzerine yüksek mertebeden dikey ve tam yükseltilmişleri ve bunlara bağlı olarak da geometrik özellikler elde edilmiştir.

I. BÖLÜM

BİR REEL VEKTÖR UZAYIN KOMPLEKSLEŞTİRİLMESİ VE KOMPLEKS YAPISI

1.1. Bir Reel Vektör Uzayın Kompleksleştirilmesi

R gerçel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve dual vektör uzayı V^* olsun.

$$V^c = \left\{ u + iv : u, v \in V \ , \ i = \sqrt{-1} \right\}$$

kümesi üzerinde $(u+iv) \in V^c$ ile $(a+ib) \in C(a, b \in R)$'nın skaler çarpımı ve $u+iv$ ile $u' + iv'$'nün toplamı sırasıyla,

$$\begin{aligned} (a+ib)(u+iv) &= (au - bv) + i(av + bu) \\ (u+iv) + (u' + iv') &= (u + u') + i(v + v') \end{aligned} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanırsa; V^c, C kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. V^c'nin $z(= u + iv)$ elemanı için eşlenik $\bar{z} = \overline{u + iv} = u - iv$ şeklinde olup,

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \ \overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\bar{z} \ (\alpha \in C) \tag{1.2}$$

özellikleri sağlandığından, $\overline{(\ )}: V^c \to V^c$ eşlenik işlemi bir lineer dönüşümdür./7/

Tanım 1.1: (Kompleksleştirme)

V^c vektör uzayına V'nin **kompleksleştirilmesi** denir.

V'nin bir bazı $\{e_1, ..., e_k\}$ ise V'nin u ile v elemanları sırasıyla $a^k e_k$ ile $b^k e_k$ dır. V^c'nin toplama ve skalerle çarpma tanımına göre V^c'nin herhangi bir elemanı $a^k e_k + ib^k e_k = (a^k + ib^k) e_k = \alpha^k e_k$ dır. Buradan da V^c'nin bir bazı $\{e_1, ..., e_k\}$ şeklinde ifade edilir.

V^{c}'nin dual vektör uzayı $(V^c)^*$ dır. $(V^c)^*$, V^c kompleks vektör uzayında bütün lineer fonksiyonlara göre düzenlenmiştir.

$$f(u+iv)=f(u)+if(v) \qquad ((u+iv)\in V^c) \tag{1.3}$$

tanımına göre V^{c}'deki f fonksiyonun $(V^c)^*$'a genişletilmişi $\tilde{f}$ olarak düşünülebilir.

$(V^c)^*$'ın herhangi bir elemanı $\alpha_k \tilde{f}^k (\alpha_k = a_k + ib_k)$ gibi ifadelerdir ve $(V^c)^*$'ın bir bazı $\left\{\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^k\right\}$ dır.

V^*'ın $\{e_1,\ldots,e_k\}$'ya dual olan bir bazı $\left\{f^1,\ldots,f^k\right\}$ olsun. $(V^*)^c$, V^*'ın kompleksleştirilmesidir. $(V^c)^*$'ın herhangi bir elemanı $r=f+ih$ $(f,h\in V^*)$ şeklinde gösterildiğinde $\tilde{r}\in(V^c)^*$ olduğundan,

$$\tilde{r}(z)=\tilde{f}(z)+i\tilde{h}(z) \tag{1.4}$$

ile tanımlanır ve buradan $r\to\tilde{r}$ için $(V^*)^c\to(V^c)^*$ lineer dönüşümü vardır.

$f\in V^*$ ise $\tilde{f}\in(V^*)^c$' nin (1.3) de tanımlanan $\tilde{f}$ ile aynı olduğu söylenebilir. $(V^*)^c$' nin bir bazı $\left\{f^1,\ldots,f^k\right\}$ ile $(V^c)^*$'ın bir bazı $\left\{\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^k\right\}$ $r\to\tilde{r}$'ye bir dönüşümdür. Buradan da $(V^*)^c$ ile $(V^c)^*$'ın izomorfik olduğu görülür./7/

1.2.Bir Reel Vektör Uzayın Kompleks Yapısı

V^c de, bir n-boyutlu alt uzay W olsun. Bu durumda W üzerinde,

$$J:W\to W$$
$$u\to J(u)=iu \ (u\in W) \tag{1.5}$$

şeklinde bir lineer endomorfizm tanımlansın. R'nin bir vektör uzayı V ve I ,V' nin özdeşlik dönüşümü olmak üzere,

$\forall u \in V$ için,

$$\begin{aligned}(J \circ J)(u) &= J(J(u)) \\ &= J(iu) \\ &= i(iu) \\ &= -I(u) \qquad (1.6)\end{aligned}$$

elde edilir. (1.6) eşitliği $\forall u \in V$ için gerçeklendiğinden,

$$J \circ J = -I$$

olur. Ayrıca her lineer dönüşümün bir matris gösterimi olduğundan,

$$[J]^2 = -[I] \qquad (1.7)$$

olur.

Tanım1.2:(Bir V Reel Vektör Uzayı Üzerinde Kompleks Yapı)

(1.7) ile tanımlanan J dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **kompleks yapı** denir./7/

Lemma 1.1:

V reel vektör uzayı üzerinde J kompleks yapısı bir lineer dönüşümdür.

İspat:

$\forall u,v \in V$ ve $\forall k_1, k_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned}J(k_1u + k_2v) &= i(k_1u + k_2v) \\ &= k_1iu + k_2iv \\ &= k_1J(u) + k_2J(v) \qquad (1.8)\end{aligned}$$

olduğundan J lineerdir. ☑

Teorem 1.1:

$2n$-boyutlu V reel vektör uzayı üzerinde bir kompleks yapı J olsun. $\{u_1,...,u_n,Ju_1,...,Ju_n\}$ kümesi V' nin bir bazı olacak şekilde V' de n tane lineer bağımsız $u_1,...,u_n$ vektörleri mevcuttur.

İspat:

J'nin λ özdeğerine karşılık öz vektörü v olmak üzere;

$$J(v) = \lambda v \tag{1.9}$$

ifadesini gözönüne alalım. (1.9)'a, (1.7)' ye göre $\forall v \in V$ için J uygulandığında,

$$\begin{aligned} J(J(v)) &= J(\lambda v) \\ J^2(v) &= \lambda J(v) \\ -I(v) &= \lambda^2(v) \end{aligned} \tag{1.10}$$

elde edilir. (1.10) $\forall v \in V$ için sağlandığından $-I = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \mp i$ olur. Dolayısıyla J'nin özdeğerleri komplekstir.

u_1 ve Ju_1 vektörleri V' nin 2- boyutlu bir alt uzayını gerer ve $u_1 \neq 0$ olduğundan Ju_1' de sıfırdan farklı olup $J(u_1) = Ju_1$ ve $J(Ju_1) = -u_1$ olup bu 2-boyutlu alt uzay aynı zamanda $-u_1, Ju_1$ vektörleri ile de gerildiğinden J altında bu alt uzay değişmez.

Eğer u_1, Ju_1, Ju_2'yi lineer bağımsız seçip u_2' yi de bir vektör olacak şekilde alındığında, a_1, a_2, b_1 ve b_2 reel sayılar olmak üzere u_1, Ju_1, u_2 ve Ju_2'nin aşağıdaki gibi lineer bağımsız vektörler olduğu gösterilebilir.

$$a_1u_1 + a_2u_2 + b_1Ju_1 + b_2Ju_2 = 0 \tag{1.11}$$

ise, u_1, Ju_1, u_2 ve Ju_2 lineer bağımsız vektörlerdir.

J, (1.11)'e uygulanırsa,

$$J(a_1u_1)+J(a_2u_2)+J(b_1Ju_1)+J(b_2Ju_2)=0$$
$$-b_1u_1-b_2u_2+a_1Ju_1+a_2Ju_2=0 \qquad (1.12)$$

elde edilir. (1.11) ve (1.12) ifadeleri düzenlendiğinde,

$$a_1b_2u_1+a_2b_2u_2+b_1b_2Ju_1+b_2^2Ju_2=0$$

$$-b_1a_2u_1-a_2b_2u_2+a_1a_2Ju_1+a_2^2Ju_2=0$$

denklemleri elde edilir. Buradan u_2 yok edilirse,

$$(a_1b_2-b_1a_2)u_1+(a_1a_2+b_1b_2)Ju_1+\left(a_2^2+b_2^2\right)Ju_2=0$$

ifadesi elde edilir. u_1, Ju_1 ve Ju_2 lineer bağımsız olduklarından, $a_2^2+b_2^2=0$,$a_2=b_2=0$ (1.11)' den de $a_1=b_1=0$ olduğundan, u_1, Ju_1, u_2 ve Ju_2 lineer bağımsızdır.

Yukarıdaki işlemleri tekrar ederek V de,

$$u_1,\ldots,u_n, Ju_1,\ldots,Ju_n \qquad (1.13)$$

2n-tane lineer bağımsız vektörlerin varlığı kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca,

$$J(u_\alpha)=u_{n+\alpha} \;\; (\alpha=1,\ldots,n) \qquad (1.14)$$

eşitlikleri gözönüne alınarak; V'nin bir bazı (1.14) gibi kullanılabilir.Böylece, $(u_\alpha, Ju_\alpha=u_{n+\alpha})$'nın her bir çifti J altında değişmeyerek V'nin 2- boyutlu alt vektör uzayını gerer.☑ /2,7/

1.2.1. Bir V Reel Vektör Uzayın Kompleks Yapısının Matris Gösterimi

V'nin J lineer endomorfizmi (1,1) tipinde bir tensör alanı olup, $\forall J \in \Im_1^1(V)$ için, $J = \sum_{i,j=1}^{n} J_i^j e_j \otimes e_i^*$ şeklinde tanımlanır.

Her lineer dönüşümün bir matris gösterimi olduğundan (1.13) bazına göre J matris formunda yazıldığında

$$J(u_j) = \sum_{i=1}^{2n} a_{ij} u_i \,,\; [J] = [a_{ji}]^T$$

olur ve buradan,

$$\begin{aligned}
J(u_1) &= 0u_1 + \ldots + 0u_n + 1Ju_1 + 0Ju_2 + \ldots + 0Ju_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
J(u_n) &= 0u_1 + \ldots + 0u_n + 0Ju_1 + \ldots + 0Ju_{n-1} + 1Ju_n \\
J(Ju_1) &= -1u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n + 0Ju_1 + \ldots + 0Ju_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
J(Ju_n) &= 0u_1 + \ldots + 0u_{n-1} - 1u_n + 0Ju_1 + \ldots + 0Ju_n
\end{aligned}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}^T = \begin{bmatrix} 0 & \delta_\beta^\alpha \\ -\delta_\beta^\alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

elde edilir. Ayrıca, J'nin genel bileşensel yapısı

$$[J] = \left[F_j^h\right] = \begin{bmatrix} F_\beta^\alpha & F_\beta^{n+\alpha} \\ F_{n+\beta}^\alpha & F_{n+\beta}^{n+\alpha} \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğundan, $F_\beta^\alpha = F_{n+\beta}^{n+\alpha} = 0, F_\beta^{n+\alpha} = \delta_\beta^\alpha, F_{n+\beta}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha$ eşitlikleri elde edilir.

Lemma 1.2:

$a^{\alpha}, b^{\alpha} \in R$ ve $\{\zeta_1,...,\zeta_n\}$, C^n' nin bir bazı olmak üzere;

$\varphi: R_j^{2n} \rightarrow C^n$

$$a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha} \rightarrow \varphi\left(a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha}\right) = \left(a^{\alpha} + ib^{\alpha}\right)\zeta_{\alpha} \tag{1.16}$$

ile tanımlanan φ dönüşümü lineerdir.

İspat:

$\forall k_1, k_2 \in R$, $\forall u, v \in R_j^{2n}$ için, $u = a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha}$ ve $v = c^{\alpha}u_{\alpha} + d^{\alpha}Ju_{\alpha}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\varphi(k_1u + k_2v) &= \varphi\left(k_1a^{\alpha}u_{\alpha} + k_1b^{\alpha}Ju_{\alpha} + k_2c^{\alpha}u_{\alpha} + k_2d^{\alpha}Ju_{\alpha}\right) \\
&= \varphi\left((k_1a^{\alpha} + k_2c^{\alpha})u_{\alpha} + (k_1b^{\alpha} + k_2d^{\alpha})Ju_{\alpha}\right) \\
&= \left[\left(k_1a^{\alpha} + k_2c^{\alpha}\right) + i\left(k_1b^{\alpha} + k_2d^{\alpha}\right)\right]\zeta_{\alpha} \\
&= k_1\left(a^{\alpha} + ib^{\alpha}\right)\zeta_{\alpha} + k_2\left(c^{\alpha} + id^{\alpha}\right)\zeta_{\alpha} \\
&= k_1\varphi(u) + k_2\varphi(v) \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

olup, (1.17)'den φ, lineerdir. ☑

Teorem 1.2:

J ile değiştirilebilen bir otomorfizma, $T_R: R_j^{2n} \rightarrow R_j^{2n}$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(T_Ru) = T_C.\varphi(u) \qquad \left(u \in R_j^{2n}\right)$$

özelliğini sağlayan C^n vektör uzayının bir tek T_C otomorfizması vardır.

İspat:

R_j^{2n}'nin $\{u_1,...,u_n,Ju_1,...,Ju_n\}$ bazlarına göre $[T_R]$'nin bileşenlerini T_β^α, $T_\beta^{n+\alpha}$, $T_{n+\beta}^\alpha$ ve $T_{n+\beta}^{n+\alpha}$ şeklinde alırsak, $[T_R][J]=[J][T_R]$ bağıntısından,

$$\begin{bmatrix} T_\beta^\alpha & T_\beta^{n+\alpha} \\ T_{n+\beta}^\alpha & T_{n+\beta}^{n+\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \delta_\beta^\alpha \\ -\delta_\beta^\alpha & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \delta_\beta^\alpha \\ -\delta_\beta^\alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_\beta^\alpha & T_\beta^{n+\alpha} \\ T_{n+\beta}^\alpha & T_{n+\beta}^{n+\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_\beta^\alpha T_\beta^{n+\alpha} & \delta_\beta^\alpha T_\beta^{n+\alpha} \\ -\delta_\beta^\alpha T_{n+\beta}^{n+\alpha} & \delta_\beta^\alpha T_{n+\beta}^\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_\beta^\alpha T_{n+\beta}^\alpha & \delta_\beta^\alpha T_{n+\beta}^{n+\alpha} \\ -\delta_\beta^\alpha T_\beta^\alpha & -\delta_\beta^\alpha T_\beta^{n+\alpha} \end{bmatrix}$$

olur. J ve T_R değişme özelliğine sahip olduğundan $-T_\beta^{n+\alpha}=T_{n+\beta}^\alpha$, $T_\beta^\alpha=T_{n+\beta}^{n+\alpha}$ elde edilir.

Ayrıca, $b^\alpha=a^{n+\alpha}$, $Ju_\alpha=u_{n+\alpha}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u &= a^\alpha u_\alpha + b^\alpha Ju_\alpha \\ &= a^\alpha u_\alpha + a^{n+\alpha} Ju_\alpha \\ &= a^h u_h \quad (1\le h\le 2n) \end{aligned}$$

elde edilir. $T_R(u)=T_k^i a^k u_i$ olduğundan,

$$T_R(u)=T_\beta^\alpha a^\beta u_\alpha + T_\beta^{n+\alpha} a^\beta u_{n+\alpha} + T_{n+\beta}^\alpha a^{n+\beta} u_\alpha + T_{n+\beta}^{n+\alpha} a^{n+\beta} u_{n+\alpha}$$

dır. Burada $T_{n+\beta}^\alpha=-T_\beta^{n+\alpha}$, $T_{n+\beta}^{n+\alpha}=T_\beta^\alpha$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$T_R(u)=T_\beta^\alpha a^\beta u_\alpha + T_\beta^{n+\alpha} a^\beta u_{n+\alpha} - T_\beta^{n+\alpha} a^{n+\beta} u_\alpha + T_\beta^\alpha a^{n+\beta} u_{n+\alpha}$$

olur. u_α ve $u_{n+\alpha}$ ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$T_R(u)=\left(T_\beta^\alpha a^\beta - T_\beta^{n+\alpha} a^{n+\beta}\right)u_\alpha + \left(T_\beta^{n+\alpha} a^\beta + T_\beta^\alpha a^{n+\beta}\right)u_{n+\alpha}$$

elde edilir. $a^{n+\beta}=b^\beta$, $u_{n+\alpha}=Ju_\alpha$ yerlerine yazılırsa,

$$T_R(u)=\left(T_\beta^\alpha a^\beta - T_\beta^{n+\alpha} b^\beta\right)u_\alpha + \left(T_\beta^{n+\alpha} a^\beta + T_\beta^\alpha b^\beta\right)Ju_\alpha$$

$$T_R(u)=\left(T_\beta^\alpha a^\beta - T_\beta^{n+\alpha} b^\beta\right)u_\alpha + i\left(T_\beta^{n+\alpha} a^\beta + T_\beta^\alpha b^\beta\right)u_\alpha$$

$$T_R(u)=\left\{T_\beta^\alpha\left(a^\beta+ib^\beta\right)+iT_\beta^{n+\alpha}\left(a^\beta+ib^\beta\right)\right\}u_\alpha$$

$$T_R(u)=\left(T_\beta^\alpha+iT_\beta^{n+\alpha}\right)\left(a^\beta+ib^\beta\right)u_\alpha$$

$$\varphi\left(T_R(u)\right)=\varphi\left(\left(T_\beta^\alpha+iT_\beta^{n+\alpha}\right)\left(a^\beta+ib^\beta\right)u_\alpha\right)$$

$\left(T_\beta^\alpha+iT_\beta^{n+\alpha}\right)=T_C$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\varphi\left(T_R(u)\right)&=T_C\varphi\left(\left(a^\beta+ib^\beta\right)u_\alpha\right)\\&=T_C\varphi\left(a^\beta u_\alpha+b^\beta Ju_\alpha\right)\\&=T_C\left(a^\beta+ib^\beta\right)\zeta_\alpha\\&=T_C\varphi(u)\end{aligned}$$

elde edilir.

$T_C:C^n\to C^n$ herhangi bir otomorfizm olsun. T_C'nin reel ve sanal kısımları toplamaya göre ayrıldığında $T_\beta^\alpha+iT_\beta^{n+\alpha}$ olur. $T_R:\left[T_j^h\right]$'nin matris formu,

$-T_{\beta}^{n+\alpha} = T_{n+\beta}^{\alpha}$, $T_{\beta}^{\alpha} = T_{n+\beta}^{n+\alpha}$ eşitliklerine göre tayin edilir. $T_R.J=J$. T_R özelliğini sağlayan $T_R : R_j^{2n} \to R_j^{2n}$ otomorfizmalarının kümesi, C^n'nin otomorfizmalar alt grubu GL(n;C)'ye izomorftur. ☑

Teorem 1.3.

R üzerinde $2n$- boyutlu reel vektör uzayı V ve V'nin kompleks yapısı J olsun.

$$\left(a^{\alpha} + ib^{\alpha}\right)u_{\alpha} = a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha} \qquad \left(a^{\alpha}, b^{\alpha} \in R\right) \tag{1.18}$$

şeklinde bir kompleks vektör uzayı içine kompleks sayılardan bir skaler çarpma tanımlandığında V, R_j^{2n}'ne izomorftur.

İspat:

$a^{\alpha}, b^{\alpha} \in R$, $u_{\alpha} \in V$ ve $(a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha}) \in R_j^{2n}$ olmak üzere, bir A dönüşümü

$$A : V \to R_j^{2n}$$

$$\begin{aligned} u_{\alpha} \to (a^{\alpha} + ib^{\alpha})u_{\alpha} &= a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}iu_{\alpha} \\ &= a^{\alpha}u_{\alpha} + b^{\alpha}Ju_{\alpha} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa, A dönüşümü bir izomorfizm olur. Dolayısıyla; V R_j^{2n}'ye izomorftur.☑

Teorem 1.2'den T_R' nin matris formu,

$$\left[T_R\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A+iB)I_n & (B+iA)I_n \\ (-B+iA)I_n & (A-iB)I_n \end{bmatrix}$$
$$= 2\begin{bmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{bmatrix}$$

olur ve buradan da,

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{bmatrix} = \left|\det[A+iB]\right|^2 \rangle 0$$

elde edilir. (1.19)'da verilen R_j^{2n}' nin T_R otomorfizmi, $GL(n;C)$'nin $A_\beta^\alpha + iB_\beta^\alpha$ elemanların reel temsilleridir.

C^n'nin bir elemanı $z = \left(z^1,\ldots,z^n\right)$, $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha \quad \left(x^\alpha, y^\alpha \in R\right)$ ile gösterilir.

$$\left(z^1,\ldots,z^n\right) \in \mathrm{C}^n \to \left(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n\right) \in R^{2n}$$

dönüşümüyle, R^{2n} reel vektör uzayı C^nye izomorftur.

Tanım 1.3:(Kanonik kompleks yapı)

(1.7) ifadesini gerçekleyen ve

$$J_\circ : R^{2n} \to R^{2n}$$
$$\left(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n\right) \to \left(y^1,\ldots,y^n,-x^1,\ldots,-x^n\right)$$

şeklinde tanımlanan $J_\circ$ dönüşümüne R^{2n}'nin **kanonik kompleks yapısı** denir./9/

$J_\circ$' ın matris formu R^{2n}'nin standart bazı (1.14)'e göre verilebilir.

R^{2n}'nin J ve J' herhangi kompleks yapılarına göre bazları sırasıyla; $\{e_1,...,e_n,Je_1,...,Je_n\}$ ve $\{e_1',...,e_n',Je_1',...,Je_n'\}$ dır. $GL(2n;R)$'nin bir A elemanı $Ae_\alpha = e_\alpha'$, $AJe_\alpha = J'e_\alpha'$ ile tanımlanırsa $J' = AJA^{-1}$ olur. Dolayısıyla, R^{2n}'nin J kompleks yapısı, geçişli olarak R^{2n}'nin AJA^{-1} kompleks yapısına, $GL(2n;R)$'nin her A elemanına göre sağlanır.

