PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÜSLÜ İFADELER İLE İLGİLİ SAYI DUYULARININ SAYI DUYUSU BİLEŞENLERİ BAKIMINDAN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra İYMEN

Anabilim Dalı : İlköğretim

Programı : Matematik Eğitimi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU

AĞUSTOS 2012

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 093745027 nolu öğrencisi Esra İYMEN tarafından hazırlanan "**8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÜSLÜ İFADELER İLE İLGİLİ SAYI DUYULARININ SAYI DUYUSU BİLEŞENLERİ BAKIMINDAN İNCELENMESİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU (PAÜ)**

Jüri Üyesi : **(Jüri Başkanı)** **Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK (PAÜ)**

Jüri Üyesi : **Öğr. Gör. Dr. Mesture KAYHAN ALTAY (Hacettepe Üniversitesi)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/08/2012. tarih ve ..21/8...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Esra İYMEN

Rahmetli babam Mehmet İYMEN'e ...

ÖNSÖZ

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerinin üslü sayılar ile ilgili sorularda sayı duyularının, sayı duyusu bileşenleri bakımından incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın pilot ve asıl uygulama aşamalarında farklı katılımcılarla çalışılmıştır. Araştırmanın pilot uygulaması Denizli İl merkezinde eğitim veren bir devlet okulunun üç 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırmanın asıl uygulaması ise aynı devlet okulunun yirmi 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Öğrenciler ile yapılan görüşmelerden elde edilen veriler nitel tekniklerle analiz edilmiştir. Bu çalışmanın gerçekleşmesindeki tüm süreçlerde hoşgörüsü ve sabrıyla tecrübelerini paylaşan, hayata karşı duruşuna imrendiğim, sevgili danışmanım Doç. Dr. Asuman DUATEPE-PAKSU'ya bana kattığı her şey için içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans öğrenimim süresince desteklerini esirgemeyen saygıdeğer hocalarım Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK ve Yrd. Doç. Dr. Tolga KABACA'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Uzun zamandır birbirimizden kilometrelerce uzakta olsak da yanımda olduğunu hissettirebilen kardeşim Rukiye TAŞKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Her zaman yanımda olan ve beni gönülden destekleyen sahip olduğum en değerli varlıklarım annem Meral İYMEN'e ve abim Emek İYMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2012 Esra İYMEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Tablolar

ŞEKİL LİSTESİ

Şekiller

ÖZET

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÜSLÜ İFADELER İLE İLGİLİ SAYI DUYULARININ SAYI DUYUSU BİLEŞENLERİ BAKIMINDAN İNCELENMESİ

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerinin üslü sayılar ile ilgili sorularda sayı duyularının, sayı duyusu bileşenleri bakımından incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın pilot uygulaması Denizli İl merkezinde eğitim veren bir devlet okulunun üç 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırmanın asıl uygulaması ise aynı devlet okulunun yirmi 8. sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir.

Görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek amacıyla Pitta-Pantazi, Christou ve Zachariades (2007) tarafından geliştirilen üslü sayı çiftlerini karşılaştırma testi kullanılmıştır. Araştırmanın nitel verileri araştırmacı tarafından geliştirilen 11 görüşme sorusu yardımıyla toplanmıştır. Öğrenciler ile yapılan görüşmelerden elde edilen veriler nitel tekniklerle analiz edilmiştir. Araştırmada, 8. sınıf öğrencilerinin üslü sayılara yönelik sorularda başarılı bir şekilde sayı duyularını kullanamadıkları sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin kısa ve pratik yöntemler yerine uzun zaman alan ve işleme dayalı çözümlere yöneldiği görülmüştür. Araştırma, sorunun yapısının sayı duyusu kullanımını belirleyen önemli bir faktör olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin işlemlerin etkilerini anlama sayı duyusu bileşenine yönelik yetersizliklerinin olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Üslü Sayılar, Sayı Duyusu, 8. Sınıf Öğrenciler

SUMMARY

ANALYSIS OF 8 GRADE STUDENTS' NUMBER SENSE ON EXPONENTS IN TERMS OF NUMBER SENSE COMPONENTS

The aim of this study is to analyze 8 grade students' exponential number sense in terms of number sense components. Pilot implementation of the research was carried out by 8th grade students from a public elementary school in the city center of Denizli. Main implementation of the research was carried out by twenty 8th grade students in the same school.

The exponentials pairs comparison test, developed by Pitta-Pantazi and Zachariades Christou (2007), was used to determine the interviewees. Qualitative data of the study were collected with 11 interview questions developed by the researcher. The data obtained from interviews were analyzed using qualitative techniques. The result of the research showed that the use of numbers sense of the 8th grade students were quite low. In addition, students tended to use standard procedures instead of short, time consuming and practical methods. Structure of question has emerged as an important factor in determining the use of number sense. The research showed that students were inadequate in understanding the effects of operations.

Key Words: Exponentials , Number Sense, 8 Grade Students

1. GİRİŞ

$72 \div 0.025$ ifadesi 72'den küçük müdür yoksa büyük mü? $\frac{2}{7}$ ve $\frac{3}{7}$ arasında bir sayı var mıdır? Bir öğrenci $72 \div 0.025$ ifadesinin 72'den küçük olduğunu belirtmektedir (Yang, 2005). Bir başka öğrenci, $\frac{2}{7}$ ve $\frac{3}{7}$ arasında başka bir sayı olmadığını düşünmektedir (Markovits ve Sowder, 1994). Bu şekilde yanıt veren öğrencileri, yanıtlarının doğruluğu hakkında şüpheye düşürecek olan his nedir? Buna benzer sorulara standart ve ezberlenip mekanik bir şekilde yapılan işlemleri uygulamadan doğru yanıt vermeyi sağlayacak olan beceri nedir? Amerika Birleşik Devletleri'nde Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics) tarafından bu beceri üzerine odaklanılmış ve Okul Matematiği için Program ve Değerlendirme Standartları (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) isimli kitapta bu beceri sayı duyusu olarak ifade edilmiştir (NCTM, 1989). Buna ek olarak NCTM'de (1989) 4. sınıflar için belirtilen sayı duyusu ve sayılama isimli (Number Sense and Numeration) standartta iyi bir sayı duyusuna sahip öğrencinin özellikleri şu şekilde belirtilmiştir: "(1) sayıların anlamlarını iyi bir şekilde anlar, (2) sayılar arasında çoklu ilişkileri geliştirebilir, (3) sayıların birbirlerine göre büyüklüklerini tanır, (4) işlemlerin sayılar üzerindeki etkilerini anlar ve (5) çevresinde ölçüm yapmasını gerektirecek durumlarda referans noktaları geliştirip kullanabilir" (s.38).

Sayı duyusunun NCTM'in (1989) çalışmaları ile dikkat çektiği söylenebilir. Daha sonra sayı duyusu konusunda çalışmalar yapan matematik eğitimcileri ve psikologlardan oluşan araştırmacı grubunun katıldığı San Diego'da gerçekleştirilen konferansta sayı duyusunun nasıl tanımlanabileceği, varlığının ya da yokluğunun nasıl değerlendirilebileceği, zihinsel hesaplama ve tahmin becerileri ile ilişkisinin nasıl olduğu belirlenmeye çalışılmıştır (Sowder ve Schappelle, 1989). Konferans sırasında sayı duyusu konusunda pek çok farklı düşünce ortaya çıkmış ve ortak bir tanıma ulaşılamamıştır. Konferansa katılan araştırmacılardan, konferans sonunda konu ile ilgili görüşlerini yazmaları istenmiştir. Konferansın editörlerinden Sowder (1989) yapılan tartışmaları ve yazıları dikkate alarak araştırmacıların sayı duyusuna yönelik yaklaşımlarını değerlendirmiştir. Konferansa katılan psikologlardan Resnick, sayı duyusunun anlaşılması için bilgi ve yetenek kavramları üzerinde durulması gerektiğini belirtmiştir. Resnick'e göre sayı duyusu bilgi parçalarının toplamı veya eşlenmiş becerilerden oluşmamaktadır. Sayı duyusu üst düzey düşünme ile ilgili bir kavramdır ve bu sebeple sayı duyusunun tanımlanmasının bu kadar zor olması şaşırtıcı değildir. Sayı duyusunun farklı test yaklaşımları kullanılarak değerlendirilmesi gerekmektedir. Konferansa katılan bir diğer psikolog Marshall ise sayı duyusunu birleştirilmiş ve bağlantı kurulmuş bilgiler olarak tanımlamıştır. Sayı duyusunun çok yönlü bir bakış açısı ile araştırılabileceğini ve sayı duyusu ile matematiksel bilgiler arasında zengin bağlantılar kurulursa sayı duyusunun zengin bir tanımının geliştirilebileceğini belirtmiştir. Greeno, sayı duyusunu esnek düşünme, hesaplamadaki tahmin yeteneği, sayısal durumlarda çıkarımda bulunma ve karar verme yeteneği olarak tanımlamıştır. Bu becerilerin geliştirilmesi için okuldaki öğretim etkinlikleri yerine sayı duyusuna, matematiksel biliş ve becerinin genel özelliklerine uygun olarak daha evrensel bir görüş önermektedir. Case, sayı duyusu için uygun bir model kurma konusunda iki zorluğa değinmiştir. Zorluklardan ilkinin bilişsel modelin sayı duyusu için uygun olan sezgisel bilgiler yerine açık işlemleri içermesi olarak belirtmiştir. İkinci olarak farklı epistemolojik inançlar ile ortak bir modele varmanın zorluğundan bahsetmiştir. Konferansa katılan bir diğer grubu sayı duyusu ile ilgili olan tahmin ve zihinsel hesaplama konularında çalışmalarda bulunan matematik eğitimcileri oluşturmuştur. Sowder, konferansa katılan matematik eğitimcilerinin teorik bir model oluşturma konusuna öncelik verdiklerini ve bunun başarılamamış olmasından dolayı matematik eğitimcilerinin hayal kırıklığına uğradıklarını belirtmiştir. Reys ve Schoen zihinsel hesaplama ve tahmin yeteneklerinin özgün yapısına vurgu yaparak her şeyin sayı duyusu şemsiyesi altında değerlendirilmesi tehlikesinden bahsetmiştir. Reys ve Trafton, NCTM (1989) tarafından sayı duyusuna yönelik belirtilen göstergeleri yeterli gördüklerini belirtmiştir. Markovits ise sayı duyusunun uygulamaya dönük yeni bir tanımının yapılması gerektiğine değinmiştir. Katılımcılar, mevcut öğretimin sayı duyusunun gelişimi konusunda yeterli olup olmadığı hakkında fikir birliğine varamamıştır. Ayrıca Trafton, sayı duyusunun 'doğrudan' öğretilmek yerine 'ortaya çıkan bir şey' olarak görülmesi gerektiğini ve Silver ve Carpenter ise sayı duyusunun geniş ve birbirinden farklı bağlamlar içerisinde ele alınması gereken bir kavram olduğunu vurgulamıştır.

Konferansta Case, Greeno ve Reys sayı duyusunun aşamalar ve seviyeler halinde geliştirilebilen bir özellik olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde Reys, sayı duyusunun bir insanda olup olmadığının keskin bir ayrımın yapılamayacağını, her insanın farklı seviyelerde bu beceriye sahip olduğunu belirtmiştir (s. 65). Sayı duyusundaki bu gelişim fikrini destekleyen, sayı anlayışındaki örnek bir aşama; sayıları keşfetmek, onları çeşitli bağlamlarda görselleştirmek ve daha sonra da geleneksel yollar ile sınırlandırmadan sayıları birbiri ile ilişkilendirmek şeklinde belirtilmiştir (Howden, 1989'dan akt: Greeno 1991, s. 173). Carpenter, Markovits ve Resnick iyi bir sayı duyusuna sahip olan öğrencinin kendi işlemlerini yaratmak için bilgilerini başarılı bir şekilde kullanabildiğini belirtmiştir. Greeno, Sowder ve Behr tarafından sayı modelleri, ilişkileri ve işlemlerde esnekliğin önemi özellikle vurgulanmıştır.

1.1 Sayı Duyusu Tanımları

Sayı duyusunun NCTM'nin (1989) çalışmaları ile dikkat çektiği söylenebilir fakat terim olarak ilk kullanılışına ilişkin net bir bilgi bulunmamaktadır. Crowter (1959) tarafından ifade edilen "numeracy" kavramının, sayı duyusu terimi ile anlatılmak istenene yakın bir anlamda olduğu söylenmektedir (Crowter, 1959'dan akt: McIntosh vd., 1992). McIntosh vd. (1992) tarafından bu kavram şimdiki matematik topluluklarınca kabul gören yetenekleri ifade edecek şekilde kullanılmış olmasına rağmen kullanıldığı yıllarda yalnızca aritmetik başarı ile sınırlı olarak algılandığı belirtilmiştir. Mevcut çalışmada sayı duyusu olarak tanımlanan terim, ülkemizdeki çalışmalarda sayı duyusu, sayı hissi, sayı duygusu veya sayı algısı olmak üzere farklı isimler altında ele alınmıştır (Harç, 2010; Işık ve Kar, 2011; Kayhan-Altay, 2010; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004).

Sayı duyusunun tanımlanması zor ve karmaşık yetenekleri içeren bir kavram olduğu matematik eğitimcileri tarafından belirtilmiştir (Greeno, 1989; Resnick, 1989). Bu sebeple alanyazında sayı duyusunu açıklamaya yönelik farklı tanımlar yer almaktadır (Greeno, 1991; Kaminski, 2002; Kayhan-Altay, 2010; McIntosh vd., 1992; Olkun ve Toluk-Uçar, 2004; Reys vd., 1999; Sowder ve Schappelle, 1994).

Yapılan tanımlardan birine göre sayı duyusu, sayılar ile ilgili mantıklı tahminler yapabilme, aritmetik hataları fark edebilme, en etkili hesaplama yolunu seçebilme ve sayı örüntülerini fark edebilme hissi olarak tanımlanmaktadır (Hope, 1989'dan akt: Kayhan-Altay, 2010, s. 14).

Sayı duyusuna yönelik yapılan diğer bir tanımda, sayı duyusu, sayılar ve onlar arasındaki ilişkiler hakkında iyi bir sezgiye sahip olmak anlamında kullanılmıştır (Howden, 1989'dan akt: Greeno 1991, s. 173). Kaminski (2002) bu tanıma, iyi bir sayı duyusuna sahip olanların, sayılarla rahat ve "arkadaşça" bir ilişkilerinin olduğunu ve deneyimleri sırasında sayılar arasında çoklu ilişkileri başarılı ve istekli bir şekilde kurabildiklerini ve işlemlerin sayılar üzerindeki etkilerini bildiklerini eklemiştir.

Greeno (1991) aslında bir tanımından ziyade teorik bir analizinin yapılması gerektiğini belirttiği sayı duyusunu; esnek zihinsel hesaplama, sayısal tahmin ve nicel değerleri içeren durumlarda karar verebilmeyi içeren önemli ve tanımlanması zor yetenekler olarak açıklamıştır.

McIntosh vd. (1992) ile Reys vd. (1999) tarafından yapılan çalışmalarda sayı duyusu; sayısal durumların yönetiminde matematiksel kararlar verebilmek, etkili ve kullanışlı stratejiler geliştirebilmek, sayı ve işlemler arasındaki genel anlayışlar ve esnek yollar içerisinde bu anlayışların kullanılma eğilimi ve yeteneği olarak tanımlanmıştır.

Bir diğer tanıma göre sayı duyusu, sayılar, onların kullanılışları ve yorumlanması için sezgisel bir hissi, bir hesabın doğruluğu hakkında değerlendirme yapabilmeyi veya bir aritmetik hatayı belirlemeyi, en genel anlamı ile sayılara yönelik genel bir duyuyu ve sayısal durumları anlamlandırmak için isteği ifade etmektedir (Reys vd.'den (1991), akt: Sowder ve Schappelle, 1994, s.342).

Kayhan-Altay (2010) tarafından ise sayı duyusu, sayıları esnek bir biçimde kullanma, sayılarla işlemlerde pratik düşünme, en etkin ve kullanışlı çözümü seçme, bazı durumlarda, duruma uygun standart olmayan yolları yaratma, problemi kolaylaştırıcı durumlarda kıyaslama (referans) noktası kullanma, kesirlerde kavramsal düşünme ve kesirlerde farklı gösterim biçimlerini kullanma şeklinde tanımlanmıştır.

Olkun ve Toluk-Uçar (2004) tarafından ise sayı duyusu saymayı bilmekten öte sayının tüm ilişkilerini; azlık-çokluk, parça-bütün, gerçek miktarlarla ilişkileri ve çevredeki ölçümleri anlamlandırabilme becerisi olarak tanımlanmıştır.

Sayı duyusunun tanımlarında sayıların işlemler üzerindeki etkisi, sayılarla işlemlerde pratik düşünme, sayılar ve işlemler arasındaki ilişkileri anlama gibi işlem anlayışlarının yer aldığı görülmektedir (Kayhan-Altay, 2010; McIntosh vd., 1992; ve NCTM, 1989; Reys vd., 1999). NCTM (1989) tarafından sayı duyusu ile etkileşimli olduğu belirtilen işlem duyusunun özellikleri ise şu şekilde sıralanmaktadır: "(1) günlük yaşamdaki problem durumları için uygun işlemleri belirleyebilmek, (2) işlemlerin özelliklerinin farkında olmak, (3) işlemler arasındaki ilişkileri görebilmek ve (4) sayılar üzerindeki işlemlerin etkilerini anlayabilmektir" (s.41). Özelliklerinden anlaşıldığı üzere işlemler ile ilgili duyu, sayı duyusundan bağımsız değil onun bir bileşeni olarak ele alınmaktadır (Sturdevant, 1991).

1.2 Sayı Duyusu Bileşenleri

Sayı duyusu ile ilgili çalışan araştırmacılar tarafından sayı duyusunun bileşenlerine yönelik pek çok sınıflandırma yapılmıştır (Greeno, 1991; Markovits ve Sowder, 1994; McIntosh vd., 1992; Reys vd., 1999; Sowder ve Schappelle, 1994). Bu sınıflandırmaların her biri bu bölümde araştırmacılar tarafından verilen örnekler ile açıklanarak ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Daha sonra, bu sınıflandırmalarda yer alan bileşenler karşılaştırılarak aynı beceriyi ifade edenler ortak başlıklar altında değerlendirilmiştir.

Greeno (1991) diğer araştırmacılardan farklı olarak sayı duyusunun göstergelerini bileşen olarak isimlendirmemiş sayı duyusu kullanımının gerektiği örneklerden yola çıkarak sayı duyusunun önemli üç özelliğini tanımlamıştır. Bu özellikler *esnek zihinsel hesaplama, sayısal tahmin* ile *niceliksel muhakeme ve çıkarım*dır. *Esnek zihinsel hesaplama* özelliğine örnek olarak 25×48 işlemi için $\frac{100}{4}\times 48=\frac{100\times 48}{4}=100\times 12$ şeklinde düşünmek verilebilir. *Sayısal tahmin* özelliği ise hesaplama içerisinde yakın sayısal değerler bulma ile ilgilidir. Örnek olarak $\frac{347\times 6}{43}\cong\frac{347\times 6}{42}\cong\frac{347}{7}\cong\frac{350}{7}\cong 50$ şeklinde düşünmek verilebilir. *Niceliksel muhakeme ve çıkarım* özelliği ise nicel değerler ile yargıda bulunmak ve bir sonuca ulaşmayı ifade etmektedir. "1128 asker için 36 kişilik otobüslerden kaç tane gereklidir?" sorusuna 31 tam 12 kalan şeklinde yanıt verenler anlam olmaksızın aritmetik işlemleri uygulamaktadır (Schoenfeld, 1988'den akt: Greeno, 1991, s. 172). Bu şekilde yanıt verenler, bulunan sonucun problem içerisinde ne anlama geldiği ile ilgilenmemekte, bir başka ifade ile nicel değerler için bir yargıda bulunamamaktadır.

McIntosh vd. (1992) tarafından yapılan çalışmada sayı duyusu bileşenlerinin en ayrıntılı sınıflandırmasının yapıldığı söylenebilir. Çalışmada sayı duyusu sayılar konusunda yetenek ve bilgi, işlemler konusunda yetenek ve bilgi ile sayılar ve işlemlerin hesaplama uygulamalarındaki yetenek ve bilgi olmak üzere 3 gruba ayrılmıştır. Sayılar konusundaki yetenek ve bilgi grubunda yer alan bileşenler: *sayıların sıralanması* ($\frac{2}{5}$ ile $\frac{3}{5}$ sayıları arasında sonsuz sayı olduğunun anlaşılması), *sayıların çoklu gösterimleri* ($2+2+2+2=4\times 2$ veya $\frac{3}{4}=\%75$ olduğunu anlamak*)*, *sayı büyüklüğü* (1000 sayısının ne ifade ettiğini anlamak) ve *referans noktası kullanımı* (0,98 sayısının 1'e yakın olduğunu fark etmek ve kullanmak veya 50 kg olduğunu bildiğin birini referans alarak başka bir insanın kaç kilo olacağını tahmin etmek) olarak verilmiştir. İşlemler konusunda yetenek ve bilgi grubunda *işlemlerin etkilerini anlama* (1'den küçük bir değer ile çarpma işleminin sonucu nasıl etkilediğini anlama), *matematiksel özellikleri anlama* (değişme, birleşme, dağılma, birim eleman ve ters eleman kavramlarını anlama) ve *işlemler arasındaki ilişkileri anlama* (toplama ile çarpma, çıkarma ile bölme v.b. işlemleri arasındaki ilişkileri anlama) bileşenleri yer almaktadır. Sayılar ve işlemlerin hesaplama uygulamalarındaki yetenek ve bilgi grubunda yer alan bileşenler ise *problem durumu ile gerekli hesaplamalar arasındaki ilişkiyi anlama* ($2.88, $2.38 ve $3.76 değerlerindeki üç ürün için $10 yetip yetmeyeceğini anlamak), *çoklu stratejilerin varlığının farkındalığı*, *etkili gösterim ve yöntemi kullanma eğilimi* (8+7 işlemini 8+2+5 şeklinde düşünmek) ile *sonuçları ve verileri kontrol etme eğilimi* yer almaktadır.

Markovits ve Sowder (1994) tarafından yapılan çalışmada sayı duyusuna yönelik 3 temel bileşen yer almıştır. Bu bileşenler *sayı büyüklüğü*, *zihinsel hesaplama* ve *hesapsal tahmin*dir. *Sayı büyüklüğü* bileşeni sayıları karşılaştırma iki sayıdan üçüncü sayıya yakın olan sayıyı belirleyebilme, sayıları sıralama, verilen iki sayı arasındaki sayıyı bulabilme gibi becerileri ifade etmektedir. Örneğin 0,74 ve 0,75 ondalık sayıları arasında sonsuz sayı olduğunu anlayabilme bu beceri ile ilişkilidir. Diğer bileşen olan *zihinsel hesaplama* standart olmayan yöntemlerin keşfi olarak tanımlanmaktadır. Örneğin, $24\times 25=(20+4)\times 25=20\times 25+100$ şeklinde düşünebilmek bu bileşen ile ilgilidir.

Hesapsal tahmin bileşenine ise 43 596+1482+13+7328 işleminin sonucu için 13 değerini dikkate almayarak yaklaşık bir değer elde etme örneği verilebilir. Sowder ve Schappelle (1994), tarafından yapılan çalışmada sayı duyusu bileşenleri sayı anlayışları ile yeniden düşünerek hesaplama olarak iki grupta ele alınmıştır. Sayı anlayışları bileşeni içerisinde sayıların göreceli büyüklüğü, basamak değeri ve kesirler yer almaktadır. Yeniden düşünme sayı duyusu bileşeni hesapsal tahmin, zihinden hesaplama ve yuvarlama becerisi yer almaktadır.

Reys vd. (1999) tarafından yapılan çalışmada 6 farklı bileşen tanımlanmıştır. Bunlar *hesaplama ve sayma stratejileri*, *sayıların büyüklüğü ve anlamlarının anlaşılması*, *işlemlerin etkileri ve anlamının anlaşılması*, *sayıların denk ifadelerinin kullanımı ve* *anlaşılması, denk ifadelerin kullanımı ve anlaşılması* ile *referans noktası kullanımı*dır. *Hesaplama ve sayma stratejileri* bileşeni için 6×98 için yaklaşık bir değer bulabilme veya yaklaşık olarak kaç gün yaşadığını hesaplayabilme örnekleri verilebilir. *Sayıların büyüklüğü ve anlamlarının anlaşılması* bileşeni 1,52 ve 1,53 ondalık sayıları arasında başka bir sayının olup olmadığını anlayabilmek veya $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{2}$ sayılarının büyüklüklerine göre karşılaştırabilme gibi örnekleri içermektedir. *İşlemlerin etkileri ve anlamının anlaşılması* bileşeni için $750 \div 0{,}98$ işleminin sonucunun 758'den büyük olup olmadığını anlayabilmek örnek olarak verilebilir. *Sayıların denk ifadelerinin kullanımı ve anlaşılması* bileşeni için $\frac{2}{5}$ sayısını başka bir denk ifade ile gösterebilme ve d*enk ifadelerin kullanımı ve anlaşılması* bileşeni için $70 \div 0{,}5$ ve 70×2 ifadelerinin birbirine denk olup olmadığını algılayabilme örnekleri verilebilir. *Referans noktası kullanımı* bileşenine örnek olarak büyük bir nesnenin yüksekliğini tahmin edebilmek için bir dayanak noktası geliştirebilmek verilebilir.

