KÜME DİZİLERİNDE
ASİMPTOTİK DENKLİK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan SUNAR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜME DİZİLERİNDE ASİMPTOTİK DENKLİK ÜZERİNE

Ramazan SUNAR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Ramazan SUNAR tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinde Asimptotik Denklik Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/11/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Başkan : Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniv. Fen Edeb. Fak. — İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak. — İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak. — İmza

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/11/2015

Ramazan SUNAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DİZİLERİNDE
ASİMPTOTİK DENKLİK ÜZERİNE

Ramazan SUNAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konunun tarihi gelişimi ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise, küme dizileri için Wijsman anlamında asimptotik denklik kavramları tanıtılıp bunlar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Dördüncü bölümde; I ideali kullanılarak, küme dizileri için Wijsman asimptotik I-denklik, Wijsman asimptotik I-Cesaro denklik, Wijsman asimptotik I-istatistiksel denklik ve Wijsman asimptotik I_λ-istatistiksel denklik kavramları, bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

2015, vi + 32 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, I-yakınsaklık, λ-yakınsaklık, Cesaro toplanabilme, lacunary dizi, asimptotik denklik, Wijsman yakınsaklık, küme dizisi.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

ON ASYMPTOTICALLY EQUIVALENCE
IN SEQUENCES OF SETS

Ramazan SUNAR
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics

Supervisor: Assitant Prof. Dr. Uğur ULUSU

This thesis consists of four main parts.

The first part is devoted to the introduction part that contains of the historical development of the subject and a general literature about it. In the second part, the basic concepts necessary for our work are given. In the third part, the concept of asymptotically equivalence of sequences of sets in Wijsman sense is introduced and the relationships between them are given. In the fourth part, by using the I ideal for sequences of sets, Wijsman asymptotic I-equivalence, Wijsman asymptotically I-Cesaro equivalence, Wijsman asymptotically I-statistical equivalence and Wijsman asymptotically I_λ-statistical equivalence concepts, their distinctive properties and relationships between these concepts are given.

2015, vi + 32 pages

Key Words: Statistical convergence, I-convergence, λ-convergence, Cesaro summability, lacunary sequence, asymptotically equivalence, Wijsman convergence, sequences of sets.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya ve yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Ramazan SUNAR

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\theta = \{k_r\}$	Lacunary dizi
S	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
Λ	$\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi
$x_k \to L(S_\lambda)$	λ-istatistiksel yakınsak dizi
$x \sim y$	Asimptotik denk diziler
$x \overset{S_L}{\sim} y$	Asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{N_\theta^L}{\sim} y$	Asimptotik lacunary denk diziler
$x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$	Kuvvetli Asimptotik lacunary denk diziler
$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
A_k	Küme dizisi
$A_k \sim B_k$	Asimptotik denk küme dizileri
$A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik istatistiksel denk diziler
$A_k \overset{WN_\theta^L}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik lacunary denk diziler
$A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$	Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denk diziler
$A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$A_k \overset{I_W^L}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik I-denk diziler
$A_k \overset{C_1^L(I_w)}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik I-Cesaro denk diziler
$A_k \overset{C_1^L[I_w]}{\sim} B_k$	Wijsman kuvvetli asimptotik I-Cesaro denk diziler

$A_k \overset{S^L(I_W)}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik I-istatistiksel denk diziler
$A_k \overset{V_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik I_λ-denk diziler
$A_k \overset{V_\lambda^L[I_W]}{\sim} B_k$	Wijsman kuvvetli asimptotik I_λ-denk diziler
$A_k \overset{S_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$	Wijsman asimptotik I_λ-istatistiksel denk diziler

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez Steinhaus tarafından 1949 da katıldığı bir konferansta verilmiştir. Bu konudaki ilk makale ise Fast (1951) tarafından yayınlanmıştır. Ayrıca, Schoenberg (1959) ve Buck (1953) tarafından da birbirinden bağımsız olarak çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın reel ve kompleks diziler ile ilişkisi Buck (1953) tarafından ve toplanabilme teorisi ile ilişkisi Schoenberg (1959) tarafından verilmiştir.

İlerleyen zamanlarda Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla arasında önemli ilişkiler bulunan ve yine yakınsaklık alanında önemli bir yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır. Fridy ve Orhan (1993) çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Mursaleen (2000) $\lambda = (\lambda_n)$ dizi kavramını kullanarak λ-istatistiksel yakınsaklık kavramını vermiş ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli Cesaro toplanabilirlik ve V_λ-toplanabilirlik kavramları ile ilişkisini göstermiştir.