Teorem 1.2' ye göre A, $GL(n;C)$ deyse yalnız J_o kanonik yapısıyla değişebilir ve $J_o=AJA^{-1}$ olur. Böylece, $GL(2n;R)/GL(n;C)$ ve R^{2n} ile kompleks sayılar kümesi arasında 1-1 bir dönüşüm vardır. $A\in GL(2n;R)$ göre temsil edilen koset(yan cümle) $J = A^{-1}J_oA$ kompleks yapısına karşılık gelir./7/

II. BÖLÜM

V^c 'NİN KOMPLEKS YAPISI VE HERMİT İÇ ÇARPIMI

2.1. V^c 'nin kompleks yapısı

Tanım 2.1:(V^c 'nin lineer endomorfizmi)

J kompleks yapısı ile $2n$ -boyutlu reel uzay $V\left(=R_j^{2n}\right)$ olsun.

$$J(u+iv)=J(u)+iJ(v) \qquad (u,v\in V) \tag{2.1}$$

ile tanımlanan J dönüşümüne V^c **'nin bir lineer endomorfizmi** denir./7/

Lemma 2.1:

V^c üzerinde tanımlanan J dönüşümü lineerdir.

İspat:

$\forall(u+iv)\in V^c$ için (1.5)'den,

$$\begin{aligned} J(u+iv) &= i(u+iv) \\ &= iu+i(iv) \\ &= J(u)+iJ(v) \end{aligned}$$

olduğundan, J lineerdir.☑

Lemma 2.2:

V^c'de $J^2=-I_n$ dir.

İspat:

$J^2=-I_n$ olsun. Bu durumda;

$$J(u+iv)=J(u)+iJ(v)$$

$$J\big(J(u+iv)\big)=J\big(J(u)+iJ(v)\big)$$

$$J^2(u+iv)=J^2(u)+iJ^2(v)$$

$$J^2(u+iv)=-I_n(u+iv)$$

elde edilir. Bu son eşitlik $\forall(u+iv)$ için sağlandığından $J^2=-I_n$ olur.☑

Tanım 2.2:(V^c 'nin kompleks yapısı)

(2.1) ile tanımlanan ve (1.7) bağıntısını gerçekleyen J dönüşümüne **V^c 'nin kompleks yapısı** denir.

J, o zaman V^c'de $(1,1)$ tipinden bir tensör olup, J'nin özdeğerleri i ve $-i$ dir. Ayrıca,

$$V^{1,0}=\left\{z\in V^c : Jz=iz\right\} \qquad , \qquad V^{0,1}=\left\{z\in V^c : Jz=-iz\right\} \tag{2.3}$$

kümelerini tanımlarsak $V^{1,0}, V^{0,1}\subset V^c$ olur./7/

Teorem2.1:

$V^{1,0}, V^{0,1}\subset V^c$ olmak üzere;

i) $V^{1,0}=\{u-iJu : u\in V\}$, $V^{0,1}=\{u+iJu : u\in V\}$ (2.4)

ii) $V^c=V^{1,0}\oplus V^{0,1}$ (2.5)

iii) $\overline{V^c}$'de

$\overline{V^{1,0}}=V^{0,1}$ ve $\overline{V^{0,1}}=V^{1,0}$ (2.6)

olacak biçimde $V^{1,0}$ ile $V^{0,1}$ arasında birer izomorfizm vardır.

İspat:

i) V'nin bir bazı $\{u_\alpha\}$ olmak üzere; J kompleks yapısı yardımıyla V_α ile $\overline{V_\alpha}$ vektörleri,

$$V_\alpha = \frac{1}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha) \quad , \qquad \overline{V_\alpha} = \frac{1}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha) \tag{2.7}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
J(V_\alpha) &= J\left(\frac{1}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{2}J(u_\alpha - iJu_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha - iJ^2(u_\alpha)\right) \\
&= \frac{i}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha) \\
&= i\left(\frac{1}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha)\right) \\
&= iV_\alpha
\end{aligned}$$

olur ve ayrıca

$$\begin{aligned}
J(\overline{V_\alpha}) &= J\left(\frac{1}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{2}J(u_\alpha + iJu_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha + iJ^2(u_\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{2}(Ju_\alpha - iu_\alpha) \\
&= -\frac{i}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha) \\
&= -i\left(\frac{1}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha)\right) \\
&= -i\overline{V_\alpha}
\end{aligned}$$

$$J(V_\alpha) = iV_\alpha \;, J(\overline{V_\alpha}) = -i\overline{V_\alpha} \tag{2.8}$$

olup, (2.3) gerçeklendiğinden $V^{1,0}$'ın elemanları V_α'lardan ve $V^{0,1}$'ın elemanları $\overline{V_\alpha}$'lerden oluşur.

ii) $u_\alpha \in V^c$ olmak üzere, $u_\alpha = V_\alpha + \overline{V_\alpha}$ olduğundan

$$\begin{aligned} J(u_\alpha) &= J\left(\frac{1}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha)\right) + J\left(\frac{1}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha - iJ^2(u_\alpha)\right) + \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha + iJ^2(u_\alpha)\right) \\ &= \frac{1}{2}(Ju_\alpha + iu_\alpha) + \frac{1}{2}(Ju_\alpha - iu_\alpha) \\ &= Ju_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\begin{aligned} boyV^c &= boyV^{1,0} + boyV^{0,1} \\ &= boySp(V_\alpha) + boySp(\overline{V_\alpha}) \\ &= boySp\{V_1,\dots,V_n\} + boySp\{\overline{V_1},\dots,\overline{V_n}\} \\ &= n + n \\ &= 2n \end{aligned}$$

olup böylece, V ve V^c'nin R cismi üzerinde $boyV = boyV^c = 2n$ olduğundan $V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ dir.

iii) $\overline{(\;)}: V^c \to V^c$

$$a + ib \to a - ib$$

şeklinde tanımlı $\overline{(\;)}$ fonksiyonu için $\forall (u - iJu) \in V^{1,0}$ için $\overline{(u - iJu)} = (u + iJu)$ olduğundan $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$ olur. Benzer şekilde $\overline{V^{0,1}} = V^{1,0}$ olur.☑

2.1.1. V^c 'de J Kompleks Yapısının Matris Gösterimi

V^c 'de J lineer dönüşümün matris gösterimini V reel vektör uzayında gösterilen yoldan bulunabilir. J lineer dönüşümü,

$$J(V_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}V_i+\sum_{i=1}^{n}a_{n+i\,j}\overline{V_i}\quad,\quad J(\overline{V_j})=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}V_i+\sum_{i=1}^{n}b_{n+i\,j}\overline{V_i}\quad(1\leq j\leq n)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da,

$$J(V_1)=iV_1+0V_2+\ldots+0V_n+0\overline{V_1}+\ldots+0\overline{V_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J(V_n)=0V_1+\ldots+0V_{n-1}+iV_n+0\overline{V_1}+\ldots+0\overline{V_n}$$
$$J(\overline{V_1})=0V_1+\ldots+0V_n-i\overline{V_1}+0\overline{V_2}+\ldots+0\overline{V_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J(\overline{V_n})=0V_1+\ldots+0V_n+0\overline{V_1}+\ldots+0\overline{V}_{n-1}-i\overline{V_n}$$

$$[J]=\begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i\delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -i\delta_\beta^\alpha \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

elde edilir. /4,7/

Tanım 2.3:(V*'ın kompleks yapı)

2n-boyutlu reel vektör uzayı V' nin V* dual uzayı üzerinde tanımlı bir $J^*:V^*\to V^*$ dönüşümü,

$$J^*(u^*)=iu^*, J^*u^*_\alpha=u^*_{n+\alpha}\ (\alpha=1,\ldots,n)\text{ve}\left[J^*\right]^2=-I_n \text{ olacak şekilde}$$

$$\langle J(u),u^*\rangle=\langle u,J(u^*)\rangle\quad(\forall u\in V,u^*\in V^*) \qquad (2.10)$$

eşitliğini sağlıyorsa, J*'a, **V*'ın bir kompleks yapısı** denir.

Lemma 2.3:

V üzerinde kompleks yapı J olmak üzere V nin V^* dual vektör uzayı üzerindeki kompleks yapı J^* ise bu durumda $J^* \cong J$ dir.

İspat:

$V^* = Sp\left\{u_1^*, \ldots, u_n^*, Ju_1^*, \ldots, Ju_n^*\right\}$ olmak üzere $J^*(u_\alpha^*) = \sum_{\beta=1}^{2n} b_{\beta\alpha} u_\beta^*$ olur ve buradan

$$J^*\left(u_1^*\right) = 0u_1^* + \ldots + 0u_n^* + 1J^*u_1^* + 0J^*u_2^* + \ldots + 0J^*u_n^*$$

....

$$J^*\left(u_n^*\right) = 0u_1^* + \ldots + 0u_n^* + 0J^*u_1^* + \ldots + 0J^*u_{n-1}^* + 1J^*u_n^*$$

$$J^*\left(J^*u_1^*\right) = -1u_1^* + 0u_2^* + \ldots + 0u_n^* + 0J^*u_1^* + \ldots + 0J^*u_n^*$$

....

$$J^*\left(J^*u_n^*\right) = 0u_1^* + \ldots + 0u_{n-1}^* - 1u_n^* + 0J^*u_1^* + \ldots + 0J^*u_n^*$$

$$\left[J^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}^T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_\beta^\alpha \\ -\delta_\beta^\alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

elde edilir. (1.15)'den dolayı $J^* \cong J$ olduğu görülür. ☑

Uyarı: Bundan sonra ki bölümlerde J^* yerine J kullanılacaktır.

Şimdi,

$$V_{1,0} = \left\{u^* \in (V^c)^* : \left\langle \bar{u}, u^* \right\rangle = 0, \bar{u} \in V^{0,1}\right\}$$

$$V_{0,1} = \left\{\overline{u^*} \in (V^c)^* : \left\langle u, \overline{u^*} \right\rangle = 0, u \in V^{1,0}\right\}$$

kümelerini tanımlarsak; aşağıdaki teorem verilebilir./7/

Teorem 2.2:

$V_{1,0}$, $V_{0,1} \subset (V^c)^*$ olmak üzere;

i) $V_{1,0} = \left\{ u^* \in (V^c)^* : \left\langle \bar{u}, u^* \right\rangle = 0, \bar{u} \in V^{0,1} \right\}$

$$V_{0,1} = \left\{ \overline{u^*} \in (V^c)^* : \left\langle u, \overline{u^*} \right\rangle = 0, u \in V^{1,0} \right\} \tag{2.12}$$

ii) $(V^c)^* = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$ (2.13)

dir.

İspat:

i) $V_\alpha^* \in V_{1,0}$, $\overline{V_\alpha^*} \in V_{0,1}$ ve $u_\alpha^*, \overline{u_\alpha^*} \in (V^c)^*$ olmak üzere;

$$V_\alpha^* = \frac{1}{2}(u_\alpha^* - iJu_\alpha^*), \ \overline{V_\alpha^*} = \frac{1}{2}(u_\alpha^* + iJu_\alpha^*) \tag{2.14}$$

ile tanımlansın. (2.7)'den $\overline{V_\alpha} \in V^{1.0}$ ve $\overline{V_\alpha} = (u_\alpha + iJu_\alpha)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{u}, u^* \right\rangle &= \left\langle \overline{V_\alpha}, V_\alpha^* \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}(u_\alpha + iJu_\alpha), \frac{1}{2}(u_\alpha^* - iJu_\alpha^*) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\langle (u_\alpha + iJu_\alpha), (u_\alpha^* - iJu_\alpha^*) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^* \right\rangle - i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^* \right\rangle + i\left\langle Ju_\alpha, u_\alpha^* \right\rangle + \left\langle Ju_\alpha, Ju_\alpha^* \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^* \right\rangle - i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^* \right\rangle + i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^* \right\rangle + \left\langle u_\alpha, J^2(u_\alpha^*) \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^* \right\rangle - \left\langle u_\alpha, u_\alpha^* \right\rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.7) ve (2.14)'den

$$
\begin{aligned}
\left\langle u,\overline{u^*}\right\rangle &= \left\langle V_\alpha,\overline{V}_\alpha^*\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}(u_\alpha - iJu_\alpha), \frac{1}{2}(u_\alpha^* + iJu_\alpha^*)\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\langle (u_\alpha - iJu_\alpha), (u_\alpha^* + iJu_\alpha^*)\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^*\right\rangle + i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^*\right\rangle - i\left\langle Ju_\alpha, u_\alpha^*\right\rangle + \left\langle Ju_\alpha, Ju_\alpha^*\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^*\right\rangle + i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^*\right\rangle - i\left\langle u_\alpha, Ju_\alpha^*\right\rangle + \left\langle u_\alpha, J^2(u_\alpha^*)\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle u_\alpha, u_\alpha^*\right\rangle - \left\langle u_\alpha, u_\alpha^*\right\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur.

ii) $u_\alpha^* \in (V^c)^*$ olmak üzere, $u_\alpha^* = V_\alpha^* + \overline{V}_\alpha^*$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
J\left(u_\alpha^*\right) &= J\left(\frac{1}{2}\left(u_\alpha^* - iJu_\alpha^*\right)\right) + J\left(\frac{1}{2}\left(u_\alpha^* + iJu_\alpha^*\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha^* - iJ^2\left(u_\alpha^*\right)\right) + \frac{1}{2}\left(Ju_\alpha^* + iJ^2\left(u_\alpha^*\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}Ju_\alpha^* + \frac{1}{2}u_\alpha^* + \frac{1}{2}Ju_\alpha^* - \frac{1}{2}u_\alpha^* \\
&= Ju_\alpha^*
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
boy(V^c)^* &= boyV_{1,0} + boyV_{0,1} \\
&= boySp\left(V_\alpha^*\right) + boySp\left(\overline{V}_\alpha^*\right) \\
&= boySp\left\{V_1^*,\ldots,V_n^*\right\} + boySp\left\{\overline{V}_1^*,\ldots,\overline{V}_n^*\right\} \\
&= n+n \\
&= 2n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak; $boyV^* = boyV = boyV^c = boy(V^c)^* = 2n$ olduğundan $(V^c)^* = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$ dir.☑

2.2. Hermit İç Çarpımı

Tanım 2.4:(Hermit iç çarpımı)

Bir $V(=R_j^{2n})$ reel vektör uzayı üzerindeki kompleks yapı J olmak üzere

$$h(Ju, Jv) = h(u, v) \qquad (u, v \in V) \tag{2.15}$$

eşitliği ile tanımlanan h dönüşümüne, R_j^{2n}' de bir **Hermit iç çarpımı** denir.

Şimdi,

$$\begin{aligned} h(u, Jv) &= h(Ju, J^2(v)) \\ &= h(Ju, -v) \\ &= -h(v, Ju) \end{aligned} \tag{2.16}$$

ifadesinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} h(u, Ju) &= h(Ju, J^2(u)) \\ &= h(Ju, -u) \\ &= -h(u, Ju) \end{aligned}$$

olur ve buradan da,

$$h(u, Ju) = 0 \tag{2.17}$$

eşitliği elde edilir.

Böylece; h iç çarpımı V'de bir Hermit metriği tanımlar ve $V(=R_j^{2n})$'de bir Hermit uzay olur./6,7/

Teorem 2.3:

$$h(u_\alpha, u_\beta) = h(Ju_\alpha, Ju_\beta) = \delta_\alpha^\beta \text{ ve } h(u_\alpha, Ju_\beta) = 0 \tag{2.18}$$

ifadesindeki $u_1, \ldots, u_n, Ju_1, \ldots, Ju_n$ vektörleri V için bir ortonormal bazdır./4,7/

2.2.1. R_j^{2n}'de İki Vektörün Hermit İç Çarpımı

$(a^\alpha u_\alpha + b^\alpha Ju_\alpha)$ ve ($c^\beta u_\beta + d^\beta Ju_\beta$)$\in R_j^{2n}$ vektörlerinin (2.18)'e göre Hermit iç çarpımı,

$$\begin{aligned}
h(a^\alpha u_\alpha + b^\alpha Ju_\alpha, c^\beta u_\beta + d^\beta Ju_\beta) &= h(a^\alpha u_\alpha, c^\beta u_\beta) + h(a^\alpha u_\alpha, d^\beta Ju_\beta) \\
&\quad + h(b^\alpha Ju_\alpha, c^\beta u_\beta) + h(b^\alpha Ju_\alpha, d^\beta Ju_\beta) \\
&= a^\alpha c^\beta h(u_\alpha, u_\beta) + a^\alpha d^\beta h(u_\alpha, Ju_\beta) \\
&\quad + b^\alpha c^\beta h(Ju_\alpha, u_\beta) + b^\alpha d^\beta h(Ju_\alpha, Ju_\beta) \\
&= a^\alpha c^\alpha h(u_\alpha, u_\beta) + b^\alpha d^\alpha h(Ju_\alpha, Ju_\beta) \\
&= (a^\alpha c^\alpha + b^\alpha d^\alpha)\delta_\alpha^\beta \\
&= \sum_{\alpha=\beta=1}^{n} (a^\alpha c^\alpha + b^\alpha d^\alpha)\delta_\alpha^\beta \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (a^\alpha c^\alpha + b^\alpha d^\alpha) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

olur./7/

Tanım 2.5:(Üniter baz)

C^n'deki $(a^\alpha + ib^\alpha)\zeta_\alpha$ ve $(c^\beta + id^\beta)\zeta_\beta$ vektörleri (2.19) denklemini gerçeklediğinde, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ bazı için

$$h(\zeta_\alpha, \zeta_\beta) = \delta_\alpha^\beta \tag{2.20}$$

ifadesi sağlanırsa, bu baza C^n'nin bir **üniter bazı** denir./7/

2.2.2. C^n 'de iki vektörün Hermit iç çarpımı

$((a^{\alpha}+ib^{\alpha})\zeta_{\alpha}\ )$ ve $((c^{\beta}+id^{\beta})\zeta_{\beta})\ \in C^n$ olmak üzere C^n'deki iki vektörün iç çarpımı,

$$\begin{aligned}
h((a^{\alpha}+ib^{\alpha})\zeta_{\alpha},(c^{\beta}+id^{\beta})\zeta_{\beta}) &= h(a^{\alpha}\zeta_{\alpha},c^{\beta}\zeta_{\beta})+h(a^{\alpha}\zeta_{\alpha},id^{\beta}\zeta_{\beta} \\
&\quad + h(ib^{\alpha}\zeta_{\alpha},c^{\beta}\zeta_{\beta})+h(b^{\alpha}\zeta_{\alpha},d^{\beta}\zeta_{\beta}) \\
&= a^{\alpha}c^{\beta}h(\zeta_{\alpha},\zeta_{\beta})-ia^{\alpha}d^{\beta}h(\zeta_{\alpha},\zeta_{\beta}) \\
&\quad +i\,b^{\alpha}c^{\beta}h(\zeta_{\alpha},\zeta_{\beta})+b^{\alpha}d^{\beta}d^{\beta}h(\zeta_{\alpha},\zeta_{\beta})
\end{aligned}$$

(2.20)'den

$$\begin{aligned}
h((a^{\alpha}+ib^{\alpha})\zeta_{\alpha},(c^{\beta}+id^{\beta})\zeta_{\beta}) &= (a^{\alpha}c^{\beta}+b^{\alpha}d^{\beta})+i(b^{\alpha}c^{\beta}-a^{\alpha}d^{\beta})\delta_{\alpha}^{\beta} \\
&= \left(c^{\beta}(a^{\alpha}+ib^{\alpha})-id^{\beta}(a^{\alpha}+ib^{\alpha})\right)\delta_{\alpha}^{\beta} \\
&= \left((a^{\alpha}+ib^{\alpha})(c^{\beta}-id^{\beta})\right)\delta_{\alpha}^{\beta} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}(a^{\alpha}+ib^{\alpha})\overline{(c^{\alpha}+id^{\alpha})} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}(a^{\alpha}c^{\alpha}+b^{\alpha}d^{\alpha}) \\
&\quad +i\sum_{\alpha=1}^{n}(b^{\alpha}c^{\alpha}-a^{\alpha}d^{\alpha}) \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

olur./7/

Tanım 2.6:(Üniter uzay)

Eğer C^n kompleks uzayında tanımlanan (2.21)'in iç çarpımının reel kısmı "0" ise C^n 'ne **Üniter uzay** denir.

(2.21)'in imajiner kısmı,

$$h(a^{\alpha}u_{\alpha}+b^{\alpha}Ju_{\alpha},J(c^{\beta}u_{\beta}+d^{\beta}Ju_{\beta}))=h(a^{\alpha}u_{\alpha},c^{\beta}Ju_{\beta})+h(a^{\alpha}u_{\alpha},d^{\beta}J^{2}(u_{\beta}))$$
$$+h(b^{\alpha}Ju_{\alpha},c^{\beta}Ju_{\beta})+h(b^{\alpha}Ju_{\alpha},d^{\beta}J^{2}u_{\beta})$$
$$=a^{\alpha}c^{\beta}h(u_{\alpha},u_{\beta})-a^{\alpha}d^{\beta}h(u_{\alpha},u_{\beta})$$
$$+b^{\alpha}c^{\beta}h(Ju_{\alpha},Ju_{\beta})-b^{\alpha}d^{\beta}h(Ju_{\alpha},u_{\beta})$$

(2.18)'den,

$$h(a^{\alpha}u_{\alpha}+b^{\alpha}Ju_{\alpha},J(c^{\beta}u_{\beta}+d^{\beta}Ju_{\beta}))=-a^{\alpha}d^{\beta}h(u_{\alpha},u_{\beta})+b^{\alpha}c^{\beta}h(Ju_{\alpha},Ju_{\beta})$$
$$=(b^{\alpha}c^{\beta}-a^{\alpha}d^{\beta})\delta_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}(b^{\alpha}c^{\beta}-a^{\alpha}d^{\beta})\delta_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{n}(b^{\alpha}c^{\alpha}-a^{\alpha}d^{\alpha}) \tag{2.22}$$

elde edilir./7/

Tanım 2.7:(Üniter dönüşüm)

Üniter bir uzayda tanımlı bir U lineer dönüşümü üniter bir bazı , üniter bir baza dönüştürüyorsa, U'ya C^n 'de **Üniter dönüşüm** denir.