Alanyazında belirtilen bileşenler incelendiğinde aynı veya benzer becerilerin farklı bileşen isimleri altında değerlendirildiği görülmektedir. Bileşenlerin özellikleri dikkate alınarak, mevcut çalışmaya dahil edilecek sayı duyusu bileşenleri denk ifadeler, sayısal tahminler, sayı büyüklükleri, işlemlerin etkileri ve referans noktası kullanımı başlıkları altında değerlendirilmiştir. Alanyazında belirtilen fakat çalışmada yer almayan diğer bileşenler ise işlemler arasındaki ilişkilerin anlaşılması (McIntosh vd., 1992), matematiksel özelliklerin anlaşılması (McIntosh vd., 1992), niceliksel akıl yürütme ve çıkarım (Greeno, 1991), sonuçları ve verileri kontrol etme eğilimi ile çoklu stratejilerin varlığının farkındalığı (McIntosh vd., 1992) olarak belirtilebilir. Bu bileşenler yalnızca ismi geçen araştırmacılar tarafından belirtilmiştir. Mevcut çalışmaya dâhil edilen bileşenler farklı araştırmacılar tarafından belirtilen ortak becerileri içeren bileşenlerdir. Bu bileşenler ve hangi araştırmacılar tarafından nasıl tanımlandığının ayrıntılı analizi aşağıda yer almaktadır.

1.2.1 Denk ifadeler

Reys vd.’nin (1999) tanımladığı sayıların denk ifadelerinin kullanımı ve anlaşılması ile denk ifadelerin kullanımı ve anlaşılması bileşenleri, McIntosh vd’nin (1992) ortaya koydukları etkili gösterim ve yöntemi kullanma eğilimi bileşeni ile sayıların çoklu gösterimleri bileşeni, Markovits ve Sowder’ın (1994) zihinsel hesaplama olarak isimlendirdiği bileşen ve Greeno’nun (1991) esnek zihinsel hesaplama olarak adlandırdığı bileşenler mevcut çalışmada denk ifadeler bileşeni ismi altında birleştirilmiştir.

Greeno (1991) *esnek zihinsel hesaplama* özelliğini; bir zihinsel hesaplama sırasında denkliklerin tanınarak verilen ifadelerin yeniden düzenlenmesi şeklinde tanımlamıştır ve 25×48 işlemini $\frac{100}{4}\times 48=\frac{100\times 48}{4}=100\times 12$ şeklinde düzenlemeyi bu özelliğin kullanımına örnek olarak vermiştir. Bu işlemde 25 sayısının dengi olan $\frac{100}{4}$ sayısının kullanıldığı görülmektedir. Markovits ve Sowder (1994) *zihinsel hesaplama* bileşenini standart olmayan yöntemlerin keşfi olarak tanımlamaktadır. $24\times 25=(20+4)\times 25=20\times 25+100$ şeklinde düşünebilmenin bu bileşen ile ilgili olduğu belirtilmiştir. Buradaki ifadede 24 sayısının ayrıştırılarak $20+4$ şeklinde denginin kullanıldığı görülmektedir. McIntosh vd. (1992) ortaya koydukları *etkili gösterim ve yöntemi kullanma eğilimi* bileşenine örnek olarak 8+7 işlemini 8+2+5 şeklinde düşünmeyi vermiştir. Yukarıdaki örneğe benzer şekilde burada da 8 sayısı ile pratik bir toplama işlemi yapabilmek için 7 sayısı $2+5$ şeklinde ayrıştırılmıştır. Bunun yanında McIntosh vd.’nin (1992) tanımladığı *sayıların çoklu gösterimleri* bileşenine örnek olarak $2+2+2+2=4\times 2$ veya $\frac{3}{4}=\%75$ olduğunu anlamayı örnek olarak vermiştir. Reys vd. (1999) tarafından belirtilen s*ayıların denk ifadelerinin kullanımı ve anlaşılması* bileşeni, $\frac{2}{5}$ sayısını başka bir denk ifade ile gösterebilmek şeklinde örneklendirilmiştir. Bunun yanında Reys vd. (1999) *denk ifadelerin kullanımı ve anlaşılması* bileşeni için $70\div 0{,}5$ ve 70×2 ifadelerinin birbirine denk olup olmadığını algılayabilmek ile ilgilidir.

Araştırmacılar tarafından belirtilen örneklere baktığımızda farklı isimler altında belirtilen bileşenlerin, verilen bir sayı ya da bütün olarak ifadenin denklerini kullanarak pratik bir şekilde hesaplama işlemlerinin yapılmasına yönelik becerileri ifade ettiğini görüyoruz. Reys vd. (1999) verilen sayının dengini yazma ile verilen bir ifadenin dengini yazmayı farklı bileşen başlıkları altında değerlendirmiştir. McIntosh vd. (1992) tarafından yapılan çalışmada bu farkın dikkate alınmadığı görülmektedir. Verilen bir sayının birden fazla dengi yazılabilir, fakat önemli olanın duruma uygun olacak şekildeki seçimin yapılması olduğu söylenebilir. Araştırmacılar tarafından farklı bileşen başlıkları altında değerlendirilen bu beceriler mevcut çalışmada *denk bileşenler* ismi altında incelenmiştir.

1.2.2 Sayısal tahmin

Greeno'nun (1991) tanımladığı sayısal tahmin özelliği, McIntosh vd.'nin (1992) ifade ettiği problem durumu ve gerekli hesaplamalar arasındaki ilişkiyi anlama bileşeni, Reys vd. (1999) hesaplama ve sayma stratejileri bileşeni olarak adlandırdığı ve Markovits ve Sowder'ın (1994) hesapsal tahmin olarak ortaya koyduğu bileşenler mevcut çalışmada sayısal tahmin bileşeni altında birleştirilmiştir.

Greeno (1991) tarafından s*ayısal tahmin* özelliği hesaplama içerisinde yakın sayısal değerler bulma olarak tanımlanmış ve örnek olarak $\frac{347\times 6}{43}\approx\frac{347\times 6}{42}\approx\frac{347}{7}\approx\frac{350}{7}\approx 50$ şeklinde düşünebilme verilmiştir. Burada 347 ve 43 sayılarının cevaba ulaşmayı kolaylaştıracak şekilde en yakın değerlerinin işlemde kullanıldığı görülmektedir. McIntosh vd. (1992) tarafından tanımlanan *problem durumu ile gerekli hesaplamalar arasındaki ilişkiyi anlama* bileşeni için örnek olarak $2.88, $2.38 ve $3.76 değerlerindeki üç ürün için $10 yetip yetmeyeceğini anlayabilmek verilmiştir. Burada verilen değerlerin tam toplamını hesaplamak yerine toplamın $10'dan çok mu az mı çıkacağına ilişkin bir tahminde bulunmak yeterlidir. Reys vd. (1999) *hesaplama ve sayma stratejileri* olarak adlandırılan bileşen için 6×98 işleminin yaklaşık bir değerinin bulunması örneği verilmiştir. Görüldüğü gibi farklı isimler ile belirtilen bileşenlerde incelenen beceri verilen sayısal ifadeler için uygun bir yaklaşık bir değeri düşünebilme ve sonuç için yaklaşık bir tahminde bulunabilme ile ilgili beceriler ifade edilmektedir. Dolayısıyla bu beceri mevcut çalışmada sayısal tahmin bileşeni ismi altında değerlendirilmiştir.

1.2.3 Sayı büyüklükleri

McIntosh vd. (1992) tarafından belirtilen *sayıların sıralanması* ile *sayı büyüklüğü* bileşenleri, Reys vd.'nin (1999) *sayıların büyüklüğü ve anlamlarının anlaşılması* olarak isimlendirdiği bileşen ve Markovits ve Sowder'ın (1994) *sayı büyüklüğü* olarak tanımlanan bileşen mevcut çalışmada sayı büyüklükleri bileşeni altında birleştirilmiştir.

Markovits ve Sowder (1994) tarafından *sayı büyüklüğü* bileşeninin sayıları karşılaştırma, iki sayıdan üçüncü sayıya yakın olan sayıyı belirleyebilme, sayıları sıralama veya verilen iki sayı arasındaki sayıyı bulabilme gibi becerileri ifade ettiği belirtilmiştir. 0,74 ve 0,75 ondalık sayıları arasında sonsuz sayı olduğunu fark edebilme becerisinin bu bileşen ile ilgili verilen örnektir. Reys vd. (1999) tarafından tanımlanan *sayıların büyüklüğü ve anlamlarının anlaşılması* bileşeni için verilen örnek 1,52 ve 1,53 ondalık sayıları arasında başka bir sayının olup olmadığını anlayabilmek veya $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{2}$ sayılarını karşılaştırabilme gibi örnekleri içermektedir. Ayrıntılı bir sınıflandırma yapan McIntosh vd. (1992) *sayı büyüklüğü* olarak isimlendirdiği bileşen için 1000 sayısının ne ifade ettiğini anlama örneğini verirken, *sayıların sıralanması bileşeni için* $\frac{2}{5}$ ile $\frac{3}{5}$ sayıları arasında sonsuz sayı olduğunun anlaşılması örneğini vermektedir. McIntosh vd. (1992) tarafından verilen örneğe bakıldığında *sayıların sıralanması bileşeni* için gerekli olan becerinin sayı büyüklüğü ile ifade edilen beceriyi gerektirdiği görülmektedir. Farklı araştırmacılar tarafından belirtilen sayıların anlamlarının anlaşılması ve diğer sayılar içerisindeki konumlarının belirlenmesi ile ilgili bütün beceriler mevcut çalışmada *sayı büyüklüğü* bileşeni adı altında değerlendirilmiştir.

1.2.4 İşlemlerin etkilerini anlama

İşlemlerin etkilerini anlama bileşeni McIntosh vd. (1992) ve Reys vd. (1999) tarafından tanımlanmıştır. Reys vd. (1999) tarafından bu bileşen için $750 \div 0{,}98$ işleminin sonucunun 758'den büyük olup olmadığını anlayabilme örneği verilmiştir. McIntosh vd.'nin (1992) 1'den küçük bir değer ile çarpma işleminin sonucu nasıl etkilediğini anlama örneği bu bileşenin açıklamak için kullanılmıştır. Araştırmacıların belirttiği gibi bu beceri işlemlerin etkilerini anlama bileşeni altında değerlendirilmiştir.

1.2.5 Referans noktası kullanımı

Referans noktası kullanımı bileşenine, McIntosh vd. (1992) ile Reys vd. (1999) tarafından yapılan bileşen listesi içinde yer verilmiştir. McIntosh vd. (1992) referans noktası kullanımı bileşeninin, matematiksel ve kişisel olmak üzere iki farklı kullanım türünün olabileceğini belirtmiştir. Uygun durumlarda 20'nin ve 10'un katlarını kullanmak veya $\frac{4}{9}$ sayısının yarımdan biraz az bir değere karşılık geldiğini bilmek gibi herkes tarafından kullanılabilecek olan kıyaslama noktalarını matematiksel referans noktası olarak tanımlamıştır. Bunun yanında 50 000 kişilik bir seyircinin bulunduğu maça katıldıktan sonra başka bir kalabalığın büyüklüğünü bunun yardımı ile tahmin etmesi veya 50 kg olduğunu bildiği birine göre başka bir kişinin kaç kilo olduğunu tahmin etmesi gibi durumlar kişisel referans noktası olarak tanımlamaktadır. Reys vd. (1999) tarafından yapılan çalışmada ise büyük bir nesnenin yüksekliğini tahmin edebilmek için bir kıyaslama noktası geliştirebilmek gibi fiziksel referans noktası kullanımından bahsedilmiştir. Bir başka ifade ile sayısal verileri içeren durumlarda bir karar vermeye yardımcı olacak şekilde yapılan kıyaslama işlemlerinin referans noktası kullanımını örneklendirdiği söylenebilir. mevcut çalışmada araştırmacıların belirttiği gibi bu beceriler referans noktası kullanımı olarak ele alınmıştır.

1.3 İlköğretim Matematik Ders Programında Üslü Sayılar

Üslü sayılar ilköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programında 8. sınıf sayılar öğrenme alanında yer almıştır. Daha alt sınıflara bakıldığında üslü sayılara, 6. sınıflarda cebir öğrenme alanının örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanının 2. kazanımında rastlanmaktadır (MEB, 2009, s.207). Bu kazanım ile ilgili yer alan etkinlikte öğrencilerin bir kağıt şeridi ortadan ikiye kesmeleri, daha sonra oluşan eş parçaların her birini tekrar ikiye kesilmesi şeklinde devam eden bir etkinlikte kesme sayısı ile oluşan parça sayısı arasındaki ilişkinin kurulması amaçlanmıştır. Daha sonra hesap makinesi ile tabanı ve üssü pozitif olan farklı üslü sayıların değerlerinin hesaplatılması etkinliklerine yer verilmiştir. Açıklama kısmında "a, b, n birer doğal sayı olmak üzere; $a^n = b$ üslü niceliğinde a'ya "taban", a'nın kaç kez kendisiyle çarpıldığını belirten sayı olan n'ye "kuvvet" veya "üs" ve b'ye de "değer" denildiği belirtilir." ifadesi ile üslü sayının sembol olarak gösteriminin ne anlama geldiğine yer verilmiştir (s. 207). Açıklama kısmında ayrıca 10 000 sayısını 10'un kuvveti şeklinde ifade etme veya 10^6 sayısının değerlerini bulma gibi soru örneklerine yer verilmiştir. Bunun yanında üslü sayılara, 7. sınıflarda cebir öğrenme alanının örüntüler ve ilişkiler alt öğrenme alanının 1. kazanımında da yer verilmiştir (MEB, 2009, s.279). Bu kazanım ile ilgili olarak negatif bir tam sayının değerinin bulunması etkinliğine yer verilmiştir. Açıklama kısmında ise negatif tabana sahip bir sayının tek ve çift kuvvetlerine göre değerinin işaretindeki değişimin ve sıfır hariç her sayının 0. kuvvetinin 1 değerini aldığına vurgulanması gerektiği belirtilmiştir. Daha sonra üslü sayıların, negatif sayı kuvvetlerine, üslü sayılarla çarpma ve bölme işlemlerine, çok büyük ve çok küçük sayıların bilimsel gösterimlerine 8. sınıfta yer verilmiştir (MEB, 2009, s.294).

1.4 Araştırmanın Önemi

Sayılar ve aritmetik ilköğretim matematik eğitiminin temel konularından biridir. Ama bu konular dört işlem kuralları, çarpım tablosu, formel yazılı hesaplama becerileri ile sınırlı olmamalıdır. Bu sınırlılık sebebiyle pek çok kişi matematik dersinin kurallar ve formüllerden oluştuğunu düşünebilir ve matematik dersini zor bir ders olarak algılayabilir. Sayıları içeren problemleri anlamlandırabilmek ve çözebilmek için sayıların ve onların birbiri ile ilişkisinin bilinmesi gerekir. Sayı duyusu yaklaşık son 20 yıldır üzerinde çalışılan konulardan biridir ve pek çok araştırmacı tarafından önemi vurgulanmaktadır. Sayı duyusunu konu alan farklı ülkelerde yapılmış pek çok çalışma bulunmaktadır. Fakat ülkemizde yeni çalışılan konulardan biri olması sebebiyle sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Benzer şekilde, üslü sayılara yönelik de alanyazında çok az çalışma bulunmaktadır. Üslü sayılar farklı disiplinlerde ve ilköğretim ile sonraki öğretim kademelerinde çok sık karşılaşılan bir kavramdır. Genel olarak üslü sayılar ile ilgili yapılan çalışmalarda öğrencilerin yetersizliklerinin olduğu görülmektedir. Alanyazında sayı duyusu konusunda üslü sayı formlarını içeren çalışmaya rastlanmamıştır. Üslü sayılar ile ilgili yetersizliklerin önüne geçebilmek için öğrencilerin üslü sayı duyuları belirlenmesi önemlidir. Bu sebeple, öğrencilerin üslü sayı duyularının nitel bir araştırma yöntemi ile ayrıntılı olarak incelenmesinin alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.5 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler ile ilgili sayı duyularının sayı duyusu bileşenleri bakımından incelenmesi amaçlanmaktadır.

1.6 Araştırma Problemi

8. sınıf öğrencilerinin üslü ifadeler ile ilgili sayı duyuları, sayı duyusu bileşenleri bakımından nasıldır?

1.7 Sayıltılar

- ✓ Araştırmaya katılan öğrenciler, görüşme formunda yer alan soruları gerçek durumlarını yansıtacak şekilde yanıtlamıştır.

1.8 Sınırlılıklar

- ✓ Araştırma, görüşme formunun uygulandığı zaman dilimi olarak, 2011-2012 eğitim-öğretim yılı ile sınırlıdır.
- ✓ Araştırma, Denizli il merkezinde bulunan bir ilköğretim okulunun 8.sınıfında öğrenim gören 20 öğrenci ile sınırlıdır.
- ✓ Araştırmada toplanan veriler, veri toplama amacıyla yararlanılan "Sayı Duyusu Bileşenleri Bakımından Üslü Sayı Duyularının Belirlenmesine Yönelik Görüşme Formu" ile görüşülen öğrenci yanıtlarıyla sınırlıdır.

1.9 Tanımlar

Çalışmada sıkça yer alan kavramların tanımları aşağıda verilmiştir.

Sayı Duyusu, sayılar ve işlemlerin genel anlayışlarını, bu anlayışı matematiksel kararlar verebilmek için esnek yollar içerisinde kullanabilme yeteneği ve eğilimini, sayısal durumları yönetebilmek için etkili ve kullanışlı stratejiler geliştirebilmeyi ifade etmektedir (Reys vd., 1999, s. 61).

Sayı Duyusu Bileşenleri, Sayı duyusu becerisinin varlığını ya da yokluğunu tanımlamak için kullanılan yardımcı göstergelerdir.

2. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1 Sayı Duyusuna Yönelik Yapılan Çalışmalar

2.1.1 Sayı duyusunun sınıf düzeyi, cinsiyet veya matematik başarısı ile ilişkisini inceleyen çalışmalar

Sturdevant (1991) tarafından yapılan çalışmada iki amaç belirtilmiştir. İlk olarak ilköğretim öğrencilerinin denk veya denk olmayan matematiksel ifadeleri belirlerken kullandıkları sayı duyusu bileşenlerini belirlemek amaçlanmıştır. İkinci olarak sınıf seviyesinin, yaşın ve cinsiyetin sayı duyusu bileşenlerini kullanma durumunu etkileyip etkilemediği belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmada 13 dördüncü sınıf (7 erkek ve 6 kadın), 12 altıncı sınıf (6 erkek ve 6 kadın) ve 11 sekizinci sınıf öğrencisi (5 erkek 6 kadın) ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırmacı tarafından matematiksel olarak denk ve denk olmayan düz işlem ve bağlamsal soruların yer aldığı "Sayı ve İşlem Testi" geliştirilmiştir. Testte 46 soru düz işlem şeklinde ve 12 soru bağlamsal problemleri içerecek şekilde hazırlanmıştır. Düz işlem şeklinde olan her bir soruda $543+272+111+672$ ile $938+852$ gibi sayısal ifade verilmiştir. Bu ifadeler iki farklı kartona yazılarak öğrencilere gösterilmiş ve eşit olup olmadığını nedeni ile birlikte belirtmesi istenmiştir. Bağlamsal problemlerden biri ise şu şekildedir: "48 kurabiyeyi gezi klubü 11 üyesi arasında ve matematik klübü ise 17 üyesi arasında paylaştıracaktır. Hangi grubun üyeleri daha fazla kurabiyeye sahip olur?" Görüşme soruları "ayrıştırma ve yeniden birleştirme", "işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini anlama" ve "işlemler arasındaki ilişkilerin farkındalığı" sayı duyusu bileşenlerine göre hazırlanmıştır. Soruların yapısı (bağlamsal veya düz işlem), soruların içinde yer alan sayı alanlarının (tam, doğal sayı, kesirli sayı v.b.) ve işlemlerin kullanılan sayı duyusunu etkileyip etkilemediği araştırılmıştır. Sorularda yer alan işlemler öğrencilerin kullandıkları sayı duyusu bileşenini çok az etkilemiştir. Problemlerdeki sayı alanı kullanılan sayı duyusu bileşenini etkilememiştir. Tüm sayı alanlarında en sık kullanılan bileşen "işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini anlama" bileşenidir. Soruların yapısı kullanılan sayı duyusu bileşenini etkilemiştir. Öğrenciler bağlamsal maddelerde daha uygun ve başarılı stratejiler geliştirmiştir. Tüm sınıflarda en sık kullanılan bileşen işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini anlama bileşenidir. Öğrencilerin matematiksel başarı testi ile sayı duyusu testindeki puanları arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Alt sınıflarda öğrenciler daha fazla işlem ve sayı olan matematiksel ifadeyi seçmeye yönelirken, üst sınıflara doğru bu yaklaşım azaldığı bulunmuştur. Cinsiyetler bakımından anlamlı bir farklılık bulunmamıştır.

Menon (2004) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin sayı duyuları incelenmiştir. Araştırmada 10 maddeden oluşan sayı duyusu testi 4, 5, 6 ve 7. sınıflardan toplam 750 öğrenciye uygulanmıştır. Sayı duyusu testinde yer alan sorular açık uçludur ve her bir sorunun altında öğrencilerin açıklamalarını yazabilmeleri için boşluklar bırakılmıştır. Test uygulamalarının ardından 64 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırma bulgularının analizi iki aşamalı olarak yürütülmüştür. İlk aşamada matematik eğitimi dersini alan öğretmen adayları öğrencilerin hem sözlü hem de yazılı yanıtlarını her bir sınıf düzeyini ayrı ayrı olmak üzere değerlendirmiştir. Daha sonra bu değerlendirmeler araştırmacı tarafından birlikte değerlendirilmiştir. Araştırma bulgularına göre 4. sınıflarda kızların performansları erkeklerinkinden biraz daha iyidir fakat hiçbir sınıf düzeyinde sayı duyusu becerileri bakımından cinsiyetler arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır. Ayrıca öğrencilerin sınıf dereceleri arttıkça sayı duyusu kullanma oranlarının azaldığı ve standart işlemleri uygulama eğilimlerinin arttığı görülmüştür. Öğrencilerin tahmin yeteneklerinin yetersiz olduğu araştırmanın bir diğer sonucudur.

Yang (2005) çalışmasında matematik başarısı bakımından farklı düzeylere sahip öğrencilerin sayı duyusu bileşenlerini kullanma durumları incelenmiştir. Bir önceki yıl matematik performanslarına göre yüksek düzeyde 8 kişi, orta düzeyde 5 kişi ve düşük düzeyde 8 kişi olacak şekilde 21 Tayvanlı altıncı sınıf öğrencisi seçilmiştir. Ölçme aracı olarak farklı sayı duyusu bileşenlerine göre hazırlanmış 7 açık uçlu soru içeren görüşme formu kullanılmıştır. Ölçme aracında incelenen bileşenler “sayıların anlamlarının anlaşılması”, “sayı büyüklükleri”, “kıyaslama (referans) noktası kullanımı”, “işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini anlama”, “sayısal problemleri çözebilmek için uygun stratejiler (tahmin, zihinsel hesaplama ve mantıklı karar verebilme gibi) kullanma” olarak belirlenmiştir. Araştırmanın verileri öğrenciler ile gerçekleştirilen görüşmeler yolu ile toplanmıştır. Öğrencilerin yanıtları sayı duyusu tabanlı, kural tabanlı ve açıklama getiremeyenler olarak 3 kategoride incelenmiştir.

Her başarı düzeyinde öğrencilerin çoğu kural tabanlı yanıtlar vermişler veya açıklama getirememiştir. 7 maddenin 3'ünde hiç sayı duyusu kullanılamamıştır. Öğrencilerin genellikle yazılı hesaplama ve standart kuralları uygulama eğilimde olduğu belirlenmiştir. Kullanılan sayı duyusu bileşenleri ise referans noktası kullanımı, sayı büyüklüğü ve tahmin olmuştur.