I-yakınsaklık fikri, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin I idealinin yapısı üzerine inşa edilen istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olarak Kostyrko vd. (2000) tarafından yapılan bir çalışmada ortaya çıkmıştır. Ayrıca, Kostyrko vd. bu çalışmalarında I-yakınsaklığın bazı özelliklerini incelemiş ve doğal kapsama teoremleri vermişlerdir. Son zamanlarda, Das vd. (2011) I idealini kullanarak, I-istatistiksel yakınsaklık ve I-lacunary istatistiksel yakınsaklık diye adlandırılan yeni kavramları tanıtmışlardır.

Marouf (1993) asimptotik denklik ve asimptotik regüler matrisler için tanımlar vermiştir. Patterson (2003) bu kavramları, bu tanımların asimptotik istatistiksel denk benzerini ve negatif olmayan toplanabilir matrisler için doğal regülerlik şartlarını vererek genişletmiştir.

Patterson ve Savaş (2006) da lacunary dizi kavramını kullanarak Patterson (2003) tarafından verilen tanımları daha da genişletmişlerdir. Ayrıca, bu yeni tanımlara ek olarak doğal kapsama teoremleri vermişlerdir. Son zamanlarda, Savaş (2013) asimptotik denklik ve I-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarının doğal bir kombinasyonu olan asimptotik I-lacunary istatistiksel denklik kavramını tanıtmıştır.

Sayı dizilerinin yakınsaklığı kavramı pek çok yazar tarafından küme dizilerinin yakınsaklığı kavramına genişletilmiştir. Bu genişlemelerden biri de, bu çalışmada dikkate alınan, Wijsman yakınsaklık kavramıdır. Nuray ve Rhoades (2012) küme dizilerinin Wijsman yakınsaklığı kavramını istatistiksel yakınsaklığa genişletmişler ve bazı temel teoremler vermişlerdir. Ulusu ve Nuray (2012) lacunary dizi kavramını kullanarak Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlar ve bu kavramın Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilişkisini incelemişlerdir. Kişi ve Nuray (2013) küme dizileri için Wijsman I-yakınsaklık olarak adlandırılan yeni bir yakınsaklık çeşidini vermişlerdir. Son zamanlarda, Ulusu ve Dündar (2014) küme dizilerinin Wijsman I-istatistiksel yakınsaklığı, Wijsman kuvvetli I-lacunary yakınsaklığı ve Wijsman I-lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramlarını vermiş ve bunlar arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, küme dizileri için Wijsman anlamında asimptotik denklik kavramlarını vermek ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri incelemektir. Böylece, reel sayı dizileri için geçerli olan sonuçların genelleştirmeleri elde edilmiş olacaktır.

Bu bağlamda, tez çalışmasında öncelikle; çalışmamızın daha anlaşılır olması için gerek duyulan bazı temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra, üçüncü bölümde; küme dizileri için Wijsman anlamında asimptotik denklik, Wijsman asimptotik istatistiksel denklik, Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramları, bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Dördüncü bölümde; küme dizileri için, I ideali kullanılarak, Wijsman asimptotik I-denklik, Wijsman asimptotik I-Cesaro denklik, Wijsman asimptotik I-istatistiksel denklik ve Wijsman asimptotik I_λ-istatistiksel denklik kavramları, bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızın daha anlaşılır olması için gerek duyulan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1,2, \dots , n, \dots\}$ (doğal sayılar) kümesi olan her fonksiyona *dizi* denir.

Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Genel terimi x_n olan bir dizi $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots , x_n, \dots\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2 (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir ve

$$lim\, x_n = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1999).

Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye *yakınsak dizi* denir.

Tanım 2.3 Eğer her $n > 0$ sayısı için $|x_n| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabit sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Balcı 1999).

Tanım 2.4 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *Cesaro toplanabilirdir* denir (Başar 2011).

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *Kuvvetli Cesaro toplanabilirdir* denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.6 Pozitif tamsayılardan oluşan bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır (Niven *et al.* 1991).

Burada $|\{k \le n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n sayısından büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Tanım 2.7 Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : \ |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - lim x_k = L$ şeklinde gösterilir (Fridy 1985).

Tanım 2.8 $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ için $h_r = \ k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi ise, o zaman $\theta = \{k_r\}$ dizisine bir *lacunary dizi* denir (Fridy ve Orhan 1993).

Çalışmamız boyunca $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıkları $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile belirteceğiz. Ayrıca, $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı ise q_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.9 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary toplanabilirdir* denir (Mursaleen and Alotaibi 2011).

Tanım 2.10 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.11 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S_\theta - lim x_k = L$ şeklinde gösterilir (Fridy ve Orhan 1993).