U üniter dönüşümü,

$$\langle U\zeta_{\beta},U\zeta_{\alpha}\rangle=\langle\zeta_{\beta},\zeta_{\alpha}\rangle \tag{2.23}$$

eşitliği ile tanımlanır. U, ζ_{α} üniter bazına göre $\left[U_{\beta}^{\alpha}\right]=U$ matris formunda yazılır. (Yani, $U(\zeta_{\beta})=\sum_{\alpha=1}^{n}U_{\beta}^{\alpha}\zeta_{\alpha}=\zeta_{\alpha}U$ dur.)/7/

Teorem2.4:

C^n 'de tanımlanan U üniter dönüşümü,

$$\overline{U}^{T}U=I_{n} \tag{2.24}$$

eşitliğini gerçekler.

İspat:

(2.23) ve /5/'den yararlanarak,

$$\langle U(\zeta_\beta),U(\zeta_\alpha)\rangle=\langle \zeta_\beta,\zeta_\alpha\rangle$$
$$(\zeta_\beta U)(\overline{\zeta_\alpha U})^T=\zeta_\beta\overline{\zeta}_\alpha^T$$
$$\zeta_\beta U\overline{U}^T\overline{\zeta}_\alpha^T=\zeta_\beta\overline{\zeta}_\alpha^T$$

elde edilir. Buradan da $U\overline{U}^T=I_n$ olduğundan $\overline{U}^TU=I_n$ elde edilir.☑/5,7/

Teorem2.5:

J kompleks yapısı ile bir V reel vektör uzayında bir Hermit iç çarpımı h olsun. h için

a) $h(Z,\overline{Z})>0 \qquad \forall 0\neq Z\in V^c$

b) $h(\overline{Z},\overline{W})=h(\overline{Z,W}) \quad Z,W\in V^c$

c) $h(Z,\overline{W})=0,\ Z\in V^{1,0}$ ve $W\in V^{0,1}$

önermeleri gerçeklenir.

İspat:

a) $Z\neq 0$ ve $Z(=u+iv)\in V^c$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}h(Z,\overline{Z})&=h(u+iv,u-iv)\\&=h(u,u)-ih(u,v)+ih(v,u)+h(v,v)\\&=h(u,u)+h(v,v)\rangle 0\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $Z(=u+iv)$ ve $W(=u'+iv')\in V^c$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h(Z,W) &= h(u+iv,u'+iv') \\ &= h(u,u')+ih(u,v')+ih(v,u')-h(v,v') \\ &= h(u,u')-h(v,v')+i(h(u,v')+h(v,u')) \end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\overline{h(Z,W)} = h(u,u')-h(v,v')-i(h(u,v')+h(v,u'))$$

$$= h(u,u')-ih(u,v')-ih(v,u')-h(v,v')$$

$$= h(u,u')-ih(u,v')-ih(v,u')+i^2h(v,v')$$

$$= h(u-iv,u'-iv')$$

$$= h(\overline{Z},\overline{W})$$

c) (2.4)'den $Z(=u-iJu)\in V^{1,0}$ ve $W(=u+iJu)\in V^{0,1}$ alındığında ,

$$\begin{aligned} h(Z,W) &= h(u-iJu,u-iJu) \\ &= h(u,u)-ih(u,Ju)-ih(Ju,u)-h(Ju,Ju) \\ &= h(u,u)-h(Ju,Ju) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ☑

III. BÖLÜM

KOMPLEKS FONKSİYONLAR

3.1. C^n Üzerinde Fonksiyonlar

$(z^1,\ldots,z^n) \to (x^1,y^1,\ldots,x^n,y^n)$ eşlemesi yardımıyla R^{2n} *ile* C^n izomorfik olup, C^n'e *2n*-boyutlu afin uzay gibi bakılabilir. Ayrıca, C^n'nin bir p noktasında tanjant ve kotanjant uzaylarının R üzerindeki doğal bazları sırasıyla,

$$T_p(R^{2n}) = Sp\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p\right\} \tag{3.1}$$

ve

$$T_p^*(R^{2n}) = Sp\left\{(dx^1)_p, (dy^1)_p, \ldots, (dx^n)_p, (dy^n)_p\right\} \tag{3.2}$$

ile tanımlanır. $T_p(R^{2n})$ ve $T_p^*(R^{2n})$'nin kompleksleştirilmesi sırasıyla $T_p^c(R^{2n})$ ve $(T_p^*(R^{2n}))^c = (T_p^c(R^{2n}))^*$ olur.

$z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha, z^{\bar\alpha} = \bar z^\alpha = x^\alpha - iy^\alpha$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$ olmak üzere $(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p$, $(\frac{\partial}{\partial \bar z^\alpha})_p$ $(dz^\alpha)_p$, $(d\bar z^\alpha)_p$ ifadeleri;

$$\begin{gathered}(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p = \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p - i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p\right\}, (\frac{\partial}{\partial \bar z^\alpha})_p = \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p\right\} \\ (dz^\alpha)_p = (dx^\alpha)_p + i(dy^\alpha)_p, (d\bar z^\alpha)_p = (dx^\alpha)_p - i(dy^\alpha)_p\end{gathered} \tag{3.3}$$

ile tanımlanır. Bu eşitlikler düzenlenirse,

$$(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p = (\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p + (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p,\ (\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p = i\left\{(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p - (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p\right\}$$

ve (3.4)

$$(dx^{\alpha})_p = \frac{1}{2}\left\{(dz^{\alpha})_p + (d\bar{z}^{\alpha})_p\right\},\ (dy^{\alpha})_p = \frac{1}{2i}\left\{(dz^{\alpha})_p - (d\bar{z}^{\alpha})_p\right\}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece; $T_p^c(R^{2n})$ ve $(T_p^*(R^{2n}))^c = (T_p^c(R^{2n}))^*$'ın bazları sırasıyla,

$$T_p^c(R^{2n}) = Sp\left\{(\frac{\partial}{\partial z^1})_p, (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial z^n})_p, (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n})_p\right\}$$

$$(T_p^c(R^{2n}))^* = Sp\left\{(dz^1)_p, (d\bar{z}^1)_p, \ldots, (dz^n)_p, (d\bar{z}^n)_p\right\} \tag{3.5}$$

dir.

f, C^n'nin bir D açık alt kümesinde tanımlanan kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f'nin Φ ve Ψ reel ve sanal kısımları x^{α} ve y^{α} içinde türevi alınabildiğinden f, C^l sınıfındandır. Ayrıca, D'nin her bir p noktasında $f(p) = \Phi(p) + i\Psi(p)$'nin kısmi ve toplam türevleri sırasıyla;

$$(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p f = (\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p \Phi + i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p \Psi$$

$$(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p f = (\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p \Phi + i(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p \Psi \tag{3.6}$$

$$(df)_p = d(\Phi)_p + id(\Psi)_p \in (T_p^c(R^{2n}))^*$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Benzer şekilde, $(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f$ ve $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f$ (3.3)'den sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f = \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p f - i(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p f\right\} \\
&(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f = \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p f + i(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p f\right\}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

eşitlikleriyle tanımlanır./7/

Tanım 3.1:(Holomorfik)

f , D üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere D'nin her bir $p=z_0$ noktasında,

$$
\lim_{\Delta z^{\alpha} \to 0} \frac{f(z_0^{\alpha} + \Delta z^{\alpha}) - f(z_0^{\alpha})}{\Delta z^{\alpha}} \quad (\Delta z^{\alpha} = \Delta x^{\alpha} + i\Delta y^{\alpha}) \tag{3.8}
$$

her $\alpha(=1,\ldots,n)$ için limit var ve bu limit $\Delta z^{\alpha} \to 0$'a yaklaştığında $\frac{\Delta y^{\alpha}}{\Delta x^{\alpha}}$ yönüne bağlı değilse, f fonksiyonu p noktasında **holomorfik**'tir denir.

Teorem3.1:

f holomorfik bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$
\textbf{a)}\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial \Psi}{\partial y^{\alpha}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y^{\alpha}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}} \tag{3.9}
$$

ile verilen Cauchy Riemann denklemleri ve

$$
\textbf{b)}\ (\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}}) = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}[f] \tag{3.10}
$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat:

a) $f'(z_0^\alpha) = \lim\limits_{\Delta z^\alpha \to 0} \dfrac{f(z_0^\alpha + \Delta z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{\Delta z^\alpha}$ $\quad (\Delta z^\alpha = \Delta x^\alpha + i\Delta y^\alpha)$ ifadesi

$$f'(z_0^\alpha) = \lim_{z^\alpha \to z_0^\alpha} \frac{f(z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{z^\alpha - z_0^\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. $f = \Phi + i\Psi$, $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha, \bar{z}^\alpha = x^\alpha - iy^\alpha$ ve f holomorfik olduğundan z^α'nın z_0^α noktasına yaklaşma yolu ne olursa olsun

$$\frac{f(z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{z^\alpha - z_0^\alpha} = \frac{\Phi(x^\alpha, y^\alpha) + i\Psi(x^\alpha, y^\alpha) - \left[\Phi(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + i\Psi(x_0^\alpha, y_0^\alpha)\right]}{(x^\alpha + y^\alpha) - (x_0^\alpha + y_0^\alpha)}$$

oranının aynı limiti vardır.

$$\frac{f(z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{z^\alpha - z_0^\alpha} = \frac{\Phi(x^\alpha, y^\alpha) - \Phi(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + i\left[\Psi(x^\alpha, y^\alpha) - \Psi(x_0^\alpha, y_0^\alpha)\right]}{(x^\alpha - x_0^\alpha) + i(y^\alpha - y_0^\alpha)}$$

z^α, x^α ve y^α eksenlerine paralel olarak z_0^α'a yaklaştırılarak; elde edilen

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha} \tag{3.11}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial y^\alpha} \tag{3.12}$$

denklemlerinden

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial y^\alpha}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha}$$

eşitliklerine ulaşılır.

b) (3.8) ve (3.9) yardımıyla,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}}\right)_{z_0}=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}\right]-\frac{1}{2}i\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}+i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}+i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}\right]_{z_0}-i\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}+i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_{z_0}f-i\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_{z_0}f\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right)_{z_0}[f]$$

bulunur.☑

Ayrıca, (3.9) veya (3.10) D'nin herbir noktasında sağlanırsa, f D'de holomorfiktir. f holomorfik ise, o zaman f, D'nin herbir noktanın bazı komşuluklarında bir kuvvet serisine açılabilir. Aynı zamanda Φ ve Ψ; $x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n$ değişkenlerinde analitiktir.

Teorem 3.2:

f nin z_0 noktasında holomorfik olması için gerek ve yeter koşul f C^1 sınıfindandır ve $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_{z_0}[f] = 0$ dır.

İspat:

$\Rightarrow$: f holomorfik olduğundan Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar, dolayısıyla f, C^1 sınıfindandır. Ayrıca;

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_{z_0}[f] &= \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_{z_0} f + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_{z_0} f\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha})_{z_0} + i(\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha})_{z_0} + i(\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha})_{z_0} - (\frac{\partial \psi}{\partial y^\alpha})_{z_0}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial \Psi}{\partial y^\alpha})_{z_0} - i(\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha})_{z_0} + i(\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha})_{z_0} - (\frac{\partial \psi}{\partial y^\alpha})_{z_0}\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır.

$\Leftarrow$: f C^1 sınıfindan olduğundan;

$$
\frac{f(z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{z^\alpha - z_0^\alpha} = \frac{\Phi(x^\alpha, y^\alpha) - \Phi(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + i\left[\Psi(x^\alpha, y^\alpha) - \Psi(x_0^\alpha, y_0^\alpha)\right]}{\Delta z^\alpha}
$$

ifadesinde h_1, h_2, k_1, k_2 ler x^α ve y^α'nın reel değerli fonksiyonları olmak üzere ortalama değer teoreminden,

$$
\Phi(x^\alpha, y^\alpha) - \Phi(x_0^\alpha, y_0^\alpha) = \left[\Phi_x(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + h_1\right]\Delta x^\alpha + \left[\Phi_y(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + k_1\right]\Delta y^\alpha
$$
$$
\Psi(x^\alpha, y^\alpha) - \Psi(x_0^\alpha, y_0^\alpha) = \left[\Psi_x(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + h_2\right]\Delta x^\alpha + \left[\Psi_y(x_0^\alpha, y_0^\alpha) + k_2\right]\Delta y^\alpha
$$

yazılırsa,

$$\frac{\Delta f(z^\alpha)}{\Delta z^\alpha}=\left[\Phi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+h_1\right]\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+\left[\Phi_y(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+k_1\right]\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}$$
$$+i\left[\Psi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+h_2\right]\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+i\left[\Psi_y(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+k_2\right]\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.9)'dan $\Phi_y=-\Psi_x, \Psi_y=\Phi_x$ eşitlikleri yerlerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\frac{\Delta f(z^\alpha)}{\Delta z^\alpha}=\left[\Phi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+h_1\right]\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+\left[-\Psi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+k_1\right]\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}$$
$$+i\left[\Psi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+h_2\right]\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+i\left[\Phi_x(x_0^\alpha,y_0^\alpha)+k_2\right]\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}$$
$$=\Phi_x\frac{\Delta x^\alpha+i\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}+i\Psi_x\frac{\Delta x^\alpha+i\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}+h_1\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+k_1\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}+ih_2\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}+ik_2\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}$$

eşitliği elde edilir. Böylece;

$$\Delta z^\alpha=\Delta x^\alpha+i\Delta y^\alpha,\ \left|\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta z^\alpha}\right|\le 1,\left|\frac{\Delta y^\alpha}{\Delta z^\alpha}\right|\le 1,\ (x^\alpha,y^\alpha)\to(x_0^\alpha,y_0^\alpha)\text{ için},$$

h_1,h_2,k_1,k_2 sıfıra gittiğinden z_0^α noktasında, $f'(z^\alpha)=\Phi_x+i\Psi_x=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}+i\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha}$ eşitliği gerçeklendiğinden f holomorfiktir. ☑/8/

IV. BÖLÜM

KOMPLEKS MANİFOLDLAR

4.1. Kompleks Manifold

Tanım 4.1:(Kompleks Manifold)

M 2n-boyutlu topolojik Hausdorff uzayının bir $\{U_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ açık örtüsü için $\varphi_\mu : U_\mu \xrightarrow{\text{Homeomorfizm}} D_\mu \subset C^n$ ve $u_\lambda \cap u_\mu \neq \varnothing$ olmak üzere, $\varphi_\lambda(u_\lambda \cap u_\mu)$'nin her bir p noktasında $f_{\mu\lambda} = \varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(p))$ fonksiyonları holomorfik ise, bu durumda M'ye **bir Kompleks Manifold** denir./7/

$\{U_\mu, Z_\mu^\alpha\}$ ikilisi M'nin bir kompleks lokal haritası olup, $r^\alpha \varphi_\mu = z_{(\mu)}^\alpha = x_{(\mu)}^\alpha + iy_{(\mu)}^\alpha$ şeklinde tanımlı koordinatlarda M için lokal kompleks koordinat sistemi olur.

R^{2n} ile C^n'nin izomorfluğundan, n-boyutlu M kompleks manifoldu, $2n$-boyutlu bir reel analitik manifold olarak da ele alınabilir.

Ayrıca, M'nin her bir p noktasında tanjant ve kotanjant uzayının bazları sırasıyla,

$$T_p(M) = Sp\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p\right\} \tag{4.1}$$

ve

$$T_p^*(M) = Sp\left\{(dx^1)_p, (dy^1)_p, \ldots, (dx^n)_p, (dy^n)_p\right\} \tag{4.2}$$

C^n'deki gibi $T_p^c(M)$ ve $(T_p^*(M))^c = (T_p^c(M))^*$ 'nin bazları sırasıyla,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)_p = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p - i\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_p\right\}, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)_p = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p + i\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_p\right\} \tag{4.3}$$

ve

$$(dz^{\alpha})_p = (dx^{\alpha})_p + i(dy^{\alpha})_p, (d\bar{z}^{\alpha})_p = (dx^{\alpha})_p - i(dy^{\alpha})_p \qquad (4.4)$$

ile tanımlanır./7/

Teorem 4.1:

M'nin her hangi bir E açık alt kümesi üzerinde tanımlı C^1 sınıfından kompleks değerli f fonksiyonu için ,$\{U, Z^{\alpha}\} \cap E$'nin herhangi bir p noktasındaki $(df)_p, (\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f$ ve $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f$ fonksiyonları arasında,

$$(df)_p = (\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f\,(dz^{\alpha})_p + (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f\,(d\bar{z}^{\alpha})_p \qquad (4.5)$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$f = \Phi + i\Psi$ olmak üzere; (3.4) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(df)_p &= (d\Phi)_p + i(d\Psi)_p \\
&= (\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p \Phi.(dx^{\alpha})_p + (\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p \Phi.(dy^{\alpha})_p \\
&\qquad + i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p \Psi.(dx^{\alpha})_p + i(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p \Psi.(dy^{\alpha})_p \\
&= (\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}})_p f.(dx^{\alpha})_p + (\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})_p f.(dy^{\alpha})_p \\
&= \left[(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f + (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f\right].\frac{1}{2}\left[(dz^{\alpha})_p + (d\bar{z}^{\alpha})_p\right] \\
&\qquad + i\left[(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p f - (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p f\right].\frac{1}{2i}\left[(dz^{\alpha})_p - (d\bar{z}^{\alpha})_p\right]
\end{aligned}$$

$$(df)_p = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p f(dz^\alpha)_p + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p f(d\bar{z}^\alpha)_p + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p f(dz^\alpha)_p$$
$$+ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p f(d\bar{z}^\alpha)_p + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p f(dz^\alpha)_p - \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p f(d\bar{z}^\alpha)_p$$
$$- \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p f(dz^\alpha)_p + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p f(d\bar{z}^\alpha)_p$$

olur ve buradan da

$$(df)_p = (\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p f(dz^\alpha)_p + (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p f(d\bar{z}^\alpha)_p$$

eşitliğine ulaşılır. ☑

Tanım 4.2:(Holomorfik dönüşüm)

M ve M' iki kompleks manifold, $\begin{array}{l}\phi: M \to M' \\ p \to \phi(p)\end{array}$ sürekli bir dönüşüm, $p \in M$ ve $\phi(p)$'nin bir V komşuluğu üzerinde tanımlanan f holomorfik bir fonksiyon olsun. Bu durumda ϕ sürekli dönüşümünün ϕ^* dual dönüşümü 1-formları 1-formlara dönüştürüyorsa; ϕ diferensiyellebilir dönüşümüne **holomorfik dönüşüm** denir./7/

4.2. Kompleks Manifoldun Kompleks Yapısı

Tanım 4.3:($T_p(M)$'nin kompleks yapısı)

M' nin bir p noktasındaki bir lokal kompleks haritası $\{U, Z^\alpha\}$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$ olsun. Bu durumda $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ olmak üzere,

$$J_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p = (\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p, J_p(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p = -(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p \tag{4.6}$$

ile tanımalanan J_p lineer dönüşümü (1.7) eşitliğini gerçekliyorsa, bu dönüşüme $T_p(M)$' nin **bir kompleks yapısı** denir.

Tanım 4.4:($T_p^c(M)$'nin kompleks yapısı)

M'nin bir p noktasındaki bir lokal kompleks haritası $\{U, Z^{\alpha}\}$ $(\alpha = 1,\ldots,n)$ olsun. $J_p : T_p^c(M) \to T_p^c(M)$ olmak üzere,

$$J_p(u+iv) = J_p(u) + iJ_p(v) \quad (\forall u,v \in T_p(M)) \tag{4.7}$$

ile tanımalanan J_p lineer dönüşümü (1.7) eşitliğini gerçekliyorsa, bu dönüşüme $T_p^c(M)$' **nin bir kompleks yapısı** denir.

Teorem 4.2:

$T_p^{1,0}(M)$, $T_p^{0,1}(M) \subset T_p^c(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{i) } T_p^{1,0}(M) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} \in T_p^c(M) : J_p\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right) \right\} \\ T_p^{0,1}(M) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}} \in T_p^c(M) : J_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}}\right) = -i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}}\right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\text{ii) } T_p^c(M) = T_p^{1,0}(M) \oplus T_p^{0,1}(M) \tag{4.9}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat:

i) (4.3) ve (4.6)'dan

$$\begin{aligned} J_p\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right)_p &= J_p\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_p - \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_p\right] \\ &= \frac{1}{2}J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_p - \frac{1}{2}iJ_p\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_p \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_p + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_p \\ &= i\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_p - i\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_p\right]\right\} \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\right)_p \end{aligned}$$

olur ve ayrıca,

$$J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p = J_p\left[\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p + \frac{1}{2}i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p\right]$$
$$= \frac{1}{2}J_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p + \frac{1}{2}iJ_p(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p - \frac{1}{2}i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p$$
$$= -i\left\{\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p\right]\right\}$$
$$= -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p$$

eşitliği elde edilir. Böylece;

$$J_p(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p = i(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p, J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p = -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p \tag{4.10}$$

olduğundan, (4.8) ispatlanmış olur.

ii) $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in T_p^c(M)$, $(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p = (\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p + (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p$ olmak üzere;

$$J_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p = J_p(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p + J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p + \frac{1}{2}i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p + \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p - \frac{1}{2}i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p$$
$$= (\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p$$

olur ve ayrıca,

$$boyT_p^c(M) = boyT_p^{1,0}(M) + boyT_p^{0,1}(M)$$
$$= boySp\left\{(\frac{\partial}{\partial z^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial z^n})_p\right\} + boySp\left\{(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n})_p\right\}$$
$$= n + n = 2n$$

olup, $boyT_p(M) = boyT_p^c(M) = 2n$ olduğundan (4.9) gerçeklenir.☑

Teorem 4.3:

J_p'nin tanımı, kompleks lokal koordinat sistemlerinin seçilişine bağlı değildir.