Jordan, Glutting ve Ramineni (2009) tarafından yapılan çalışmada okula başlama yaşı ve bilişsel yetenekler (dil, uzamsal düşünme ve hafıza gibi) kontrol edilerek sayı duyusunun matematik başarısı için yordayıcı bir değişken olup olmadığı belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla 279 birinci sınıf öğrencisi ve 175 üçüncü sınıf öğrencisi ile bir araştırma yürütülmüştür. Yöntem olarak regresyon modelli bir boylamsal bir araştırma gerçekleştirilmiştir. Çalışmada ilk olarak birinci sınıf öğrencilerinin sayı duyuları ekim ayında ölçülmüştür. Ölçümlerde 33 maddelik sayı duyusu testinin kısaltılmış bir hali kullanılmıştır. Sayı duyusu testindeki maddeler sayı bilgisi, sayıları tanıma ve karşılaştırma, sözel olmayan hesaplama, hikaye problemleri ve sayı kombinasyonlarına yönelik olarak hazırlanmıştır. Sözel dil, hafıza ve uzamsal becerileri birinci sınıfın ocak ayında ölçülmüştür. Daha sonra 1 ve 3. sınıfın nisan aylarında aynı öğrencilerin öğrencilerin matematik başarıları ölçülmüştür. Çalışmanın sonunda incelenen bütün değişkenler ile sayı duyusu arasında pozitif bir ilişki bulunmuştur. Sayı duyusu ile en düşük ilişkiye sahip bileşenler hafızanın alt yetenenklerinden biri ile okula başlama yaşı olarak bulunmuştur. Her iki sınıftaki en yüksek korelasyon sayı duyusu ile matematik başarısı arasında çıkmıştır. Sayı duyusu yeteneğinin öğrencilerin daha sonraki yıllarda gösterecekleri matematik başarıları bakımından güçlü bir yordayıcı olduğu belirlenmiştir.

Singh (2009) tarafından yapılan çalışmada Malezyalı öğrencilerin sayı duyusu yeteneklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bunun yanısıra çalışmada sayı duyusuna yönelik beceriler bakımından cinsiyetler arasında bir fark olup olmadığı incelenmiştir. Çalışmanın örneklemini 13 farklı okuldan 13 ile 16 yaşları arasında 1756 öğrenci oluşturmuştur. Öğrencilerin % 35.5'i erkek ve % 64.5'i kadındır. Bu öğrenciler arasından eksik veri sebebiyle 96 öğrenci daha sonraki analizlere dahil edilmemiştir. 1660 öğrencinin yaklaşık olarak % 90'ının yapılan yıl sonu sınavında başarılarının ortalamanın üstünde olduğu belirtilmiştir. Tüm öğrencilere McIntosh, Reys, Reys, Bana ve Farrell (1997) tarafından geliştirilen sayı duyusu testinden uyarlanmış 50 maddelik bir sayı duyusu testi uygulanmıştır. Testin 14 maddesi sayı kavramları, 7 maddesi çoklu gösterim, 10 maddesi işlemlerin etkileri, 8 maddesi denk ifadeler, 11 maddesi sayma ve hesaplama ile ilgili olarak hazırlanmıştır. Sorular projektör ile ekrana yansıtılmıştır. Öğrencilerden 30 saniye içinde yanıtlarını ellerindeki cevap kağıdına yazmaları istenmiştir. Doğru yanıtlar 1 ve yanlış yanıtlar 0 puan olacak şekilde puanlanmıştır. Analizlerde 4 farklı sınıf düzeyinden öğrencilerin doğru yanıt yüzdelerinin ortalamaları hesaplanmıştır. Her sınıf ortalamasının % 50'nin altında olduğu bulunmuştur. Bunun yanısıra sınıf seviyeleri arttıkça puan ortalamalarının da arttığı görülmüştür. Bulgular soruların yer aldığı alt gruplar bakımından analiz edildiğinde sayı kavramları ile ilgili sorularda öğrencilerin puan ortalamalarının (% 31.6) en düşük olduğu görülmüştür. Özellikler bu gruptaki sorular arasında 2/5 ve 3/5 vaya 1.52 ve 1.53 sayıları arasında kaç değer olduğunun sorulduğu sorularda puan ortalamlarının oldukça düşük olduğu görülmüştür. Araştırmacılar tarafından öğrencilerin rasyonel ve ondalık sayıların doğasını anlamada zorlandıkları belirtilmiştir. Bu grupta yer alan "715,347+589,2+4,553 ifadesinin eşiti için 13091 ifadesinde nereye virgül koyulması gerekir?" sorusunda doğru yanıt veren öğrencilerin çoğunun tahmin kullanmadan toplama işlemini yaparak karar verdikleri görülmüştür. Araştırmacılar tarafından öğrencilerin algoritmalara ve kurallara karşı aşırı güvenlerinin olduğu belirtilmiştir. Çoklu gösterim ile ilgili sorulardaki öğrenci başarılarının sayı kavramları ile ilgili sorulara göre daha yüksek olduğu görülmüştür. Bu grupta yer alan en düşük ortalamaya sahip soru "0,595; 3/5; % 61; 0,3 ve % 35,5 sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralayanız" olmuştur. Öğrencilerin verilen değerleri karşılaştırabilecek şekilde uygun değerlere çeviremedikleri görülmüştür. İşlemlerin etkileri ile ilgili sorulardaki başarı ortalamaları % 48,7 olarak bulunmuştur. Bu grupta öğrencilerin zorlandıkları sorulardan biri "$54 \div 0,09$ ifadesinin değeri yaklaşık olarak nedir?" sorusu olmuştur. Burada öğrencilerin büyük bir çoğunluğu (% 44,2) 54 sayısından oldukça küçük olduğunu belirten seçeneği işaretlemiştir. Denk ifadeler ile ilgili sorulardan "$0,5 \times 840$'ın eşiti nedir?" sorusunda öğrencilerin yaklaşık % 60'ı seçeneklerdeki ve sorudaki değeri hesaplamaya çalıştığı görülmüştür. Sayma ve hesaplama ile ilgili "yaklaşık olarak kaç gün yaşadınız?" sorusuna öğrencilerin % 45'i doğru yanıt vermiştir. Fakat bu öğrencilerin neredeyse yarısının standart çarpma işlemlerini uyguladıkları görülmüştür. Bunun yanısıra 3. sınıf öğrencilerinin ortalamalarının 4. sınıflardan yüksek olduğu görülmüştür. Cinsiyetler açısından bakıldığında 4 farklı sınıfta da erkeklerin puan ortalamalarının kadınlarınkinden yüksek olduğu görülmüştür. Fakat t testi uygulandığında yalnızca 1. sınıflarda anlamlı farklılık bulunmuştur. Bu çalışma kağıt kalem hesaplamaları ile sezgisel anlayış arasında bir boşluk olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğu okul matematik sınavlarında başarılı iken sayı duyusu testinden düşük puan almıştır.

Kayhan-Altay (2010) çalışmasında 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin sayı duyularını, sınıf düzeylerine, cinsiyete ve sayı duyusu bileşenlerine göre incelenmiştir. Ayrıca öğrencilerin sayı duyuları ile matematik performansları arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunda 184 6. sınıf öğrencisi, 253 7. sınıf öğrencisi ve 147 8. sınıf öğrencisi yer almıştır. Araştırmacı tarafından alanyazındaki sayı duyusu bileşenleri ile ilgili çalışmalar incelenerek sayı duyusu testi geliştirilmiştir. Sayı duyusu testinde yer alan bileşenler; sayıların anlamlarının anlaşılması, sayıları ayrıştırma ve yeniden birleştirme, sayı büyüklükleri, kıyaslama (referans) noktası kullanımı, işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini anlama ile sayı ve işlem bilgisini hesaplama durumunda uygulamadaki esneklik olarak belirlenmiştir. Yapılan faktör analizi sonrasında testin ilk faktörü hesaplamalarda esneklik, diğeri kesirlerde kavramsal düşünme ve üçüncü faktör kıyaslama (referans) noktası kullanımı olarak belirlenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin soruların çözümünde genellikle standart yolları seçtikleri görülmüştür. Öğrenciler sayı duyusunu en çok (% 63.7) 6×6’lık bir karenin $\frac{4}{9}$’ünün boyanması ile ilgili soruda kullanmıştır. Soruda sayı duyusunu kullanan öğrenciler 36 sayısının $\frac{4}{9}$’ünü hesaplamak yerine, $\frac{4}{9}$’ü kolayca hesaplayabilecekleri $\frac{16}{36}$ denk kesrine çevirmişlerdir. Sayı duysunun en çok kullanıldığı diğer soru $372-18$ işlemini yaparken $372-38$ işlemini kullanılması gereken soru olmuştur. Sınıf düzeyi ilerledikçe, sayı duyusu kullanımı düşmektedir. Erkek öğrencilerin kız öğrencilere göre sayı duyusu ortalamaları daha yüksektir fakat istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Öğrencilerin en çok kesirlerde kavramsal düşünme, en az kıyaslama noktası kullanımı sayı duyusu bileşenine başvurmuşlardır. Araştırma sonucunda hesaplamada esneklik ve kıyaslama noktası kullanımı faktörleri arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Öğrencilerin matematik testi performansları ile sayı duyusu puanları arasında pozitif yönde yüksek bir ilişki bulunmuştur.

Harç'ın (2010) yaptığı çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin mevcut çalışmada sayı duyusu olarak adlandırılan değişken "sayı duygusu" adıyla ele alınmıştır. Öğrencilerin sayı duyularının bileşenler bakımından incelemesi, öğrencilerin matematik başarıları ile sayı duyusu kullanımları arasındaki ilişki ve cinsiyetler açısından sayı duyusu kullanımında anlamlı bir fark olup olmadığı incelenmiştir. Ayrıca araştırmada 2009-2010 eğitim öğretim yılına ait matematik ders kitapları ve Amerika, İngiltere, Türkiye ve New Jersey'in ders programları sayı duyusu bileşenleri bakımından incelenmiştir. Araştırmanın örneklemini bir ilköğretim okulunun dört farklı sınıfında öğrenim gören 95 altıncı sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Araştırmacı tarafından altı farklı sayı duyusu bileşenine göre hazırlanmış "sayı duyusu testi" öğrencilere uygulanmıştır. Kullanılan sayı duyusu bileşenleri; sayıların "anlam ve büyüklüklerini anlama", "rakamların eşdeğer gösterimlerini anlama ve kullanma", "işlemlerin etkilerini anlama", "esnek hesaplama", "ölçüm referansları" ve "eşdeğer ifadeleri kullanma ve anlama"dır. Öğrencilerin yanıtları incelendikten sonra farklı stratejiler kullanan veya kavram yanılgılarına sahip olduğu düşünülen öğrenciler ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırmada doğru yanıtlama yüzdelerinin "sayıların eşdeğer gösterimlerini anlama" bileşeni ile ilgili sorularda en yüksek olduğu görülmüştür. Ama bu bileşen altındaki sorular incelendiğinde yanıtların çoğunluğunun standart işlem ve kurallara dayalı olduğu görülmüştür. Benzer şekilde doğru yanıt verme oranının ikinci en yüksek olduğu "esnek hesaplama" bileşeni ile ilgili sorularda sayı duyusu kullanımının düşük olduğu görülmüştür. Doğru yanıtlama yüzdelerinin "işlemlerin etkilerini anlama" bileşeni ile ilgili sorularda en düşük olduğu görülmüştür. "İşlemlerin etkilerini anlama" bileşeni ile ilgili bir kazanıma ders programında yer verilmemiş olmasının bu bileşenle ilgili sorularda doğru yanıtlama oranının düşüklüğünün sebebi olabileceği belirtilmiştir. Öğrencilerin çok az bir kısmının sorulara sayı duyusu kullanarak yanıt verdiği ve büyük bir çoğunluğunun işlem ve kurallı çözümleri kullandığı görülmüştür. Sayı duyusu en sık "ölçüm referansları" bileşeni ile ilgili sorularda kullanılmıştır. Örneğin ağaç yanında bir çocuk resmi verilerek "Şekildeki çocuğun boyu yaklaşık olarak 120 cm ise ağacın boyu yaklaşık kaç cm olur?" şeklindeki soru öğrencilerin en fazla sayı duyusu kullandığı soru olmuştur. Bu sonucun ders programlarında ölçüm referansı bileşeni ile ilgili kazanımları oranının yüksekliği (% 50) ile tutarlı olduğu belirtilmiştir.

Araştırmacı tarafından standart yolları kullanan öğrencilerin kuralları yanlış hatırladıkları, kavramları anlamadıkları ve aralarındaki ilişkiyi kuramadıkları gözlenmiştir. “Bireysel genellemeler” olarak adlandırılan matematiksel olarak doğru olmayan düşünceler ile yanıt verme oranlarının yüksek olduğu görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin “çarpma işlemi büyütür ve bölme işlemi küçültür” şeklinde bir yanılgıya sahip oldukları görülmüştür. Araştırmacı tarafından ders kitaplarının incelemesi sonucunda etkinlikler içinde en fazla “işlemlerin etkilerini anlama”, örnek ve alıştırmalar içindeyse en fazla sayıların anlam ve büyüklüklerini anlama” bileşenine yer verildiği gözlenmiştir. Ayrıca ders kitaplarında “eşdeğer ifadeleri anlama ve kullanma” bileşeni ile ilgili etkinlik, örnek ve alıştırmaya rastlanmamıştır. Öğrencilerin sayı duyusu kullanımları ile kitaplarda yer alan etkinliklerin yüzdesi (“işlemlerin etkilerini anlama” bileşeni hariç) arasında paralellikler olduğu görülmüştür. Ayrıca cinsiyet ile sayı duyusu kullanım durumu arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Bunun yanında öğrencilerin matematik karne notları ile sayı duyusu kullanımları arasında pozitif ve anlamlı bir ilişkinin olduğu görülmüştür.

Mohamed ve Johnny (2010) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerinin matematik başarısı ile sayı duyusu performansları arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmış ve öğrencilerin zayıf oldukları sayı duyusu bileşenleri belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmaya ulusal matematik sınavında yüksek başarıya sahip Malezyalı 32 dördüncü sınıf öğrencisi katılmıştır. Araştırmada McIntosh ve diğerleri (1997) tarafından geliştirilen ölçme aracı kullanılmıştır. Ölçme aracının içerdiği bileşenler sayıların ve işlemlerin anlamlarını anlama, sayıların büyüklüklerini tanıma, sayıları ayrıştırıp yeniden birleştirebilme, işlemlerin sayılar üzerindeki etkisini tanıma, hesapsal sonuçların mantıklılığına karar verme olarak belirtilmiştir. Bulgular değerlendirildiğinde öğrencilerin yarısından fazlasının sayı duyusu bakımından zayıf olduğu belirlenmiştir. Ulusal matematik sınavı ve sayı duyusu testindeki başarıları arasında çok küçük de (r=0.28) olsa pozitif yönlü bir ilişki belirlenmiştir. Öğrencilerin ondalık ve kesirli sayıları içeren sorularda öğrencilerin başarılarının düşük olduğu görülmüştür. Öğrencilerin genel olarak zayıf oldukları bileşenler, mantıksal karar verebilme, işlemlerin sayılar üzerindeki etkilerini anlayabilme olduğu görülmüştür. Ayrıca, öğrencilere yazılı hesaplamaya dayalı işlemleri öğretmek, anlamlı öğrenmelerini geliştirmediği belirlenmiştir.

Sayı duyusunun sınıf düzeyi, cinsiyet veya matematik başarısı ile ilişkisini inceleyen çalışmalarda;

- Sayı duyusu kullanımının oldukça düşük olduğu (Harç, 2010; Kayhan-Altay, 2010; Menon, 2004; Mohamed ve Johnny, 2010; Singh, 2009; Yang, 2005),
- Soruların yapısının sayı duyusu kullanımını etkilediği, düşünmeye teşvik eden sorularda (Kayhan-Altay, 2010) ve düz işlemler yerine bir bağlam içerisinde verilen problemlerde (Sturdevant, 1991) sayı duyusu kullanımının arttığı,
- Rasyonel ve ondalık sayı alanlarını (çeşitlerinin) içeren durumların öğrencilerin zorlandığı en temel konulardan biri olduğu (Kayhan-Altay, 2010; Mohamed ve Johnny, 2010; Singh, 2009),
- Dil, uzamsal düşünme ve hafıza yetenekleri ile sayı duyusu arasında pozitif bir ilişki olduğu (Jordan, Glutting ve Ramineni; 2009),
- Sayı duyusu ve matematik başarısı arasında pozitif ve anlamlı bir ilişkinin olduğu (Harç, 2010; Jordan, Glutting ve Ramineni, 2009; Kayhan-Altay, 2010; Mohamed ve Johnny, 2010; Sturdevant, 1991),
- Sayı duyusu yeteneğinin öğrencilerin daha sonraki yıllarda gösterecekleri matematik başarıları bakımından güçlü bir yordayıcı olduğu görülmüştür (Mohamed ve Johnny, 2010).
- Kayhan-Altay'ın (2010) ve Mohamed ve Johnny'nin (2010) çalışmasında sınıf düzeyi ilerledikçe, sayı duyusu kullanma oranlarının azaldığı ve standart işlemleri uygulama eğilimlerinin arttığı görülürken, Singh'in (2009) çalışmasında ise sınıf seviyeleri arttıkça sayı duyusu testlerindeki puan ortalamalarının arttığı görülmüştür.

- Sturdevant'ın (1991) çalışmalarında işlemlerin etkilerini anlama bileşeni ile ilgili sorularda diğer bileşenlere göre biraz daha başarılı oldukları belirtilirken Harç'ın (2010), Mohamed ve Johnny'nin (2010) ve Singh'in (2009) çalışmalarında doğru yanıtlama yüzdelerinin "işlemlerin etkilerini anlama" bileşeni ile ilgili sorularda düşük olduğu görülmüştür. Buna ek olarak İşlemlerin etkilerini anlama" bileşeni ile ilgili bir kazanıma ülkemizdeki ders programında yer verilmemiş olduğu belirtilmiştir (Harç, 2010). Harç'ın (2010) çalışmasında sayı duyusunun en sık "ölçüm referansları" bileşeni ile ilgili sorularda kullanıldığı belirtilmiştir. Menon'un (2004) çalışmasında tahmin gerektiren sorularda öğrencilerin yetersizliklerinin olduğu vurgulanmıştır.
- Öğrencilerin, standart işlemlere ve kurallara aşırı güvenlerinin olduğu ve soruların çözümünde çoğunlukla bu yöntemleri seçtikleri (Harç, 2010; Kayhan-Altay, 2010; Singh, 2009; Yang, 2005), ayrıca standart yolları kullanan öğrencilerin kuralları yanlış hatırladıkları veya "çarpma işlemi büyütür ve bölme işlemi küçültür" şeklindeki "bireysel genellemeler" olarak tanımlanan matematiksel olarak doğru olmayan düşünceler ile yanıt verme oranlarının yüksek olduğu görülmüştür (Harç, 2010).
- Singh'in (2009) ve Kayhan-Altay'ın (2010) çalışmasında erkek öğrencilerin ve Menon'un (2004) çalışmasında ise 4. sınıftaki kızların sayı testlerinden aldıkları puan ortalamaları daha yüksek çıktığı görülmüştür. Harç'ın (2010), Kayhan-Altay'ın, (2010), Menon'un (2004) ve Sturdevant'ın (1991) çalışmalarında hiçbir sınıf düzeyinde sayı duyusu kullanımı bakımından cinsiyetler arasında anlamlı bir farklılık olmadığı belirlenmiştir. Singh'in (2009) çalışmasında ise cinsiyetler arasında erkek öğrenciler lehine anlamlı farklılık yalnızca 1. sınıf öğrencilerinde çıkmıştır.

2.1.2 Sayı duyusunun bazı matematiksel beceriler (tahmin, gösterim, yazılı hesap, problem çözme) ile ilişkisini inceleyen çalışmalar

Pike ve Forrester (1996) tarafından yapılan çalışmada sayı duyusu ve ölçüm tahmini arasındaki ilişki incelenmiştir. Bunun yanında yaşın, sayı duyusu ve tahmin yeteneği üzerindeki etkisi ile sayı duyusunun tahmin yeteneği üzerindeki etkisi incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 6 ile 11 yaşları arasındaki 62 ilköğretim öğrencisi oluşturmuştur. Yapılan çalışmada incelenen sayı duyusu bileşenleri; zihinsel hesaplama, sayıların büyüklüklerini anlama ve sayılar arasındaki ilişkileri anlama olarak belirlenmiştir. Her bir bileşeni değerlendirmek amacıyla bilgisayarların kullanıldığı 3 farklı etkinlik uygulanmıştır. Zihinsel hesaplama sayı duyusu bileşeni ile ilgili ilk etkinlikte öğrencilerden konuşma balonları içinde yer alan aritmetik problemleri çözmeleri istenmiştir. Problemlerin zorluk seviyeleri öğrencilere göre düzenlenmiştir. İkinci etkinlik sayı büyüklüklerini anlama ile ilgili olarak hazırlanmıştır. Bu amaçla bilgisayarda bir tel üzerine 10 tane portakal asılmış ve bu portakalların üzerinde 0-100 ve 0-1000 arasında sayılar yazılmıştır. Portakallar hareket ettirilerek öğrencilerden yeni sayılarının ne olacağını belirlemeleri beklenmiştir. Son etkinlik sayıların ilişkilerini anlama ile ilgili olarak hazırlanmıştır. Bu etkinlikte öğrencilere, verilen ifadeyi kaç farklı yolla çözebilecekleri sorulmuştur. Bu noktada öğrencilerin çözüm yolu üretemedikleri noktada Vygotsky'nin yakın gelişim alanı (zone of proximal development) kavramına uygun olarak destek sunulmuştur. Burada öğrenciler sunulan destek seviyesine göre puanlar almıştır. Tahmin yeteneklerini değerlendirmek amacıyla uzunluk ve alan ile ilgili ayrı etkinlikler uygulanmıştır. Uzunluk tahmini ile ilgili etkinlikte farklı uzunluklardaki dallar üzerine kaç tane uğur böceği sığabileceğini, alan ölçme ile ilgili etkinlikte ise bir göl üzerindeki yapraklar üzerine kaç tane uğur böceği sığabileceği şeklinde sorular yer almaktadır. Öğrencilerin uzunluk tahmininde alan tahminine göre daha iyi oldukları görülmüştür. Yaş grupları arasında zihinsel hesaplama bakımından farklılık bulunamamıştır. Öğrencilerin 1-100 arasındaki sayıların sayı büyüklüklerini belirlemede 1-1000 arasındaki sayılara göre daha iyi oldukları görülmüştür. Öğrencilerin yaşlarının artması tahmin yeteneklerini etkilemezken, sayı duyularının yaş ile birlikte geliştiği görülmüştür. Bununla birlikte uzunluk tahmini ve sayı duyusu arasında yüksek bir korelasyon bulunmazken, alan tahmini ve sayı duyusunun üç bileşeni arasında yüksek bir korelasyon belirlenmiştir. Sayı duyusu bileşenleri arasında yapılan korelasyon incelemesinde, zihinsel hesaplama ile sayı büyüklüklerini anlama ve sayı ilişkilerini anlama arasında yüksek korelasyon çıkmıştır.

Reys ve Yang (1998) tarafından 6 ve 8. sınıf öğrencilerinin sayı duyuları hakkında bilgi sağlamak ve yazılı hesap ile sayı duyusu arasındaki bağlantıyı keşfetmek amacıyla bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla 115 6. sınıf öğrencisine ve 118

8. sınıf öğrencisine 40 sorudan oluşan sayı duyusu testi ve 20 sorudan oluşan yazılı hesap testi uygulanmıştır. Sayı duyusu testinin ilk 20 maddesi yazılı hesap testinin maddeleri ile paraleldir. Ayrıca 17 öğrenci ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonucunda görülmüştür ki öğrencilerin yazılı hesap performansları, sayı duyusu testinden daha yüksektir. Görüşmeler sırasında öğrencilere alternatif çözüm yollarının olup olmadığı sorulduğunda öğrenciler sayı duyularını kullanabildiği görülmüştür. Bir başka ifade ile öğrenciler yazılı hesap yapmaya eğilimlidir fakat cesaretlendirildiklerinde sayı duyusunu kullanabilmiştir. Ayrıca öğrencilerin kesirli sayılar ve ondalık sayılar arasında bağlantı kurmakta zorlandıkları görülmüştür.

Yang ve Huang (2004) tarafından hesapsal performans, resimsel gösterim, sembolik gösterim ve sayı duyusu arasındaki ilişkinin incelenmesi amacıyla bir çalışma gerçekleştirilmiştir. 627 6. sınıf öğrencisine ardışık 4 hafta boyunca sırasıyla hesapsal performans testi (WCT), resimsel gösterim testi (PRT), sembolik gösterim testi (SRT) ve sayı duyusu testleri (NST) testleri uygulanmıştır. 16 maddelik sayı duyusu testinde incelenen bileşenler sayı ve işlemlerin temel anlamalarını anlama, sayı büyüklüklerini tanıma, referans noktası kullanabilme ile uygun stratejiye seçme ve karar vermedir. One-way ANOVA testi ile WCT, PRT, SRT ve NST testleri arasında (PRT ile NST hariç) anlamlı farklılık bulunmuştur. Öğrencilerin yazılı hesap performans testindeki başarıları yüksektir. PRT testindeki performansları ise en düşüktür. Öğrenciler yazılı hesap testindeki başarılarını diğer testlerde yansıtamamıştır. Çalışmada öğrencilerin yüksek yazılı hesap başarısı anlamlı öğrenmeye eşlik edemediği belirtilmiştir.