Tanım 2.12 $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olacak şekilde sonsuza yakınsayan pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere,

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} x_k$$

ifadesine *genelleştirilmiş de la Vallee – Poussin ortalaması* denir.

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *V_λ-toplanabilirdir* denir (Mursaleen 2000).

Yukarıdaki tanımda $\lambda_n = n$ alınırsa, Cesaro toplanabilirlik elde edilir.

Tanım 2.13 $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olacak şekilde sonsuza yakınsayan pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *kuvvetli V_λ-toplanabilirdir* denir (Mursaleen 2000).

Yukarıdaki tanımda $\lambda_n = n$ alınırsa, kuvvetli Cesaro toplanabilirlik elde edilir.

$\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ olacak şekilde sonsuza yakınsayan pozitif sayıların azalmayan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilir.

Tanım 2.14 $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olacak şekilde sonsuza yakınsayan pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \to L(S_\lambda)$ ile gösterilir (Mursaleen 2000).

Tanım 2.15 $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümeler ailesinin bir *ideal* olması için gerek ve yeter şart,

i. $\emptyset \in I$

ii. Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$

iii. Her $A \in I$ ve her $B \subseteq$ A için $B \in I$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin I$ ise I ya bir *non-trivial ideal* denir. Ayrıca I bir non-trivial ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in I$ oluyorsa, I idealine *uygun ideal* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.16 $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümeler ailesinin bir süzgeç olması için gerek ve yeter koşul,

i. $\emptyset \notin F$

ii. Her $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$

iii. Her $A \in F$ ve her $B \supseteq$ A için $B \in F$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Önerme 2.1 I nın $\mathbb{N}$ de bir non-trivial ideal olması için gerek ve yeter koşul

$$F = F(I) = \{M = \mathbb{N} \setminus A : A \in I\}$$

kümesinin X de bir süzgeç olmasıdır ki bu $F(I)$ ya I ile birleştirilmiş süzgeç denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.17 $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir non-trivial ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi I ya ait oluyorsa, (x_k) dizisi L sayısına *I-yakınsaktır* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

Tanım 2.18 $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir non-trivial ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\}$$

kümesi I ya ait oluyorsa, (x_k) dizisine L sayısına *I-istatistiksel yakınsaktır* denir (Das *et al.* 2011).

Tanım 2.19 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine *asimptotik denktir* denir ve $x \sim y$ şeklinde gösterilir (Marouf 1993).

Tanım 2.20 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *asimptotik istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S_L}{\sim} y$ ile gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *asimptotik istatistiksel denktir* denir (Patterson 2003).

Tanım 2.21 θ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{x_k}{y_k} = L$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{N_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *asimptotik lacunary denktir* denir (Patterson ve Savaş 2006).

Tanım 2.22 θ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir ve $x \overset{[N]_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir (Patterson ve Savaş 2006).

Tanım 2.23 θ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı *asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise, basitçe *asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir (Patterson ve Savaş 2006).

Tanım 2.24 X boş olmayan bir küme olsun. $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$M1.\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$M2.\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$

$M3.\ \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

şartları sağlanıyorsa, ρ ya X de bir *metrik* ve ρ ile birlikte X e *metrik uzay* denir. Bu durum genellikle (X,ρ) ile gösterilir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.25 $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere,

$$f: \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon her $k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturan $A_1, A_2, \ldots$ kümelerinin oluşturduğu $A_k = \{A_1, A_2, \ldots\}$ dizisine *küme dizisi* denir.

Tanım 2.26 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve X in boş olmayan herhangi bir A altkümesi için; x in A ya olan uzaklığı

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \rho(x,a)$$

olarak tanımlanır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.27 $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $D(a,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, a noktasına A kümesinin bir *iç noktasıdır* denir. A kümesinin iç noktalarının kümesine A nın *içi* denir ve A^o ile gösterilir. Eğer $A^o = A$ ise A ya $\mathbb{R}^n$ de bir *açık küme* denir. Tümleyeni açık olan kümeye ise *kapalı küme* denir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.28 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = d(x,A)$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir. Bu durumda, $W - \lim A_k = A$ olarak yazılır (Baronti and Papini 1986).

Tanım 2.29 (X,ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için $\sup_k d(x, A_k) < \infty$ oluyorsa A_k dizisi *sınırlıdır* denir ve $A_k \in L_\infty$ şeklinde yazılır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.30 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Boş olmayan kapalı herhangi $A, A_k \subseteq X$ altkümeleri için, eğer $d(x, A_k)$ dizisi $d(x, A)$ ya istatistiksel yakınsaksa; yani her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $st - lim_w A_k = A$ yazılır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.31 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman lacunary toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A(WN_\theta)$ şeklinde gösterilir (Ulusu ve Nuray 2012).