İspat:

$\{U, Z^{\alpha}\}$ ve $\{U', Z^{\alpha'}\}$ ikisi üst üste gelen M' nin kompleks lokal koordinatları olsun. $z^{\alpha} = x^{\alpha} + iy^{\alpha}, z^{\alpha'} = x^{\alpha'} + iy^{\alpha'}$ olmak üzere $p \in U \cap U''$ nün bir noktası için $T_p(M)$'nin J'_p lineer endomorfizmi

$$J'_p(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}})_p = (\frac{\partial}{\partial y^{\alpha'}})_p, \quad J'_p(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha'}})_p = -(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}})_p \tag{4.11}$$

ile tanımlandığında J'_p 'yü $T^c_p(M)$' nin lineer endomorfizmi , olarak da

$$J'_p(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p = i(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p, J'_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p = -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p \tag{4.12}$$

şeklinde genişletilebilir.

Böylece; $(z^1, \ldots, z^n)$ ve $(z^{1'}, \ldots, z^{n'})$ koordinat fonksiyonları arasında $z^{\alpha'} = f^{\alpha'}(z^1, \ldots, z^n)$ bağıntısı vardır. Buradan da

$$(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p = (\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial z^{\alpha'}})_p(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p; \quad (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p = (\frac{\partial \bar{f}^{\alpha}}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p$$

olduğundan $(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p$ ile $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p$ sırasıyla , $(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}})_p$ ile $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}})_p$ 'nin lineer birleşimidir.

Sonuç olarak, $J_p(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p = i(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha'}})_p, J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p = -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha'}})_p$ olup, J_p ile J'_p aynıdır ve $T_p(M)$'de J_p'nin tanımı, kompleks lokal koordinat sistemlerinin seçilişine bağlı değildir. ☑/7/

Tanım 4.5:(İndirgenmiş yaklaşık kompleks yapı)

Bir M kompleks manifoldunun herhangi bir p noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde (4.6) ile tanımlı J_p lineer dönüşümü (1.7)'yi gerçekliyorsa, bu dönüşüme M'nin **bir indirgenmiş yaklaşık kompleks yapısı** denir.

Lemma 4.1:

$T_p^c(M)$ üzerinde tanımlı J_p lineer endomorfizmi $J_p^2 = -I_n$ eşitliğini sağlar.

İspat:

(4.6) ve (4.10)' dan

$$\begin{aligned} J_p\left[J_p(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p\right] &= J_p\left[i(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p\right] \\ J_p^2(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p &= i^2(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p \\ J_p^2(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p &= -(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p \end{aligned} \tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned} J_p\left[J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p\right] &= J_p\left[-i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p\right] \\ J_p^2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p &= i^2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p \\ J_p^2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p &= -(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. $\forall(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p, (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p \in T_p^c(M)$ için, (4.13) ve(4.14) eşitlikleri sağlandığından,

$$J_p^2 = -I_n$$

olur. ☑

4.3. $T_p^c(M)$'nin Kompleks Yapısının Matris Gösterimi:

J_p'nin tanımından $J_p(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})_p = i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_p$, $J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha})_p = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\Big|_p$ olduğundan

$$J_p(\frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_p) = i\frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial z^2}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial z^n}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\Big|_p$$

....

$$J_p(\frac{\partial}{\partial z^n}\Big|_p) = 0\frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial z^{n-1}}\Big|_p + i\frac{\partial}{\partial z^n}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\Big|_p$$

$$J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\Big|_p) = 0\frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial z^n}\Big|_p - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^2}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\Big|_p$$

....

$$J_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\Big|_p) = 0\frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial z^n}\Big|_p + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}\Big|_p + \ldots + 0\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{n-1}}\Big|_p - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\Big|_p$$

olup, bu eşitliklerden J_p lineer dönüşümünün matris formu;

$$\left[J_p\right] = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -i\delta_\beta^\alpha \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir./7/

Teorem 4.4:

M ve M' kompleks manifoldları üzerindeki indirgenmiş yaklaşık kompleks yapılar sırasıyla J ve J', $\Phi + i\Psi = \phi : M \to M'$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. ϕ'nin holomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\phi_* \circ J = J' \circ \phi_*$ dır.

İspat:

$\Rightarrow$: f holomorfik olsun. Bu durumda; $\{U, z^\alpha\}$ $(z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha)$ ve $\{W, w^\lambda\}$ $(w^\lambda = u^\lambda + iv^\lambda)(\ \leq \alpha, \lambda \leq n)$ sırasıyla, $p \in M$ ve $\phi(p) \in M'$'nün lokal kompleks haritaları olmak üzere;

$$\phi : M \to M'$$
$$\phi_{*(p)} : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(M')$$
$$\phi^*_{(p)} : T_{\phi(p)}(M') \to T_p(M)$$

olduğundan,

$$\phi^*(u^\lambda) = \Phi^\lambda(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \phi^*(v^\lambda) = \Psi^\lambda(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$$

$$(\phi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p = (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p + (\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p$$

$$(\phi_*)_p.(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p = (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p + (\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p$$

dir. Buradan $W^\lambda = \Phi^\lambda + i\Psi^\lambda$ fonksiyonları (3.9) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
(\phi_*)_p\left[J_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p\right] = (\phi_*)_p(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p &= (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p + (\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p \\
&= -(\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p . -J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p + (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p \\
&= (\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p . J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p + (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p \\
&= J'_{\phi(p)}\left[(\frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p . (\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p + (\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p\right] \\
&= J'_{\phi(p)} . (\phi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

bulunur ve ayrıca,

$$(\phi_*)_p\left[J_p(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p\right]=(\phi_*)_p(-\frac{\partial}{\partial x^\alpha})_p=(-\frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p+(-\frac{\partial\Psi^\lambda}{\partial x^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p$$

$$=-(\frac{\partial\Psi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p.-J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p+(\frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p.J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p$$

$$=(\frac{\partial\Psi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p.J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p+(\frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p.J'_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p$$

$$=J'_{\phi(p)}\left[(\frac{\partial\Psi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p.(\frac{\partial}{\partial v^\lambda})_p+(\frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial y^\alpha})_p(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})_p\right]$$

$$=J'_{\phi(p)}.(\phi_*)_p(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})_p \tag{4.16}$$

elde edilir. $\forall\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\in T_p(M)$ için, (4.15) ve (4.16) denklemleri gerçeklendiğinden,

$$(\phi_*)_p.J_p=J'_{\phi(p)}.(\phi_*)$$

olur.

$\Leftarrow$: Aşikardir. ☑

4.4. Kompleks Vektör Alanı

Tanım 4.6:(Kompleks Vektör Alanı)

M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\chi(M)$'nin kompleksleştirilmesi $\chi^c(M)$' nin bir elemanına M üzerinde bir **kompleks vektör alanı** denir.

M üzerinde tanımlı C^∞ sınıfından tüm kompleks değerli fonksiyonların kümesi $(\Im(M))^c$ olup, $\Im^\infty(M)$'nin kompleksleştirilmesidir.

M üzerinde tanımlı alterne r lineer bir w fonksiyonu, $(\Im^\infty(M))^c$ üzerinde kompleks değerli diferensiyellenebilir r formdur.

M n-boyutlu bir kompleks manifold olmak üzere, M'nin bir E açık altkümesi üzerinde tanımlı X kompleks vektör alanı, $\{U, z^{\alpha}\} \cap E$ üzerinde;

$$X = u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} + u^{\overline{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}}$$

lokal koordinat bileşenlerine sahiptir. Kısaca $X = (u^{\alpha}, u^{\overline{\alpha}})$ şeklinde gösterilir.

$$u^{\alpha'} = (\frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha}}) u^{\alpha}, \quad u^{\overline{\alpha'}} = (\frac{\partial z^{\overline{\alpha'}}}{\partial z^{\overline{\alpha}}}) u^{\overline{\alpha}} \qquad (z^{\overline{\alpha}} = \overline{z^{\alpha}})$$

ifadeleri yazılabileceğinden $(u^{\alpha}, 0), (0, u^{\overline{\alpha}})$ ve $(\overline{u^{\overline{\alpha}}}, \overline{u^{\alpha}})$, $U \cap E$ üzerinde vektör alanlarıdırlar.

Tanım 4.7:(Self adjoint vektör alanı)

Bir kompleks vektör alanı ile adjointi(eşleniği) çakışırsa bu vektör alanına **self adjoint vektör alanı** denir.

Eğer M kompleks manifoldunu bir $2n$-boyutlu reel manifold olarak ele alırsak; o zaman X kompleks vektör alanının x^{α}, y^{α} reel lokal koordinatlarda aldığı değerler hesaplanır ve indis ayarlaması $(\alpha, \beta \leftrightarrow \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial z^{\beta}} u^{\beta} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial z^{\overline{\beta}}} u^{\overline{\beta}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} u^{\beta} - \frac{1}{2} i \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} u^{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\overline{\beta}}} u^{\overline{\beta}} + \frac{1}{2} i \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\overline{\beta}}} u^{\overline{\beta}} \\ &= \frac{1}{2} u^{\alpha} + \frac{1}{2} u^{\overline{\alpha}} = \frac{1}{2}(u^{\alpha} + u^{\overline{\alpha}})\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca;

$$\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial z^{\beta}}u^{\beta}+\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial \bar{z}^{\beta}}u^{\bar{\beta}}=\frac{1}{2}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}u^{\beta}-\frac{1}{2}i\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}u^{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\bar{\beta}}}u^{\bar{\beta}}+\frac{1}{2}i\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial y^{\bar{\beta}}}u^{\bar{\beta}}$$

$$=-\frac{1}{2}iu^{\alpha}+\frac{1}{2}iu^{\bar{\alpha}}=-\frac{1}{2}i(u^{\alpha}-u^{\bar{\alpha}})=\frac{1}{2i}(u^{\alpha}-u^{\bar{\alpha}})$$

elde edilir.

Sonuç olarak; çıkan fonksiyonlar reel değerli fonksiyonlar olur. Dolayısıyla; bunu sağlayan X kompleks vektör alanının 1. ve 2. bileşenlerinin koordinat fonksiyonları, biri diğerinin eşleniği olup, bu tip kompleks vektör alanları self adjoint vektör alanlarıdır./6,7/

V. BÖLÜM

HERMİT MANİFOLDLARI

5.1. Metrik Tensör

Tanım 5.1:(Metrik tensör)

M bir kompleks manifold olsun. $\forall p$ için $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to C$ şeklinde tanımlı g_p fonksiyonları bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı iseler g fonksiyonuna M üzerinde bir **metrik tensör** denir.

Bir M kompleks manifoldu üzerinde g metrik tensörü (0,2) tipinde kovaryant bir tensör alanı olup, M'nin $\{U, z^{\alpha}\}$ lokal koordinat komşuluğuna göre,

$$g = g_{\alpha\beta} dz^{\alpha} \otimes dz^{\beta} + g_{\overline{\alpha}\beta} dz^{\overline{\alpha}} \otimes dz^{\beta} + g_{\alpha\overline{\beta}} dz^{\alpha} \otimes dz^{\overline{\beta}} + g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} dz^{\overline{\alpha}} \otimes dz^{\overline{\beta}}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca; $T_p^c(M)$'nin her $u + iv$ ve $u' + iv'$ elemanları için g_p dönüşümü,

$$g_p(u+iv, u'+iv') = g_p(u,u') - g_p(v,v) + i\left[g_p(u,v') + g_p(u',v)\right] \qquad (5.1)$$

ile tanımlandığında $T_p^c(M)$ üzerinde simetrik bilineer form olur. g_p simetrik olduğundan $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, g_{\overline{\alpha}\beta} = g_{\beta\overline{\alpha}}, g_{\alpha\overline{\beta}} = g_{\overline{\beta}\alpha}$ olur. g'nin $\{U, z^{\alpha}\}$'a göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z^{\beta}}\right), \qquad & g_{\alpha\overline{\beta}} &= g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial z^{\overline{\beta}}}\right) \\ g_{\overline{\alpha}\beta} &= g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial z^{\beta}}\right), \qquad & g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} &= g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial z^{\overline{\beta}}}\right) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

ile verildiğinden g'nin matris formu,

$$[g]=\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\overline{\beta}} \\ g_{\overline{\alpha}\beta} & g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} \end{bmatrix}$$

biçimde verilir.

Ayrıca, $\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\overline{\alpha\beta}}, \overline{g_{\alpha\overline{\beta}}} = g_{\overline{\alpha}\beta}$ olduğundan g, M üzerinde reel değerli bir tensör alanı (self adjoint tensör alanı) dır./7/

Tanım 5.2:(Hermit metriği)

M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı g metrik tensörü,

$$g(Ju,Jv)=g(u,v) \quad ; \qquad \forall u,v \in T_p(M) \tag{5.3}$$

şartını sağlarsa g'ye M üzerinde **bir Hermit metriği** denir. /7/

Lemma 5.1:

g Hermit metriğinin bileşenleri M kompleks manifoldunun $\{U,z^{\alpha}\}$ lokal koordinat komşuluğuna göre,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\overline{\alpha\beta}}=0 \tag{5.4}$$

şartını sağlar.

İspat:

$\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \dfrac{\partial}{\partial y^{\beta}} \in T_p(R^{2n})$ ortonormal baz vektörler olmak üzere,

$$g(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial y^{\beta}})=g(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},i(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}}))$$

$$=g(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},i\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+g(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$+g(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},i\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+g(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$=-ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$-ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},i\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$=-ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$-ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},i\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}}) \tag{5.5}$$

bulunur ve ayrıca,

$$g(J\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},J\frac{\partial}{\partial y^{\beta}})=g(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial x^{\beta}})$$

$$=g(i\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial z^{\beta}}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$=g(i\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+g(i\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$+g(-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+g(-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$=-ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})-ig(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}},-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}})$$

$$+ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})+ig(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}}) \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.3)'den dolayı, (5.5) ve (5.6)'nın sol tarafindaki ifadeler eşitlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}},\quad \frac{\partial}{\partial z^{\beta}}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}}$$

olur ve buradan da,

$$\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

olup,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\overline{\alpha\beta}}$$

dır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial y^{\beta}}) \\ &= g(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.☑

5.2. Hermit Manifoldları

Tanım 5.3:(Hermit manifold)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde bir g Hermit metriği tanımlanabiliyorsa, (M, g) ikilisine **bir Hermit manifoldu** denir. Genellikle H ile gösterilir.

M bir H manifoldu ise, bu durumda $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$[\nabla_X, J]Y - [\nabla_{JX}, J]JY = 0 \qquad \text{veya} \qquad [\nabla_{JX}, J] = J[\nabla_X, J]$$

eşitlikleri daima gerçeklenir./1,3/

Tanım 5.4:(Kaehler Form(İkinci temel form))

Bir M Hermit manifoldunda $\forall u, v \in T_p(M)$ için,

$$\Phi_p(u,v) = g_p(u, Jv)$$

eşitliği ile verilen Φ' ye M'nin **Kaehler Formu(ikinci temel formu)** denir.

5.2.1. Kaehler Formun Ters Simetrikliği Ve Matris Gösterimi

Φ_p Kaehler formu ise, $\forall u, v \in T_p(M)$ tanjant vektörleri için,

$$\begin{aligned}\Phi_p(u,v) &= g_p(u, Jv)\\ &= g_p(Ju, J^2(v))\\ &= g_p(Ju, -v)\\ &= -g_p(v, Ju)\\ &= -\Phi_p(v,u)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $\Phi_p(u,v)$'nin ters simetrik olduğu görülür.

J'nin $\{U, z^\alpha\}$'a göre bileşenleri F_i^h olsun. $F_{ji} = F_j^h g_{hi}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $F_j^h F_i^h = -\delta_i^h$, $F_i^j F_{jh} = -g_{ih}$ ve $F_i^j F_{hj} = g_{ih}$'dan yararlanılırsa, (5.3)'de verilen g'nin bileşenleri için $F_j^l F_i^h g_{lh} = F_i^h F_{jh} = g_{ij}$ olur. Böylece,

$$F_{ji} = F_j^h g_{hi} = F_j^h F_h^j F_{ij} = -\delta_h^h F_{ij} = -F_{ij} \tag{5.7}$$

elde edilir.

Eğer, $T_p^c(M)$'yi C^n gibi ele alırsak , o zaman J_p, $\{U, z^\alpha\}$ 'a göre

$$[J_p] = [F_i^h] = \begin{bmatrix} i\delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -i\delta_\beta^\alpha \end{bmatrix}$$

matris gösterimine sahip olup, (5.4)'ün de kullanılmasıyla,

$$[\Phi] = [F_{ji}] = [F_j^h][g_{hi}] = \begin{bmatrix} i\delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -i\delta_\beta^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_{\alpha\overline{\beta}} \\ g_{\overline{\alpha}\beta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ig_{\alpha\overline{\beta}} \\ -ig_{\overline{\alpha}\beta} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7) ifadesine göre Φ Kaehler formu,

$$\begin{aligned}\Phi &= -F_{ji}dz^j \wedge dz^i \\ &= 0dz^\alpha \wedge dz^\beta - ig_{\overline{\alpha}\beta}dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^\beta + ig_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}} + 0dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^{\overline{\beta}} \\ &= -ig_{\overline{\alpha}\beta}dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^\beta - ig_{\overline{\beta}\alpha}dz^{\overline{\beta}} \wedge dz^\alpha \\ &= -ig_{\overline{\alpha}\beta}dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^\beta - ig_{\overline{\alpha}\beta}dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^\beta \\ &= -2ig_{\overline{\alpha}\beta}dz^{\overline{\alpha}} \wedge dz^\beta \\ &= -2ig_{\beta\overline{\alpha}}dz^\beta \wedge dz^{\overline{\alpha}} \end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde ifade edilir.($\alpha \leftrightarrow \beta, 1 \le \alpha, \beta \le n$)

Tanım 5.5:(Yaklaşık kompleks yapı)

M $2n$-boyutlu bir reel manifold ve M'nin herhangi bir p noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayında tanımlı bir kompleks yapı J_p olsun. O zaman $\{U, x^i\}$ $(1 \le i, h, k \le 2n)$ lokal koordinatlara ve $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ doğal çatısına göre;

$$J_p(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = F_i^k(p)(\frac{\partial}{\partial x^k})_p \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlanan J_p lineer endomorfizmi, C^∞ sınıfından ve (1.7) bağıntısı gerçeklerse, J_p' ye C^∞ **yaklaşık kompleks yapı** veya **yaklaşık kompleks yapı** denir.

Tanım 5.6:(Yaklaşık kompleks manifold)

Bir M manifoldu üzerinde J_p yaklaşık kompleks yapısı varsa, bu manifolda **yaklaşık kompleks manifold** denir.

Tanım5.7:(N–Nijenhuis tensörü)

M bir yaklaşık kompleks manifold, $X, Y, X', Y' \in \chi(M)$ vektör alanları ve f, M üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

i) $N(X,Y) = -N(Y,X)$
ii) $N(fX,Y) = N(X,fY) = fN(X,Y)$
iii) $N(X+X',Y) = N(X,Y) + N(X',Y), N(X,Y+Y') = N(X,Y) + N(X,Y')$

özelliklerini sağlayan ve

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= 2\{[JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]\} \\ &= [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] \end{aligned} \tag{5.11}$$

eşitliği ile tanımlanan N'ye J'nin **Nijenhuis tensörü** denir./3,7/

Tanım 5.8:(Yaklaşık Hermit Metriği)

M bir yaklaşık Hermit manifoldu olsun. Bu durumda,

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \quad ; \qquad \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.12}$$

ile tanımlanan g metriğine, M için bir **yaklaşık Hermit metriği** denir. /7/

Tanım 5.9:(yaklaşık Kaehler formu)

Bir M yaklaşık Hermit manifoldu üzerinde tanımlı herhangi bir g Hermit iç çarpımı ile bir ters simetrik bilineer form arasında,

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY) \tag{5.13}$$

şeklinde bir bağıntı varsa, bu durumda Φ'ye M için bir **yaklaşık Kaehler formu** denir. /7/

Teorem 5.1:

Bir M yaklaşık Hermit manifoldu üzerinde ∇_X kovaryant türevi, Φ ikinci temel formu ve N Nijenhuis tensörü verilsin. O zaman,

$$4g((\nabla_X J)Y,Z) = 6d\Phi(X,JY,Z) - 6d\Phi(X,Y,Z) + g(N(Y,Z),JX) \tag{5.14}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat:

$4g((\nabla_X J)Y,Z)=4g(\nabla_X(JY),Z)+4g(\nabla_X Y,JZ)$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
4g(\nabla_X(JY),Z)&=2\left\{\begin{array}{l}Xg(JY,Z)+JYg(X,Z)-Zg(X,JY)\\ \quad+g([X,JY],Z)+g([Z,X],JY)+g(X,[Z,JY])\end{array}\right\}\\
&=-2Xg(Y,JZ)+2JY\Phi(JZ,X)-2Z\Phi(X,Y)\\
&\quad+2\Phi(J[X,JY],Z)+2\Phi([Z,X],Y)+2\Phi(J[Z,JY],X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4g(\nabla_X Y,JZ)&=2\left\{\begin{array}{l}Xg(Y,JZ)+Yg(X,JZ)-JZg(X,Y)\\ \quad+g([X,Y],JZ)+g([JZ,X],Y)+g(X,[JZ,Y])\end{array}\right\}\\
&=2Xg(Y,JZ)+2Y\Phi(X,Z)-2JZ\Phi(JX,Y)\\
&\quad+2\Phi([X,Y],Z)+2\Phi(J[JZ,X],Y)+2\Phi(J[JZ,Y],X)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan;

$$
\begin{aligned}
6d\Phi(X,JY,JZ)&=2\left\{\begin{array}{l}X\Phi(JY,JZ)+JY\Phi(JZ,X)+JZ\Phi(X,JY)\\ \quad-\Phi([X,JY],JZ)-\Phi([JZ,X],JY)-\Phi([JZ,JY],X)\end{array}\right\}\\
&=2X\Phi(Y,Z)+2JY\Phi(JZ,X)+2JZ\Phi(X,JY)\\
&\quad-2\Phi([X,JY],JZ)-\Phi2([JZ,X],JY)-2\Phi([JZ,JY],X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-6d\Phi(X,Y,Z)&=-2\left\{\begin{array}{l}X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y)\\ \quad-\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\end{array}\right\}\\
&=-2X\Phi(Y,Z)-2Y\Phi(Z,X)-2Z\Phi(X,Y)\\
&\quad+2\Phi([X,Y],Z)+2\Phi([Z,X],Y)+2\Phi([Y,Z],X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(N(Y,Z),JX)&=2\Phi([JY,JZ],X)-2\Phi([Y,Z],X)-2\Phi(J[Y,JZ],X)\\
&\quad-2\Phi(J[JY,Z],X)
\end{aligned}
$$

olup, her bir ifade uygun şekilde düzenlendiğinde, (5.14)'e ulaşılır.☑

5.2.2. Hermit ve Yaklaşık Hermit Manifoldları İçin Eğrilikler

Lemma 5.2:

Bir M yaklaşık Hermit manifoldu üzerinde bir Lie cebiri ve J'nin N Nigenhuis tensörü verilsin. M'nin bir kompleks manifoldu olması için gerek ve yeter koşul

$$N(X,Y)=0 \quad ; \quad \forall X,Y \in \chi(M) \tag{5.15}$$

dır.