Işık ve Kar'ın (2011) gerçekleştirdiği çalışmada, mevcut çalışmada sayı duyusu olarak adlandırılan değişken "sayı algılama" ismiyle ele alınmıştır. Çalışmada sayı duyusu ve rutin olmayan problem çözme beceri düzeyi arasında olası bir ilişkinin varlığı araştırılmıştır. Çalışmaya 4 farklı ilköğretim okulunun 6, 7, ve 8. sınıflarında öğrenim gören 240 öğrenci dahil edilmiştir. Öğrencilerin sayı duyusu düzeylerinin belirlenmesi için 7 soruluk bir sayı duyusu testi (English,1997; akt: Işık ve Kar, 2011) ve rutin olmayan problem çözme becerilerinin incelenmesi için de (English ve Halford, 1995; akt: Işık ve Kar, 2011) 5 rutin olmayan problem içeren bir test Türkçe'ye çevrilerek kullanılmıştır. Sayı duyusu testi, doğal sayıların büyüklük olarak birbiri ile ilişkilerini, sayı ilişkilerinin temsilini, hesaplamalarda sonucu tam çıkmayan çeşitli işlemleri ve problem yapılarını düşünmeye yönelik 7 açık uçlu soruyu içerecek şekilde hazırlanmıştır. Rutin olmayan problem çözme becerilerini ölçen test tümdengelim, tümevarım ve uzamsal muhakemeyi gerektiren 5 problemi içerecek şekilde hazırlanmıştır. Sayı duyusu test puanlarına göre öğrenciler sayı duyusu bakımından yüksek, normal ve düşük olacak şekilde üç düzeye ayrılmıştır. Her sınıf düzeyinde sayı duyusu yüksek olan öğrencilerin yüzdesinin düşük olduğu görülmüştür. Fakat bunun yanında yüksek sayı duyusuna sahip öğrencilerin yüzdesinin sınıf düzeyindeki yükselişe paralel olarak arttığı belirlenmiştir. Çalışmada öğrencilerin yaptıkları işlemleri yorumlamada güçlük yaşadıkları görülmüştür. Araştırmanın bir diğer sonucu olarak öğrenciler çözümlerinin gerekçelerini açıklarken genellikle kural temelli yaklaşımları daha fazla kullanmıştır. Sayı duyusu testinden alınan puanlara göre 6 ve 8. sınıflar arasında istatistiksel olarak 8. sınıfların lehine anlamlı bir farklılık olduğu tespit edilmiştir. Araştırmanın bir diğer sonucu olarak sayı duyusu yüksek öğrencilerin rutin olmayan problem çözme becerilerinin de yüksek olduğu görülmüştür.

Sayı duyusunun bazı matematiksel beceriler (tahmin, gösterim, yazılı hesap) ile ilişkisini inceleyen çalışmalarda;

- 6, 7, ve 8. sınıf öğrencileri içinde sayı duyusu testinde başarılı olanların sayısının az olduğu, fakat bunun yanında sınıf seviyesi arttıkça sayı duyusu testinde başarılı olan öğrenci sayısının da arttığı (Işık ve Kar, 2011), 6 ile 11 yaşları arasındaki öğrencilerin sayı duyularının yaş ile birlikte geliştiği (Pike ve Forrester, 1996),
- Öğrencilerin yaptıkları işlemleri ve buldukları sonuçları yorumlamada güçlük yaşadıkları ve çözümlerinin gerekçelerini açıklarken genellikle kural temelli yaklaşımları kullanma eğiliminde oldukları (Işık ve Kar 2011),
- Öğrencilerin kesirli sayılar ve ondalık sayılar arasında bağlantı kurmakta zorlandıkları (Reys ve Yang, 1998),
- Öğrencilerin yazılı hesap performanslarının, sayı duyusu testinden daha yüksek olduğu (Reys ve Yang, 1998; Yang ve Huang, 2004), yüksek yazılı hesap başarısının anlamlı öğrenmeye eşlik edemediği (Yang ve Huang, 2004),

- Öğrencilerin yazılı hesaplara oldukça güvendikleri fakat cesaretlendirildiklerinde sayı duyusunu kullanabildikleri (Reys ve Yang, 1998),
- Uzunluk tahmini ve sayı duyusu arasında yüksek bir korelasyon bulunmazken, alan tahmini ve sayı duyusunun üç bileşeni arasında yüksek korelasyon olduğu (Pike ve Forrester, 1996),
- Farklı gösterimler arasındaki geçişi yapabilen öğrencilerin sayı duyusunun yüksek olduğu (Yang ve Huang, 2004),
- Sayı duyusu yüksek öğrencilerin rutin olmayan problem çözme becerilerinin de yüksek olduğu görülmüştür (Işık ve Kar, 2011).

2.1.3 Sayı duyusunu geliştirmeye yönelik yapılan çalışmalar

Markovits ve Sowder (1994) tarafından yapılan çalışmada 7. sınıf öğrencilerinin sayı duyularını geliştirmek amacıyla bir öğretim programı tasarlanmıştır. Din ağırlıklı eğitim veren özel bir okulda 12 erkek öğrenciye zihinsel hesaplama, ondalık sayılar, kesirli sayılar ve tahmin ile ilgili becerileri içerecek şekilde 4 birimden oluşan öğretim programı uygulanmıştır. Bunlardan ilki zihinden hesaplama konusu ile ilgili geliştirilen birimde 10'un kuvvetleriyle çarpma, 2, 4 ve 8 rakamlarıyla çarpma, iki basamaklı sayıların toplama ve çıkarma işlemlerini yapma, 10'un katlarına bölme ve birden çok işlemlerin yer aldığı problemlerde hangi işlemin daha önce yapılması gerektiğine karar verme ile ilgili problemler yer almaktadır. Bu birimde öğrencilerin basamak kavramını ve sayı özelliklerini geliştirmeleri beklenmektedir. Daha sonra ikinci birimde ondalık sayılar için bir ders planı hazırlanmıştır. 12,7 ve 12,31 gibi ondalık sayı örnekleri verilerek öğrencilerin bu sayıları karşılaştırması istenmiştir. Üçüncü birim olan kesirler biriminde kesirlerin karşılaştırılması kapsamında öğrencilerden kesirler ile ondalık sayılar arasındaki ilişkileri keşfetmeleri ve büyüklük olarak karşılaştırmaları istenmiştir. Tahmin becerileri ile ilgili olan 4. birimde öğrencilerden ilk önce tahmin yapmaları ve tahminlerinin doğruluğu konusunda tartışmaları istenmiştir. Araştırmanın sonunda araştırmacılar geliştirilen bu öğretim yönteminin öğrencilerin sayı duyusu becerilerini geliştirmede etkili olduğu bulunmuştur.

Kaminski (2002) tarafından sınıf öğretmen adayları ile yapılan çalışmada matematik eğitimi dersinin bir bileşeni olarak geliştirilen sayı duyusu programının etkili olup olmadığına bakılmıştır. 43 öğretmen adayı ile çalışmalar yürütülmüştür. Program 43 2. sınıf öğretmen adayına uygulanmıştır. Haftada 4 saat olmak üzere 12 hafta sürmüştür. İlk 4 hafta basamak değerlerine göre gruplama, grupları değiştirme, sayıları sıralama ve karşılaştırma, 5, 6 ve 7. haftalarında verilen ifade çiftlerinin denk olup olmadığını bulma, hesabın gerekli olup olmadığı durumlara karar verme, son 6 hafta ise ağırlıklı olarak rasyonel sayı alanında zihinsel hesaplama, hesapsal tahmin ile ilgili etkinlikler yapılmıştır. Öğretmen adayları akran etkileşimleri ve yaptıkları tartışmalar ile matematiksel bilgiyi yorumlama ve oluşturma şansı bulmuştur. Uygulama sonunda, öğretmen adaylarının sayılar arasında çoklu ilişkiler geliştirebildikleri görülmüştür. Öğretmen adayları rasyonel sayılarla ilgili işlemlerde hala kuralları uygulama eğilimde olmalarına rağmen matematiksel işlemleri anlamlandırabilmişlerdir. Yazılı hesaplama öğretmen adaylarının en güçlü yönleridir fakat zihinsel hesaplama kullanım eğilimleri artmıştır. Rasyonel sayı alanında kavramsal anlayış eksiklikleri bulunmaktadır bu etkinlikler ile bunları revize etmişlerdir.

Sayı duyusunu geliştirmeye yönelik çalışmalarda;

- Öğrencilerin ve sınıf öğretmen adaylarının standart hesaplamalara yönelik eğilimleri devam ettiği halde sayı duyusunun uygun öğretimler ile geliştirilebildiği görülmüştür (Kaminski, 2002; Markovits ve Sowder, 1994).

2.1.4 Farklı ülkelerdeki bireylerin sayı duyularını inceleyen çalışmalar

Reys vd.'nin (1999) gerçekleştirdiği çalışmada Avustralya, İsveç, Amerika ve Tayvan ülkelerinden 8 ile 14 yaş aralığındaki öğrencilerin sayı duyuları incelemiştir. Araştırmacılar tarafından sayıların anlamlarını ve büyüklüklerini anlama, sayıların denk gösterimlerini anlama ve kullanma, işlemlerin etkilerini anlama, denk açıklamaları anlama ve kullanma, zihinden ve yazılı hesaplama için esnek hesaplama ve sayma stratejileri kullanma, ölçmede referans noktası sayı duyusu bileşenlerini içeren soruların yer aldığı sayı duyusu testi geliştirilmiştir. Sayı duyusu testi her bir ülkeden yaklaşık 110 ile 160 arasında öğrenciye uygulanmıştır. Sayı duyusunu kullanmaya teşvik etmek amacıyla testin her bir maddesinin yanıtlandırılması için 30-45 saniye kadar süre ayrılmıştır. Sayı duyusu becerileri ile ilgili olarak ülkeler arasında farklılıklar olduğu ama genel olarak tüm ülkelerdeki öğrencilerin başarılarının düşük olduğu görülmüştür. Sayı duyusu becerisindeki yetersizliğin farklı ülkeler için ortak bir sorun olduğu belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin ondalık sayılar ile kesirli sayıları ilişkilendirmede yaşadıkları zorlukların dikkat çektiği belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin referans noktası kullanımlarının da düşük olduğu görülmüştür.

Aunio vd.'nin (2006) yaptığı çalışmada yaş, cinsiyet ve ulusun sayı duyusu kullanımına olan etkisi incelenmiştir. Araştırmacılar 40 soruluk Utrecht Erken Dönem Sayı Testini (Utrecht Early Numeracy Test) yaşları 4,5 ve 7,5 arasında değişen 130 Çinli ve 203 Finli öğrenciye uygulamıştır. İlk 20 soru ilişkisel sorular ve son 20 soru da sayma becerileri ile ilgilidir. Çinli çocuklar Finli çocuklara göre hem ilişkisel sorularda hem de sayma sorularında daha yüksek başarı elde etmiştir. Sayı duyuları bakımından cinsiyetler arasında bir fark bulunamamıştır. Çinli ve Finlandiyalı öğrencilerin ilişkisel beceriler ile ilgili sorularda ve sayma becerileri gerektiren sorulardaki puanlarının yaşa bağlı olarak arttığı görülmüştür.

Markovits ve Pang (2007) tarafından yapılan çalışmada Kore ve İsrail'deki 6. sınıf öğrencilerinin sayı duyusu kullanımını gerektiren görevlerdeki başarıları karşılaştırılmıştır. 138 İsrailli ve 137 Koreli 6. sınıf öğrencisine 30 açık uçlu soru yöneltilmiştir. Bu maddeler sırasıyla 12 tane rutin soru, 12 tane sayı duyusu ile ilgili, 6 tane de inanç sorularıdır. Burada yöneltilen sorular doğrudan hesaplama ile de çözülebilecek sorulardır çünkü burada öğrencilerin kullanacakları strateji tiplerini belirlemek amaçlanmaktadır. Çalışmanın sonunda Kore ve İsrailli öğrencilerin sorulara yaklaşımlarının farklı olduğu belirlenmiştir. İsrailli öğrencilerin daha fazla sayı duyusu kullanma eğilimde olduğu görülmüştür. Koreli öğrenciler ise hesaplama yapma eğilimindedirler fakat rehber olduğunda ve hesaplama yapmaları istendiğinde sayı duyusunu kullanmışlardır. Rehber olmadığında yine hesaplama yapma eğilimde olmuşlardır. İsrailli ve Koreli öğrenciler arasında ortaya çıkan bu farkın kültürel farklılıklar, öğretmen inançları ve ders programlarında geleneksel hesaplamaya yapılan vurgunun etkili olduğu belirtilmiştir. Bunun dışında genel olarak öğrenciler tam sayıları içeren sorularda ondalık ve kesirli sayılara göre daha başarılı olmuşlardır. Uygun referans noktası kullanımında öğrenciler zorlanmıştır.

Farklı kültürlerdeki bireylerin sayı duyularını karşılaştıran çalışmalarda;

- Öğrencilerin ondalık sayılar ile kesirli sayıların ilişkisi ile ilgili yetersizliklerinin olduğu (Reys vd., 1999), tam sayıları içeren sorularda ondalık ve kesirli sayılara göre daha başarılı oldukları (Markovits ve Pang, 2007),

- Öğrencilerin referans noktası kullanımlarının düşük olduğu (Markovits ve Pang, 2007; Reys vd., 1999),
- Sayı duyuları bakımından cinsiyetler arasında bir fark olmadığı (Aunio vd., 2006),
- Kültürün sayı duyusu becerisi ile ilgili olarak farklılıklara sebep olduğu (Aunio vd., 2006; Markovits ve Pang, 2007; Reys vd., 1999),
- Sayı duyusu becerisindeki yetersizliğin birçok ülke için geçerli olan bir sorun olduğu (Reys vd., 1999),
- Öğretim sırasındaki standart hesaplamalara ve tam sonuç elde etmeye verilen değerin sayı duyusu kullanımını olumsuz etkilediği görülmüştür (Markovits ve Pang, 2007; Reys vd., 1999). Örneğin, geleneksel hesaplamalara verilen önemin fazla olduğu program ile öğrenim gören Koreli öğrencilerin teşvik edildiğinde sayı duyusunu kullanabildikleri halde rehber olmadığında yine standart hesaplama yapma eğilimini devam ettirdikleri görülmüştür (Markovits ve Pang, 2007).

2.2 Üslü Sayılara Yönelik Yapılan Çalışmalar

Sastre ve Mullet (1998) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin a^n tipindeki ifadelerin büyüklüğünü tahmin etmek için taban ve kuvvet ile ilgili bilgilerini sezgisel olarak nasıl birleştirdikleri incelenmiştir. Araştırma grubu olarak 49'u 18 ile 19 yaşları arasında; 30'u 16-17 yaşlarında ve 28'i 12-13 yaşlarında olacak şekilde 108 İspanyol öğrencisi seçilmiştir. Öğrencilere üzerinde 12 farklı sayının yer aldığı 2×2 cm boyutlarında 12 kart verilmiştir. Kartların üstünde tabanları 5, 7 ve 9 ile üsleri 2, 3, 4 ve 5 sayılarının kombinasyonları (5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 7^2, 7^3, 7^4, …) olacak şekilde 12 farklı üslü ifade yazılmıştır. Öğrencilerden bu ifadelerin büyüklüklerini 60 cm'lik bir cetvel üstünde göstermeleri istenmiştir. Öğrencilere ilk olarak en büyük ve en küçük değer oldukları belirtilerek 5^2 ve 9^5 sayılarının yer aldığı kartlar ve daha sonra diğer kartlar karışık sırada verilmiştir. Öğrencilerin kağıt kalem veya bilgisayar kullanarak üslü ifadelerin değerlerini bulmalarına izin verilmemiştir. Her öğrenci ile ayrı ayrı gerçekleştirilen uygulama yaklaşık 45 dakika sürmüştür. Analiz aşamasında öğrencilerin cetvel üstünde belirttiği yerler (0-600 mm arasında) sayısal verilere çevrilmiştir ve daha sonrasında grafikler ile modeller oluşturulmuştur. Modellerde 5, 7 ve 9 tabanlarının her biri için bir eğri çizilmiştir. Örneğin 5 tabanına göre oluşturulan eğri, yatay eksende kuvvetler (2, 3, 4 ve 5) ve dikey eksende 5^2, 5^3, 5^4 ve 5^5 ifadeleri için öğrencilerin belirttiği büyüklükler yer alacak şekilde 2 boyutlu bir düzlem üstünde gösterilmiştir. 7 ve 9 eğrileri de aynı şekilde çizilerek toplamda 3 eğri oluşturulmuştur. Oluşturulan modellerde istenen 6 özellik şu şekilde belirtilmiştir: (a) farklı 3 eğri; (b) artan üç eğri; (c) kuvvetin etkisinin tabanın etkisinden büyük olması; (d) eğrilerin birbirlerine göre ıraksak olması; (e) eğriler arasındaki uzaklığın birbirine eşit olmaması (7 tabanı için çizilmiş eğrinin 5 tabanı için çizilen eğriye her zaman 9 tabanı için çizilen eğriden daha yakın olması); (f) eğimleri artan üç eğri. Bu 6 özelliği hiyerarşik olarak kullanan öğrencilerden 4 farklı grup oluşturulmuştur. İlk gruptaki 14 öğrencinin modelleri a ve b özelliklerini taşımış yani 3 paralel doğrudan oluşmuştur. Öğrencilerin modellerinde tabanın ve üssün değeri büyüdükçe ifadenin değeri büyümüştür. Burada öğrencilerin kullandıkları anahtar özellik taban olmuştur ifadenin büyüklüğünü tabanın değeri daha fazla etkilemiştir. Burada öğrencilerin ifadenin büyüklüğünü oluştururken kullandıkları birleştirme formülleri $f(taban + kuvvet)$ olmuştur. İkinci gruptaki 18 öğrencinin modelleri a, b ve c özelliklerini içermiştir. Bu gruptaki öğrencilerin ifadenin büyüklüğünde kuvvetin etkisinin tabandan daha fazla olduğunu fark etmiştir. Bu gruptaki öğrencilerin kullandıkları büyüklük fonksiyonun yine toplamsal fakat $f(kuvvet + taban)$ olduğu belirtilmiştir. Üçüncü gruptaki öğrencilerin modelleri d özelliğini de yani ıraksak olma özelliğini de taşımıştır. Bu gruptaki öğrenciler tabanının etkisinin üssün seviyesi ile orantılı olduğunu fark etmiştir. Öğrencilerin kullandıkları büyüklük fonksiyonunun çarpımsal olarak $f(kuvvet \times taban)$ olduğu belirtilmiştir. Dördüncü gruptaki 19 öğrencinin doğru modelle yaklaşık olarak uyumlu olduğu 6 özelliği de taşıdığı belirtilmiştir. Diğer öğrencilerin modelleri ise bu özellikleri hiyerarşik sırada içermemiştir. Veriler yaş gruplarına göre değerlendirildiğinde 18 yaşındaki öğrenci modellerinin yaklaşık olarak doğru modele en yakın olduğu görülmüştür. 13 yaşındaki öğrencilerin modellerinin 3 paralel doğru olduğu ve 16 yaşındaki öğrencilerin ıraksaklık özelliğini sıklıkla kullandıkları görülmüştür. Bunların yanısıra öğrencilerin üstel ifadeleri karşılaştırırken ve sezgisel olarak tahmin ederken zorlandıkları belirtilmiştir. Büyük yaştaki öğrencilerin büyüklüklere karar verirken çarpımsal modeli daha fazla ve küçük yaştaki öğrencilerin ise toplamsal modeli daha fazla kullanma eğiliminde olduğu görülmüştür.

Şenay (2002) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin üslü ve köklü ifadelere yönelik sahip oldukları hataların ve yanılgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın örneklemini 9 farklı genel liseden 729 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Öğrencilere araştırmacı tarafından geliştirilen 20 maddelik çoktan seçmeli bir test uygulanmıştır. Sonrasında öğrencilerin bir kısmı ile görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerin tabanları veya üsleri aynı olan ifadeler ile ilgili kuralları karıştırdıkları ve negatif kuvvete sahip üslü ifadeler ile işlem yapamadıkları belirtilmiştir. Örneğin "$a^{-2} = 5^{-2} + 12^{-2}$ ise pozitif a değeri nedir?" sorusunda öğrencilerin $a = 5 + 12$ veya $a^{-2} = 25 + 144 = 169 = 13^2 \Rightarrow a = 13$ şeklinde hatalar yaptıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerde bir üslü ifadenin belirtilen kuvvetini almada zorluklar yaşadıkları belirtilmiştir. Örneğin $(a^{-3})^2$ ifadesinde parantez dışındaki üssü, parantez içindeki üssün üssü gibi görerek ifadenin eşitini a^9 olarak bulmuşlardır. Öğrencilerin yaptıkları önemli hatalardan biri üssün işaretini tabanın işaretine etki ettirmek olmuştur. Örneğin öğrencilerden a^{-2} ifadesinin kuvvetindeki (-) değerinin tabana etki edeceğini düşünerek bu ifadenin $-a^2$ ifadesine eşit olduğunu belirtenler olmuştur. Genel olarak öğrencilerin negatif üssü tanımlama ve negatif üslü ifadeler ile işlem yapma konularında güçlük çektikleri belirtilmiştir. Ayrıca çalışmada öğrencilerin üslü sayılar arasında çarpma kuralını bilmedikleri görülmüştür. Örneğin $a \times (-a^4) \times (-a)^2$ ifadesini a^8 şeklinde yazdıkları görülmüştür.

Cengiz (2006) tarafından yapılan çalışmada genel lise öğrencilerinin rasyonel sayılar, üslü ifadeler ve köklü ifadeler konularındaki kavram yanılgıları araştırılmıştır. Araştırmanın örneklemini 163 9. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Ölçme aracı olarak rasyonel sayılar bilgi testi, üslü ifadeler bilgi testi ve köklü ifadeler bilgi testi kullanılmıştır. Üslü ifadeler bilgi testinde 16'sı üslü ifadeleri kavrayabilme ve 6'sı üslü ifadelerde işlem yapabilme ile ilgili olacak şekilde 22 açık uçlu soruyu içerecek şekilde hazırlanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin sayıların 0. kuvvetini alırken $a^0 = a$ veya $a^0 = 0$ şeklinde bir yanılgıya sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin bir reel sayının kuvvetini alırken tabanla üssü çarpma yanılgısına sahip olduğu görülmüştür. Bunun yanında öğrencilerin $(-a)^2 = -a^2$ yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Araştırmacı tarafından bu öğrencilerin üslü sayıları kavrayamadıkları belirtilmiştir. Çalışmada öğrencilerin üslü ifadeler ile çarpma ve bölme ile ilgili kuralları uygularken çeşitli hatalar yaptıkları ve kuralları birbirine karıştırdıkları görülmüştür. Örneğin öğrenciler $2^4 \times 2^2 \times 2^5$ ifadesi için 8^{11}, $2^{4\times2\times5} = 2^{40}$, $6^{4+2+5} = 6^{11}$ şeklinde hatalar yapmıştır. Araştırmacı tarafından üslü sayılarla çarpma ve bölme kuralını tam anlayamadıkları ve anlamlı öğrenme gerçekleşmediği için bu tür yanlışlıklar yapıldığı belirtilmiştir. Öğrencilerin tabanları aynı olan üslü ifadelerin çarpımı ile üsleri aynı olan üslü ifadelerin çarpımı ile ilgili kurallarını birbirine karıştırdıkları görülmüştür. Örneğin bu yanılgıya sahip öğrenciler $2^4 \times 3^4 = 6^8$ veya $2^4 \times 3^4 = (2+3)^4 = 5^4$ şeklinde bir ifadeler yazmıştır. Bunun yanısıra çalışmada belirtilen diğer bir yanılgı ise bölme işleminde tabanları veya üsleri bölmek olarak belirlenmiştir. Bu yanılgıya sahip olan öğrenciler $5^6 \div 5^3 = 5^2$ veya $5^6 \div 5^3 = 1^2$ ifadelerini oluşturmuştur. Bunun yanısıra öğrencilerin çarpım ile ilgili kuralı $5^6 \div 5^3 = 5^9$ şeklinde bölmeye uyguladıkları da görülmüştür. Öğrencilerin tabanları aynı olan üslü ifadeleri bölme ile üsleri aynı üslü ifadeleri bölme kuralını birbirine karıştırdıkları görülmüştür. Örneğin bu yanılgıya sahip bir öğrenci $9^{15} \div 3^{15} = 3^0 = 1$ şeklinde düşünmüştür. Bunların yanında öğrencilerin negatif üssü tam olarak kavrayamadıkları görülmüştür. Negatif kuvvete sahip üslü sayılarla ilgili bir yanılgı tabanla üslü çarpma şeklindedir. Diğer bir yanılgı ise hem tabanın çarpmaya göre tersini alma hem de üssün işaretini tabanın işareti ile çarpmak olduğu görülmüştür. Araştırmada belirlenen diğer bir yanılgı parantez içindeki üssü parantez dışındaki üs ile toplamak olduğu belirlenmiştir. Örneğin bu yanılgıya sahip öğrenci $(3^2)^3 \times (5^3)^2 = 3^5 \times 5^5 = 15^5$ şeklinde işlem yapmıştır. Üslü sayılarda toplama işlemi ile ilgili belirlenen yanılgılardan biri üsleri aynı olan ifadeleri toplarken doğrudan tabanları toplamaktır. Örneğin bir öğrenci $10^3 + 6^3 + 8^3 = 24^3$ şeklinde yanıt vermiştir. Bunun yanısıra $2^4 + 2^4 + 2^4 = 6^{12}$ ifadesindeki gibi hem tabanları hem de kuvvetleri toplama yanılgısı belirlenmiştir. Öğrencilerin tabanları aynı üslü ifadeleri $3^3 + 3^4 + 3^2 = 3^{11}$ şeklinde toplamaya uyguladıkları görülmüştür. Bunun yanısıra öğrenciler verilen herhangi üslü ifadeyi çarparken/bölerken $8^6 \div 4^2 = 2^3$ gibi direkt olarak tabanları çarpma ve bölme yanılgısına sahiptirler.

Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından yapılan çalışmada kavramsal değişim ve prototip teorisi yolu ile işlemsel ve kavramsal öğrenme bağlamları içerisinde öğrencilerin üslü sayı kavrayış seviyelerini tanımlamak ve analiz etmek amaçlanmıştır. Çalışmada öğrencilerin üslü sayı kavrayış geliştirmek için ilerleme seviyelerinin neler olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın örneklemini 202 lise öğrencisi oluşturmuştur. Tüm öğrenciler testin uygulanmasından 2 ay önce üslü ifadeler ile tanışmıştır. Ölçme aracı olarak 20 maddelik açık uçlu soruların yer aldığı "üslü sayılar başarı testi" kullanılmıştır. Ölçme aracının her bir maddesinde üslü sayı çiftleri verilmiştir ve aralarına (>, =, <) işaretlerinden birini hesap makinası kullanmadan yerleştirmeleri istenmiştir. Sorudaki ifadeler kağıt kalem ile hesaplanamayacak büyüklükte seçilmiştir. Testte yer alan maddeler üslü ifadelerin tabanlarının ve üslerinin negatif veya pozitif tamsayı veya rasyonel sayı olmasına göre alt gruplara ayrılmıştır. 8 soru aynı tabana sahip ve 12 soru aynı üsse sahip üslü sayı çiftlerini karşılaştırma ile ilgilidir. Öğrencileri üslü sayıları kavrayışlarına göre düzeylere ayırmak için kümeleme analizi (LCA) yapılmıştır. Kümeleme analizi sonucunda öğrenciler düşük başarılı (n=52), orta başarılı (n=125) ve yüksek başarılı (n=25) olmak üzere 3 düzeye ayrılmıştır. Her düzeyden 10 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılarak verdikleri yanıtların ardında yatan akıl yürütmeleri incelenmiştir. Düzeyler, içerdikleri öğrencilerin özelliklerine göre kavram öncesi (pre-conceptual), kavramsal seviye (conceptual) ve yeniden oluşturabilme olarak adlandırılmıştır. 1. seviyedeki öğrencilerin üslü sayılarla ilgili kavram görüntülerinin işlemsel anlayışa dayalı olduğu belirtilmiştir. Bu seviyedeki öğrenciler tekrarlı çarpım prototipini üslü ifadelerin tabanları pozitif kesirli sayı ve pozitif tam sayı olduğu durumlara genişletebilmiştir. Bu düzeydeki öğrencilerin büyük çoğunluğunun (% 96.7 ve % 90) taban ve kuvveti doğal sayı olan maddeleri doğru yanıtladıkları görülmüştür. Ancak bu gruptaki öğrencilerin yalnızca % 14.3'ü "$(0,5)^{25}...(0,5)^{31}$" sorusunu doğru yanıtlayabilmiştir. Öğrencilerin yüksek başarı gösterdikleri soruların tekrarlı çarpma prototipi ile çözülebilecek sorular olduğu görülmüştür. Araştırmacılar bu prototipin "kör" uygulamasının sayıların doğasına dikkat etmeden diğer üslü ifadelerde de kullanıldığını belirtmiştir. Bu gruptaki öğrencilerin doğal sayı elemanlarına sahip örneklerde geçerli olan kuralları farklı taban ve üsse sahip sayılara da uyguladıkları görülmüştür. Öğrenciler tekrarlı çarpma prototipini negatif üsse sahip ifadelere uygulayamamıştır. 2. seviyedeki öğrencilerin çoğunluğunun üslü ifadeleri

$b^x.b^y = b^{x+y}$ şeklinde parçalayabildikleri görülmüştür. Örneğin $23^8 < 23^{13}$ yanıtlarının nedenini $23^8 = 23^{13} \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23$ şeklinde açıklamıştır. Bu düzeydeki öğrencilerin en temel özelliği negatif tam sayı içeren üslü ifadeler ile ilgili kavramsal bilgi ve sembolik anlayışa sahip olmaları olarak belirtilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler tekrarlı çarpımı prototipinin doğal sayılar ile sınırlı olmadığını kavramış ve negatif tam sayıya sahip üslü ifadeler için genişletebilmiştir. 3. gruptaki öğrenciler $a^{\frac{x}{y}}$ biçimindeki üslü sayıları kök kavramını kullanarak yeniden organize edebilmiştir. 3. düzeydeki öğrencilerin tekrarlı çarpma prototipini tabanı ve üssü reel sayı olan ifadeler için genişletebildikleri görülmüştür. Örneğin bu gruptaki bir öğrenci $24^{\frac{3}{5}} = (24^{\frac{1}{5}})^3 = (24^{\frac{1}{5}}) \times (24^{\frac{1}{5}}) \times (24^{\frac{1}{5}})$ şeklinde açıklamıştır. Ayrıca aynı öğrenci $(24^{\frac{1}{5}})$ ifadesi için kendisi ile 5 kez çarpıldığında 24'ü veren sayı şeklinde bir açıklama yapmıştır.

Duatepe-Paksu (2008) tarafından üslü ve köklü sayılar ile ilgili alanyazındaki çalışmalarda karşılaşılan güçlükler derlenmiştir ve bu güçlüklerin ortadan kaldırılması için çözüm önerilerinin yer aldığı bir çalışma yapılmıştır. Bunların yanısıra ilköğretim ve ortaöğretim matematik ders programlarında üslü ve köklü sayıların veriliş biçimi değerlendirilmiştir. Araştırmacı tarafından üslü sayılara ilişkin alanyazında belirtilen güçlükler; üslü sayının değerini belirleyememe, sıfırıncı kuvvetin anlamını algılayamama, $(-a)^n$ ile $-a^n$ ifadelerini birbirinden ayırt edememe, negatif üssü algılayamama, x^n ve n^x ifadelerini birbirinden ayırt edememe, üssü çift olan bir sayının değerinin daima pozitif olduğunu fark edememe, üslü sayının kuvvetinin değerini bulmada zorlanma, toplama ve çıkarma işlemlerinde karşılaşılan güçlükler, çarpma ve bölme işlemlerinde karşılaşılan güçlükler ve negatif üslü ifadelerle işlemlerle karşılaşılan güçlükler olarak gruplandırılmıştır. Çalışmada üslü sayılar konusundaki yanılgıların önlenmesi için üslü sayılar konusuna geçilmeden önce mutlaka tam sayılar, rasyonel sayılar, bu sayılarla dört işlem ve mutlak değer konularındaki bilgi eksikliklerinin giderilmesi gerektiği belirtilmiştir. Üslü sayılar konularında planlanacak etkinliklerin işlemsel bilgi yanında kavramsal bilgiyi de destekleyeci olması gerektiğini belirtmiştir. Üslü sayılara ilişkin kuralları hazır olarak vermek yerine kurallara ve formüllere kendisinin ulaştığı etkinliklere yer verilmesi gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca konu öğretimi sırasında sık sık açık uçlu soruları içeren değerlendirmelerle yanılgıların ve güçlüklerin belirlenmesi ve ek etkinlikler ile bu yanılgıların giderilmesi gerektiği belirtilmiştir. Araştırmada öğretim sırasında üslü sayılar ile ilgili konuşma, tartışma, yazma ve dinleme gibi becerilerin kullanıldığı etkinliklere yer verilmesinin öğrencilerin düştükleri yanılgıları belirlemede yardımcı olacağı belirtilmiştir. İlköğretim matematik ders programında bir sayının negatif ve 0. kuvvetini kendisinin keşfetmesine olanak tanındığı, üssü çift olan bir sayının değerinin daima pozitif olduğunu fark edememe yanılgısını gidermek için gerekli vurgunun yapıldığı ve üslü sayılar ile çarpma ve bölme kurallarını keşfetmelerine yönelik etkinliklerin yer aldığı görülmüştür. Ancak ondalık sayılar ve rasyonel sayıların kuvvetlerinin bulunması ile ilgili yeterli sayıda örnek ve etkinliğe yer verilmediği belirtilmiştir.

Avcu (2010) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin üslü ifadeleri karşılaştırırken gösterdikleri zihinsel performanslarında zihinlerindeki ilk örneklerin (prototip) rolünü incelemek amaçlanmıştır. Araştırma grubunu 2 farklı ilköğretim okulunda öğrenim gören 159 8. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Ölçme aracı olarak 20 maddelik açık uçlu soruların yer aldığı “üslü sayılar başarı testi” kullanılmıştır. Ölçek Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından yapılan çalışmadaki ölçme aracından faydalanılarak oluşturulmuştur. Ölçme aracının her bir maddesinde üslü sayı çiftleri verilmiştir ve aralarına (>, =, <) işaretlerinden birini hesap makinası kullanmadan yerleştirmeleri istenmiştir. Sorudaki ifadeler kağıt kalem ile hesaplanamayacak büyüklükte seçilmiştir. Sorular her birinden iki tane olmak üzere 10 farklı prototipi içerecek şekilde hazırlanmıştır. Örneğin tabanı ve üssü doğal sayı olan 2, tabanı doğal sayı iken üssü negatif çift tamsayı olan 2 veya tabanı negatif tamsayı iken üssü negatif tek tamsayı olan 2 soru hazırlanmıştır. 20 sorunun 10’unda aynı üs ve 10’unda aynı tabana sahip üslü sayıların karşılaştırılması istenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin tabanı ve üssü doğal sayı olan ifadeleri karşılaştırmaya yönelik sorularda yüksek başarıya sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin bu soru tipindeki başarılarının nedeni olarak üslü sayı öğretiminde bu prototipin sık kullanılması olabileceği belirtilmiştir. Öğrencilerin farklı sayı alanına sahip taban ve kuvveti içeren ifadelerin yer aldığı sorularda zihinsel karşılaştırmaları yaparken zorlandıkları ve düşük başarı gösterdikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin genel eğilimleri doğal sayı prototipindeki kuralları diğer sayı alanlarını içeren ifadeleri karşılaştırmak için kullanmak olmuştur. Örneğin bunlardan biri “$(0,4)^{-10}...(0.4)^{-12}$” şeklindeki soru olmuştur. Burada öğrenciler tabanları aynı olduğu için yalnızca üslerini $-10 > -12$ şeklinde karşılaştırarak $(0,4)^{-10} > (0,4)^{-12}$ yanıtını vermiştir. Benzer bir yaklaşım en düşük başarının gösterildiği "$(0,5)^{21} ... (0,5)^{17}$" karşılaştırmasının yapılmasının istendiği soruda görülmüştür. Bu soru için benzer şekilde düşünen öğrenciler tabanları aynı olduğu için üsleri karşılaştırarak $(0,5)^{21} > (0,5)^{17}$ şeklinde yanıt vermiştir. Araştırmacı tarafından bu yaklaşımda tabanı ve üssü doğal sayıdan oluşan prototipin etkisinin açıkça görüldüğü belirtilmiştir. Bunun yanında "$(-15)^{-13} ... (15)^{-17}$ karşılaştırmasında $(-)(-)15^{13} = 15^{13}$ ve $(-)(-)15^{17} = 15^{17}$ şeklinde hatalarla karşılaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin genellikle tekrarlı çarpmayı denedikleri görülmüştür. Bu yaklaşımın 2^{-1} ve $2^{\frac{1}{2}}$ gibi sayılarda anlamsız kaldığı belirtilmiştir.

Üslü sayı anlayışlarını ve kavram yanılgılarını inceleyen çalışmalarda;

- Öğrencilerin üstel ifadeleri karşılaştırırken ve sezgisel olarak bir tahminde bulunmada zorlandıkları (Sastre ve Mullet, 1998),
- Üslü sayılar için verilen "tekrarlı çarpım" yaklaşımının reel taban ve üsse sahip ifadeler için de anlamlandırılmasının gerekli olduğu (Pitta-Pantazi vd., 2007).
- 13-14 yaşlarındaki öğrencilerin üslü sayı büyüklüklerindeki artışın toplamsal olduğunu düşündükleri (Sastre ve Mullet, 1998),
- Öğrencilerin tabanı ve üssü doğal sayı olan ifadeleri karşılaştırmaya yönelik sorularda yüksek başarıya sahip oldukları, farklı sayı alanına sahip taban ve kuvveti içeren ifadelerin yer aldığı sorularda zihinsel karşılaştırmaları yaparken zorlandıkları ve düşük başarı gösterdikleri (Avcu, 2010),
- Farklı öğretim kademelerinde öğrencilerin üslü sayılara yönelik yaşadıkları zorluğun ve kavram yanılgısının fazla olduğu (Avcu, 2010; Cengiz, 2006; Duatepe-Paksu, 2008; Şenay, 2002),
- Yaşanılan bu zorlukların üslü sayının değerini belirleyememe, sıfırıncı kuvvetin anlamını algılayamama, $(-a)^n$ ile $-a^n$ ifadelerini birbirinden ayırt edememe, negatif üssü algılayamama, x^n ve n^x ifadelerini birbirinden ayırt edememe, üssü çift olan bir sayının değerinin daima pozitif olduğunu fark edememe, üslü sayının kuvvetinin değerini bulmada zorlanma, toplama ve

çıkarma işlemlerinde karşılaşılan güçlükler, çarpma ve bölme işlemlerinde karşılaşılan güçlükler ve negatif üslü ifadelerle işlemlerle karşılaşılan güçlükler olarak gruplandırılandırılabileceği belirtilmiştir (Duatepe-Paksu, 2008).

3. YÖNTEM

Araştırmada, 8. sınıf öğrencilerinin üslü sayılar ile ilgili sorularda sayı duyularının sayı duyusu bileşenleri bakımından incelenmesi amaçlandığından verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasında temel olarak nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Araştırma deseni, nasıl ve niçin sorularını temel alan, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinlemesine incelemeye olanak tanıyan durum çalışması olarak belirlenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

3.1 Araştırma Grubu

Araştırmanın pilot uygulaması 2011–2012 eğitim öğretim yılında kasım ayının 3 haftasında Denizli İl merkezinde eğitim veren bir devlet okulunun üç 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırmanın asıl uygulaması ise 2011–2012 eğitim öğretim yılında pilottan farklı olarak aynı devlet okulunun yirmi 8. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür.

Pilot ve asıl uygulamanın gerçekleştirildiği okulda dört 8. sınıf şubesi bulunmaktadır ve her şubeye aynı matematik öğretmeni girmektedir. Matematik dersleri hakkında okul matematik öğretmeninden üslü sayıların işlendiği zamana ilişkin bilgi alınmıştır. Matematik derslerinde eğitim öğretim yılının eylül ve ekim aylarında programda yer alan kazanımların hepsinin işlendiği öğrenilmiştir. 4 şubede matematik derslerinin paralel yürütüldüğü ve şubeler arasında başarı bakımından belirgin bir fark olmadığı okul matematik öğretmeni ve okul müdürü tarafından belirtilmiştir.

Araştırmaya dahil olan katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilmiştir (Patton, 2002). Araştırmada daha zengin veri elde etmek için üslü sayı gösterimleri konusunda başarılı olan öğrencilerin seçilmesini sağlayacak bazı ölçütler kullanılmıştır. Öğrencilerin seçiminde kullanılan ilk ölçüt

Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından geliştirilen üslü sayı çiftlerini karşılaştırma testi maddelerin en az 8 tanesine doğru yanıt vermiş olmaktır. Test toplam 108 öğrenciye uygulanmıştır. Testin uygulandığı öğrencilerin şubelere ve cinsiyetlere göre dağılımı Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1: Testin uygulandığı öğrencilerin şubelere ve cinsiyetlere göre frekansları

Şube	Kadın	Erkek	Toplam
8-A	15	8	23
8-B	11	20	31
8-C	11	16	27
8-D	16	11	27
Toplam	53	55	108

Bunun yanı sıra madde güçlüğü bakımından birbirine yakın olan maddelere doğru yanıt verme 2. ölçüt olarak belirlenmiştir. Madde güçlük indeksine göre (Ek-6) üslü sayıları karşılaştırma testinin 1, 9 ve 13. maddeleri çok kolay, 2, 5, 8, 10, 11 ve 15. maddeleri kolay, 7, 14, 4 ve 6. maddeler orta güçlükte ve 16, 12 ve 3. maddeler zor olarak belirlenmiştir. Zor ve orta güçlükte olan maddelerin tamamını doğru yanıtlayan öğrenci olmadığı için ikinci ölçüte göre katılımcılar 2 grup halinde seçilebilmiştir. İlk gruptaki öğrenciler 1, 9, ve 13 numaralı çok kolay maddelerin hepsini doğru yanıtlayan öğrenciler, diğer gruptaki öğrenciler ise bu maddelerin yanında 2, 5, 8, 10, 11 ve 15 numaralı kolay maddelerin en az 5'ini doğru yanıtlayan öğrencilerdir. Yukarıdaki iki ölçütü sağlayan öğrenciler arasından cevabını açıklamalar ile destekleyen öğrenciler katılımcı olarak seçilmiştir.

Belirtilen ölçütü sağlayan öğrenciler içinden 3 öğrenci araştırmanın pilot uygulamasında katılımcı olarak belirlenmiştir. 2 kadın ve 1 erkekten oluşan 3 öğrencinin 1'i 1. gruptaki, 2'si 2. gruptaki öğrenciler arasından seçilmiştir.

Belirtilen ölçütleri sağlayan öğrenciler içinden 20 öğrenci de asıl uygulamada araştırma grubu olarak belirlenmiştir. Katılımcıların tamamı Seviye Belirleme Sınavı hazırlık kurslarına katıldıklarını belirtmiştir. Görüşülen 20 öğrencinin gruplarına ve cinsiyetlerine göre dağılımı Tablo 3.2'de gösterilmiştir. Gizlilik esasına dayanarak araştırmaya katılan öğrencilerin gerçek isimleri kullanılmamış, bunların yerine katılımcılara cinsiyetlerine bağlı kalınarak kod isimler kullanılmıştır.

Tablo 3.2: Asıl uygulamada yer alan katılımcıların cinsiyete ve gruplara göre frekansları

Grup	Kadın	Erkek	Toplam
1. grup (çok kolay olan maddeleri doğru yanıtlayanlar)	4 (Gülin, Esin, Suna, Melis)	2 (Mustafa, Ongun)	6
2. Grup (kolay 6 maddenin en az 5'ini doğru yanıtlayanlar)	7 (Aylin, Şenay, Begüm, Selin, Şeyda, Su, Eyşan)	7 (Cenk, Ali, Meriç, Ege, Aydın, Emre, Buğra)	14
Toplam	9	11	20

3.2 Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama amacıyla;

i) Üslü sayı çiftlerini karşılaştırma testi

ii) Görüşme soruları kullanılmıştır.

Veri toplama araçlarına ait özellikler ve hazırlanma süreçleri her bir veri toplama aracına ilişkin başlık altında ayrı ayrı sunulmuştur.

3.2.1 Üslü sayı çiftlerini karşılaştırma testi

Görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek amacıyla Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından geliştirilen üslü sayı çiftlerini karşılaştırma testi kullanılmıştır (Ek-1). Test 20 maddeden oluşmaktadır. Her bir maddede büyüklük bakımından karşılaştırılmak üzere üslü sayı çiftleri yer almaktadır. Öğrencilerden bilgisayar veya hesap makinesi kullanmadan, maddelerdeki üslü sayıları karşılaştırarak aralarına <, >, veya = işaretlerinden uygun olanının yerleştirilmesi beklenmektedir. Maddelerde yer alan üslü sayıların değerleri kâğıt kalem ile kolayca hesaplanamayacak büyüklüktedir. Burada amaç, hesaplama yapmak yerine üslü sayıların özelliklerini düşünerek karşılaştırma yapmaya yönlendirmektir. Bunun yanı sıra her bir maddede cevaba ulaşırken kullanılan özelliklerin ve düşünme süreçlerinin maddelerin yanındaki boşluklara yazılması istenmiştir. Testin ilk 8 maddesinde karşılaştırılması istenen üslü sayıların tabanları aynı iken kuvvetleri farklı, son 12 sorusunda ise üslü sayıların tabanları farklı aynı iken kuvvetleri aynıdır. Üslü sayıların tabanları ve kuvvetleri negatif, pozitif ve ondalık sayılar olmak üzere farklı sayı alanlarını içerecek şekilde hazırlanmıştır.

Testin son 4 maddesinde yer alan üslü sayıların kuvvetleri kesirli sayıları içermektedir. Öğrenciler bu formdaki üslü sayıları henüz öğrenmemiş oldukları için araştırmada testin negatif ve pozitif tam sayı kuvvetlere sahip üslü sayıların yer aldığı ilk 16 maddesi kullanılmıştır.

3.2.2 Görüşme soruları

Bu araştırmanın nitel verileri araştırmacı tarafından geliştirilen görüşme soruları yardımıyla toplanmıştır. Üslü sayılara yönelik geliştirilen görüşme soruları kullanılarak 8. sınıf öğrencilerinin kullandıkları sayı duyusu bileşenlerinin belirlenmesi hedeflenmiştir.

Görüşme formunun geçerliliğini belirlemek için uzman görüşüne başvurulmuştur. Uzman kanısı almak amacıyla kullanılan form Ek-2'de verilmiştir. Görüşme soruları matematik eğitimi alanında çalışan doktoralı 5 akademisyen, 1 doktora öğrencisi ve 7'si deneyimli öğretmen olan 8 yüksek lisans öğrencisi tarafından incelenmiştir. Uzmanlardan hazırlanmış olan soruların belirtilen sayı duyusu bileşenlerini temsil edip etmediğini 1 ile 5 arasında (1 en düşük, 5 en yüksek olacak şekilde) puanlama yaparak değerlendirmeleri istenmiştir. 2. soru için öngörülen referans noktası kullanımı bileşeni dışındaki tüm sorulara verilen puanların ortalaması 4 ve 4'ün üstündedir (Ek-3). Bunun yanı sıra her bir sorunun yanında verdikleri puanın nedenini, varsa belirtilen bileşenin dışında yansıttığını düşündükleri bileşeni, sorunun ifade ediliş biçimine yönelik düşüncelerini belirtebilmeleri için açıklama kısımları bırakılmıştır. Belirtilen görüşler doğrultusunda görüşme sorularında gerekli düzeltmeler yapılmıştır.

3.2.2.1 Görüşme sorularının hazırlanması

Görüşme sorularının hazırlanması sürecinde öncelikle alanyazın taraması yapılmış ve sayı duyusunun bileşenlerine yönelik yapılan sınıflandırmalar incelenmiştir. Belirtilen sayı duyusu bileşenlerine yönelik yapılan açıklamalar ve alanyazında yer alan sorular ortak ve farklı özellikleri bakımından analiz edilmiştir. Bu analizler sonucunda aşağıdaki bileşenlere yönelik üslü sayıları içeren görüşme sorularının hazırlanmasına karar verilmiştir.

- ✓ Denk gösterimler
- ✓ Sayısal tahmin
- ✓ Sayı büyüklükleri
- ✓ İşlemlerin etkileri
- ✓ Referans noktası kullanımı

Alanyazındaki çalışmalarda belirlenen ancak araştırmada kullanılmayan diğer bileşenler; işlemler arasındaki ilişkilerin farkındalığı (McIntosh vd., 1992); matematiksel özelliklerin anlaşılması (McIntosh vd., 1992); niceliksel muhakeme ve çıkarım (Greeno, 1991); bilgileri ve sonuçları gözden geçirme eğilimi ile çoklu stratejilerin varlığının farkındalığı (McIntosh vd., 1992) şeklindedir. Bu bileşenler yalnızca belirtilen araştırmacılar tarafından kullanılmış ve diğer çalışmalarda yer almamıştır. Bu sebeple mevcut çalışmada belirtilen bu bileşenlere yönelik soru hazırlanmamıştır.

Görüşme sorularının taslak halinde (Ek-2) denk gösterimler bileşeni ile ilgili olanlar 2, 3, 4 ve 5 numaralı sorulardır. Denk gösterimler, problemin çözümü için gerekli olduğu durumlarda sayıların ve sayısal ifadelerin denk gösterimlerinden uygun olanını kullanabilme becerisi olarak tanımlanmaktadır (Greeno, 1991; Markovits ve Sowder, 1994; McIntosh vd., 1992; Reys vd., 1999).

Görüşme sorularının taslak halinde ‘sayısal tahmin’ bileşeni ile ilgili olanlar 6, 7 ve 8. sorulardır. Uzman görüşlerinde 12 ve 13. soruların da sayısal tahmin bileşeni ile ilgili olabileceği belirtilmiştir. Sayısal tahmin, problem durumu için tam çözümün gerekli olup olmadığını fark etme ve problemin çözümü için yeterli hassaslıkta yakın tahminlerde bulunabilme becerisini ifade eder (Greeno, 1991; Markovits ve Sowder, 1994; McIntosh vd., 1992; Reys vd., 1999).