Tanım 2.32 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizi ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A([WN_\theta])$ şeklinde gösterilir (Ulusu ve Nuray 2012).

Tanım 2.33 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{r} \frac{1}{h_r} |k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \ge \varepsilon| = 0$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S_\theta - \lim_W A_k = A$ veya $A_k \to A(WS_\theta)$ şeklinde gösterilir (Ulusu ve Nuray 2012).

Tanım 2.34 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman V_λ-toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A((V_\lambda))$ şeklinde gösterilir (Kişi ve Nuray 2013a).

Yukarıdaki tanımda $\lambda_n = n$ olarak alınırsa, Wijsman Cesaro toplanabilirlik kavramı elde edilir.

Tanım 2.35 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli V_λ-toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A([V_\lambda])$ şeklinde gösterilir (Kişi ve Nuray 2013a).

Yukarıdaki tanımda $\lambda_n = n$ olarak alınırsa, Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilirlik kavramı elde edilir.

Tanım 2.36 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, A_k dizisi A kümesine *Wijsman λ-istatistiksel yakınsaktır* veya *WS_λ-yakınsaktır* denir ve $A_k \to A(WS_\lambda)$ şeklinde gösterilir (Kişi ve Nuray 2013a).

Yukarıdaki tanımda $\lambda_n = n$ olarak alınırsa, Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı elde edilir.

Tanım 2.37 (X,ρ) bir metrik uzay, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$A(\mathrm{x}, \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}$$

kümesi I ya ait ise, o zaman A_k dizisi A kümesine *Wijsman I-yakınsaktır* denir ve $A_k \to A(I_W)$ şeklinde gösterilir (Kişi ve Nuray 2013b).

Tanım 2.38 (X,ρ) bir metrik uzay, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi I ya ait ise, o zaman A_k dizisi A kümesine *Wijsman I-Cesaro toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A(C_1(I_W))$ şeklinde gösterilir (Ulusu ve Kişi 2015).

Tanım 2.39 (X,ρ) bir metrik uzay, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi I ya ait ise, o zaman A_k dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli I-Cesaro toplanabilirdir* denir ve $A_k \to A(C_1[I_W])$ şeklinde gösterilir (Ulusu ve Kişi 2015).

Tanım 2.40 (X,ρ) bir metrik uzay, $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, her $\delta > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\}$$

kümesi I ya ait ise, o zaman A_k dizisine A kümesine *Wijsman I-istatistiksel yakınsaktır* denir ve $A_k \to A(S(I_W))$ şeklinde gösterilir (Kişi vd. submitted for publication).

3. KÜME DİZİLERİNİN ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENKLİĞİ

Bu bölümde, Ulusu ve Nuray (2013) tarafından incelenen küme dizilerinin asimptotik lacunary istatistiksel denkliği kavramı ile ilgili temel tanım, örnek ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_k \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} = 1$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine *Wijsman anlamında asimptotik denktir* denir ve $A_k \sim B_k$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1 (x, y)-düzleminde aşağıdaki çemberler dizilerini göz önüne alalım:

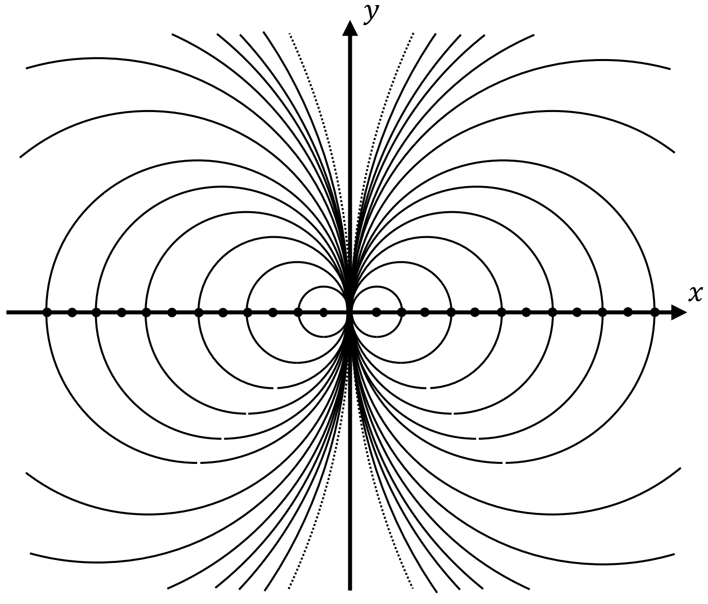
$$A_k = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 + 2kx = 0\}$$

$$B_k = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 - 2kx = 0\}$$

Bu diziler için,

$$\lim_k \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} = 1$$

olduğundan A_k ve B_k dizileri Wijsman anlamında asimptotik denktir. Yani $A_k \sim B_k$ dır. Örneğimizi bir de şekil üzerinde gösterelim;



Tanım 3.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa, A_k ve B_k küme dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik istatistiksel denktir* denir ve $A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *Wijsman asimptotik istatistiksel denktir* denir.