İspat:

$\Rightarrow$: M bir kompleks manifoldu olsun Bu durumda; $[\nabla_{JX}, J]Y = J[\nabla_X, J]Y$ olup, (5.11) denkleminden

$$\begin{aligned}
N(X,Y) &= [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J\nabla_{JX} Y - J\nabla_Y JX \\
&\qquad + J\nabla_X JY - J\nabla_{JY} X - \nabla_{JX} JY + \nabla_{JY} JX \\
&= -J(J\nabla_X)Y + J(J\nabla_Y)X + (J\nabla_{JX})Y - J(\nabla_Y J)X \\
&\qquad + J(\nabla_X J)Y - (J\nabla_{JY})X - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\
&= J(\nabla_X J - J\nabla_X)Y - J(\nabla_Y J - J\nabla_Y)X \\
&\qquad - (\nabla_{JX} J - J\nabla_{JX})Y + (\nabla_{JY} J - J\nabla_{JY})X \\
&= J[\nabla_X, J]Y - J[\nabla_Y, J]X - [\nabla_{JX}, J]Y + [\nabla_{JY}, J]X \\
&= J[\nabla_X, J]Y - J[\nabla_Y, J]X - J[\nabla_X, J]Y + J[\nabla_Y, J]X \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$: aşikardır. ☑

Bundan sonraki işlemlerde, $[\nabla_X, J] = \nabla_X J - J\nabla_X$ notasyonunu kullanmak kolaylık sağlayacaktır. ∇_X ve R_{XY} sırasıyla M'nin kovaryant türevi ve eğrilik operatörü olmak üzere, Hermit ve Yarı(Quasi) Kaehler manifoldları için bir eğrilik özdeşliği aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 5.3:

M bir kompleks manifoldu, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere,

$$[\nabla_{JX}, J] = \varepsilon J[\nabla_X, J] \qquad ; \qquad \forall X \in \chi(M) \tag{5.16}$$

özelliğini sağlanıyorsa, o zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$[\nabla_{N(X,Y)}, J] = [R_{XY} - R_{JXJY}, J] + \varepsilon J[R_{JXY} + R_{XJY}, J] \tag{5.17}$$

dir.

İspat:

R_{XY} eğrilik operatörü, $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için;

$$R_{XY} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \tag{5.18}$$

eşitliği ile tanımlanır. (5.15) ve (5.18)'i kullanarak,

$$\begin{aligned}
[\nabla_{N(X,Y)}, J] &= \left[\nabla_{[X,Y] + \varepsilon J[JX,Y] + \varepsilon J[X,JY] - [JX,JY]}, J\right] \\
&= \left[\nabla_{[X,Y]}, J\right] + \varepsilon J\left[\nabla_{[JX,Y]}, J\right] + \varepsilon J\left[\nabla_{[X,JY]}, J\right] - \left[\nabla_{[JX,JY]}, J\right] \\
&= [R_{XY} + [\nabla_X, \nabla_Y], J] + \varepsilon J[R_{JXY} + [\nabla_{JX}, \nabla_Y], J] \\
&\qquad + \varepsilon J[R_{XJY} + [\nabla_X, \nabla_{JY}], J] - [R_{JXJY} + [\nabla_{JX}, \nabla_{JY}], J] \\
&= [R_{XY}, J] + [[\nabla_X, \nabla_Y], J] + \varepsilon J[R_{JXY}, J] + \varepsilon J[[\nabla_{JX}, \nabla_Y], J] \\
&\quad + \varepsilon J[R_{XJY}, J] + \varepsilon J[[\nabla_X, \nabla_{JY}], J] - [R_{JXJY}, J] - [[\nabla_{JX}, \nabla_{JY}], J] \\
&= [R_{XY} - R_{JXJY}, J] + \varepsilon J[R_{JXY} + R_{XJY}, J] \\
&\quad + [[\nabla_X, \nabla_Y] - [\nabla_{JX}, \nabla_{JY}], J] + \varepsilon J[[\nabla_{JX}, \nabla_Y] + [\nabla_X, \nabla_{JY}], J]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\nabla_{N(X,Y)}, J] - [R_{XY} - R_{JXJY}, J] - \varepsilon J[R_{JXY} + R_{XJY}, J] &= [[\nabla_X, \nabla_Y] - [\nabla_{JX}, \nabla_{JY}], J] \\
&\quad + \varepsilon J[[\nabla_{JX}, \nabla_Y] + [\nabla_X, \nabla_{JY}], J]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir.

(5.19) denkleminin sağ tarafındaki terimlerin her birinde jakobi özdeşliği ve sonra (5.16) eşitliği kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\left[[\nabla_X,\nabla_Y]-[\nabla_{JX},\nabla_{JY}],J\right]+\varepsilon J\left[[\nabla_{JX},\nabla_Y]+[\nabla_X,\nabla_{JY}],J\right]\\
&\quad=\left[[\nabla_X,\nabla_Y],J\right]-\left[[\nabla_{JX},\nabla_{JY}],J\right]+\varepsilon J\left[[\nabla_{JX},\nabla_Y],J\right]+\varepsilon J\left[[\nabla_X,\nabla_{JY}],J\right]\\
&\quad=-\left[[\nabla_Y,J],\nabla_X\right]-\left[[J,\nabla_X],\nabla_Y\right]+\left[[\nabla_{JY},J],\nabla_{JX}\right]+\left[[J,\nabla_{JX}],\nabla_{JY}\right]\\
&\qquad-\varepsilon J\left[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}\right]-\varepsilon J\left[[J,\nabla_{JX}],\nabla_Y\right]-\varepsilon J\left[[\nabla_{JY},J],\nabla_X\right]-\varepsilon J\left[[J,\nabla_X],\nabla_{JY}\right]\\
&\quad=-\left[[\nabla_Y,J],\nabla_X\right]+\left[[\nabla_X,J],\nabla_Y\right]+\varepsilon J\left[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}\right]-\varepsilon J\left[[\nabla_X,J],\nabla_{JY}\right]\\
&\qquad-\varepsilon J\left[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}\right]-\left[[\nabla_X,J],\nabla_Y\right]+\left[[\nabla_Y,J],\nabla_X\right]+\varepsilon J\left[[J,\nabla_X],\nabla_{JY}\right]
\end{aligned}
$$

olur. Böylece,

$$\left[[\nabla_X,\nabla_Y]-[\nabla_{JX},\nabla_{JY}],J\right]+\varepsilon J\left[[\nabla_{JX},\nabla_Y]+[\nabla_X,\nabla_{JY}],J\right]=0$$

olup, (5.17) gerçeklenir.☑

Lemma 5.3'ün bir kaç sonucundan Hermit manifoldları için de bir eğrilik özdeşliği elde edilebilir. Bu özdeşlik aşağıdaki teoremle (5.15)'e benzer şekilde verilir.

Teorem5.2:

M bir Hermit manifodu olmak üzere, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$[R_{XY},J]+J[R_{JXY},J]+J[R_{XJY},J]-[R_{JXJY},J]=0 \tag{5.20}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat:

Lemma 5.3'de ε=1 alınarak,

$$\begin{aligned}[R_{XY},J]&=\left[\nabla_{[X,Y]}-[\nabla_X,\nabla_Y],J\right]=\left[\nabla_{[X,Y]},J\right]-[[\nabla_X,\nabla_Y],J]\\&=\left[\nabla_{[X,Y]},J\right]+[[\nabla_Y,J],\nabla_X]+[[J,\nabla_X],\nabla_Y]\\&=\left[\nabla_{[X,Y]},J\right]+[[\nabla_Y,J],\nabla_X]-[[\nabla_X,J],\nabla_Y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J[R_{JXY},J]&=J\left[\nabla_{[JX,Y]}-[\nabla_{JX},\nabla_Y],J\right]=J\left[\nabla_{[JX,Y]},J\right]-J[[\nabla_{JX},\nabla_Y],J]\\&=J\left[\nabla_{[JX,Y]},J\right]+J[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}]+J[[J,\nabla_{JX}],\nabla_Y]\\&=J\left[\nabla_{[JX,Y]},J\right]+J[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}]+[[\nabla_X,J],\nabla_Y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J[R_{XJY},J]&=J\left[\nabla_{[X,JY]}-[\nabla_X,\nabla_{JY}],J\right]=J\left[\nabla_{[X,JY]},J\right]-J[[\nabla_X,\nabla_{JY}],J]\\&=J\left[\nabla_{[X,JY]},J\right]+J[[\nabla_{JY},J],\nabla_X]+J[[J,\nabla_X],\nabla_{JY}]\\&=J\left[\nabla_{[X,JY]},J\right]-[[\nabla_Y,J],\nabla_X]-J[[\nabla_X,J],\nabla_{JY}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-[R_{JXJY},J]&=-\left[\nabla_{[JX,JY]}-[\nabla_{JX},\nabla_{JY}],J\right]=-\left[\nabla_{[JX,JY]},J\right]+[[\nabla_{JX},\nabla_{JY}],J]\\&=-\left[\nabla_{[JX,JY]},J\right]-[[\nabla_{JY},J],\nabla_{JX}]-[[J,\nabla_{JX}],\nabla_{JY}]\\&=-\left[\nabla_{[JX,JY]},J\right]-J[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}]+J[[\nabla_X,J],\nabla_{JY}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[R_{XY},J]+J[R_{JXY},J]+J[R_{XJY},J]-[R_{JXJY},J]\\&\quad=\left[\nabla_{[X,Y]},J\right]+[[\nabla_Y,J],\nabla_X]-[[\nabla_X,J],\nabla_Y]\\&\quad\quad+J\left[\nabla_{[JX,Y]},J\right]+J[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}]+[[\nabla_X,J],\nabla_Y]\\&\quad\quad\quad+J\left[\nabla_{[X,JY]},J\right]-[[\nabla_Y,J],\nabla_X]-J[[\nabla_X,J],\nabla_{JY}]\\&\quad\quad\quad\quad-\left[\nabla_{[JX,JY]},J\right]-J[[\nabla_Y,J],\nabla_{JX}]+J[[\nabla_X,J],\nabla_{JY}]\end{aligned}$$

$$[R_{XY},J]+J[R_{JXY},J]+J[R_{XJY},J]-[R_{JXJY},J]=\left[\nabla_{N(X,Y)},J\right]$$

elde edilir.

"$M \in H \iff N(X,Y)=0$" önermesinden,

$$[R_{XY}, J] + J[R_{JXY}, J] + J[R_{XJY}, J] - [R_{JXJY}, J] = 0$$

olur.☑

$\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için $R_{WXYZ} = \langle R_{WX}Y, Z\rangle$ şeklinde ifade edilebildiğinden M'nin kesitsel eğriliği

$$K_{WX} = R_{WXWX}\left\{\|W\|^2\|X\|^2 - \langle W, X\rangle^2\right\}^{-1} \tag{5.21}$$

eşitliği ile verilir. Aşağıdaki sonuç Teorem 5.2' den çıkarılır./3/

Sonuç 5.1:
$M \in H$ olsun. O zaman $\forall W, X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için ;

a) $$R_{WXYZ} + R_{JWJXJYJZ} - R_{JWJXYZ} - R_{JWXJYZ} - R_{JWXYJZ} - R_{WJXJYZ} - R_{WJXYJZ} - R_{WXJYJZ} = 0 \tag{5.22}$$

b) $\|W\| = \|X\| = 1$ ve $\langle W, X\rangle = 0$ için,

$$K_{WX} + K_{JWJX} - K_{WJX} - K_{JWX} = 2R_{WXJWJX} + 2R_{WJXJWX} \tag{5.23}$$

eşitlikleri vardır.

İspat:
a) Hermit manifoldu ve J kompleks yapısının özelliklerinden

$$R_{WXYZ} = \langle R_{WX}Y, Z\rangle = \langle JR_{WX}Y, JZ\rangle = \langle R_{WX}JY, JZ\rangle = R_{WXJYJZ}$$

olup,

$$\begin{aligned} R_{JWJXYZ} &= R_{JWJXJYJZ} \\ R_{JWXJYZ} &= -R_{JWXYJZ} \end{aligned} , \qquad \begin{aligned} R_{WJXJYZ} &= -R_{WJXYJZ} \\ R_{WXJYJZ} &= R_{WXYZ} \end{aligned}$$

ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} & R_{WXYZ} + R_{JWJXJYJZ} - R_{JWJXYZ} - R_{JWXJYZ} \\ & \quad - R_{JWXYJZ} - R_{WJXJYZ} - R_{WJXYJZ} - R_{WXJYJZ} \\ & \qquad = R_{WXYZ} + R_{JWJXJYJZ} - R_{JWJXJYJZ} + R_{JWXYJZ} - R_{JWXYJZ} \\ & \qquad\qquad + R_{WJXYJZ} - R_{WJXYJZ} - R_{WXYZ} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

b) Hermit manifoldların kesitsel eğriliğinden faydalanarak;

$$K_{WX} = R_{WXWX} \left\{ \|W\|^2 \|X\|^2 - \langle W, X \rangle^2 \right\}^{-1} = R_{WXWX}$$

$$K_{JWJX} = R_{JWJXJWJX} \left\{ \|JW\|^2 \|JX\|^2 - \langle JW, JX \rangle^2 \right\}^{-1} = R_{JWJXJWJX}$$

$$K_{WJX} = R_{WJXWJX} \left\{ \|W\|^2 \|JX\|^2 - \langle W, JX \rangle^2 \right\}^{-1} = R_{WJXWJX}$$

$$K_{JWX} = R_{JWXJWX} \left\{ \|JW\|^2 \|X\|^2 - \langle JW, X \rangle^2 \right\}^{-1} = R_{JWXJWX}$$

$$\begin{aligned} & K_{WX} + K_{JWJX} - K_{WJX} - K_{JWX} \\ & \qquad = R_{WXWX} + R_{JWJXJWJX} - R_{WJXWJX} - R_{JWXJWX} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} R_{WXWX} &= R_{WXJWJX} \\ &= R_{JWJXWX} \\ &= R_{JWJXJWJX} \end{aligned} , \qquad \begin{aligned} R_{WJXWJX} &= -R_{WJXJWX} \\ R_{JWXJWX} &= -R_{JWXWJX} \\ &= -R_{WJXJWX} \end{aligned}$$

ifadelerini kullanarak,

$$K_{WX} + K_{JWJX} - K_{WJX} - K_{JWX} = 2R_{WXJWJX} + 2R_{WJXJWX}$$

elde edilir.☑

Sonuç 5.2:

$M \in H$ olmak üzere; $\forall W, X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R_{WXYZ} = R_{JWJXJYJZ} \tag{5.24}$$

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = R_{JWXJYZ} + R_{JWXYJZ} \tag{5.25}$$

ifadeleri denktirler.

İspat:

Hermit manifoldu ve J kompleks yapısının özelliklerinden

$$\begin{aligned} R_{WXWX} &= R_{WXJWJX} \\ &= R_{JWJXWX} \\ &= R_{JWJXJWJX} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 5.1'deki (5.22) denkleminde,

$$\begin{aligned} R_{JWJXYZ} &= R_{JWJXJYJZ} \\ R_{WJXJYZ} &= -R_{WJXYJZ} \end{aligned}$$

ifadelerini yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} R_{WXYZ} &+ R_{JWJXJYJZ} - R_{JWJXYZ} - R_{JWXJYZ} \\ &- R_{JWXYJZ} - R_{WJXJYZ} - R_{WJXYJZ} - R_{WXJYJZ} \\ &= R_{WXYZ} + R_{JWJXJYJZ} - R_{JWJXJYJZ} - R_{JWXJYZ} \\ &- R_{JWXYJZ} + R_{WJXYJZ} - R_{WJXYJZ} - R_{WXJYJZ} = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece;

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = R_{JWXJYZ} + R_{JWXYJZ}$$

elde edilir. ☑/3,7/

Teorem 5.3:

$M \in H$ ve sabit holomorfik kesitsel eğrilik μ olmak üzere $\forall W, X \in \chi(M)$ için,

$$R_{WXWX} + R_{JWJXJWJX} - R_{WJXWJX} - R_{JWXJWJX}$$
$$= 2\mu\left\{-\langle W, X\rangle^2 + \langle JW, X\rangle^2\right\} \qquad (3.26)$$

eşitliği sağlanır/3/.

İspat:

Eğrilik tensörü ile kesitsel eğrilik arasındaki

$$R(X,U,X,U) = \frac{\mu}{4}\left\{\langle X,X\rangle\langle U,U\rangle - \langle X,U\rangle^2 \langle JX,U\rangle^2\right\}$$
$$+\frac{5}{8}\lambda(X,U,X,U) + \frac{1}{8}\lambda(X,JU,X,JU)$$

bağıntısından/1/ ve ayrıca,

$$\lambda(X,U,X,U) = R(X,U,X,U) - R(X,U,JX,JU) = 0$$
$$\lambda(X,JU,X,JU) = R(X,JU,X,JU) + R(X,JU,JX,U) = 0$$

olduğundan,

$$R(X,U,X,U) = \frac{\mu}{4}\left\{\langle X,X\rangle\langle U,U\rangle - \langle X,U\rangle^2 \langle JX,U\rangle^2\right\}$$

dir. Bu eşitliğe göre de

$$R_{WXWX} = \frac{\mu}{4}\left\{\langle W,W\rangle\langle X,X\rangle - \langle W,X\rangle^2 + 3\langle JX,W\rangle^2\right\}$$

$$R_{JWJXJWJX} = \frac{\mu}{4}\left\{\langle JW,JW\rangle\langle JX,JX\rangle - \langle JW,JX\rangle^2 + 3\left\langle J^2(X),JW\right\rangle^2\right\}$$

$$-R_{WJXWJX} = -\frac{\mu}{4}\left\{\langle W,W\rangle\langle JX,JX\rangle - \langle W,JX\rangle^2 + 3\left\langle J^2(X),W\right\rangle^2\right\}$$

$$-R_{JWXJWX} = -\frac{\mu}{4}\left\{\langle JW,JW\rangle\langle X,X\rangle - \langle JW,X\rangle^2 + 3\langle JX,JW\rangle^2\right\}$$

$$\begin{aligned} R_{WXWX} + R_{JWJXJWJX} - R_{WJXWJX} - R_{JWXJWX} &= \frac{\mu}{4}\left\{\begin{array}{l} \|W\|^2\|X\|^2 - \langle W,X\rangle^2 + 3\langle JW,X\rangle^2 + \\ \|W\|^2\|X\|^2 - \langle W,X\rangle^2 + 3\langle JW,X\rangle^2 + \\ -\|W\|^2\|X\|^2 + \langle JW,X\rangle^2 - 3\langle W,X\rangle^2 + \\ -\|W\|^2\|X\|^2 + \langle JW,X\rangle^2 - 3\langle W,X\rangle^2 \end{array}\right\} \\ &= \frac{\mu}{4}\left\{-8\langle W,X\rangle^2 + 8\langle JW,X\rangle^2\right\} \\ &= 2\mu\left\{-\langle W,X\rangle^2 + \langle JW,X\rangle^2\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. ☑

VI. BÖLÜM

KAEHLER MANİFOLDLARI

6.1. Kaehler metriği ve Yaklaşık Kaehler manifoldu

Tanım 6.1:(Kaehler metriği)

Bir M yaklaşık kompleks manifold üzerindeki Kaehler form kapalı, yani $d\Phi = 0$ ise; bu durumda M üzerindeki Hermit metriğine **Kaehler metriği** denir./9/

Tanım 6.2:(Kaehler manifoldu)

Bir kompleks manifold üzerinde bir Kaehler metriği tanımlanabiliyorsa bu kompleks manifolda **Kaehler manifoldu** denir./9/

Tanım 6.3:(Yaklaşık Kaehler manifold)

Bir yaklaşık kompleks manifold üzerinde bir Kaehler metriği tanımlanabiliyorsa bu yaklaşık kompleks manifolda **yaklaşık Kaehler manifoldu** denir.