Görüşme sorularının taslak halinde ‘sayı büyüklüğü’ bileşeni ile ilgili olanlar 9, 10 ve 11. sorulardır. Sayı büyüklüğü, sayıların anlamlarını ve diğer sayılara göre büyüklüklerini anlayabilme becerisini ifade eder (Markovits ve Sowder, 1994; McIntosh vd., 1992; Reys vd., 1999).

Görüşme sorularının taslak halinde ‘işlemlerin etkileri’ bileşeni ile ilgili olanlar 12 ve 13. sorulardır. Uzman görüşlerinde 4. sorunun da işlemlerin etkisi bileşeni ile ilgili olabileceği belirtilmiştir. İşlemlerin etkileri, çeşitli sayılar üzerindeki işlemlerin anlamlarını anlamayı ifade eder. Araştırmalarda bu bileşene yönelik 1'den küçük sayılar ile çarpma veya bölme işlemleri yapıldığında sayının büyüklüğündeki değişim ile ilgili anlayışları incelemeye yönelik problemler kullanılmıştır (McIntosh vd., 1992; Reys vd., 1999).

Görüşme sorularının taslak halinde 'referans noktası kullanımı' bileşeni ile ilgili olanlar 1, 2, 7 ve 10. sorulardır. Referans noktası kullanımı, cevaba ulaşmayı kolaylaştıracak şekilde $\frac{4}{9}$ için $\frac{1}{2}$ veya 0.98 için 1 gibi referans noktaları seçip kullanabilme becerisini ifade eder (McIntosh vd., 1992).

3.2.2.2 Görüşme soruları ve öngörülen sayı duyusu bileşenlerinin kullanımı

Yukarıda bahsedilen 5 bileşen için 13 görüşme sorusu geliştirilmiştir. Hazırlanan soruların bir kısmının çözümünde birden fazla bileşenin kullanımına örnekler verilebileceği öngörülmüştür. Uzman görüşleri sonrasında 13 görüşme sorusundan 5'inin denk gösterimler, 5'inin sayısal tahmin, 3'ünün sayı büyüklükleri, 3'ünün işlem etkisi ve 3'ünün referans noktası kullanımı bileşenleri ile ilgili olduğu belirlenmiştir. Geliştirilen taslak form kullanılarak 3 öğrenci ile pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Uzman görüşleri ve pilot uygulamanın ardından 13 görüşme sorusu üzerinde gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Uzman görüşü ve pilot uygulamalar doğrultusunda düzeltilmiş asıl uygulamada yer alan görüşme soruları Ek-4'te sunulmuştur.

Taslak görüşme soruları üzerinde yapılan düzeltmeler ve ilgili sayı duyusu bileşenleri aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

1. soru; Markovits ve Pang (2007) tarafından yapılan çalışmadaki 12 soruluk ölçme aracının 3. sorusunun üslü sayılara uyarlanmasıyla oluşturulmuştur. 'Denk gösterimler' ile 'referans noktası kullanımı' sayı duyusu bileşenlerinin kullanılması öngörülerek hazırlanmıştır. Bu soruda referans noktasını kullanabilen öğrenciden 0,76'nın, yaklaşık olarak 0,75, $\frac{3}{4}$ veya 3 çeyrekten biraz daha büyük olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Daha sonrasında ise seçtiği referans noktasına uygun olarak 4^{-1} için $\frac{1}{4}$, 0,25 veya bir çeyrek gibi denk gösterimini seçerek ilk ifadenin 1 tamdan biraz daha büyük olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Bu soru araştırmada kullanılmak üzere görüşme sorularının *1. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

2. soru; 'denk gösterimler' sayı duyusu bileşeni ile ilgili iki şıklı olarak hazırlanmıştır. Pilot çalışmada 3^{-1} olan değerinin öğrenciyi payda eşitlemeye yönlendirmiş olabileceği fark edilmiştir. Bu değer öğrenciyi sayı duyusu kullanmaya teşvik etmesi için 4^{-1} haline dönüştürülmüştür. İlk şıkta yer alan ifadede öğrencinin payda eşitleme işlemi yapmak yerine şeklin önce yarısını (2^{-1}) ve sonrasında çeyreğini (4^{-1}) taraması veya çeyrek ile yarım toplandığında 3 çeyrek eder şeklinde düşünerek şekli taraması beklenmektedir. İkinci şıkta yer alan ifadede ise öğrenciden 1 bütünden 3 çeyrek çıkarıldığını düşünebileceği beklenmektedir. Bu soru belirtilen düzetmeler yapılarak araştırmada kullanılmak üzere görüşme sorularının *2. sorusu* olarak alınmıştır.

3. soru; 'denk gösterimler' sayı duyusu bileşeni ile ilgilidir. Bu soruda öğrenciden ifadeleri karşılaştırabilmek için $3^6 \times 5^9 = 3^6 \times 5^2 \times 5^7$ ile $3^8 \times 5^7 = 3^6 \times 3^2 \times 5^7$ şeklinde ifade ettikten sonra 5^2 ile 3^2'yi karşılaştırması beklenmektedir. Bu soru asıl uygulamada kullanılmak üzere görüşme sorularının *3. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

4. soru; 'denk gösterimler' ile 'işlemlerin etkileri' sayı duyusu bileşenleri ile ilgili olarak hazırlanmıştır. Uzman görüşünde 134 323 değerinin bu kadar büyük olmasının gerekli olmadığı belirtilmiştir ve 1343 olarak değiştirilmiştir. Bu soruda öğrenciden $\frac{1}{2}$'nin yarıma eşit olduğunu düşünerek 1343 sayısının içinde kaç tane yarım olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Öğrenciden $\frac{1}{2}$ ile bölme işlemi yapmanın aynı zamanda 2 ile çarpma işlemi yapmaya denk olduğunu düşünmesi beklenen diğer bir yanıttır. Pilot çalışmada öğrenciler 4. soruyu anlamakta zorlanmış ve 134 323 ifadesini 2'ye bölmeye çalışmıştır. Bu sebeple 4. sorunun asıl uygulamada yer almamasına karar verilmiştir.

5. soru; Markovits ve Pang (2007) tarafından yapılan çalışmadaki 12 soruluk ölçme aracının 5. sorusunun üslü sayılara uyarlanmasıyla oluşturulmuştur. Soru 'denk gösterimler' sayı duyusu bileşeni ile ilgilidir. Bu soruda öğrenciden 52 sayısının aşağıda verilen sayılar arasından dengini yazabilmesi beklenmektedir. Bu soru asıl uygulamada kullanılmak üzere görüşme sorularının *4. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

6. soru; Yang (2005) tarafından yapılan çalışmadaki 7 görüşme sorusundan 4.'sünün üslü sayılara uyarlanmasıyla oluşturulmuştur. 'Sayısal tahmin' adlı sayı duyusu bileşeni ile ilgilidir. Pilot çalışmada öğrencilerin verilen sayısal ifadenin uzunluğundan dolayı zorlanmış olabileceği görülmüş ve 2×10^8 değeri ifadeden atılmıştır. Bunun yanı sıra daha fazla bilinen milyon değerini temsil edecek şekilde üslü sayıların üsleri 8'den 6'ya indirilmiştir. Bu soruda öğrenciden 10^{-6} değerinin verilen ifade içinde oldukça küçük bir değer olduğunu fark ederek bu sayıyı ihmal etmenin yaklaşık bir sonuca götüreceğini düşünmesi beklenmektedir. Bu soru belirtilen düzetmeler yapılarak asıl görüşmelerde kullanılmak üzere görüşme sorularının *5. sorusu* olarak alınmıştır.

7. soru; 'sayısal tahmin' ve 'referans noktası kullanımı' bileşenleri ile ilgilidir. Uzman görüşü doğrultusunda 10^{47} ile 9^{47} değerlerinin birbirine yaklaşık olarak eşit olmadığı belirtilmiştir. Bu nedenle bu değer 100^{47} ile 99^{47} olarak değiştirilmiştir. Bu soruda öğrenciden 0.547 yaklaşık olarak $\frac{1}{2}$'ye ve onun da dengi olan 2^{-1}'e eşit olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Benzer şekilde 100^{47} ile 99^{47}'nin de yaklaşık olarak birbirine eşit olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Yine pilot çalışmada öğrencilere 7. soru da oldukça zor geldiği ve herhangi bir akıl yürütmede bulunamadıkları görülmüştür. Bu sebeple 7. sorunun asıl uygulamada yer *almamasına* karar verilmiştir.

8. soru; 'sayısal tahmin' sayı duyusu bileşeni ile ilgilidir. Bu soruda öğrenciden ifadelerin değerlerini düşünerek $3^3\times2^2$ ifadesinin $\frac{1}{3}$'inin $3^2\times2^2$ ifadesine, 2 katının ise $3^3\times2^3$ ifadesine eşit olduğunu düşünmesi beklenmektedir. İfadenin $\frac{1}{3}$'inin, aynı ifadenin 2 katından daha yakın bir tahmin olduğunu fark etmesi beklenmektedir. Bu soru asıl uygulamada kullanılmak üzere görüşme sorularının *6. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

9. soru; 'sayı büyüklükleri' ile ilgili bir sorudur. Burada öğrenciden üslü sayının kuvvetindeki artışın sayıyı nasıl etkilediğini düşünmesi beklenmektedir. 2^6 ile

2^7 değerleri arasındaki farkın bile 2^6 ile 2^2 arasındaki farktan fazla olduğunu düşünmesi beklenmektedir. Bu soru asıl görüşmelerde kullanılmak üzere görüşme sorularının *7. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

10. soru; ‘sayı büyüklükleri’ ve ‘referans noktası kullanımı’ ile ilgilidir. Bu soruda öğrenciden 21^{-3}’ü $\frac{1}{21^3} \approx \frac{1}{20^3} = \frac{1}{2^3 \times 10^3}$ şeklinde $31^{-2} = \frac{1}{31^2} \approx \frac{1}{30^2} = \frac{1}{3^2 \times 10^2}$ şekline çevirdikten sonra paydaların büyüklüklerini düşünürken 10’u referans noktası olarak alması beklenmektedir. Bu soru asıl uygulamada kullanılmak üzere görüşme sorularının *8. sorusu* olarak olduğu gibi alınmıştır.

11. soru; ‘sayı büyüklükleri’ sayı duyusu bileşeni ile ilgilidir. Katılımcıların negatif kuvvete yönelik anlayışlarının etkisini daha iyi değerlendirebilmek için verilen üslü sayıların yanına pozitif bir kuvvete sahip 7^2 değeri de eklenmiştir. Bu soruda öğrenciden üslü sayıların negatif kuvvetlerinin ne anlama geldiğini düşünerek sıralamayı yapması beklenmektedir. Bu soru belirtilen düzetmeler yapılarak asıl görüşmelerde kullanılmak üzere görüşme sorularına *9. sorusu* olarak dahil edilmiştir.

12. soru; ‘işlemlerin etkileri’ ve ‘sayısal tahmin’ sayı duyusu bileşenleri ile ilgilidir. Uzman görüşü doğrultusunda öğrenciyi işlem yapmak yerine sayı duyusunu kullanacak şekilde düşünmeye teşvik etmek için bölme ve çarpma işlemi sözel olarak ifade edilmiştir. Soruda verilen değerler öğrencinin işlem yapmadan düşünebilmesi için oldukça büyük verilmiştir. Öğrenciden 17^{-21} sayısının 1’den küçük bir değer olduğunu düşünmeli ve çarpma ve bölme işlemlerinde sonucu nasıl etkilediğini fark etmelidir. Bu soru belirtilen düzetmeler yapılarak asıl uygulamda kullanılmak üzere görüşme sorularının *10. sorusu* olarak alınmıştır.

13. soru; Yang (2005) tarafından yapılan çalışmadaki 7 görüşme sorusundan 3.’sünün üslü sayılara uyarlanmasıyla oluşturulmuştur. Soru ‘işlemlerin etkileri’ ve ‘sayısal tahmin’ sayı duyusu bileşenleri ile ilgilidir. Bu soruda öğrenciden 10^{-7} sayısının 1’den oldukça küçük bir değer olduğunu düşünerek bölme işleminde sonucu nasıl değiştireceğini fark etmesi beklenmektedir. Bu soru asıl uygulamada kullanılmak üzere görüşme sorularına *11. sorusu* olarak dahil edilmiştir.

Uzman görüşü ve pilot uygulamalar doğrultusunda yapılan değişiklikler sonucunda 11 görüşme sorusunun asıl uygulamada yer almasına karar verilmiştir.

3.3 Verilerin Toplanması

Araştırmanın temel verileri öğrenciler ile yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Nitel veri toplama yöntemlerinin yanında görüşmeler için öğrenci seçmek amacıyla nicel veri toplama yöntemlerinden de yararlanılmıştır. Bu araştırmada görüşmelerden elde edilen nitel verilerin analizine yoğunlaşılmıştır.

Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından geliştirilen ölçme aracı 2011–2012 eğitim öğretim yılı kasım ayının 2. haftasında Denizli İl merkezinde eğitim veren bir devlet okulunun 108 sekizinci sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Test tüm şubelerin ortak olan rehberlik ders saatinde (40 dakika) tüm sınıflara aynı anda uygulanmıştır. Uygulama sürecinde her bir sınıfta şubelerin sınıf öğretmenleri bulunmuştur. Bunun yanı sıra araştırmacı tarafından sınıflarda dolaşılmış, çalışmanın amacı anlatılmış ve gerekli açıklamalarda bulunulmuştur. Ölçme aracının uygulanmasının ardından asıl ve pilot uygulamada görüşülecek öğrenciler belirlenmiştir.

Araştırmanın pilot uygulaması 2011–2012 eğitim öğretim yılı kasım ayının 3. haftasında 1 gün içerisinde gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamada 3 katılımcı ile bire bir görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın asıl uygulaması ise 2011–2012 eğitim öğretim yılı aralık ayının 1. ve 3. haftaları arasında gerçekleştirilmiştir. Asıl uygulamada 20 öğrenci ile bire bir görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme zamanları öğrencilerin ders programları dikkate alınarak okul idaresi ve araştırmacı tarafından belirlenmiştir. Görüşmeler okul binasında okul yönetiminin sağladığı özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler için ayrılan odalardan birinin boş olduğu zamanlarda yapılmıştır. Tüm görüşmeler araştırmacının kendisi tarafından gerçekleştirilmiştir. Her bir öğrenciye görüşme soruları gösterilerek görüşmenin amacı ve içeriği anlatılmıştır. Görüşme sırasında söylediklerinin isimleri kullanılarak hiç bir yerde yayınlanmayacağı ve yanıtlarının notlarını olumsuz yönde etkilemeyeceği açıklanmıştır. Yapılan görüşmeler öğrencilerin rızası alınarak ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Görüşmeyi istedikleri yerde bitirilebileceklerinin ve isterlerse kayıtların silinebileceğinin güvencesi verilmiştir. Görüşmeler öğrencilerin rahatça düşüncelerini ifade edebilmeleri için sohbet tarzında yürütülmeye çalışılmıştır. Her bir görüşme ortalama 35–40 dakika sürmüştür.

Gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğrencilere, sayı duyusu kullanımına fırsat verecek şekilde hazırlanmış görüşme soruları yazılı olarak verilmiş ve sırasıyla soruları anlayıp yanıtlamaları istenmiştir. Görüşmelerde sorular tüm öğrencilere aynı sırada sorulmuştur. Öğrencilerden soruları yanıtlarken yüksek sesle düşünmeleri istenmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin düşünme süreçlerini anlamak amacıyla klinik görüşme tekniğinin özellikleri kullanılmıştır (Ginsburg, 1997). Öğrencilerin verdikleri yanıtların ardından "Nasıl düşündün?", "Neden?" veya "Nasıl karar verdin?" gibi sorular sorulmuştur. Bunların yanı sıra uzun işlemlere yönelen öğrencilere "Bu işlemleri yapmadan karar verebilir misin?" ve "Şöyle de çözebilirim dediğin başka bir çözüm yolu var mı?" soruları yöneltilmiştir.

3.4 Verilerin Analizi

Pitta-Pantazi vd. (2007) tarafından geliştirilen ölçme aracı görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek için uygulanmıştır. Ölçme aracındaki maddeleri doğru yanıtlayan öğrencilere 1 puan ve yanlış yanıtlayan öğrencilere 0 puan verilerek ve Microsoft Office 2003 excel programında veriler girilmiştir. Her bir öğrencinin aldığı test toplam puanı belirlenmiştir. Test toplam puanlarına göre büyükten küçüğe doğru sıralanmışlardır. Daha sonra her bir sorunun madde güçlük indeksi hesaplanmıştır (Ek-6). Madde güçlük indekslerine göre sorular çok kolay, kolay, orta güçlükte ve zor olarak gruplandırılmıştır. Görüşme yapılan öğrencileri belirlemek için test toplam puanları 8 ve üstünde olan her bir öğrencinin bu gruplardaki toplam puanları hesaplanmıştır.

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerden elde edilen veriler nitel tekniklerle çözümlenmiştir. Görüşmelerin ses kayıtları dinlenerek yazılı metinler haline getirilmiştir. Her bir öğrencinin bütün ifadelerinin bulunduğu metinler ayrı ayrı dosyalanmıştır. Dosyalarda öğrencinin ifadeleri her bölüm bir görüşme sorusunu içerecek şekilde alt bölümlere ayrılmıştır. Sorulara göre gruplamak yerine, öğrenci ifadelerinin bir bütün halinde dosyalanmasındaki amaç, aynı öğrencinin farklı sorulardaki sayı duyusu kullanımlarını kolay karşılaştırabilmektir.

Öğrencilerin ifadelerinde tekrar eden kod ve temaları belirlemek için nitel analiz yaklaşımlarından "içerik analizi" tekniği kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Veri analizinde, ilköğretim matematik eğitiminde yüksek lisans yapan, veri analizinde deneyimli, nitel araştırma konusunda ders almış ve bu yönteme dayalı araştırma yapmış biri yazar olmak üzere 3 uzman ile birlikte çalışılmıştır. Sayı duyusu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin yanıtları ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Araştırmada içerik analizi yaklaşımına uygun olarak verilerin çözümlenme aşamaları aşağıda açıklanmıştır.

1. Araştırma verileri üzerinde üç uzman birbirinden bağımsız çalışarak sayı duyusu bakımından önemli olabilecek ifadeleri belirlemiştir.
2. Daha sonra uzmanlar bir araya gelerek belirlenen ifadeleri birer alt başlık halinde gruplamıştır. Bu gruplara birer kod atanmıştır. Belirlenen kodlar harfler ile temsil edilmiştir.
3. Uzmanlar tarafından araştırma verileri birbirinden bağımsız olarak yeniden incelenerek, tekrar eden ifadeler için harfler sayfa kenarına yazılarak kodlamalar yapılmıştır.
4. Kodlama güvenirlik çalışması için uzmanlar tekrar bir araya gelerek öğrenci ifadelerine verdikleri kodlar hakkında tartışmışlardır. Üzerinde % 100 fikir birliğine varılan kodlar tema oluşturmaya dahil edilmiştir.
5. Her bir soru için bulunan kodlar ortak başlıklar altında toplanarak temalar oluşturulmuştur. Ortaya çıkan temalara göre düzenlenen veriler gerekli alıntılar ile desteklenerek sunulmuştur.

Analizlerde her bir görüşme sorusu için ayrı kodlar ve ayrı temalar oluşturulmuştur. Fakat farklı sorularda tekrar eden kodlar olduğu durumlarda aynı ifadeler ile kodlanmıştır.

3.5 Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik Sağlama Çalışmaları

Araştırmada geçerlilik ve güvenirliği sağlamak için izlenen yollar aşağıda belirtilmiştir.

1) Görüşme sorularının geçerliliği sağlamak amacıyla, matematik eğitimi alanında doktoralı 5 akademisyen, matematik eğitimi alanında çalışan 1 doktora ve 7'si deneyimli öğretmen olan 8 yüksek lisans öğrencisinden oluşan uzmanlar tarafından incelenmiştir.
2) Araştırmada verilerin elde edildiği katılımcılar, katılımcılar ile görüşme yapılan ortam, veri toplama ve analiz yöntemleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Öğrencilerin nasıl seçildiği görüşmelerin nasıl yapıldığı,

verilerin nasıl kaydedildiği, verilerin nasıl analiz edildiği gibi yöntem ile ilgili bilgiler ayrıntılı bir şekilde tanımlanmıştır.

3) Veri analizleri güvenirlik amacıyla araştırmacı dışında iki uzman ile birlikte gerçekleştirilmiş ve % 100 hem fikir olunan kodlar analize dâhil edilmiştir.

4) Toplanan veriler betimsel bir yaklaşımla okuyucuya sunulmuştur. Araştırmacı öğrenci ifadelerini doğrudan alıntılar şeklinde okuyucuya sunmuş arkasından kendi yorumunu belirtmiştir.

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde öğrencilerin her bir görüşme sorusuna yönelik verdikleri cevaplar, ilgili soru başlıkları altında analiz edilmiştir.

Tablo 4.1'de öğrencilerin birebir görüşmelerde her bir soruya verdikleri doğru ve yanlış cevapların dağılımları verilmiştir.

Tablo 4.1: Öğrencilerin görüşme sorularına ilişkin doğru ve yanlış cevaplarının dağılımı.

Soru	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Doğru	15	13	10	15	16	1	4	10	13	14	12	10
Yanlış ve Boş	5	7	10	5	4	19	16	10	7	6	8	10

En fazla öğrenci tarafından cevaplanan sorunun denk gösterimler bileşeni ile ilgili olan 4. soru olduğu söylenebilir. 5 ve 6. sorular dışındaki soruların hepsinde doğru cevapların % 50 ve daha fazla olduğu söylenebilir. 5, 6 ve 11. sorular sayısal tahmin bileşeni ile ilgili sorulardır.11. soruya öğrencilerin yarısı, 5 ve 6. sorulara ise sırasıyla yalnızca 1 ve 4 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Sayısal tahmin ile ilgili sorularda öğrencilerin düşük başarı gösterdikleri söylenebilir. Tablo 4.2'de her bir sorunun çözümünde sayı duyusu kullanan öğrenci sayıları verilmiştir.

Tablo 4.2: Görüşme sorularının çözümünde sayı duyusu kullanan öğrenci sayılarının dağılımı.

Soru	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sayı duyusu Kullanımı	3	3	1	15	18	5	14	10	11	13	12	10

Tablo 4.2'ye bakıldığında en başarılı oldukları soru olan 4. sorunun aynı zamanda en çok öğrenci tarafından sayı duyusu kullanılan soru olduğu söylenebilir. Bu soruda

sayı duyusu kullanan öğrenci sayısının doğru yanıt sayısından fazla olması dikkat çekmektedir. Bu durumun nedeni soruda verilen şartlara uymayan denk gösterimleri oluşturan öğrencilerin cevaplarının yanlış kabul edilmesidir. Fakat yine de 52 sayısının dengi verilen sayılar ile doğru bir şekilde oluşturulduğu için öğrencilerin sayı duyusu kullandığı söylenebilir. Benzer şekilde 5. soruda da başarının sayı duyusu kullanımında düşük olduğu görülmektedir. Bu soruda sayı duyusu kullanan 5 öğrencinin 3'ü sayıların büyüklüğüne yönelik doğru bir kavrayışa sahiptir fakat bunu kullanarak doğru cevaba ulaşamamıştır. Diğer 1 öğrenci ise bir tahminde bulunmuştur fakat bulunduğu tahmin yeterince yakın bir değer değildir. Son olarak 6. soruda sayı duyusu kullanımı doğru yanıt sayılarından fazladır. Sayı duyusu kullanan 14 öğrenciden yalnızca 2'si sayı duyusu kullanarak doğru cevaba ulaşabilmiştir. Öğrencilerin 12'si ise çözüm yollarında sayı duyusunu kullanarak ifadeleri ayrıştırmış fakat hatalı yorumda bulundukları için yanlış cevaba ulaşmıştır.

Öğrencilerin çözümlerinin ilişkili olduğu sayı duyusu bileşenlerinin sorulara göre dağılımını veren tablo Ek-6'da verilmiştir.

4.1 Birinci Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Birinci soruya yönelik öğrencilerin çözüm yolları incelendiğinde 3 öğrencinin sayı duyusunu kullanarak yanıt verdiği görülmüştür. Sayı duyusu kullanan öğrencilerden yalnızca 2'si ilk çözüm yolunda sayı duyusu kullanmış, 1'i soruyu ilk olarak standart işlemler ile çözdükten sonra ikinci bir yöntem sorulduğunda sayı duyusu kullanımına yönelmiştir. Diğer 17 öğrenciden 8'i yalnızca standart işlemleri uygulayarak çözüme ulaşmış, 3'ü rasyonel sayılar ile ilgili sahip oldukları yanılgılar nedeniyle yanlış yanıt vermiş ve 6'sı negatif veya 0. kuvvete sahip üslü sayıların anlamını doğru ifade edememiştir.