Wijsman asimptotik istatistiksel denk küme dizilerinin kümesini $\{WS_L\}$ ile göstereceğiz.

Örnek 3.2: (x,y)-düzleminde aşağıdaki çemberler dizilerini göz önüne alalım:

$$A_k = \begin{cases} \{(x,y):\ x^2+y^2+2ky=0\} & , \quad k \text{ bir tamkare sayı ise}, \\ \{(1,1)\} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \{(x,y):\ x^2+y^2-2ky=0\} & , \quad k \text{ bir tamkare sayı ise}, \\ \{(1,1)\} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu diziler için,

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olduğundan A_k ve B_k dizileri Wijsman asimptotik istatistiksel denktir. Yani $A_k \overset{WS_1}{\sim} B_k$ dir.

Tanım 3.3 (X,ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizi olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} = L$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik lacunary denktir* denir ve $A_k \overset{WN_\theta^L}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *Wijsman asimptotik lacunary denktir* denir.

Tanım 3.4 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizi olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| = 0$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir ve $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denktir* denir.

Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denk küme dizilerinin kümesini $\{[WN]_\theta^L\}$ ile göstereceğiz.

Örnek 3.3 (x, y)-düzleminde aşağıdaki elipsler dizilerini göz önüne alalım:

$$A_k = \begin{cases} \left\{ (x, y) \in R^2 : \dfrac{\left(x - \sqrt{k}\right)^2}{k} + \dfrac{y^2}{2k} = 1 \right\} & , \quad k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \ ise, \\ \{(1,1)\} & , \quad diğer\ durumlarda, \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \left\{ (x, y) \in R^2 : \dfrac{\left(x + \sqrt{k}\right)^2}{k} + \dfrac{y^2}{2k} = 1 \right\} & , \quad k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \ ise, \\ \{(1,1)\} & , \quad diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

Bu diziler için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_K)}{d(x, B_K)} - 1 \right| = 0$$

olduğundan A_k ve B_k dizileri Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denktir. Yani, $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$ dir.

Tanım 3.5 (X,ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizi olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa, A_k ve B_k küme dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir ve $A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denktir* denir.

Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denk küme dizilerinin kümesini $\{WS_\theta^L\}$ ile göstereceğiz.

Örnek 3.4 (x,y)-düzleminde aşağıdaki iç içe çemberler dizilerini göz önüne alalım:

$$A_k = \begin{cases} \left\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{k}\right\} & , \quad k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \; ve \\ & \quad k \; bir \; tamkare \; sayı \; ise, \\ \{(0,0)\} & , \quad diğer \; durumlarda, \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \left\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y+1)^2 = \dfrac{1}{k}\right\} & , \quad k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \; ve \\ & \quad k \; bir \; tamkare \; sayı \; ise, \\ \{(0,0)\} & , \quad diğer \; durumlarda. \end{cases}$$

Bu diziler için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olduğundan A_k ve B_k dizileri Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denk dizilerdir. Yani, $A_k \overset{WS_\theta^1}{\sim} B_k$ dir.

Teorem 3.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizi olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı herhangi altkümeler olsun. Bu durumda,

i. (a) $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ dir.

(b) $\{[WN]_\theta^L\}$, $\{WS_\theta^L\}$ nin öz alt kümesidir.

ii. $A_k \in L_\infty$ olsun. O halde $A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$ dir.

iii. $\{WS_\theta^L\} \cap L_\infty = \{[WN]_\theta^L\} \cap L_\infty$ dir.

(Burada L_∞ sınırlı küme dizilerinin kümesini göstermektedir.)

İspat. *i.(a)* $\varepsilon > 0$ ve $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$ olsun. Her $x \in X$ için,

$$\sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right|$$

$$\geq \varepsilon \cdot \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada, kabulümüz de dikkate alınarak, her iki taraf $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \to \infty$ için limite geçilirse, her $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| = 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise $A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ olması demektir.

i.(b) $\{[WN]_\theta^L\} \subset \{WS_\theta^L\}$ olduğunu göstermek için; Wijsman asimptotik lacunary istatistiksel denk olup da Wijsman kuvvetli asimptotik lacunary denk olmayan dizilerin varlığını göstermeliyiz.