Bir M kompleks manifoldu üzerindeki bir indirgenmiş ortonormal çatı alanı $\{E_i, JE_i\}$ olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için aşağıdaki;

Kaehler veya K-manifoldları: $[\nabla_X, J]Y = 0;$

Yakın(Nearly) Kaehler veya NK-manifoldları: $[\nabla_X, J]X = 0;$

Yaklaşık(Almost) Kaehler veya AK-manifoldları: $d\Phi = 0;$

Yarı(Quasi) Kaehler veya QK-manifoldları: $\begin{cases}[\nabla_X, J]Y + [\nabla_{JX}, J]JY = 0 \\ [\nabla_{JX}, J] = -J[\nabla_X, J]\end{cases};$

Semi Kaehler veya SK-manifolları: $\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla_{E_i}(J)E_i + \nabla_{JE_i}(J)JE_i\right\} = 0;$

sınıflaması yapılır./1,3/

Teorem 6.1:

M Kaehler manifoldu üzerindeki g Kaehler metriği ile tanımlanan M'nin Riemann konneksiyonu Γ olsun. Γ'nın R eğrilik tensörü,

a) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$ (6.1)

b) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$ (6.2)

c) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$ (6.3)

d) $R(JX,JY,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W)$ (6.4)

eşitliklerini sağlar./7/

İspat:

a) $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ vektör alanları için $R(X,Y) + R(Y,X) = 0$ denklemine Z,W uygulanırsa;

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)(Z,W) + R(Y,X)(Z,W) = 0 \\
&(\nabla_X \nabla_Y g - \nabla_Y \nabla_X g - \nabla_{[X,Y]} g)(Z,W) \\
&\qquad + (\nabla_Y \nabla_X g - \nabla_X \nabla_Y g - \nabla_{[Y,X]} g)(Z,W) = 0 \\
&-g(R(X,Y)Z,W) - g(R(X,Y)W,Z) \\
&\qquad - g(R(Y,X)Z,W) - g(R(Y,X)W,Z) = 0 \\
&-g(R(X,Y)Z,W) - g(R(X,Y)W,Z) \\
&\qquad - g(R(Y,X)Z,W) + g(R(X,Y)W,Z) = 0 \\
&-g(R(X,Y)Z,W) - g(R(Y,X)Z,W) = 0 \\
&-g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Y,X)Z,W) \\
&-R(X,Y,Z,W) = R(Y,X,Z,W) \\
&R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X \nabla_Y g - \nabla_Y \nabla_X g - \nabla_{[X,Y]} g) = 0 \\
&(\nabla_X \nabla_Y g - \nabla_Y \nabla_X g - \nabla_{[X,Y]} g)(Z,W) = 0 \\
&-g(R(X,Y)Z,W) - g(R(X,Y)W,Z) = 0 \\
&-R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) = 0 \\
&R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

eşitliği de gerçeklenir. Böylece; (6.5) ve (6.6) eşitliklerinden

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$$

eşitliklerine ulaşılır.

b) $R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$ eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)&+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)\\
&=g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)\\
&=(\nabla_X\nabla_Y g(Z)-\nabla_Y\nabla_X g(Z)-\nabla_{[X,Y]}g(Z))(W)\\
&\qquad+(\nabla_Y\nabla_Z g(X)-\nabla_Z\nabla_Y g(X)-\nabla_{[Y,Z]}g(X))(W)\\
&\qquad\quad+(\nabla_Z\nabla_X g(Y)-\nabla_X\nabla_Z g(Y)-\nabla_{[Z,X]}g(Y))(W)\\
&=-g(R(X,Y)Z,W)-g(R(X,Y)W,Z)-g(R(Y,Z)X,W)\\
&\qquad-g(R(Y,Z)W,X)-g(R(Z,X)Y,W)-g(R(Z,X)W,Y)\\
&=-R(X,Y,Z,W)-R(X,Y,W,Z)-R(Y,Z,X,W)\\
&\qquad-R(Y,Z,W,X)-R(Z,X,Y,W)-R(Z,X,W,Y)\\
&=-R(X,Y,Z,W)+R(X,Y,Z,W)-R(Y,Z,X,W)\\
&\qquad+R(Y,Z,X,W)-R(Z,X,Y,W)+R(Z,X,Y,W)
\end{aligned}$$

olup buradan da;

$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0$$

denklemi elde edilir.

c) $R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0$ eşitliğinden faydalanarak,

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W)&=-R(Y,Z,X,W)-R(Z,X,Y,W)\\
&=R(Y,Z,W,X)+R(Z,X,W,Y)\\
&=-R(Z,W,Y,X)-R(W,Y,Z,X)-R(X,W,Z,Y)-R(W,Z,X,Y)\\
&=R(Z,W,X,Y)+R(W,Y,X,Z)-R(X,W,Y,Z)+R(Z,W,X,Y)\\
&=2R(Z,W,X,Y)-R(X,Y,Z,W)
\end{aligned}$$

denkleminden,

$$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$$

elde edilir.

d) $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$
$$\begin{aligned}&=g(R(Z,W)X,Y)\\&=g(JR(Z,W)X,JY)\\&=g(R(Z,W)JX,JY)\\&=R(Z,W,JX,JY)\\&=R(JX,JY,Z,W)\end{aligned} \tag{6.7}$$

eşitliği elde edilebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W)&=g(R(X,Y)Z,W)\\&=g(JR(X,Y)Z,JW)\\&=g(R(X,Y)JZ,JW)\\&=R(X,Y,JZ,JW)\end{aligned} \tag{6.8}$$

olup, (6.7) ve (6.8) eşitlikleri $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ vektör alanları için gerçeklendiğinden,

$$R(JX,JY,Z,W)=R(X,Y,JZ,JW)=R(X,Y,Z,W)$$

olur. ☑

6.2. Yarı(Quasi) Kaehler Manifoldları

Lemma 5.3'den yararlanarak, Yarı Kaehler manifoldları için aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 6.2:

M bir Yarı Kaehler manifoldu olmak üzere; $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$[R_{XY}-R_{JXJY},J]-J[R_{JXY}+R_{XJY},J]=2J\left[\nabla_{[\nabla_X,J]Y},J\right]-2J\left[\nabla_{[\nabla_Y,J]X},J\right] \quad (6.9)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Bir M Yarı(Quasi) Kaehler manifoldunun $[\nabla_{JX},J]=-J[\nabla_X,J]$ özelliğinden yararlanılırsa; $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
N(X,Y)&=[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]\\
&=\nabla_X Y-\nabla_Y X+J\nabla_{JX}Y-J\nabla_Y JX+J\nabla_X JY-J\nabla_{JY}X-\nabla_{JX}JY+\nabla_{JY}JX\\
&=-J(J\nabla_X)Y+J(J\nabla_Y)X+(J\nabla_{JX})Y-J(\nabla_Y J)X+J(\nabla_X J)Y-(J\nabla_{JY})X\\
&\qquad -(\nabla_{JX}J)Y+(\nabla_{JY}J)X\\
&=J(\nabla_X J-J\nabla_X)Y-J(\nabla_Y J-J\nabla_Y)X-(\nabla_{JX}J-J\nabla_{JX})Y+(\nabla_{JY}J-J\nabla_{JY})X\\
&=J[\nabla_X,J]Y-J[\nabla_Y,J]X-[\nabla_{JX},J]Y+[\nabla_{JY},J]X\\
&=J[\nabla_X,J]Y-J[\nabla_Y,J]X+J[\nabla_X,J]Y-J[\nabla_Y,J]X\\
&=2J\{[\nabla_X,J]Y-[\nabla_Y,J]X\} \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma5.3'den, $[R_{XY}-R_{JXJY},J]+\varepsilon J[R_{JXY}+R_{XJY},J]=\left[\nabla_{N(X,Y)},J\right]$ olup $\varepsilon=-1$ alınırsa;

$$[R_{XY}-R_{JXJY},J]-J[R_{JXY}+R_{XJY},J]=\left[\nabla_{N(X,Y)},J\right]$$

olur. Bu eşitlikle; (6.10) eşitliği birlikte gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
[R_{XY}-R_{JXJY},J]-J[R_{JXY}+R_{XJY},J]&=\left[\nabla_{N(X,Y)},J\right]\\
&=\left[\nabla_{2J[\nabla_X,J]Y-2J[\nabla_Y,J]X},J\right]\\
&=2J\left[\nabla_{[\nabla_X,J]Y},J\right]-2J\left[\nabla_{[\nabla_Y,J]X},J\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.☑

VII. BÖLÜM

TENSÖR ALANLARININ DİKEY VE TAM YÜKSELTİLMİŞLERİ

7.1. Fonksiyonların Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

Bu bölümde, ele alınan tüm diferensiyellenebilir elemanların C^{∞} sınıfından olduğu ve tekrar eden indisler üzerinden toplam alındığı kabul edilmiş, örneğin $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i$ tensör alanı, $\omega = \omega_i \, dx^i$ ile gösterilmiştir.

Herhangi bir n-boyutlu M reel Riemann manifoldunun tanjant demeti (TM, τ_M, M) ve kotanjant demeti (TM^*, τ^*_M, M) olup, buradaki τ_M ve τ^*_M dönüşümleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \tau_M : TM &\to M \\ Z_p &\to p \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \tau^*_M : TM^* &\to M \\ \omega_p &\to p \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı kanonik projeksiyonları örten birer submersiyonlardır. Böylece, bu iki üçlü birer lifli manifold yapısına sahip olup, aynı zamanda birer demettirler.

M manifoldu üzerinde tanımlı $\{ x^i : 1 \le i \le n \}$ lokal koordinatlarına bağlı olarak, TM tanjant manifoldu ve TM^* kotanjant manifoldu üzerinde tanımlı lokal koordinatlar sırasıyla $\{ x^i \, y^i : 1 \le i \le n \}$ ve $\{ x_i, y_i : 1 \le i \le n \}$ olur.

Ayrıca; $\Im^r_s(M)$, M de tanımlı (r,s) tipinde(r kontravaryant, s kovaryant) tensör alanlarının uzayı olmak üzere, $\Im^0_0(M)$'nin bir elemanı bir fonksiyon, $\Im^1_0(M)$'nin bir elemanı bir vektör alanı ve $\Im^0_1(M)$'nin bir elemanı da bir 1-form olup, $\Im(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im^r_s(M)$ de M üzerindeki tensör alanlarının cebiridir. /12,13,21/

Dikey yükseltme(vertical lift) işlevi, sabit katsayılara göre $\Im(M)$ tensör cebirinden $\Im(M)$ tensör cebirine bir lineer izomorfizm olup, aşağıdaki teoremde verilen özelliği gerçekler.

Teorem 7.1:

Her $P,Q \in \Im(M)$ tensör alanları için,

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V \qquad , \qquad (P+Q)^V = P^V + Q^V$$

dir.

Böylece; bir M reel Riemann manifoldu üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonun TM tanjant demetine dikey yükseltilmişi olan f^V, TM üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olup;

$$f^V = f \circ \tau_M \tag{7.1}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca her $Z_p \in TM$ tanjant vektörü için $f^V(Z_p) = f(\tau_M(Z_p)) = f(p)$ olup, $\mathrm{Rang}(f^V) = \mathrm{Rang}(f)$ dir. Burada Rang(f), f'nin görüntü kümesidir.

Teorem 7.2:

Her $f,g \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonları için,

i) $(f+g)^V=f^V+g^V$

ii) $(f.g)^V=f^V.g^V$

eşitlikleri gerçeklenir./10-30/

Tam yükseltme(complete lift) işlevi de, sabit katsayılara göre $\Im(M)$ tensör cebirinden $\Im(M)$ tensör cebirine bir lineer izomorfizm olup, aşağıdaki teoremde verilen özellikleri gerçekler.

Teorem 7.3:

Her $P,Q \in \Im(M)$ tensör alanları için,

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C \ , \qquad (P+Q)^C = P^C + Q^C$$

dir.

Böylece; bir M reel Riemann manifoldu üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonun TM tanjant demetine tam yükseltilmişi olan f^C, TM üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olup, TM'nin lokal koordinatlarına göre;

$$f^C = \partial f = y^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^V = y^i \partial_i f \tag{7.2}$$

şeklinde yazılır.

Ayrıca, her $Z_p \in TM$ tanjant vektörü için $f^C(Z_p) = y^i(Z_p)(\partial_i f)(p)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 7.4:

Her $f,g \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonları için,

i) $(f+g)^C = f^C + g^C$

ii) $(fg)^C = f^C g^V + f^V g^C$

dir./10-30/

7.2. Vektör Alanlarının Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

M manifoldu üzerinde tanımlı bir $X=X^h\frac{\partial}{\partial x^h}$ vektör alanının TM'ye dikey yükseltilmişi olan X^V, TM üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup;

$$X^V\left[f^C\right]=(X[f])^V \qquad ; \qquad \forall f\in\Im_0^0(M) \tag{7.3}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.3) denkleminden, X^V'nin lokal bileşenleri;

$$X^V:\begin{pmatrix}0\\(X^h)^V\end{pmatrix} \qquad 1\leq h\leq n \tag{7.4}$$

şeklindedir./10-30/

M manifoldu üzerinde tanımlı bir $X=X^h\frac{\partial}{\partial x^h}$ vektör alanının TM'ye tam yükseltilmişi olan X^C, TM üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup;

$$X^C\left[f^C\right]=(X[f])^C \qquad ; \qquad \forall f\in\Im_0^0(M) \tag{7.5}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.5) denkleminden, X^C'nin lokal bileşenleri;

$$X^C:\begin{pmatrix}(X^h)^V\\(X^h)^C\end{pmatrix} \qquad 1\leq h\leq n \tag{7.6}$$

şeklindedir.

Tam ve dikey yükseltilmişlerin vektör alanları üzerindeki genel özellikleri aşağıdaki teoremle sunulmuştur.

Teorem 7.5:

Her $X,Y\in\Im_0^1(M)$ ve $f,g\in\Im_0^0(M)$için,

i) $(X+Y)^V=X^V+Y^V$, $(X+Y)^C=X^C+Y^C$

ii) $(fX)^V=f^VX^V$, $(fX)^C=f^CX^V+f^VX^C$

iii) $X^V[f^V]=0$, $X^C[f^V]=X^V[f^C]=(Xf)^V$, $X^C[f^C]=(Xf)^C$

iv) $\left[X^V,Y^V\right]=0, \left[X^V,Y^C\right]=\left[X^C,Y^V\right]=[X,Y]^V, \left[X^C,Y^C\right]=[X,Y]^C$

v) $\Im_0^1(M)=Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}:1\leq i\leq n\right\}, (\frac{\partial}{\partial x^i})^C=\frac{\partial}{\partial x^i}, (\frac{\partial}{\partial x^i})^V=\frac{\partial}{\partial y^i}$

ve $\Im_0^1(TM)=Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}:1\leq i\leq n\right\}$ dir./10-30/

7.3. 1-Formların Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

M manifoldu üzerinde tanımlı bir $\omega=\omega_i\, dx^i$ 1-formunun TM'ye dikey yükseltilmişi olan ω^V, TM üzerinde tanımlı bir 1-form olup;

$$\omega^V(X^C)=(\omega(X))^V \qquad ; \qquad \forall X\in\Im_0^1(M) \tag{7.7}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca; TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.7) denkleminden, ω^V'nin lokal bileşenleri;

$$\omega^V : ((\omega_i)^V, 0) \qquad 1 \le i \le n \tag{7.8}$$

şeklindedir.

M manifoldu üzerinde tanımlı bir $\omega = \omega_i dx^i$ 1-formunun TM'ye tam yükseltilmişi olan ω^C, TM üzerinde tanımlı bir 1-form olup;

$$\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C \qquad ; \qquad \forall X \in \Im_0^1(M) \tag{7.9}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Ayrıca, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.9) denkleminden, ω^C'nin lokal bileşenleri;

$$\omega^C : ((\omega_i)^C, (\omega_i)^V) \; 1 \le i \le n \tag{7.10}$$

şeklindedir.

Tam ve dikey yükseltilmişlerin 1-formlar üzerindeki genel özellikleri aşağıdaki teoremle sunulmuştur.

Teorem 7.6:

Her $X \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$, $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$ için,

i) $(\omega+\theta)^V = \omega^V + \theta^V$, $(\omega+\theta)^C = \omega^C + \theta^C$

ii) $(f\omega)^V = f^V \omega^V$, $(f\omega)^C = f^C \omega^V + f^V \omega^C$

iii) $\omega^V(X^V) = 0$, $\omega^C(X^V) = \omega^V(X^C) = (\omega(X))^V$, $\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C$

iv) $Sp\{dx^i : 1 \le i \le n\} = \Im_1^0(M)$, $(dx^i)^V = \bar{d}x^i$, $(dx^i)^C = \bar{d}y^i$ ve $Sp\{\bar{d}x^i, \bar{d}y^i : 1 \le i \le n\} = \Im_1^0(TM)$ dir./10-30/

7.4. Tensör Alanlarının Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

M manifoldu üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir $F = F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i$ tensör alanının TM'ye dikey yükseltilmişi olan F^V, TM üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir tensör alanı olup, dikey yükseltme özelliklerinden, TM'nin indirgenmiş koordinatlarına göre;

$$
\begin{aligned}
F^V &= (F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i)^V \\
&= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i)^V \\
&= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x^h})^V \otimes (dx^i)^V \\
&= F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.11) eşitliğinden, F^V'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi;

$$
F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (F_i^h)^V & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le i,h \le n \tag{7.12}
$$

şeklindedir.

Ayrıca; M manifoldu üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir $F = F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i$ tensör alanının TM'ye tam yükseltilmişi olan F^C, TM üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir tensör alanı olup, dikey ve tam yükseltme özelliklerinden, TM'nin indirgenmiş koordinatlarına göre;

$$
\begin{aligned}
F^C &= (F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i)^C \\
&= (F_i^h)^C (\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i)^V + (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i)^C \\
&= (F_i^h)^C (\frac{\partial}{\partial x^h})^V \otimes (dx^i)^V + (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x^h})^C \otimes (dx^i)^V + (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x^h})^V \otimes (dx^i)^C \\
&= \partial F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i + F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^i \qquad (7.13)
\end{aligned}
$$

eşitliği ile tanımlanıp, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.13) eşitliğinden, F^C'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi;

$$
F^C : \begin{pmatrix} (F_i^h)^V & 0 \\ (F_i^h)^C & (F_i^h)^V \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i, h \leq n \qquad (7.14)
$$

şeklinde olur./10-30/

M manifoldu üzerinde tanımlı (0,2) tipinden bir $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ tensör alanının TM'ye dikey yükseltilmişi olan G^V, TM üzerinde tanımlı (0,2) tipinden bir tensör alanı olup, dikey yükseltme özelliklerinden;

$$
\begin{aligned}
G^V &= (G_{ij} dx^i \otimes dx^j)^V \\
&= (G_{ij})^V (dx^i \otimes dx^j)^V \\
&= (G_{ij})^V (dx^i)^V \otimes (dx^j)^V \\
&= G_{ij} dx^i \otimes dx^j
\end{aligned} \qquad (7.15)
$$

eşitliği ile tanımlanır.

Eğer, G^V'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.15) eşitliğinden, ifade edilirse;

$$G^V : \begin{pmatrix} (G_{ij})^V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le i, j \le n \tag{7.16}$$

şeklinde olur.

M manifoldu üzerinde tanımlı (0,2) tipinden bir $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ tensör alanının TM'ye tam yükseltilmişi olan G^C, TM üzerinde tanımlı (0,2) tipinden bir tensör alanı olup, dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned} G^C &= (G_{ij} dx^i \otimes dx^j)^C \\ &= (G_{ij})^C (dx^i \otimes dx^j)^V + (G_{ij})^V (dx^i \otimes dx^j)^C \\ &= \partial G_{ij} (dx^i)^V \otimes (dx^j)^V + (G_{ij})^V (dx^i)^C \otimes (dx^j)^V + (G_{ij})^V (dx^i)^V \otimes (dx^j)^C \\ &= \partial G_{ij} dx^i \otimes dx^j + G_{ij} dy^i \otimes dx^j + G_{ij} dx^i \otimes dy^j \end{aligned} \tag{7.17}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Eğer, G^C'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi, TM'nin lokal koordinatlarına göre (7.17) eşitliğinden, ifade edilirse;

$$G^C : \begin{pmatrix} (G_{ij})^C & (G_{ij})^V \\ (G_{ij})^V & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \partial G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le i, j \le n \tag{7.18}$$

şeklinde olur./10-30/

Tam ve dikey yükseltilmişlerin tensör alanları üzerindeki genel özellikleri aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 7.7:

Her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $F \in \Im_1^1(M), G \in \Im_2^0(M)$ için,

i) $F^V(X^V)=0$, $F^V(X^C)= F^C(X^V)=(F(X))^V$, $F^C(X^C)=(F(X))^C$

ii) $G^V(X^V,Y^V)=0$, $G^C(X^C, Y^C)= (G(X,Y))^C$

$G^C(X^V,Y^C)=G^C(X^C, Y^V)= (G(X,Y))^V$ dir.

Bir M reel Riemann manifoldu üzerindeki afin konneksiyon ∇, Torsiyon tensörü T ve Eğrilik tensörü R olmak üzere dikey ve tam yükseltme ile ilgili genel özellikler aşağıdaki teoremde toplanabilir.

Teorem 7.8:

Her $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M), \omega \in \Im_1^0(M), K \in \Im_s^r(M)$ için,

i)

$$\nabla^C_{X^V} f^V = 0, \nabla^C_{X^V} f^C = \nabla^C_{X^C} f^V = (\nabla_X f)^V, \nabla^C_{X^C} f^C = (\nabla_X f)^C$$

$$\nabla^C_{X^V} Y^V = 0, \nabla^C_{X^V} Y^C = \nabla^C_{X^C} Y^V = (\nabla_X Y)^V, \nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C$$

$$\nabla^C_{X^V} K^V = 0, \nabla^C_{X^V} K^C = \nabla^C_{X^C} K^V = (\nabla_X K)^V, \nabla^C_{X^C} K^C = (\nabla_X K)^C$$

$$\nabla^C_{X^V} \omega^V = 0, \nabla^C_{X^V} \omega^C = \nabla^C_{X^C} \omega^V = (\nabla_X \omega)^V, \nabla^C_{X^C} \omega^C = (\nabla_X \omega)^C$$

$$\nabla^C K^V = (\nabla K)^V, \nabla^C K^C = (\nabla K)^C$$

ii)

$$T^V(X^V,Y^V) = T^V(X^C,Y^V) = T^V(X^V,Y^C) = 0,\ T^V(X^C,Y^C) = (T(X,Y))^V$$

$$T^C(X^V,Y^V) = 0, T^C(X^C,Y^V) = T^C(X^V,Y^C) = (T(X,Y))^V,$$

$$T^C(X^C,Y^C) = (T(X,Y))^C = (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])^C$$

$$= \nabla^C_{X^C} Y^C - \nabla^C_{Y^C} X^C - \left[X^C,Y^C\right]$$

iii)

$$R^V(X^V,Y^V)Z^V = R^V(X^C,Y^V)Z^V = R^V(X^V,Y^C)Z^V = R^V(X^V,Y^V)Z^C$$

$$= R^V(X^C,Y^V)Z^C = R^V(X^V,Y^C)Z^C = 0$$

$$R^V(X^C,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^V$$

$$R^C(X^V,Y^V)Z^V = R^C(X^C,Y^V)Z^V = R^C(X^V,Y^C)Z^V = R^C(X^V,Y^V)Z^C = 0$$

$$R^C(X^C,Y^C)Z^V = R^C(X^C,Y^V)Z^C = R^C(X^V,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^V$$

$$R^C(X^C,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^C = (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)^C$$

$$= \nabla^C_{X^C} \nabla^C_{Y^C} Z^C - \nabla^C_{Y^C} \nabla^C_{X^C} Z^C - \nabla^C_{\left[X^C,Y^C\right]} Z^C$$

dir./10-30/

VIII. BÖLÜM

KOMPLEKS MANİFOLDLARDA DİKEY VE TAM YÜKSELTİLMİŞLER

8.1. Kompleks Manifoldun Tanjant ve Kotanjant Manifoldu

Herhangi bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı $\{z^{\alpha}:\ 1\leq\alpha\leq n\ \}$ lokal koordinatlarına bağlı olarak, M'nin her bir p noktasındaki $Z_p = Z^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\Big|_p$ tanjant vektörlerden oluşan T_pM tanjant vektör uzaylarının ayrık bileşimi TM ile gösterilirse;

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

olur. (Benzer yapı kotanjant manifold için de düşünülebilir.)