Öğrencilerin 15'i (% 75) soruya doğru yanıt vermiştir. Sorudaki başarı oranının yüksek olduğu söylenebilir. Ancak öğrencilerin çözüm yolları incelendiğinde ise sayı duyusunu yalnızca 3 öğrencinin kullandığı görülmüştür. Sorunun yapısı, zaman alacak olmasına rağmen kağıt kalem ile payda eşitleyerek yanıt vermeye uygundur. Bu sebeple doğru yanıt veren öğrencilerden 8'i standart payda eşitleme işlemini uygulamıştır. 4 öğrenci ise üslü sayılar ile ilgili yanılgıları olması sebebiyle yanlış bir akıl yürütme ile ilk ifadenin büyük olduğunu belirtmiş yani doğru yanıt vermiştir. Bu sebeple öğrencilerin yaklaşık yarısının (% 55) doğru bir akıl yürütmeye dayalı olarak doğru yanıt verdiği söylenebilir. Aşağıda sayı duyusu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.1.1 Birinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin çözümleri

Bu soruda sayı duyusu kullanan 3 öğrenci vardır. Kullanılan sayı duyusu bileşenlerinin *referans noktası kullanımı* ile *denk gösterimler* olduğu söylenebilir.

Öğrencilerden yalnızca 2'si ilk çözüm yolu olarak sayı duyusunu kullanmıştır. Bu öğrencilerden birinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Esin: Topladım işte şu sıfır yetmiş altıyı, sıfır yetmiş beş olarak aldım. O da üç bölü dört ediyor zaten. Üç bölü dört ile bir bölü dördü topladım. Dört bölü dört ediyor. Aslında o zaman… Evet, evet evet büyüktür oluyor. Bu* [2^0] *1 oluyor. Bu da* [$0{,}76 + 4^{-1}$'yı kast ederek] *1 virgül ediyor galiba öyle büyüktür oluyor.*
>
> *[Araştırmacı (A)]: 0,76'yı ne olarak düşündüm dedin?*
>
> *Esin: Sıfır yetmiş beş olarak. Üç bölü dört olarak düşündüm. Onu, üç bölü dört ile bir bölü dördü topladığımda dört bölü dört, o da 1 ediyor. Sıfır yetmiş altıdan sıfır yetmiş beşi çıkardım. Sıfır nokta sıfır bir çıktı. Onu da 1'e ekledim. 1'den büyük bir rakam çıktı.*

Görüldüğü gibi öğrenci 0,76'nın 0,75'in yakınında olduğunu fark etmiştir. 0,75'in $\frac{1}{4}$ ile toplamamını bulabilmek için 0,75 yerine dengi olan $\frac{3}{4}$'ü almıştır. Öğrenci en son 0,76'nın 0,75 ile arasındaki farkı değerlendirmiştir. Öğrencinin 0,76'yı 0,75 şeklinde düşünerek karşılaştırma yapmasının *referans noktası* kullanımı ve ifadelerin denk hallerini yazarak düşünmesinin ise *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir. Aynı öğrenciye soruyu farklı bir şekilde çözüp çözemeyeceği sorulduğunda aşağıdaki şekilde çözüme ulaşmıştır.

> *Esin: Bu bir bölü dördü sıfır nokta yirmi beş olarak alırdım. Daha sonra toplardım sıfır nokta yetmiş altıyla. O da sıfır nokta yüz bir ederdi. Hayır, bir virgül bir ederdi.*

Görüldüğü gibi öğrenci $\frac{1}{4}$'ü 0,25 şeklinde alarak 0,76 ile zihninden toplamıştır. Öğrencinin 0,25 ile 0,76'yı toplarken işlem hatası yaptığı fakat yine de sonucun

1’den büyük bir değer olduğunu fark ettiği söylenebilir. Öğrencinin $\frac{1}{4}$’ü 0,25 şeklinde almayı düşünmesinin denk gösterimler sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu yorumu yapılabilir.

İlk çözüm yolu olarak sayı duyusu kullanan diğer öğrencinin ifadeleri aşağıdaki şekildedir.

> *Meriç: Bu dört üssü eksi bir. Bir bölü dört olur. Bu da* [$\frac{1}{4}$ için] *yirmibeş bölü yüz demek. Yetmiş altı ile yirmi beşi topladık mı yüz bir ediyor. Evet, yüz birdir. Yüz bir, yüz. Bu da yüz bölü yüz.*
>
> *A:* 4^{-1} *’in* $\frac{25}{100}$ *’e eşit olduğunu nasıl anladın?*
>
> *Meriç: Bir bölü dört oluyor.*
>
> *A: Birbirine eşit olduğuna nasıl…*
>
> *Meriç: Biliyorum.*

Meriç isimli öğrencinin düşüncesinin Esin isimli öğrencinin ilk çözüm yolu kadar üst düzey bir düşünce gerektirmediği söylenebilir nitekim görüldüğü gibi öğrenci çözüme standart işlemler ile devam etmiştir. Fakat hızlı bir şekilde $\frac{1}{4}$’ün $\frac{25}{100}$ şeklinde uygun dengini seçip işleme dahil etmesinin sayı duyusu kullanımına yönelik bir delil olduğu belirtilebilir. Burada öğrencinin payda eşitleme işlemini düşünmeden $\frac{1}{4}$’ün dengini kullanabilmesinin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir.

Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 1’i ilk çözüm yolu olarak standart işlemleri yapmayı tercih etmiş ikinci bir çözüm yolu olup olmadığı sorulduğunda sayı duyusu kullanımına yönelmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Ongun: Burada* [4^{-1}’i kast ederek] *dörtte bir almış. Burada* [0,76’yı kast ederek] *yaklaşık dörtte üçü var. Ondan sonra dörtte dört yapıyor. Artı burada dörtte birinden 1 tane fazlası olduğu için sonucuna da 1 eklerdim. Aynı şu işlemin sonucunu* [standart işlemler ile bulduğu sonucu ifade ederek] *elde ederdim, büyüktür.*

Görüldüğü gibi Ongun'un çözümü Esin isimli öğrencinin çözüm yoluna benzerdir. Ongun 0,76'yı yaklaşık $\frac{3}{4}$ olarak alarak işlem yapmıştır. Daha sonra gerçek sonuçtan daha küçük bir değer ile işlem yaptığını fark ederek onu sonuca eklediğinde ilk ifadenin daha büyük olacağını fark etmiştir. Burada öğrencinin ikinci çözüm yolu oldukça pratik ve soruda istenen "yaklaşık değerlerini düşünerek" ifadesine uygundur. Öğrencinin böyle bir çözüm yolu üretebilme yeterliliğine sahip olmasına rağmen uzun ve standart yolu seçmiş olması dikkat çekicidir. Öğrencinin teşvik edildiğinde sayı duyusu kullanımına yöneldiği yorumu yapılabilir. Bu öğrencinin akıl yürütmelerinin hem *referans noktası* hem de *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni kullanımına örnek olduğu söylenebilir.

4.1.2 Birinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin çözümleri

8 öğrenci payda eşitleme işlemi yaparak soruyu çözmeye çalışmıştır. Payda eşitleme işlemi uygulayan öğrencilerden 7'si doğrudan standart işlemlere yönelmiştir. Bu öğrenciler çözümlerinin herhangi bir aşamasında pratik bir akıl yürütme kullanmamıştır. Bu öğrencilerden 1'i soruda yer alan ifadeye ilk baktığında sezgisel olarak ilk ifadenin daha küçük olacağını belirtmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Begüm: Üzeri sayısı eksi olduğunda kesir olarak yazılıyor ve ters çevrilir. Bu da ondalık kesir olduğu için, bu da aynı şekilde yapıyoruz. Bunun üzeri kaç olursa olsun üzeri sıfır olduğunda da bir oluyor. O yüzden küçüktür işareti yaptım.*
>
> *A: Yani ilk ifade mi daha küçük?*
>
> *Begüm: hıhı. Bu ifadeden küçük. Ama bir saniye yanlış yaptım. Silgi var mı? Bu* [0,76'yı kast ederek] *yüzde yetmiş altı oluyor. Yetmiş altı bunu dörde böldüğümüzde amaaan. Yine küçük oluyor. Çünkü bu bir tam. Bunları topladığımızda bir tam sonucu çıkmaz yani. Çıkmaz o yüzden 1 de ondan büyük olur.*
>
> *A: Neden 1 tam sonucunun çıkmayacağını düşündün?*

Begüm: Nasıl anlatayım ki onu bilmiyorum. Bunların paydalarını eşitleriz. Yine üzeri yüzden küçük oluyor. Biz yüz tam sonucu… Onları böldüğümüzde 1 tam sonucu çıkmaz.

Bu şekilde düşünen öğrenci kesin bir karara varmak için işlem yapmaya ihtiyaç duymuş ve işlemi yaptıktan sonra ilk ifadenin büyük olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğrencinin tahminde bulunarak yaklaşık sonuç bulmayı denediği görülmektedir. Bu sebeple öğrencinin sorunun çözümü için tam sonuca ulaşmanın gerekli olmadığını fark ettiği söylenebilir. Fakat öğrenci tahmin yaparken herhangi bir strateji kullanamamaktadır. Öğrenci farklı problem durumlarında tahminin kullanımına ilişkin yeterli deneyim geçirmemiş olabilir. Bu sebeple öğrencinin nasıl tahmin yürüteceğini bilmediği söylenebilir.

3 öğrenci ise rasyonel sayılar ile ilgili sahip oldukları yanılgılar nedeniyle yanlış yanıt vererek ilk ifadenin daha küçük olması gerektiğini belirtmiştir. Bu şekilde düşünen öğrencilerden birinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Melis: Şey 1 daha büyüktür. Çünkü şey rasyonel sayı yani 1 nasıl söyleyeyim. Kesirli sayı ve bir tam sayı yani bir daha büyük oluyor. Toplasak bile 1 daha büyük oluyor. Yani sonuçta toplasak da yine sonuç rasyonel çıkıyor. Yani toplayınca yine kesirli sayı çıkıyor.

A: Tüm kesirli sayılar 1'den küçük müdür?

Melis: Yani evet. Ya sonuçta ikisinin eşitlendiği şeyi yazıyorsun. İkisi dört yüzdü. Sadeleştiririz. Dörde bölünüyor mu ikisi de. İkiye bölsem. Ya birden daha küçüktür. Sonuçta yani sayı doğrusunda bakarsak sıfır ile bir arasında. Dört yüz dört bölü dört yüz. Yani şöyle sayı doğrusunda gösterdiğimizde sıfır bir dediğimizde şu aradadır [sıfır ile bir arasında] *yani.*

Görüldüğü gibi Melis isimli öğrenci ilk ifadede yer alan değerlerin kesirli olduğunu ve bu sebeple toplamlarının da kesirli bir sayı çıkacağını belirtmiştir. Benzer şekilde düşünen diğer iki öğrenci de ifadede iki tane '*paydalı sayı*' yer aldığını ve bunların toplamlarının yine bir *'paydalı sayı'* olacağını belirtmiştir. Bu öğrenciler tüm kesirli sayıların 1'den küçük olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin basit, bileşik ve tam sayılı kesirlere ilişkin eksikliklerinin olduğu ve tam olarak rasyonel sayıların doğasını anlayamadıkları söylenebilir. Buna rağmen öğrencilerin kesirler ile toplamaya ilişkin algoritmayı doğru bir şekilde uygulayabilmesi dikkat çekmektedir. Anlamını tam olarak bilmedikleri sayılar üzerinde uyguladıkları algoritmaların öğrenciler için ezbere uygulanan anlamsız bir kurallar bütünü olduğu söylenebilir.

6 öğrenci ise üslü sayılarda negatif ve 0. kuvvetin anlamlarını doğru şekilde ifade edememiştir. Bu öğrencilerden 4'ü 4^{-1}'in değerinin 4 olduğunu, 2^0'ın değerinin 2 olduğunu ifade etmiştir. Bu sebeple bu 4 öğrenci $4^{-1}+0,76$ ifadesinin değerinin $4+0,76=4,76$ ve 2^0 ifadesini de 2 olarak buldukları için $4^{-1}+0,76>2^0$ olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin yanlış bir düşünce ile doğru cevaba ulaştığı söylenebilir. Diğer 2 öğrenci ise 4^{-1}'in değerinin -4 olduğunu, 2^0'ın değerinin 2 olduğunu ifade etmiştir. Bu sebeple ilk ifadenin negatif bir değer olduğu için ikinci ifadeden küçük olduğunu belirtmiştir.

4.2 2-a Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

İkinci sorunun ilk kısmında öğrencilerin 13'ü (% 65) doğru yanıt vermiştir. Doğru yanıt veren öğrencilerin 3'ü sayı duyusu kullanırken 10'u standart işlemleri uygulayarak yanıt vermiştir. Bu soruda sayı duyusunu kullanan 3 öğrenci bulunmaktadır. Sayı duyusu kullanmayan 17 öğrenciden 11'i standart işlemleri uygulamaya çalışmıştır. Bu 11 öğrencinin 10'u standart işlemleri uygulayarak doğru cevaba ulaşırken, 1'i üslü sayılarla işlemler ile ilgili yanılgısı sebebiyle yanlış yanıt vermiştir. Diğer 6 öğrenci ise negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamını doğru ifade edememiştir. Sayı duyusunu kullanan öğrenci sayısının oldukça düşük olduğu söylenebilir. Bunun bir sebebi öğrencilerin standart işlemleri yapmaya alışkın olmaları ve verilen değerlerin kağıt kalem ile hesaplanabilecek değerler olması olabilir. Diğer bir sebebi öğrencilerin sorunun ne istediğini daha tam anlamadan işleme yönelmeleri olabilir.

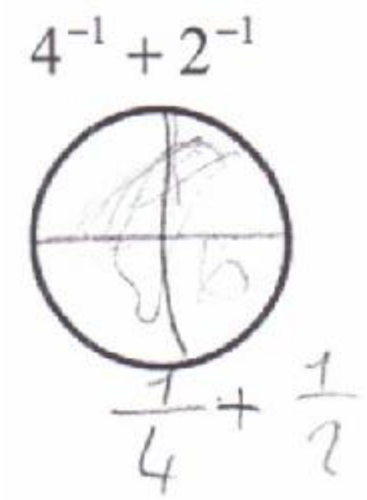
Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.2.1 2-a Sorusunu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin çözümleri

2. sorunun bu kısmında sayı duyusunu kullanarak cevaba ulaşan 3 öğrenci bulunmaktadır. Sayı duyusunu kullanan öğrencilerin tamamı ifade edilen değeri şekiller üstünde doğru şekilde taramıştır.

Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 2’si ilk çözüm yolu olarak sayı duyusunu kullanmıştır. Bu öğrencilerden Buğra isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir. Buğra’nın çizimi Şekil 4.1’de görülebilir.

(Buğra): Dört bölü bir iki bölü bir. Dört bölü bir çeyreği oluyor. İki bölü bir de yarısı oluyor. Yarısı ile çeyreğini topladığımızda bu kısmı çıkıyor.



Şekil 4.1 : 2-a sorusu için Buğra’nın cevabı

Buğra isimli öğrencinin $\frac{1}{4}$ kesrini “*4 bölü 1”* şeklinde ifade etmek gibi gibi matematiksel dilde hatalar yaptığı görülmektedir. Matematiksel dile ilişkin hataların farklı öğrenciler tarafından da yapıldığı görüşmeler sırasında görülmüştür. Derslerde değerlendirmelerin genellikle yazılı yapılıyor olması ve sınıf içinde sözlü tartışmalara yer verilmiyor olması bu yanılgıların fark edilip düzeltilmesini zorlaştırmış olabilir. Bu araştırmanın konusu olmadığı için bu yanılgılar üzerinde durulmamıştır. İfadelerinden anlaşıldığı gibi Buğra isimli öğrenci verilen değerleri şekil üstünde taramayı kolaylaştıracak biçimde ifade etmiştir. Öğrencilerin bu akıl yürütmelerinin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili bir örnek olduğu söylenebilir.

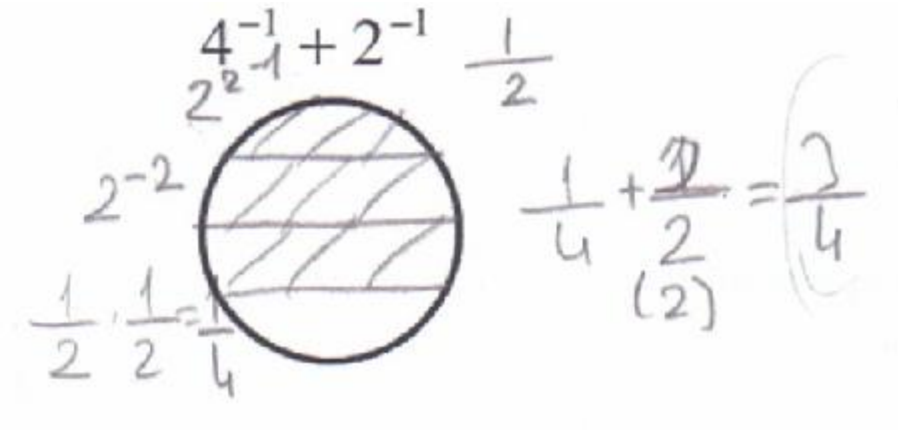
Sayı duyusu kullanarak cevaba ulaşan diğer bir öğrenci ise ilk çözüm yolu olarak standart payda eşitleme işlemini uygulamıştır. Farklı şekilde nasıl çözebileceği sorulduğunda ikinci çözüm yolu olarak aşağıdaki şekilde sayı duyusu kullanmıştır.

Melis: Şu yukarıdaki gibi, işlem gibi. Dört üssü eksi biri, sıfır virgül yirmi beş alırdık. İki üssü eksi biri, yüzde elli alırdık. Aman sıfır virgül elli alırdık. Bir bütün zaten bir olduğu için, bunları toplardık. Sıfır virgül yetmiş beş ile sıfır *virgül elliyi. Sıfır virgül yetmiş beş ederdi. Yine üç bölü dörde karşılık gelirdi. Üç parçayı boyardık. Birisi boş kalırdı.*

Melis isimli öğrenci görüldüğü gibi verilen üslü değerleri ondalık şekilde ifade ederek şekil üstünde taramıştır. Öğrencinin işlemleri uygulamaya başlamadan önce soruda istenene ulaşabilecek uygun dönüşümler yaptığı belirtilebilir. Bu düşüncenin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir.

4.2.2 2-a Sorusunu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin çözümleri

11 öğrenci sorunun çözümünde standart işlemleri uygulamıştır. Standart işlemleri uygulayarak doğru yanıt veren 10 öğrenci vardır. Bu öğrencilerden 1'i doğru bulduğu değeri verilen şekli üstünde doğru bir şekilde tarayamamıştır. Bu öğrencinin çözümü Şekil 4.2'de görülebilir.



Şekil 4.2 : 2-a sorusu için Şeyda'nın cevabı

Şekilde çözümü Şeyda isimli öğrenci şekli 4 parçaya bölerek 3 parçasını taramıştır. Öğrencinin cevabına bakıldığında şeklin 4 eşit parçaya ayrılmadığı görülmektedir. Öğrencinin bu şekilde bir yanıt vermiş olmasının farklı sebepleri olabilir. Bunlardan biri öğrencinin $\frac{3}{4}$ sayısına ilişkin yanlış bir kavrayışa sahip olması olabilir. Öğrenci $\frac{3}{4}$ değerinin, parçalarının eşit olup olmamasını dikkate almadan bütünün herhangi şekilde ayrılmış 4 parçasından 3'ünü ifade ettiğini düşünüyor olabilir. Bu şekilde yanıt vermesindeki bir diğer sebep ise parçaların birbirine eşit olması gerektiğini bildiği halde öğrencinin şekilsel gösterim konusundaki yetersizliği olabilir.

Standart işlemleri uygulayan öğrencilerden 3'ü işlemleri zihninden yapmıştır. Sayıların küçük olmasının zihinden işlem yapmayı kolaylaştırmış ve bu sebeple tercih edilmiş olabilir.

Bunun yanında Gülin isimli öğrenci işlemleri uygularken aşağıdaki şekilde hatalı işlem yapmıştır: $4^{-1} + 2^{-1} = (2^2)^{-1} + 2^{-1} = 2^{(+2)+(-1)} + 2^{-1} = 2^1 + 2^{-1} = 2^0 = 1$

Öğrenci parantez dışındaki kuvvet ile parantez içindeki kuvveti toplamıştır. Bunun yanı sıra tabanları aynı olan iki üslü sayıyı toplarken kuvvetleri de kendi içinde toplamıştır. Bu sebeple, öğrencinin üslü sayılarla işlemlere ilişkin kuralları birbirine karıştırdığı söylenebilir. Tabanları aynı alan üslü sayılar arasında çarpma işlemi kuralını toplama işlemine uyguladığı söylenebilir. Bunun yanında öğrencinin parantez dışındaki üssün ne anlama geldiğini de bilmediği söylenebilir. Ayrıca öğrencinin soruda verilen değerlere ilişkin bir yeterli hissinin olmadığı söylenebilir. Çünkü elde ettiği sonuç ile verilen değerler arasında bir karşılaştırma yapamamakta ve bulduğu sonucun doğruluğu hakkında bir kuşkuya kapılmamaktadır.

6 öğrenci ise negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamını doğru ifade edememiştir. Bu öğrencilerden 4'ü 4^{-1} değerinin 4 ve 2^{-1} değerinin 2 olduğunu belirtmiştir. Diğer iki öğrenci ise 4^{-1} değerinin -4 ve 2^{-1} değerinin -2 olduğunu belirtmiştir.

4.3 2-b Sorusuna Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda sayı duyusu kullanan öğrenci sayısının az olması sebebiyle sayı duyusu kullanan ve kullanmayan öğrenci yanıtları ayrı başlıklar altında incelenmemiştir.

İkinci sorunun bu kısmına ise öğrencilerin % 50'si doğru yanıt vermiştir. Bu soruda yanlızca 1 öğrenci sayı duyusu kullanarak doğru cevaba ulaşmıştır. Sayı duyusu kullanmayan 19 öğrencinin 13'ü sorunun çözümünde standart işlemleri uygulamış ve 6'sı verilen üslü sayılarda negatif ve 0. kuvvetin anlamını doğru ifade edememiştir. Bu soruda sayı duyusu kullanımının oldukça az olduğu söylenebilir. Bunun sebebi sorunun birden fazla işlem içeriyor olması ve hepsini bir arada işlem yapmadan düşünmenin öğrencilere zor gelmiş olması olabilir. Bu sebeple öğrenciler verilen ifadeyi anlamlandırmak yerine, alışkın oldukları şekilde işlem yapmaya yönelmiş olabilir.

Sayı duyusu kullanarak cevaba ulaşan öğrenci, ilk olarak standart payda eşitleme işlemleri ile cevaba ulaşmıştır. Bu öğrenciye araştırmacı tarafından ikinci çözüm yolunun olup olmadığı sorulduğunda aşağıdaki şekilde sayı duyusunu kullanmıştır.

> *Esin: Bunu* [5^0'ı kast ederek] *yine bir tam alırdık. Bunu da* [3×4^{-1} ifadesini kast ederek] *yine sıfır nokta yetmiş beş alırdık. Sıfır nokta yirmi beş çıkardı. Sıfır nokta yirmi beş, bir bölü dörde karşılık geldiği için yine bir bölümü tarardık. Yine bu şekilde sonuca ulaşabilirdik diye düşünüyorum.*

Esin isimli öğrencinin ikinci çözümünde verilen ifadeyi anlamlandırarak cevaba ulaştığı görülmektedir. Esin'in pratik bir çözüm yolu üretme yeterliliğine sahip olduğu görülmektedir. Fakat buna rağmen ilk tercihini işlemlerden yana kullanmış olması öğrencinin standart işlemlere verdiği önemin bir delili olabilir. Bu öğrencinin çözümünün *denk gösterimler* sayı duyusu bileşenine örnek olduğu söylenebilir.

13 öğrenci sorunun çözümünde her bir üslü ifadenin değerini doğru bir şekilde belirttikten sonra standart işlemlerden payda eşitleme işlemini uygulamıştır. Bu öğrencilerden 5'i standart işlemleri zihninden, 8'i ise kâğıt kalem ile yazarak uygulamıştır. Zihninden yapan 5 öğrencinin tamamı işlemlerin sonuçlarını doğru şekilde bulmuştur. Yazarak yapan 8 öğrencinin 3'ü doğru yaparken 5'i gereksiz işlemler veya çeşitli hatalar yapmıştır. Bu öğrencilerden Ege ve Şeyda'nın çözümü aşağıdaki gibidir.

(Ege ve Şeyda) $3\times4^{-1}=12^{-1}=\dfrac{1}{12}$;

Ege ve Şeyda çarpma işlemindeki önceliğin, üs alma işleminde de geçerli olduğunu düşünmüş olabilir. Bu sebeple öğrenciler ilk önce 3 ile 4'ü çarpmış sonrasında çıkan sonucun istenen kuvvetini almıştır. Öğrencilerin sayıların anlamına yönelik bir hisse sahip olmamaları, buldukları sonuçlar ile verilen değerler arasında karşılaştırma yapmalarını ve yaptıkları işlemlerdeki hatalarını fark etmelerini engellemiş olabilir. Yapılan hatalardan bir diğerine aşağıda yer verilmiştir.