A_k ve B_k dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$A_k = \begin{cases} \{k\} \quad , \quad k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right], \; r = 1,2,\ldots \quad ise, \\ \{0\} \quad , \quad diğer\ durumda, \end{cases}$$

$B_k = \{0\}$, her k için.

A_k dizisi sınırlı değildir. Ayrıca, $\forall \varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = \frac{[\sqrt{h_r}\,]}{h_r} \to 0 \quad (r \to \infty\ iken)$$

olduğundan $A_k \overset{WS_\theta^1}{\sim} B_k$ dir. Diğer taraftan A_k dizisi sınırlı olmadığından,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \nrightarrow 0 \quad (\, r \to \infty\ iken)$$

dır. Yani, $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\nsim} B_k$ dir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

ii. Kabul edelim ki $A_k \in L_\infty$ ve $A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ olsun. Bu durumda, her $x \in X$ ve her k için,

$$\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k \in I_r \\ \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \\ &\quad + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k \in I_r \\ \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| < \varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada, kabulümüz de dikkate alınarak, $r \to \infty$ için limite geçilirse, her $x \in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \leq \lim_r \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise $A_k \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} B_k$ olması demektir.

iii. Bu durum ***(i)*** ve ***(ii)*** den doğrudan elde edilir.

Teorem 3.2 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\theta = \{k_r\}$, $\lim inf_r\, q_r > 1$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, o zaman

$$A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$$

dır.

İspat. $\lim inf_r\, q_r > 1$ olsun. O zaman yeterince büyük r sayısı için $q_r \geq 1 + \lambda$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı vardır ki bu durumda,

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$ ve yeterince büyük r sayısı için,

$$\frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\geq \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \left(\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \right)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada, kabulümüz de dikkate alınarak, $r \to \infty$ için limite geçilirse, her $x \in X$ için,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu ise $A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ olması demektir.

Teorem 3.3 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\theta = \{k_r\}$, $\lim sup_r\, q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, o zaman

$$A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k$$

dır.

İspat. $\lim sup_r\, q_r < \infty$ olsun. O zaman her $r \geq 1$ için $q_r < M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$A_k \overset{WS_\theta^L}{\sim} B_k$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, her $j \geq R$ için,

$$A_j = \frac{1}{h_j}\left|\left\{k \in I_j : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $R > 0$ sayısı vardır.

Ayrıca, her $j = 1,2,...$ için $A_j < H$ olacak şekilde $H > 0$ sayısı bulabiliriz.

Şimdi t sayısı, $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < t \leq k_r$ şartını sağlayan herhangi bir tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{t}\left|\left\{k \leq t : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \leq k_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\}$$

$$+ \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\}$$

$$= \frac{k_1}{k_{r-1}k_1}\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$+ \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)}\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$+\cdots+\ \frac{k_R-k_{R-1}}{k_{r-1}(k_R-k_{R-1})}\left|\left\{k\in I_R:\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$+\ \cdots+\ \frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}(k_r-k_{r-1})}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\ \frac{k_1}{k_{r-1}}A_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}A_2+\cdots+\frac{(k_R-k_{R-1})}{k_{r-1}}A_R$$

$$+\ \frac{k_{R+1}-k_R}{k_{r-1}}A_{R+1}+\cdots+\ \frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r$$

$$\leq\ \left\{\sup_{j\geq 1}A_j\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}}\ +\ \left\{\sup_{j\geq R}A_j\right\}\frac{k_r-k_R}{k_{r-1}}$$

$$\leq H\frac{k_R}{k_{r-1}}+\varepsilon M.$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 birlikte düşünülmesiyle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. $A_k,B_k\subseteq X$ boş olmayan, kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\theta=\{k_r\}$, $1<inf_r\,q_r\leq\lim sup_r\,q_r<\infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizi ise, o zaman

$$A_k\overset{WS_\theta^L}{\sim}B_k\Leftrightarrow A_k\overset{WS_L}{\sim}B_k$$

dır.

4. KÜME DİZİLERİNİN ASİMPTOTİK *I*-DENKLİĞİ

Bu bölümde, Kişi ve Nuray (2013) tarafından incelenen küme dizilerinin $S_\lambda^L(I)$-asimptotik istatistiksel denkliği kavramı ile ilgili temel tanım, örnek ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 4.1 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik I-denktir* denir ve $A_k \overset{I_W^L}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 1$ ise basitçe *Wijsman asimptotik I-denktir* denir.