Böylece bir n-boyutlu M kompleks manifoldunun tanjant demeti (TM, τ_M, M) ve kotanjant demeti (TM^*, τ_M^*, M) olup, buradaki τ_M ve τ_M^* dönüşümleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \tau_M : TM &\to M \\ Z_p &\to p \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \tau_M^* : TM^* &\to M \\ \omega_p &\to p \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı kanonik projeksiyonları örten birer submersiyonlardır. Böylece, bu iki üçlü birer lifli manifold yapısına sahip olup, aynı zamanda birer demettirler.

Şimdi, M'nin bir tam C^{∞}-atlası olan $A = \left\{(U_\lambda, z_\lambda^{\alpha})\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ gözönüne alınırsa; $\tau_M : TM \to M$ doğal projeksiyonu altında herbir $U_\lambda' = \tau_M^{-1}(U_\lambda)$ TM nin birer açığı olup, TM bir topolojik Hausdorf uzayıdır. TM'nin herbir U_λ' açığından C^{2n} kompleks uzayının bir açık altcümlesi üzerine tanımlanan;

$$(z_\lambda^{\alpha}, z_\lambda'^{\alpha}) : U_\lambda' \to C^{2n}$$

dönüşümleri, $\forall Z_p \in TM$ tanjant vektörleri için;

$$
\begin{aligned}
(z_\lambda^\alpha, z_\lambda'^\alpha)(Z_p) &= (z_\lambda^1(Z_p),\ldots,z_\lambda^n(Z_p), z_\lambda'^1(Z_p),\ldots,z_\lambda'^n(Z_p)) \\
&= (z_\lambda^1(p),\ldots,z_\lambda^n(p), Z_p\left[z_\lambda^1\right],\ldots,Z_p\left[z_\lambda^n\right]) \\
&= (p^1,\ldots,p^n, Z^1,\ldots,Z^n) \in C^{2n}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanırsa; bu dönüşüm bir homeomorfizm olup, $(U_\lambda', z_\lambda^\alpha, z_\lambda'^\alpha)$ ikilileri TM için birer harita olur. Böylece, $A' = \left\{(U_\lambda', z_\lambda^\alpha, z_\lambda'^\alpha)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ TM için bir tam atlas olup, TM bir topolojik $2n$-boyutlu kompleks bir manifold olur. Ayrıca, bu A' atlasından seçilen uygun haritalar arasında tanımlanan uygun dönüşümler de diferensiyellenebilir olup, TM, $2n$-boyutlu C^∞-kompleks bir manifold yapısına sahiptir. Bundan sonraki işlemlerde, $\{\, z^\alpha, z'^\alpha : 1\leq\alpha\leq n \,\}$ koordinatları, TM için lokal koordinatlar olarak göz önüne alınacaktır.

Benzer yolla; TM^* kotanjant uzayı da $2n$-boyutlu C^∞-kompleks bir manifold yapılabilir. Ayrıca; TM^* kotanjant manifold üzerinde tanımlı lokal koordinatlar da $\{\, z_\alpha, z'_\alpha : 1\leq\alpha\leq n \,\}$ şeklindedir.

8.2. Kompleks Fonksiyonların Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

TM kompleks tanjant manifoldunda tanımlanan dikey yükseltme(vertical lift) işlevi de, sabit katsayılara göre $\Im(M)$ kompleks tensör cebirinden $\Im(M)$ kompleks tensör cebirine bir lineer izomorfizm olup, bir P tensör alanının dikey yükseltilmişi P^V ile gösterilir.

Özellik 8.1:

Her $P,Q \in \Im(M)$ kompleks tensör alanları için,

$$
(P\otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V \qquad , \qquad (P+Q)^V = P^V + Q^V
$$

dir.

Tanım 8.1:(Kompleks fonksiyonun dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. Bu durumda;

$$f^V = f \circ \tau_M \tag{8.1}$$

eşitliği ile tanımlı f^V, TM üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olup, bu fonksiyona f'nin TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

Herbir $Z_p \in TM$ tanjant vektörü için $f^V(Z_p) = f(\tau_M(Z_p)) = f(p)$ olup, $\text{Rang}(f^V) = \text{Rang}(f)$ dir.

Özellik 8.2:

Her $f, g \in \Im_0^0(M)$ kompleks değerli fonksiyonları için,

i) $(f+g)^V = f^V + g^V$

ii) $(f.g)^V = f^V.g^V$

eşitlikleri gerçeklenir.

Kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan tam yükseltme(complete lift) işlevi de, sabit katsayılara göre $\Im(M)$ kompleks tensör cebirinden $\Im(M)$ kompleks tensör cebirine bir lineer izomorfizm olur.

Özellik 8.3:

Her $P, Q \in \Im(M)$ kompleks tensör alanları için,

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C \;, \qquad (P+Q)^C = P^C + Q^C$$

dir.

Tanım 8.2:(Kompleks fonksiyonun tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. Bu durumda;

$$f^C = \partial f = z'^{\alpha}(\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}})^V = z'^{\alpha}(\partial_{\alpha} f) \qquad (8.2)$$

eşitliği ile tanımlı f^C, TM üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olup, bu fonksiyona f'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Ayrıca, her $Z_p \in TM$ tanjant vektörü için $f^C(Z_p) = z'^{\alpha}(Z_p)(\partial_{\alpha} f)(p)$ şeklinde tanımlanır.

Özellik 8.4:

Her $f, g \in \Im_0^0(M)$ kompleks fonksiyonları için,

i) $(f+g)^C = f^C + g^C$

ii) $(fg)^C = f^C g^V + f^V g^C$

dir.

8.3. Kompleks Vektör Alanlarının Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

Tanım 8.3:(Kompleks vektör alanının dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks vektör alanı Z olsun. Bu durumda;

$$Z^V\left[f^C\right] = (Z[f])^V \quad ; \qquad \forall f \in \Im_0^0(M) \qquad (8.3)$$

eşitliği ile tanımlı Z^V, TM üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu vektör alanına Z'nin TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.1:

Bir $Z=Z^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$ kompleks vektör alanının dikey yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$Z^{V}:\begin{pmatrix}0\\(Z^{\alpha})^{V}\end{pmatrix} \qquad 1\leq\alpha\leq n \tag{8.4}$$

dir.

İspat:

TM'nin $\{z^{\alpha}, z'^{\alpha}: 1\leq\alpha\leq n\}$ lokal koordinatlarına göre $Z^{V}=K^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial z^{\alpha}}+P^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial z'^{\alpha}}$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
Z^{V}\left[f^{C}\right] &= K^{\alpha}\frac{\partial f^{C}}{\partial z^{\alpha}}+P^{\alpha}\frac{\partial f^{C}}{\partial z'^{\alpha}}\\
&= K^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}\left\{z'^{\beta}\frac{\partial f}{\partial z^{\beta}}\right\}+P^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z'^{\alpha}}\left\{z'^{\beta}\frac{\partial f}{\partial z^{\beta}}\right\}\\
&= K^{\alpha}z'^{\beta}\frac{\partial^{2} f}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}+P^{\alpha}\frac{\partial z'^{\beta}}{\partial z'^{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial z^{\beta}}\\
&= K^{\alpha}z'^{\beta}\frac{\partial^{2} f}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}+P^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial f}{\partial z^{\beta}}\\
&= K^{\alpha}z'^{\beta}\frac{\partial^{2} f}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}+P^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

olur. Ayrıca; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$(Z[f])^{V}=(Z^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}})^{V}=(Z^{\alpha})^{V}(\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}})^{V}=(Z^{\alpha})^{V}\frac{\partial f}{\partial z^{\alpha}} \tag{8.6}$$

olup, (8.5) ve (8.6) eşitlikleri (8.4)'e göre eşitlenirse; $K^{\alpha}=0, P^{\alpha}=(Z^{\alpha})^{V}, 1\leq\alpha\leq n$ olur. Böylece;

$$Z^{V}:\begin{pmatrix}0\\(Z^{\alpha})^{V}\end{pmatrix} \qquad 1\leq\alpha\leq n$$

elde edilir. ☑

Tanım 8.4:(Kompleks vektör alanının tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks vektör alanı Z olsun. Bu durumda;

$$Z^C\left[f^C\right]=(Z[f])^C \;; \qquad \forall f \in \Im_0^0(M) \tag{8.7}$$

eşitliği ile tanımlı Z^C, TM üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu vektör alanına Z'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.2:

Bir Z kompleks vektör alanının tam yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$Z^C:\begin{pmatrix}(Z^\alpha)^V\\(Z^\alpha)^C\end{pmatrix} \qquad 1\le\alpha\le n \tag{8.8}$$

dir.

İspat:

TM'nin $\{z^\alpha, z'^\alpha : 1\le\alpha\le n\}$ lokal koordinatlarına göre $Z^C=Q^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}+P^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z'^\alpha}$ olsun. Bu durumda $\forall f\in\Im_0^0(M)$ fonksiyonu için;

$$\begin{aligned}
Z^C\left[f^C\right]&=Q^\alpha\frac{\partial f^C}{\partial z^\alpha}+P^\alpha\frac{\partial f^C}{\partial z'^\alpha}\\
&=Q^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left\{z'^\beta\frac{\partial f}{\partial z^\beta}\right\}+P^\alpha\frac{\partial}{\partial z'^\alpha}\left\{z'^\beta\frac{\partial f}{\partial z^\beta}\right\}\\
&=Q^\alpha z'^\beta\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial z^\beta}+P^\alpha\frac{\partial z'^\beta}{\partial z'^\alpha}\frac{\partial f}{\partial z^\beta}\\
&=Q^\alpha z'^\beta\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial z^\beta}+P^\alpha\delta_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial z^\beta}\\
&=Q^\alpha z'^\beta\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial z^\beta}+P^\alpha\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

olur. Ayrıca; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned}(Z[f])^C &= (Z^\alpha \frac{\partial f}{\partial z^\alpha})^C = (Z^\alpha)^C (\frac{\partial f}{\partial z^\alpha})^V + (Z^\alpha)^V (\frac{\partial f}{\partial z^\alpha})^C \\ &= (Z^\alpha)^C (\frac{\partial f}{\partial z^\alpha})^V + (Z^\alpha)^V z'^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta}\left\{\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\right\} \\ &= (Z^\alpha)^C (\frac{\partial f}{\partial z^\alpha})^V + (Z^\alpha)^V z'^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial z^\beta \partial z^\alpha}\end{aligned} \tag{8.10}$$

olup, (8.9) ve (8.10) eşitlikleri (8.8)'e göre eşitlenirse; $Q^\alpha = (Z^\alpha)^V, P^\alpha = (Z^\alpha)^C, 1 \leq \alpha \leq n$ olur. Böylece;

$$Z^C : \begin{pmatrix} (Z^\alpha)^V \\ (Z^\alpha)^C \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \alpha \leq n$$

elde edilir.☑

Tam ve dikey yükseltilmişlerin kompleks vektör alanları üzerindeki genel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 8.3:

Her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ kompleks vektör alanları ve $f, g \in \Im_0^0(M)$ kompleks fonksiyonlar için,

i) $(X+Y)^V = X^V + Y^V$, $(X+Y)^C = X^C + Y^C$

ii) $(fX)^V = f^V X^V$, $(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C$

iii) $X^V[f^V] = 0$, $X^C[f^V] = X^V[f^C] = (Xf)^V$, $X^C[f^C] = (Xf)^C$

iv) $\left[X^V, Y^V\right] = 0$, $\left[X^V, Y^C\right] = \left[X^C, Y^V\right] = [X, Y]^V$, $\left[X^C, Y^C\right] = [X, Y]^C$

v) $\Im_0^1(M) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha} : 1 \leq \alpha \leq n\right\}$, $(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})^C = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, $(\frac{\partial}{\partial z^\alpha})^V = \frac{\partial}{\partial z'^\alpha}$

ve $\Im_0^1(TM) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z'^\alpha} : 1 \leq \alpha \leq n\right\}$ dir.

İspat:

Dikey ve tam yükseltmelerin özellikleri kullanılarak; teoremin ispatı kolayca yapılabilir.☑

8.4. Kompleks 1-Formların Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

Tanım 8.5:(Kompleks bir 1-Formun dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı bir kompleks 1-form ω olsun. Bu durumda;

$$\omega^V(Z^C) = (\omega(Z))^V; \qquad \forall Z \in \Im_0^1(M) \tag{8.11}$$

eşitliği ile tanımlı ω^V, TM üzerinde tanımlı bir kompleks 1-form olup, bu 1-forma ω'nın TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.4:

Bir $\omega = \omega_\alpha dz^\alpha$ kompleks 1-formunun dikey yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$\omega^V : \begin{pmatrix} (\omega_\alpha)^V & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le \alpha \le n \tag{8.12}$$

dir.

İspat:

$\omega^V \in \Im_1^0(TM)$'nin bileşenleri (K_α, P_α) olsun. Bu durumda $\forall Z \in \Im_0^1(M)$ kompleks vektör alanı için;

$$\omega^V(Z^C) = K_\alpha (Z^\alpha)^V + P_\alpha (Z^\alpha)^C \tag{8.13}$$

olur. Ayrıca; dikey yükseltme özelliğinden;

$$(\omega(Z))^V = (\omega_\alpha Z^\alpha)^V = (\omega_\alpha)^V (Z^\alpha)^V \tag{8.14}$$

olup, (8.13) ve (8.14) eşitlikleri (8.11)'e göre eşitlenirse; $K_\alpha = (\omega_\alpha)^V, P_\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq n$ olur. Böylece;

$$\omega^V : ((\omega_\alpha)^V, 0) \qquad 1 \leq \alpha \leq n$$

elde edilir. ☑

Tanım 8.6:(Kompleks bir 1-formun tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks bir 1-form ω olsun. Bu durumda;

$$\omega^C(Z^C) = (\omega(Z))^C \qquad ; \qquad \forall Z \in \Im_0^1(M) \tag{8.15}$$

eşitliği ile tanımlı ω^C, TM üzerinde tanımlı bir kompleks 1-form olup, bu 1-forma ω'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.5:

Bir ω kompleks 1-formunun tam yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$\omega^C : \left((\omega_\alpha)^C \quad (\omega_\alpha)^V\right) \qquad 1 \leq \alpha \leq n \tag{8.16}$$

dir.

İspat:

$\omega^C \in \Im_1^0(TM)$'nin bileşenleri (K_α, P_α) olsun. Bu durumda $\forall Z \in \Im_0^1(M)$ kompleks vektör alanı için;

$$\omega^C(Z^C) = K_\alpha (Z^\alpha)^V + P_\alpha (Z^\alpha)^C \tag{8.17}$$

olur. Ayrıca; tam yükseltme özelliklerinden;

$$(\omega(Z))^C = (\omega_\alpha)^C (Z^\alpha)^V + (\omega_\alpha)^V (Z^\alpha)^C \tag{8.18}$$

olup, (8.17) ve (8.18) eşitlikleri (8.15)'e göre eşitlenirse; $K_\alpha = (\omega_\alpha)^C, P_\alpha = (\omega_\alpha)^V, 1 \leq \alpha \leq n$ olur. Böylece;

$$\omega^C : \left((\omega_\alpha)^C \quad (\omega_\alpha)^V \right) \qquad 1 \leq \alpha \leq n$$

elde edilir. ☑

Tam ve dikey yükseltilmişlerin 1-formlar üzerindeki genel özellikleri aşağıdaki teoremle sunulmuştur.

Teorem 8.6:

Her $Z \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$, $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$ için,

i) $(\omega+\theta)^V = \omega^V + \theta^V$, $(\omega+\theta)^C = \omega^C + \theta^C$

ii) $(f\omega)^V = f^V \omega^V$, $(f\omega)^C = f^C \omega^V + f^V \omega^C$

iii) $\omega^V(Z^V) = 0$, $\omega^C(X^V) = \omega^V(Z^C) = (\omega(Z))^V$, $\omega^C(Z^C) = (\omega(Z))^C$

iv) $Sp\{dz^\alpha : 1 \leq \alpha \leq n\} = \Im_1^0(M)$, $(dz^\alpha)^V = \bar{d}z^\alpha$, $(dz^\alpha)^C = \bar{d}z'^\alpha$ ve

$Sp\{dz^\alpha, dz'^\alpha : 1 \leq \alpha \leq n\} = \Im_1^0(TM)$ dir.

$\bar{d}$, TM'deki diferensiyel operatör olup, genelikle d ile gösterilir.

8.5.Kompleks Tensör Alanların Dikey ve Tam Yükseltilmişleri

Tanım 8.7:((1,1) tipinden kompleks tensör alanının dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir kompleks tensör alanı F olsun. Bu durumda;

$$F^V(Z^C) = (F(Z))^V; \qquad \forall Z \in \Im_0^1(M) \tag{8.19}$$

eşitliği ile tanımlı F^V, TM üzerinde tanımlı bir (1,1) tipinden bir kompleks tensör alanı olup, bu tensör alanına F'nin TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.7:

Bir $F = F_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha}$ kompleks tensör alanının dikey yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$F^{V} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (F_{\alpha}^{\beta})^{V} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{\alpha}^{\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

dir.

İspat:

F tensör alanının dikey yükseltilmişi;

$$\begin{aligned} F^{V} &= (F_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha})^{V} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{V} (\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha})^{V} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{V} (\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})^{V} \otimes (dz^{\alpha})^{V} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{V} \frac{\partial}{\partial z'^{\beta}} \otimes dz^{\alpha} \end{aligned}$$

şeklinde olup, F^{V}'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi;

$$F^{V} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (F_{\alpha}^{\beta})^{V} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{\alpha}^{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. ☑

Tanım 8.8:((1,1) tipinden kompleks tensör alanının tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı (1,1) tipinden bir kompleks tensör alanını F olsun. Bu durumda;

$$F^{C}(Z^{C}) = (F(Z))^{C}; \qquad \forall Z \in \Im_{0}^{1}(M) \tag{8.21}$$

eşitliği ile tanımlı F^{C}, TM üzerinde tanımlı bir (1,1) tipinden bir kompleks tensör alanı olup, bu tensör alanına F'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.8:

Bir $F = F_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha}$ kompleks tensör alanının tam yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$F^{C} : \begin{pmatrix} (F_{\alpha}^{\beta})^{V} & 0 \\ (F_{\alpha}^{\beta})^{C} & (F_{\alpha}^{\beta})^{V} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} F_{\alpha}^{\beta} & 0 \\ \partial F_{\alpha}^{\beta} & F_{\alpha}^{\beta} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq n \tag{8.22}$$

dir.

İspat:

F tensör alanının tam yükseltilmişi için dikey ve tam yükseltme özelliklerinden faydalanılarak;

$$\begin{aligned} F^{C} &= (F_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha})^{C} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{C}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha})^{V} + (F_{\alpha}^{\beta})^{V}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha})^{C} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{C}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})^{V} \otimes (dz^{\alpha})^{V} + (F_{\alpha}^{\beta})^{V}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})^{C} \otimes (dz^{\alpha})^{V} + (F_{\alpha}^{\beta})^{V}(\frac{\partial}{\partial z^{\beta}})^{V} \otimes (dz^{\alpha})^{C} \\ &= (F_{\alpha}^{\beta})^{C}\frac{\partial}{\partial z'^{\beta}} \otimes dz^{\alpha} + (F_{\alpha}^{\beta})^{V}\frac{\partial}{\partial z^{\beta}} \otimes dz^{\alpha} + (F_{\alpha}^{\beta})^{V}\frac{\partial}{\partial z'^{\beta}} \otimes dz'^{\alpha} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece; F^{C}'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi;

$$F^{C} : \begin{pmatrix} (F_{\alpha}^{\beta})^{V} & 0 \\ (F_{\alpha}^{\beta})^{C} & (F_{\alpha}^{\beta})^{V} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} F_{\alpha}^{\beta} & 0 \\ \partial F_{\alpha}^{\beta} & F_{\alpha}^{\beta} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq n \tag{8.23}$$

şeklindedir. ☑

Tanım 8.9:((0,2) tipinden kompleks tensör alanının dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı (0,2) tipinden bir kompleks tensör alanını g olsun. Bu durumda;

$$g^V(Z^C) = (g(Z))^V; \qquad \forall Z \in \Im_0^1(M) \tag{8.24}$$

eşitliği ile tanımlı g^V, TM üzerinde tanımlı bir (0,2) tipinden bir kompleks tensör alanı olup, bu tensör alanına g'nin TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.9:

Bir $g = g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta$ kompleks tensör alanının dikey yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$g^V : \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})^V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.25}$$

dir.

İspat:

$g = g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta$ tensör alanının dikey yükseltilmişi;

$$\begin{aligned} g^V &= (g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta)^V \\ &= (g_{\alpha\beta})^V (dz^\alpha \otimes dz^\beta)^V \\ &= (g_{\alpha\beta})^V (dz^\alpha)^V \otimes (dz^\beta)^V \\ &= (g_{\alpha\beta})^V dz^\alpha \otimes dz^\beta \end{aligned}$$

şeklinde olup, g^V'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi TM'nin lokal koordinatlarına göre;

$$g^V : \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})^V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.☑

Tanım 8.10:((0,2) tipinden kompleks tensör alanının tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks (0,2) tipinden bir tensör alanı g olsun. Bu durumda;

$$g^C(Z^C) = (g(Z))^C; \qquad \forall Z \in \Im_0^1(M) \qquad (8.26)$$

eşitliği ile tanımlı g^C, TM üzerinde tanımlı bir (0,2) tipinden bir kompleks tensör alanı olup, bu tensör alanına g'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Teorem 8.10:

Bir $g = g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta$ kompleks tensör alanının tam yükseltilmişinin lokal bileşenleri

$$g^C : \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})^C & (g_{\alpha\beta})^V \\ (g_{\alpha\beta})^V & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \partial g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \le \alpha, \beta \le n \qquad (8.27)$$

dir.

İspat:

Dikey ve tam yükseltme özelliklerinden, g tensör alanının dikey yükseltilmişi;

$$\begin{aligned} g^C &= (g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta)^C \\ &= (g_{\alpha\beta})^C (dz^\alpha \otimes dz^\beta)^V + (g_{\alpha\beta})^V (dz^\alpha \otimes dz^\beta)^C \\ &= \partial g_{\alpha\beta} (dz^\alpha)^V \otimes (dz^\beta)^V + (g_{\alpha\beta})^V (dz^\alpha)^C \otimes (dz^\beta)^V + (g_{\alpha\beta})^V (dz^\alpha)^V \otimes (dz^\beta)^C \\ &= \partial g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta + g_{\alpha\beta} dz'^\alpha \otimes dz^\beta + g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz'^\beta \end{aligned}$$

şeklinde olup, g^C'nin lokal bileşenlerinin matris gösterimi

$$g^C : \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})^C & (g_{\alpha\beta})^V \\ (g_{\alpha\beta})^V & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \partial g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \le \alpha, \beta \le n.$$

olur.☑

Tam ve dikey yükseltme işlevinin tensör alanları üzerindeki genel özellikleri aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 8.11:

Her $Z, W \in \Im_0^1(M)$ ve $F \in \Im_1^1(M), g \in \Im_2^0(M)$ kompleks tensör alanları için,

i) $F^V(Z^V)=0,\ F^V(Z^C)= F^C(Z^V)=(F(Z))^V,\ F^C(Z^C)=(F(Z))^C$

ii) $g^V(Z^V,W^V)=0,\ g^C(Z^C, W^C)= (g(Z,W))^C$

$$g^C(Z^V,W^C)=g^C(W^C, W^V)= (g(Z,W))^V \quad \text{dir.}$$

Bir M kompleks manifoldu üzerindeki kompleks Afin konneksiyon ∇, kompleks Torsiyon tensörü T ve kompleks Eğrilik tensörü R olmak üzere dikey ve tam yükseltme ile ilgili genel özellikler aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 8.12:

Her $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M), \omega \in \Im_1^0(M), K \in \Im_s^r(M)$ kompleks tensör alanları için,

i)
$$\begin{aligned}
&\nabla^C_{X^V} f^V = 0, \nabla^C_{X^V} f^C = \nabla^C_{X^C} f^V = (\nabla_X f)^V, \nabla^C_{X^C} f^C = (\nabla_X f)^C \\
&\nabla^C_{X^V} Y^V = 0, \nabla^C_{X^V} Y^C = \nabla^C_{X^C} Y^V = (\nabla_X Y)^V, \nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \\
&\nabla^C_{X^V} K^V = 0, \nabla^C_{X^V} K^C = \nabla^C_{X^C} K^V = (\nabla_X K)^V, \nabla^C_{X^C} K^C = (\nabla_X K)^C \\
&\nabla^C_{X^V} \omega^V = 0, \nabla^C_{X^V} \omega^C = \nabla^C_{X^C} \omega^V = (\nabla_X \omega)^V, \nabla^C_{X^C} \omega^C = (\nabla_X \omega)^C \\
&\nabla^C K^V = (\nabla K)^V, \nabla^C K^C = (\nabla K)^C
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
&T^V(X^V,Y^V) = T^V(X^C,Y^V) = T^V(X^V,Y^C) = 0,\ T^V(X^C,Y^C) = (T(X,Y))^V \\
&T^C(X^V,Y^V) = 0, T^C(X^C,Y^V) = T^C(X^V,Y^C) = (T(X,Y))^V, \\
&T^C(X^C,Y^C) = (T(X,Y))^C = (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])^C \\
&\qquad = \nabla^C_{X^C} Y^C - \nabla^C_{Y^C} X^C - \left[X^C, Y^C\right]
\end{aligned}$$

$$R^V(X^V,Y^V)Z^V = R^V(X^C,Y^V)Z^V = R^V(X^V,Y^C)Z^V = R^V(X^V,Y^V)Z^C$$
$$= R^V(X^C,Y^V)Z^C = R^V(X^V,Y^C)Z^C = 0$$

iii) $$R^V(X^C,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^V$$
$$R^C(X^V,Y^V)Z^V = R^C(X^C,Y^V)Z^V = R^C(X^V,Y^C)Z^V = R^C(X^V,Y^V)Z^C = 0$$
$$R^C(X^C,Y^C)Z^V = R^C(X^C,Y^V)Z^C = R^C(X^V,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^V$$
$$R^C(X^C,Y^C)Z^C = (R(X,Y)Z)^C = (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)^C$$
$$= \nabla^C_{X^C}\nabla^C_{Y^C}Z^C - \nabla^C_{Y^C}\nabla^C_{X^C}Z^C - \nabla^C_{\left[X^C,Y^C\right]}Z^C$$

dir.

8.6. Kompleks Manifoldlardaki Özelliklerin Yükseltme İşlevi(Lifting) ile Tanjant Manifoldlara Taşınması

Herhangi bir M kompleks manifold üzerinde tanımlı lokal koordinatlar $\left\{x^\alpha, y^\alpha\right\}$ olmak üzere, M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı bir kompleks yapı J olsun. Bu durumda J, M üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipinden bir tensör alanı olduğundan, (8.20)'ye göre dikey yükseltilmişi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
J^V &= (i\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\otimes dx^\alpha + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\otimes dy^\alpha)^V \\
&= i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\otimes dx^\alpha)^V + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\otimes dy^\alpha)^V \\
&= i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})^V \otimes (dx^\alpha)^V + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^V \otimes (dy^\alpha)^V \\
&= i\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\otimes dx^\alpha + i\frac{\partial}{\partial y'^\alpha}\otimes dy^\alpha
\end{aligned}$$

olur. TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde tanımlı lokal koordinatlar $\left\{x^\alpha, y^\alpha, x'^\alpha, y'^\alpha\right\}$ olmak üzere, J^V yükseltilmiş tensör alanı matris formunda yazılırsa;

$$J^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iI_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

elde edilir. Ayrıca, J^V yükseltilmiş tensör alanı, $(J^V)^2 = 0$ eşitliğini gerçeklediğinden aynı zamanda TM kompleks tanjant manifoldu için bir yaklaşık tanjant kompleks yapı olur.

Tanım 8.11:(Kompleks yapının dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks yapı J olsun. Bu durumda, (8.28) ile verilen J^V'ye J'nin TM kompleks tanjant demetine **dikey yükseltilmişi** denir.

M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı aynı J kompleks yapısının (8.22)'ye göre tam yükseltilmişi hesaplanırsa, dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned} J^C &= (i\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\alpha + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dy^\alpha)^C \\ &= i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\alpha)^C + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dy^\alpha)^C \\ &= i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})^C \otimes (dx^\alpha)^V + i(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})^V \otimes (dx^\alpha)^C + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^C \otimes (dy^\alpha)^V + i(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^V \otimes (dy^\alpha)^C \\ &= i\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\alpha + i\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \otimes dx'^\alpha + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dy^\alpha + i\frac{\partial}{\partial y'^\alpha} \otimes dy'^\alpha \end{aligned}$$

olur. TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde tanımlı lokal koordinatlar $\{x^\alpha, y^\alpha, x'^\alpha, y'^\alpha\}$ olmak üzere, J^C yükseltilmiş tensör alanı matris formunda yazılırsa;

$$J^C : \begin{pmatrix} iI_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iI_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iI_n \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

elde edilir. Ayrıca, J^C yükseltilmiş tensör alanı, $(J^C)^2 = -I$ eşitliğini gerçeklediğinden aynı zamanda TM kompleks tanjant manifoldu için bir yaklaşık kompleks yapı olur.

Tanım 8.12:(Kompleks yapının tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı kompleks yapı J olsun. Bu durumda, (8.29) ile verilen J^C'ye J'nin TM kompleks tanjant demetine **tam yükseltilmişi** denir.

Herhangi bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı g yaklaşık Hermit metriğini gözönüne alalım. Böylece; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned} g^V(X^C, Y^C) &= (g(X,Y))^V \\ &= (g(JX, JY))^V \\ &= g^V((JX)^C, (JY)^C) \\ &= g^V(J^C X^C, J^C Y^C) \end{aligned} \tag{8.30}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 8.13:(Yaklaşık Hermit metriğinin dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı yaklaşık Hermit metriği g olmak üzere, (8.30) ile verilen g^V, TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde bir yaklaşık Hermit metriği olup, bu metriğe g'nin TM kompleks tanjant manifolduna **dikey yükseltilmişi** denir.

Aynı M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı g yaklaşık Hermit metriği için; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned} g^C(X^C, Y^C) &= (g(X,Y))^C \\ &= (g(JX, JY))^C \\ &= g^C((JX)^C, (JY)^C) \\ &= g^C(J^C X^C, J^C Y^C) \end{aligned} \tag{8.31}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 8.13:(Yaklaşık Hermit metriğinin tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı yaklaşık Hermit metriği g olmak üzere, (8.31) ile verilen g^C, TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde bir yaklaşık Hermit metriği olup, bu metriğe g'nin TM kompleks tanjant manifolduna **tam yükseltilmişi** denir.

Herhangi bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı Φ yaklaşık Kaehler formu gözönüne alalım. Böylece; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned}\Phi^V(X^C,Y^C) &= (\Phi(X,Y))^V \\ &= (g(X,JY))^V \\ &= g^V(X^C,(JY)^C) \\ &= g^V(X^C,J^CY^C)\end{aligned} \tag{8.32}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 8.13:(Yaklaşık Kaehler Formun dikey yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı yaklaşık Kaehler formu Φ olmak üzere, (8.32) ile verilen Φ^V, TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde bir yaklaşık Kaehler formu olup, bu forma Φ'nin TM kompleks tanjant manifolduna **dikey yükseltilmişi** denir.

Aynı M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı Φ yaklaşık Kaehler formu için; dikey ve tam yükseltme özelliklerinden;

$$\begin{aligned}\Phi^C(X^C,Y^C) &= (\Phi(X,Y))^C \\ &= (g(X,JY))^C \\ &= g^C(X^C,(JY)^C) \\ &= g^C(X^C,J^CY^C)\end{aligned} \tag{8.33}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 8.13:(Yaklaşık Kaehler Formun tam yükseltilmişi)

Bir M kompleks manifoldu üzerinde tanımlı yaklaşık Kaehler formu Φ olmak üzere, (8.33) ile verilen Φ^C, TM kompleks tanjant manifoldu üzerinde bir yaklaşık Kaehler formu olup, bu forma Φ'nin TM kompleks tanjant manifolduna **tam yükseltilmişi** denir.

Kompleks manifoldlar için yapılan sınıflamalar, yükseltme işlevi kullanılarak kompleks manifoldların tanjant manifoldları için de aşağıdaki gibi bir sınıflama yapılabilir.

Teorem 8.13:

Herhangi bir M Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J olmak üzere;

$$\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]Y^C = 0 \qquad \forall X, Y \in \Im^1_0(M) \tag{8.34}$$

olup, TM'de bir Kaehler manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J, X ve Y kompleks vektör alanları olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla J^C, X^C ve Y^C olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]Y^C &= \nabla^C_{X^C}(J^C Y^C) - J^C(\nabla^C_{X^C} Y^C) \\
&= \nabla^C_{X^C}(JY)^C - J^C(\nabla_X Y)^C \\
&= (\nabla_X JY)^C - (J\nabla_X Y)^C \\
&= (\nabla_X JY - J\nabla_X Y)^C \\
&= ([\nabla_X, J]Y)^C \qquad (M \text{ Kaehler manifold}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan TM'de bir Kaehler manifoldudur. ☑

Teorem 8.14:

Herhangi bir M Yakın(Nearly) Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J olmak üzere;

$$\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]X^C = 0 \qquad \forall X,Y \in \Im^1_0(M) \tag{8.35}$$

olup, TM'de bir Yakın Kaehler manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Yakın Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J ve X bir kompleks vektör alanı olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla J^C ve X^C olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]X^C &= \nabla^C_{X^C}(J^C X^C) - J^C(\nabla^C_{X^C} X^C) \\
&= \nabla^C_{X^C}(JX)^C - J^C(\nabla_X X)^C \\
&= (\nabla_X JX)^C - (J\nabla_X X)^C \\
&= (\nabla_X JX - J\nabla_X X)^C \\
&= ([\nabla_X, J]X)^C \qquad (M \text{ yakın Kaehler manifold}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan TM'de bir yakın Kaehler manifolddur.☑

Teorem 8.15:

Herhangi bir M Yaklaşık(Almost) Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık Kaehler formu Φ olmak üzere;

$$d\Phi^C = 0 \tag{8.36}$$

olup, TM'de bir Yaklaşık Kaehler manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Yaklaşık Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık Kaehler formu Φ, yaklaşık kompleks yapı J ve X bir kompleks vektör alanı olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla Φ^C, J^C ve X^C olmak üzere;

$$\begin{aligned} d\Phi^C(X^C, X^C) &= d(\Phi(X,X))^C \\ &= d(g(X,JX))^C \qquad \text{((2.17)'den)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan TM'de bir yaklaşık Kaehler manifoldudur.☑

Teorem 8.16:

Herhangi bir M Yarı(Quasi) Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J olmak üzere;

$$\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] = -J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right] \qquad \forall X \in \Im^1_0(M) \qquad (8.37)$$

olup, TM'de bir Yarı Kaehler manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Yarı Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J ve X bir kompleks vektör alanı olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla J^C ve X^C olmak üzere, her Y kompleks vektör alanı için;

$$\begin{aligned}
\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] Y^C &= \nabla^C_{J^C X^C}(J^C Y^C) - J^C(\nabla^C_{J^C X^C} Y^C) \\
&= \nabla^C_{J^C X^C}(JY)^C - J^C(\nabla_{JX} Y)^C \\
&= (\nabla_{JX} JY)^C - (J\nabla_{JX} Y)^C \\
&= (\nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y)^C \\
&= ([\nabla_{JX}, J]Y)^C \qquad (M \text{ yarı Kaehler manifold}) \\
&= (-J[\nabla_X, J]Y)^C \\
&= (-J[\nabla_X, J])^C Y^C \\
&= -J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right] Y^C \qquad (8.38)
\end{aligned}$$

olur. (8.38) eşitliği her Y kompleks vektör alanı için gerçeklendiğinden;

$$\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] = -J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]$$

olup, TM'de bir yarı Kaehler manifolddur.☑

Teorem 8.17:

Herhangi bir M Hermit manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J olmak üzere;

$$\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] = J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right] \qquad \forall X \in \Im^1_0(M) \qquad (8.39)$$

olup, TM'de bir Hermit manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Hermit manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J ve X bir kompleks vektör alanı olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla J^C ve X^C olmak üzere, her Y kompleks vektör alanı için;

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] Y^C &= \nabla^C_{J^C X^C}(J^C Y^C) - J^C(\nabla^C_{J^C X^C} Y^C) \\
&= \nabla^C_{J^C X^C}(JY)^C - J^C(\nabla_{JX} Y)^C \\
&= (\nabla_{JX} JY)^C - (J\nabla_{JX} Y)^C \\
&= (\nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y)^C \\
&= ([\nabla_{JX}, J]Y)^C \qquad (M \text{ Hermit manifold}) \\
&= (J[\nabla_X, J]Y)^C \\
&= (J[\nabla_X, J])^C Y^C \\
&= J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right] Y^C
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

olur. (8.40) eşitliği her Y kompleks vektör alanı için gerçeklendiğinden;

$$
\left[\nabla^C_{J^C X^C}, J^C\right] = J^C\left[\nabla^C_{X^C}, J^C\right]
$$

olup, TM'de bir Hermit manifolddur.☑

Teorem 8.18

Herhangi bir M Semi Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J ve $\{E_i, JE_i\}$ lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere;

$$
\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^C_{E_i^C}(J^C)E_i^C + \nabla^C_{J^C E_i^C}(J^C)J^C E_i^C\right\} = 0 \tag{8.41}
$$

olup, TM'de bir Semi Kaehler manifoldudur.

İspat:

Herhangi bir M Semi Kaehler manifoldu üzerindeki yaklaşık kompleks yapı J ve $\{E_i, JE_i\}$ lokal ortonormal çatı alanı olsun. Bu tensör alanlarının TM tanjant manifolduna tam yükseltilmişleri sırasıyla J^C ve $E_i^C, (JE_i)^C$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{C}_{E_i^C}(J^C)E_i^C+\nabla^{C}_{J^C E_i^C}(J^C)J^C E_i^C\right\} &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{C}_{E_i^C}(J^C)E_i^C+\nabla^{C}_{J^C E_i^C}(J^C)^2 E_i^C\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla^{C}_{E_i^C}(JE_i)^C-\nabla^{C}_{J^C E_i^C}E_i^C\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}JE_i)^C-(\nabla_{JE_i}E_i)^C\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}JE_i-\nabla_{JE_i}E_i)^C\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n}[E_i, JE_i]\right\}^C \quad ; \qquad ([E_i, JE_i]=0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup, *TM*'de bir semi Kaehler manifolddur. ☑

KAYNAKLAR

1. **Naveira A.M., Vanhecke L.**, *Two Problems For Almost Hermitian Manifolds*, Demonstratio Mathematica, Vol.X,No:1,(1977) S189-203.

2. **Dost S.**, *Lineer Cebir*, Güven yayınevi, Ankara,1978.

3. **Gray A.**, *Curvature Identites For Hermitian And Almost Hermitian Manifolds*, Tô hoku Math. Journ., 28(1976) S 601-612.

4. **Hacısalihoğlu H.H.**, *Lineer Cebir*, Gazi Ünv. Fen Edebiyat Fak.Yayın No:7, III.Baskı, Ankara, 1985.

5. **Hacısalihoğlu H.H.**, *Diferensiyel Geometri*, Gazi Ünv., Basın Yayın Yüksekokulu, Ankara, 1983.

6. **Hacısalihoğlu H.H.**, *Yüksek Diferensiyel Geometri*, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 1980.

7. **Okubo T.**, *Differential Geometry*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, V:112, New York,1987.

8. **San N.**, *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Ege Ünv. Fen Fak. Baskı İşleri, İzmir,1979.

9. **Wells R.O.**, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag, New York, GTM 65, 1980.

10. **Brickell, F., Clark, R.S.**, *Differentiable Manifolds*, VRN Company, London, 1970.

11. **Bowman, R.H.**, *On Differentiable Extensions*, Tensor N.S. , Vol. 21, 139-150(1970)

12. **Civelek, Ş.**, *İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Lift'ler* , Yükseklisans tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., Ankara, 1988.

13. **Civelek, Ş.**, *Genişletilmiş Vektör Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift'ler* , Doktora tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., Ankara, 1993.

14. **Dodson, C.T.J., Poston, T.**, *Tensor Geometry* , Pitman XIII., 598pp, London, 1979.

15. **Esin, E., Civelek, Ş.**, *İkinci mertebeden Tanjant Demet üzerinde Lift'ler*, Jou. Math. Stat. Fac. Art. Sc. Gazi Univ., Vol. 2, 117-135(1989)

16. **Esin,E.,Civelek, Ş.**, *İkinci mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar üzerinde Lift'ler*, Jou. Math. Stat. Fac. Art. Sc. Gazi Univ., Vol. 2, 137-152(1989)

17. **Etoya, J.J.**, *Lifts of Derivations to the Tangent Bundle*, Proceeding of the IV International Colloquium of Differential Geometry, Santiago de Compostela, 117-130(1979)

18. **Etoya, J.J.**, *On a Complete Lifting of Derivations*, Tensor, Vol. 38, 169-178(1982)

19. **Etoya, J.J.**, *Derivations in Tangent Bundle*, Differential Geometry Proceeding of The International Symposium, Held at Peniscola, Spain, 43-52 (October 3-10, 1982)

20. **Sato, I.**, *Complete Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle*, Kodai Math. Sem. Rep. , Vol. 20, 458-468(1968)

21. **Sounders, D.J.**, *The Geometry of Jet Bundles* , Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

22. **Tani, M.**, *Prolongations of Hypersurfaces to Tangent Bundles*, Kodai Math. Sem. Rep. , Vol. 21, 85-96(1969)

23. **Tani, M.**, *Tensor Fields and Connections on Cross Sections in tangent Bundles of Order 2*, Kodai Math. Sem. Rep., Vol. 21, 310-325 (1969)

24. **Yano, K.**, *The Tensor Fields and Connections on Cross Sections in The Cotangent Bundles*, Thouku Math. Jour., Vol. 19, 1, 32-48(1967)

25. **Yano, K., Ishihara, S.,** *Differential Geometry of Tangent Bundles of Order 2*, Kodai Math. Sem. Rep. , Vol. 20, 318-354(1968)

26. **Yano, K., Ishihara, S.**, *Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles*, Jour. Math. and Mec., Vol. 16, 1015-1030(1967)

27. **Yano, K., Davies, E.T.**, Metrics and Connections in Tangent Bundles, Kodai Math. Sem. Rep., Vol. 23, 493-504(1971)

28. **Yano, K., Ishihara, S.**, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973

29. **Yano, K., Patterson, E. M.**, *Vertical Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle*, Jour. Math. Soc. Japan., Vol. 19, 91-113(1967)

30. **Yano, K., Patterson, E. M.**, *Horizontal Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle*, Jour. Math. Soc. Japan, Vol. 19, 185-198 (1967)