Örnek 4.1 $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere aşağıdaki $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerini göz önüne alalım;

$$A_k = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq n,\ \ 0 \leq y \leq \frac{1}{n} \cdot x\right\} & , \quad k \neq n^2 \ \ ise, \\ & , \\ \{0,0\} & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq n,\ \ 0 \leq y \leq -\frac{1}{n} \cdot x\right\} & , \quad k \neq n^2 \ \ ise, \\ & , \\ \{0,0\} & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Burada I_f doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerin ideali olmak üzere, eğer $I = I_f$ alınırsa, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

olacağından, A_k ve B_k dizileri Wijsman asimptotik I-denktir. Yani, $A_k \overset{I_W^1}{\sim} B_k$ dır.

Tanım 4.2 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik* I*-Cesaro denktir* denir ve $A_k \overset{C_1^L(I_W)}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.3 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman kuvvetli asimptotik* I*-Cesaro denktir* denir ve $A_k \overset{C_1^L[I_W]}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, her $\delta > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|k \leq n : \left\{\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik* I*-istatistiksel denktir denir* ve $A_k \overset{S^L(I_W)}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.5 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\sum_{k\in I_n} \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik I_λ-denktir* denir ve $A_k \overset{V_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.6 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left| \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman kuvvetli asimptotik I_λ-denktir* denir ve $A_k \overset{V_\lambda^L[I_W]}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.7 (X,ρ) bir metrik uzay ve I bir uygun ideal olsun. $A_k, B_k \subseteq X$ boş olmayan, kapalı ve her $x \in X$ için $d(x,A_k) > 0$ ve $d(x,B_k) > 0$ şartını sağlayan herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, her $\delta > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n: \left| \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

oluyorsa, A_k ve B_k dizilerine L katlı *Wijsman asimptotik I_λ-istatistiksel denktir* denir ve $A_k \overset{S_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.1 $\lambda \in \Lambda$ ve $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $A_k \overset{V_\lambda^L[I_W]}{\sim} B_k$ ise, o zaman $A_k \overset{S_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$ dir.

İspat. $A_k \overset{V_\lambda^L[I_W]}{\sim} B_k$ olsun. Her ε > 0 ve her $x \in X$ için,

$$\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right| = \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right| + \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|$$

$$\geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|$$

$$\geq \varepsilon.\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada, her iki taraf $\frac{1}{\varepsilon\cdot\lambda_n}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon.\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece her $\delta>0$ için,

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\cdot\delta\right\}$$

olur. Kabulümüzden dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafı I ya aittir. O halde,

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\delta\right\}\in I$$

elde ederiz. Bu ise, $A_k \overset{S_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$ demektir.

Teorem 4.2 $\lambda\in\Lambda$ ve $I\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer A_k, B_k dizileri sınırlı ve $A_k \overset{S_\lambda^L(I_W)}{\sim} B_k$ ise, o zaman $A_k \overset{V_\lambda^L[I_W]}{\sim} B_k$ dır.

İspat. A_k ve B_k dizileri sınırlı ve $A_k \overset{S_\lambda^L(I_w)}{\sim} B_k$ olsun. A_k ve B_k dizileri sınırlı ise, her k için

$$\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right|$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |d(x,A_k)-d(x,A)|<\varepsilon}}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right|$$

$$\leq M\cdot\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$$

olur. Kabulümüzden dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafı I ya aittir. O halde,

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \in I$$

elde ederiz. Bu ise, $A_k \overset{V_\lambda^L[I_w]}{\sim} B_k$ demektir.

Aşağıdaki örnek; eğer A_k veya B_k dizileri sınırlı değilse Teorem 4.2 nin doğru olmayabileceğini gösterir.

Örnek 4.2 $L=1$ olmak üzere aşağıdaki A_k ve B_k dizilerini göz önüne alalım;

$$A_k = \begin{cases} \{k\} & , \quad k = k_{r-1}+1\,, k_{r-1}+2, \dots, k_{r-1}+\left[\sqrt{\lambda_n}\right] \ \ ise, \\ \{1\} & , \quad diğer\ durumlarda, \end{cases}$$

$$B_k = \{1\} \quad her\ k\ için.$$

Burada A_k dizisi sınırlı değildir. O halde, $A_k \overset{S_\lambda^L(I_w)}{\sim} B_k$ olur fakat $A_k \overset{V_\lambda^L[I_w]}{\sim} B_k$ değildir.

Teorem 4.3 $\lambda \in \Lambda$ ve $I \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $A_k \overset{V_\lambda^L[I_w]}{\sim} B_k$ ise, o zaman $A_k \overset{C_1^L[I_w]}{\sim} B_k$ dır.

İspat. $A_k \overset{V_\lambda^L[I_w]}{\sim} B_k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \\ &\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \\ &\le \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \ge \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olur. Kabulümüzden dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafı I ya aittir. O halde,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)} - L\right| \ge \varepsilon\right\} \in I$$

elde ederiz. Bu ise, $A_k \overset{C_1^L[I_w]}{\sim} B_k$ demektir.

Teorem 4.4 Eğer $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ ise, o zaman

$$A_k \overset{S^L(I_w)}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{S_\lambda^L(I_w)}{\sim} B_k$$

dir.

İspat. $A_k \overset{S^L(I_w)}{\sim} B_k$ ve $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Eğer $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ ise, o zaman yeterince büyük n için $\frac{\lambda_n}{n} \geq \delta$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\frac{1}{n}\left\{k \leq n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \supseteq \frac{1}{n}\left\{k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}.$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| &\geq \frac{1}{n}\left|k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right| \\ &\geq \delta\frac{1}{\lambda_n}\left|k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right|\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada her $\delta > 0$ ve her $\eta > 0$ için,

$$\begin{aligned}&\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \eta\right\} \\ &\qquad \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \eta\delta\right\}\end{aligned}$$

elde ederiz. Kabulümüzden dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafı I ya aittir. O halde,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n: \left|\frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \eta\right\} \in I$$

elde ederiz. Bu ise, $A_k \overset{S_\lambda^L(I_w)}{\sim} B_k$ demektir.

KAYNAKLAR

Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, USA.

Balcı, M. (1999). Analiz-I, Balcı Yayınları, Ankara.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets. In: Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, ISNM 76, Birkhauser, Basel, 133-155.

Başar, F. (2011). Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul.

Bayraktar, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, **16**: 327-338.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, **75**: 335-46.

Das, P, Savas, E. Ghosal, SK. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters*, **36**: 1509-1514.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**: 241-244.

Freedman, A.R., Sember J.J. and Raphael, M. (1978). Some Cesaro type summability spaces, *Proceedings London Mathematical Society*, **37**: 508-520.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**(4): 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pasific Journal of Mathematics*, **160**: 43-51.

Kişi, Ö. and Nuray, F. (2013a). On $S_\lambda^L(I)$-asymptotically statistical equivalence of sequences of sets. *Mathematical Analysis*, **2013**, Article ID 602963, 6 pages.

Kişi, Ö. and Nuray, F. (2013b). A new convergence for sequences of sets. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID 852796, 6 pages.

Kişi, Ö., Savaş E. and Nuray, F.(????). On I-asymptotically lacunary statistical equivalence of sequences of sets, (submitted for publication).

Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W. (2000). I-convergence. *Real Analysis Exchange*, **26**(2): 669-685.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T. and Sleziak, M., (2005). I-convergence and extremal I-limit points, *Mathematica Slovaca*, **55**(4): 443-464.

Marouf, M. S. (1993). Asymptotic equivalence and summability, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **16**(4): 755-762.

Mursaleen, (2000). λ-statistical convergence. *Mathematica Slovaca*, **50(**1): 111-115.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). Statistical lacunary summability a Korovkin type approximation theorem, *Annali dell'Universita di Ferrara*, **57**: 373-381.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition, New York.

Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, **49**: 87-99.

Patterson, R. F. (2003). On asymptotically statistical equivalent sequences. *Demonstratio Mathematica*, **36**(1): 149-153.

Patterson, R. F and Savas, E. (2006). On asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, **4**: 267-272.

Savaş, E. (2000). On strongly λ-summable sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*, **125**(1-4): 181-186.

Savaş, E. (2007). On asymptotically λ-statistical equivalent sequences of fuzzy numbers. *New Mathematics and Natural Computation*, **3**(3): 301-306.

Schoenberg I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *American Mathematical Monthly*, **66**(5): 362-375.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary statistical convergence of sequence of sets. *Progress in Applied Mathematics*, **4**(2): 99-109.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2013). On asymptotically lacunary statistical equivalent set sequences. *Journal of Mathematics*, **2013**, Article ID 310438, 5 pages,

Ulusu, U. and Kişi, Ö. (2015). *I*-Cesaro summability of sequences of sets. International Conference on Pure and Applied Mathematics ICPAM 2015, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, 25-28 August, 144.

Wijsman, R.A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70**: 186-188.

Wijsman, R.A. (1966). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II, *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**: 32-45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ramazan SUNAR
Doğum Yeri ve Tarihi	: İhsaniye / 10.05.1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: ramazan_sunar03@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Afyon Yabancı Dil Ağırlıklı Lise	(2006)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi	(2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Bolvadin Anadolu İmam Hatip Lisesi (2012-2014)

Altıntaş Anadolu İmam Hatip Lisesi (2014- …)