(Aydın) $5^0-3\times4^{-1}=1-3\times4^{-1}=-2\times4^{-1}$;

Yukarıda görüldüğü gibi Aydın isimli öğrenci 5^0'ın değerini doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak 3×4^{-1} işlemini yapmak yerine çıkarma işlemini yapmıştır. Bu şekilde yanıt veren öğrencilerin işlem önceliğine yönelik hatalarının olduğu söylenebilir. Rasyonel sayılarla çarpma işlemi sırasında payda eşitleme işlemini uygulamaya çalışan iki öğrencinin çözümleri aşağıdaki şekildedir.

(Buğra) $\underset{(4)}{\dfrac{-2}{1}} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{8 \times 1}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$;

(Begüm) $\underset{(4)}{\dfrac{3}{1}} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{12}{16}$

Buğra isimli öğrenci kesirli sayılarla çarpma işlemi yaparken paydaları eşitlemekte ve payları kendi arasında çarptıktan sonra paydaları aynen yazdığı görülmektedir. Buğra isimli öğrencinin (-) işaretine dikkat etmediği de görülmektedir. Begüm isimli öğrenci Buğra'ya benzer şekilde payda eşitleme işlemi yapmaktadır. Begüm isimli öğrencinin sonucu ve yaptığı işlemler matematiksel olarak doğrudur. Buna rağmen çarpma işlemi için payda eşitleme işleminin gereksiz olduğu söylenebilir. Öğrencilerin toplama işlemi ile ilgili kuralı çarpma işlemi yaparken de uygulamaya çalışmaktadırlar. Ayrıca öğrencilerin kesirli sayılarla toplama ve çıkarma işlemine yönelik algoritmaları anlamlandıramadığı söylenebilir.

6 öğrenci ise 0. veya negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamını doğru ifade edememiştir. Bu öğrencilerden 4'ü 4^{-1} değerinin 4 ve 5^{0} değerinin 5 olduğunu belirtmiştir. Diğer iki öğrenci ise 4^{-1} değerinin -4 ve 5^{0} değerinin 5 olduğunu belirtmiştir.

4.4 Üçüncü Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruya 15 öğrenci tarafından doğru yanıt verilmiştir. Doğru yanıt veren öğrencilerin 15'i de sayı duyusunu kullanmıştır. Sayı duyusunu kullanmayan 5 öğrencinin 2'si kesin bir karara varmak için standart işlemleri uygulayıp üslü sayıların tam değerlerinin bulunması gerektiğini belirtmiş ve 3 öğrenci de matematiksel olarak anlamlı olmayan çıkarımlar ile yanlış bir yanıt vermiştir. Bu soruda sayı duyusu kullanan öğrenci sayısının fazla olduğu söylenebilir. Bu durumun nedeni sorunun yapısından kaynaklanmış olabilir. Soruda verilen değerler öğrencilerin hesaplayamayacakları büyüklüktedir. Bu sebeple öğrenciler karşılaştırma yapabilmek için standart yolların dışında yaklaşımlara yönelmiş olabilirler.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.4.1 Üçüncü soruyu yanıtlarken sayı duyusunu kullanan öğrencilerin cevapları

Sayı duyusunu kullanarak cevaba ulaşan 15 öğrenci bulunmaktadır.

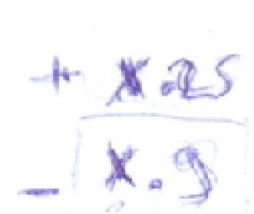
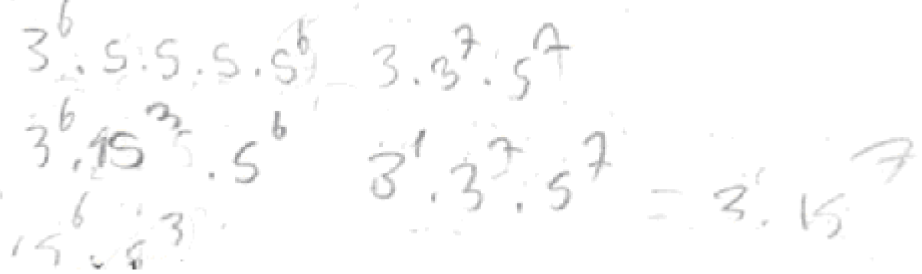
4 öğrenci soruda verilen ifadeleri işe yarar şekilde ayrıştırarak ifadelerin denklerini yazmıştır. Bu öğrencilerden 1'i ilk çözüm yolu olarak ifadelerin denklerini yazmıştır. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Cenk: On beş üzeri altı çarpı beş üzeri üç. On beş üzeri yedi çarpı üç. Yaklaşık bir değer alırsak, bu* [$3^8 \times 5^7 = 15^7 \times 3$'ü kast ederek] *on beş çarpı büyük. Bu* [$3^6 \times 5^9 = 15^6 \times 5^3$'ü kast ederek] *ise üç tane beş olduğunda yüz yirmi beş. Aslında doğru. Çünkü burada kırk beş çarpımının fazlası var. Burada ise yüz yirmi beş çarpımının fazlası var.*

Cenk isimli öğrenci görüldüğü gibi $3^6 \times 5^9$ ifadesini $15^6 \times 5^3$ şeklinde, $3^8 \times 5^7$ ifadesini de $15^7 \times 3 = 15^6 \times 45$ şekline dönüştürmüştür. Bu aşamadan sonra $15^6 \times 5^3$ ile $15^6 \times 45$ ifadelerini karşılaştırmak için değerini bildiği 5^3 ve 45 sayılarını karşılaştırarak cevaba ulaşmıştır. Öğrenci üslü sayıları içeren ifadeler arasında esnek dönüşümleri başarıyla gerçekleştirebilmiştir. Öğrencinin bu çözüm yolunun *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni kullanımına bir örnek olduğu söylenebilir.

İfadeleri işe yarar şekilde ayrıştıran öğrencilerden diğer 2'si ilk önce ifadelerin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Öğrenciler ifadelerin denklerini oluşturduktan sonra doğru cevaba ulaşmıştır. Öğrencilerin ifadeleri Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3: Üçüncü soruda Ongun ve Aydın’ın çözümleri

Öğrenci	İlk çözüm yolu	İkinci çözüm yolu
(Ongun)	*“Üç üssü altı var. Üç üssü sekiz var. Bunun sonucu, üçün artı iki kuvveti olur, fazlalık gibi. Ondan sonra, bununki de biri dokuz biri yedi üssü. Bu taraftakinin bu sefer eksi iki. Bu taraftakinin artı iki. Mantıklı olarak düşündüğümde üstlerinin ortalaması eşit geliyor.”*	*“Beş üssü yedi, beş üssü dokuzdan x çarpı. Mesela nasıl diyeyim. Beşin yedinci kuvvetinin, yirmi beş ile çarpımı kadar daha küçük aynı şekilde diyeceğim. Bunu da iyi hesaplamamız lazım. Buna* [$3^6 \times 5^7$’yi kast ederek] *x dersek buralar eşit gelecek. Soldaki ifade daha büyük.”*  Şekil 4.3 : Üçüncü soru için Ongun’un ikinci çözüm yolu
(Aydın)	*“Yanlış. Şimdi bu ikisinde tabanlar aynı üstleri bunun bundan küçük yani üç üssü altı, üç üssü sekizden küçük. A bu eşittir bence ya. Bunun arasında da aynı fark var dokuz ile yedinin. Altı ile sekizin arasında da iki fark var. Eşit oluyor zaten.”*	*“Şimdi bir dakika bu üç üssü altı kalırdı. Böyle yapardım. İşte böyle olurdu. Niye öyle yaptım ki silgi. Yine aynı yaptım işte. Önce üç üssü altı oldu. Beş üssü dokuzu da dört tane beş yaptım. Bunun sonuncusuna altı yazdım. (...) Şimdi on beş üssü altı çarpı. üç kere beş, on beş. Bunu da yine aynı yaptım. Üç çarpı on beş üssü yedi. E bu on beş. On beş, bu daha büyük. Bu da yani bu daha büyük gelir ya bence. (...) On beş, kırk haa tamam tamam. Kırk beş olur bu. Şimdi açıkladım işte. Yüz yirmi beş. şimdi on beş üssü altıları eşit. Bunları yok saydım. Burada kaç vardı? Kırk beş burada kaç vardı? Yüz yirmi beş. Daha büyük kırk beş küçük olduğuna göre büyüktür. Bu ifade doğrudur.”*  Şekil 4.4 : Üçüncü soru için Aydın’ın ikinci çözüm yolu

Tablo 4.3'te görüldüğü gibi Ongun ve Aydın'ın ilk çözüm yollarında 3^6 ile 3^8 ve 5^9 ile 5^7 üslü ifadelerinin üslerini kendi içinde karşılaştırmıştır. Her iki üs arasındaki farkın eşit olduğunu düşünerek iki çarpımın birbirine eşit olması gerektiğini belirtmiştir. Fakat öğrenciler daha sonra üsteki 2 sayının tabanlara göre etkisinin değişeceğini fark etmiştir. Görüldüğü gibi Ongun isimli öğrenci 5^9'un 5^7'nin 25 katına eşit olduğunu ve 3^8'in de 3^6'nın 9 katı olduğunu fark etmiştir. Daha sonra ilk ifadeyi ikinci ile karşılaştırarak sırasıyla "$+x\times 25$" ve "$-x\times 9$" şeklinde iki denklik oluşturmuştur. Bu ifade de Ongun isimli öğrencinin x ile ifade ettiği değer $3^6\times 5^7$'dir. Öğrencinin burada "$3^6\times 5^9$ *işleminin sonucu,* $3^8\times 5^7$ *işleminin sonucundan daha büyüktür."* ifadesini destekleyen durum için "+" aksi durumda "-" işaretini kullandığı söylenebilir. Bir başka ifade ile ilk ifadenin ikinci ifadeden büyük olduğunu belirten durumda "+" ve küçük olduğunu belirten durumda "-"işaretini kullandığı söylenebilir. Tablo 4.3'te görüldüğü gibi Ayhan isimli öğrencinin çözümleri yukarıda ifadeleri verilen Cenk isimli öğrencinin çözümlerine benzer şekildedir. Bu öğrencilerin cevaplarının *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni kullanımına örnek olduğu söylenebilir.

İfadeleri işe yarar şekilde ayrıştıran öğrencilerden diğer öğrenci ise ilk çözüm yolu olarak aynı tabana sahip üslü sayıları kendi arasında karşılaştırmıştır. Araştırmacı tarafından ikinci bir yolu ile yapıp yapamayacağı sorulduğunda diğer yol olarak verilen ifadelerin denklerini yazarak karar verebileceğini belirtmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine Tablo 4.4'te yer verilmiştir.

Tablo 4.4: Üçüncü soruda Selin'in çözümleri.

İlk çözüm yolu	İkinci çözüm yolu
Selin: "Üç üssü sekiz çarpı beş üssü yedi daha büyüktür. Hayır bir saniye bu [$3^6\times 5^9$'u kast ederek] *büyüktür. çünkü beş üçten daha büyüktür. Çünkü üzerindeki rakam buna göre daha fazla olduğu için daha büyüktür. Yani ifade doğrudur. Üçlerde de büyüklük var ama ikisinde de iki fazla ama beş rakamı daha büyük öyle."*	*A: "Cevaba ulaşmak için şöyle de düşünülebilirdi dediğin bir yöntem var mı? Selin: Eşitlersek de olabilirdi. Yani bunu* [$3^6\times 5^9$'u kast ederek] *üç üssü altı bunu* [5^9'u kast ederek] *beş üssü yedi yapardım. Geriye beş üssü iki kalırdı. Bunu da* [$3^8\times 5^7$'u kast ederek] *üç üssü altıya tamamlardım üç üssü iki kalırdı. Burada da* [$3^8\times 5^7$'u kast ederek] *beş üssü yedi zaten var. Birine beş üssü iki birine üç üssü iki çarparım. Yirmi beş bunu çarparım* dokuz, *yirmi beş daha fazla çıkardı. O yüzden 9 ile çarpmam gereken daha büyüktür."*

Tablo 4.4’te görüldüğü gibi Selin isimli öğrenci ilk çözüm yolunda üsler arasındaki farkın aynı olduğunu fakat tabanda yer alan 5 değeri 3’ten büyük olduğu için ifadeyi daha fazla etkileyeceğini belirtmiştir. Öğrencinin tam değeri bulmaya gerek olmadığının bilinciyle sayıların büyüklüklerini fark ettiği söylenebilir. Bu çözüm yolunun *sayı büyüklüğü* ve *sayısal tahmin* sayı duyusu bileşenleri ile ilgili olduğu söylenebilir. İkinci çözüm yolunda ise $3^6 \times 5^9$ ifadesi ile $3^8 \times 5^7$ ifadelerini karşılaştırabilmek için ne ile tamamlaması gerektiğini düşünmektedir. İfadeleri sırasıyla 3^2 ve 5^2 ifadeleri ile çarptığında birbirine eşit iki ifade oluşturabileceğini fark etmektedir. Daha küçük bir sayı ile çarptığında aynı değere ulaşan sayının daha büyük bir sayı olduğunu belirtmektedir. Selin isimli öğrencinin ifadeler arasında uygun parçalamalar ve birleştirmeler yapabilmiştir. Bu sebeple öğrencinin 2. çözüm yolunun *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir.

11 öğrenci soruyu cevaplarken tabanları eşit olan üslü sayıları kendi içinde karşılaştırarak cevaba ulaşmıştır. Bu öğrencilerden 9’u karşılaştırmayı çarpımsal olarak ve 2’si toplamsal olarak yapmıştır. Bu öğrencilerin çözüm yolları aşağıda ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Çarpımsal olarak karşılaştırma yapan öğrencilerden 2’si ilk çözüm yolunda ifadedeki üslü sayıların kuvvetleri arasındaki fark eşit olduğu için ifadelerin birbirine eşit olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilere ikinci çözüm yollarının olup olmadığı sorulduğunda aynı tabanlı üslü sayıları kendi içinde karşılaştırmayı tercih etmiştir. Bu şekilde düşünen bir öğrencinin her iki çözüm yolu da Tablo 4.5’te sunulmuştur.

Tablo 4.5: Üçüncü soruda Esin’in çözümleri.

1. Çözüm Yolu	2. Çözüm Yolu
“Bunlar eşitlemişler sonuçta. Buna x desek bu x artı iki olur. Üslere mesela altıya x desek x artı iki olur. Mesela yediye x desek dokuz x artı iki olur. Sonuçta burada da x artı iki var. Burada da x var. x artı iki. Burada da 2x artı iki olur diye düşündüm.”	*“Eşitlemez. Çünkü üç üssü sekiz ile beş üssü dokuzun şeyi farklı mesela üç üssü sekiz ile üç üssü ikiyi alalım. Dokuz ediyor ama beş üssü iki yirmi beş ediyor. O yüzden beş üssü dokuzla üç üssü sekiz bu, şu yandaki rakam sayıları ifade etmiyor. Aslında eşitlemiyor. Bu daha büyük şu ifadeden daha büyüktür. Bu söz doğrudur. Çünkü üç üssü iki beş üssü ikiden küçüktür. İlk ifade diğerinden büyüktür.*

Tablo 4.5’te görüldüğü gibi Esin isimli öğrenci ilk çözüm yolunda yukarıda verilen Ongun ve Aydın isimli öğrencilerin çözümüne benzer şekilde üsler arasındaki farktan dolayı iki ifadenin de birbirine eşit olması gerektiğini düşünmüştür. İkinci

çözüm yolunda bu farkın ifadelere olan etkilerinin tabanlara göre değişeceğini fark etmiştir. Esin'in ikinci çözüm yolundaki çözümünün *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir.

Çarpımsal olarak karşılaştırma yapan öğrencilerden diğer 7'si ise ilk çözüm yolu olarak aynı tabanlı üslü sayıları kendi içinde karşılaştırmıştır. Bu şekilde düşünen öğrencilerin ifadelerinden ikisinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Begüm: Büyüktür diyorum. Çünkü beş üssü dokuz daha büyük değer çıkaracak beş üssü yediden. Büyük olan sayının üssü büyük olunca daha fazla değer oluyor çarpmada. O yüzden büyük diyorum. İşlem yapmak istemiyorum.*
>
> *Şeyda: Birincisi daha fazla etki eder. Çünkü beş daha büyük olduğu için dokuz defa çarpıldığında daha büyük bir sonuç olur ama yedi defa çarpıldığında daha az sonuç oluşur üç de sekiz kere çarpıldığında daha az sonuç oluşur.*

Begüm ve Şeyda isimli öğrencilerin üsleri eşit olan üslü sayıların tabanlarının sayı büyüklüğünü nasıl etkileyeceği ile ilgili hisse sahip oldukları söylenebilir. Bu sebeple öğrencilerin çözüm yollarının *sayı büyüklüğü* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu savunulabilir.

Tabanları eşit olan üslü sayıları kendi içinde karşılaştırarak cevaba ulaşan öğrencilerin 2'si karşılaştırmayı toplamsal olarak yapmıştır. Bu öğrencilerin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Buğra: Bu iki üssü büyük kuvvet, beşin ikinci kuvveti. Şununla da şu gider beşin ikinci kuvveti olur.*
> *A: Üç üssü altı ile üç üssü sekiz gider derken?*
> *Buğra: Yani üç üssü altıdan üç üssü sekizi çıkartırsak üç üssü eksi iki olur. Beş üssü iki, üç üssü eksi ikiden büyüktür. Beşin ikinci kuvveti yirmi beş. Üçün ikinci kuvvetinin eksi ikinci kuvveti dokuz bölü bir. O yüzden büyüktür.*

Buğra isimli öğrenci büyük olan ifadeye karar vermek için standart işlemleri yapmak yerine aynı tabanlı üslü sayıları kendi içinde karşılaştırmaya yönelmiştir. Bu sebeple öğrencinin çözümünün *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir. Ancak öğrenci $3^6 - 3^8$ ifadesinin 3^{-2}'ye eşit olduğu şeklinde bir yanılgıya sahiptir. Bu sebeple Buğra'nın üslü sayılarla bölme ve çıkarma kurallarını birbirine karıştırdığı söylenebilir.

4.4.2 Üçüncü Soruyu sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

5 öğrenci sayı duyusu kullanmamıştır. 2'si kesin bir karara varabilmek için işlem yapmaları gerektiğini belirtmiştir. Bu şekilde düşünen öğrencilerden birinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Mustafa: Büyük küçük olduğunu anlamak için ama haaa çarparım evet. Sonucu için hangisi büyükse ona karar veririm.

A: Tamam, o çarpma işlemlerini yapmadan karar verebilir misin?

Mustafa: Yok veremem.

Mustafa isimli öğrenci görüldüğü gibi hangi ifadenin büyük olduğuna karar verebilmek için çarpma işlemlerini yapmaya ihtiyaç duymaktadır. Bu eğilimde olan öğrencilerin ifadeler için işlemsiz yorum yapamadığı bir başka deyişle ifadeleri anlamlandıramadığı söylenebilir. Bunun yanında bu şekilde işlemlere ihtiyaç duyan öğrenci sayısının soruda verilen değerlerin büyüklüğünden dolayı diğer sorulara göre az olduğu söylenebilir.

2 öğrenci yalnızca kuvvetleri dikkate almış ve hangi kuvvetin hangi tabana ait olduğunu önemsememiştir. Bu sebeple ifadelerin birbirine eşit olduğunu düşünmüştür. Bu öğrencilerin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Suna: Şimdi daha büyüktür derken? Üç üssü altı üç üssü sekiz için ondan küçük. Beş üssü dokuz da beş üssü yediden büyük. Ama burada da diyor ki ikisi de birbirinden büyük. E biri küçük biri büyük çıkıyor. Ama mesela üç üssü altı üç üssü sekizden küçük. Beş üssü dokuz beş üssü yediden büyük. Eşit. Hani büyük küçük eşit oluyor. Burada bir büyük bir küçük eşit oluyor.

Merve: Eşit bence. İşte dedim ya hani ben üstlerini şey yaptım denkleştirdim. Buna [3^6'yı kastederek] *bir vererek yedi oldu veya buna* [3^6'yı kastederek] *iki versek sekiz olur. Beş üssü yedi, beş üssü sekiz, beş üssü… Üç üssü sekiz olarak olabilir. Aynı o yüzden eşittir. Bu ifade doğru değildir.*

İfadelerinden anlaşıldığı gibi Suna isimli öğrenci ifadelere baktığında 3^6 ifadesinin 3^8 ifadesinden küçük olduğunu ve 5^7 ifadesinin ise 5^9 ifadesinden küçük olduğunu belirtmiştir. Bu sebeple ifadelerde birbirine göre bir büyük ve bir küçük değer bulunduğu için bu ifadelerin birbirine eşit olması gerektiğini belirtmiştir. Merve isimli öğrenci ise $3^6 \times 5^9$ ifadesinde 5^9'un üssündeki değerini 1 azaltıp 3^6

ifadesindeki üssü 1 arttırabileceğini belirtmiştir. Bu şekilde oluşturduğu $3^7 \times 5^8$ şeklindeki yeni ifadenin $3^8 \times 5^7$ ifadesine eşit olacağını belirtmiştir. Merve'nin diğer bir çözüm yolu ise $3^6 \times 5^9$ ifadesindeki 5^9'un üssünü 2 azaltarak 5^7 yapmak ve 3^6 ifadesindeki üssü 2 arttırarak 3^8 yapmak olmuştur. Öğrenciye göre bu şekildeki dönüşümler ile $3^8 \times 5^7$ şeklinde oluşturduğu yeni ifade ikinci ifadeye eşit olabilecektir. Suna ve Merve isimli öğrencilerin çözüm yollarının oldukça sezgisel olduğu söylenebilir. Öğrenciler kuvvetler arasındaki farklar eşit olduğu için ve bu farkı eşit olarak paylaştırabildikleri için ya da ifadedeki üslü sayılar birbirine göre hem büyük hem de küçük olduğu için iki ifadenin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin tam değerlerini bulmadan üslü sayıların büyüklüklerini kavrayamadıkları söylenebilir.

1 öğrenci ise kuvvetleri birbiri ile çarpmıştır ve hangi çarpım daha büyük ise o ifadenin daha büyük olacağını belirtmiştir. Öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Gülin: Şey* [$3^8 \times 5^7$'yı kast ederek] *bu daha büyük. Bir üslerine baktığımda hangisinin üssü işlemin sonunda daha büyük çıkıyorsa ona göre karşılaştırırım. Bu daha büyük çıkıyor, üç üssü sekiz çarpı beş üssü yedi. Bu* [$3^8 \times 5^7$'yı kast ederek] *elli altı çıkıyor bu* [$3^6 \times 5^9$'yı kast ederek] *da elli dört.*

Görüldüğü gibi öğrenci ifadelerde yer üslü sayıların üslerini kendi içinde çarparak buldukları değerleri karşılaştırmaktadır. $3^6 \times 5^9$ değerini 15^{54} ve $3^8 \times 5^7$ ifadesini 15^{56} olarak hesaplamıştır. Öğrencinin üsleri aynı olan üslü sayılar çarpılırken tabanları çarpılır kuralını yanlış bir şekilde hatırlayarak burada uygulamaya çalıştığı söylenebilir.

4.5 Dördüncü Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda 18 öğrenci verilen sayıları kullanarak 52 sayısının dengini oluşturabilmiştir. Bu öğrencilerden 16'sının oluşturduğu ifadeler soruda belirtilen şartlara uyarken 2'sinin oluşturduğu ifade bu şartlara uymamaktadır. Verilen sayılar ile sayının dengini oluşturabilen öğrencilerin sayı duyularını kullandıkları söylenebilir. Bunların dışında 1 öğrenci ise negatif ve 0. kuvvete sahip üslü sayının doğru anlamını bilmediği için yanlış bir denk ifade oluşturmuştur. 1 öğrenci verilen sayılar ile 52 sayısının herhangi bir dengini oluşturamamıştır.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.5.1 Dördüncü soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

Sayı duyusunun kullanarak 52 sayısının dengini oluşturabilen 18 öğrenci bulunmaktadır. Araştırmacı tarafından öğrencilerin oluşturdukları her denklikten sonra eğer oluşturdukları denk ifade soruda istenen şartlara uymuyor ise bu belirtilmiştir. Öğrencilerin doğru veya yanlış oluşturdukları her denk ifadeden sonra "*başka türlü nasıl oluşturabilirdin*?" sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Öğrencilerin artık başka denklik oluşturamadığı durumlarda diğer soruya geçilmiştir.

Bu soruda kullanılan sayı duyusu bileşenin ağırlıklı olarak *denk gösterimler* olduğu ve bunun yanı sıra *işlemlerin etkileri* bileşenin de kullanıldığı söylenebilir.

52 sayısının dengini oluşturan öğrencilerden 16'sının oluşturduğu denk ifade soruda verilen şartlara uymaktadır. Bu öğrencilerden 5'i verilen şartlara uyacak şekilde 2 farklı denk ifade ve 11'i verilen şartlara uyan 1 denk ifade oluşturabilmiştir. Aşağıda Tablo 4.6'da oluşturulan denk ifadeler ve kaç farklı öğrenci tarafından oluşturulduğu belirtilmiştir.

Tablo 4.6: Dördüncü soruda oluşturulan denk ifadeler ve oluşturulma frekansları

Denk İfade	Oluşturan Öğrenci Sayısı
3^3+26-1^0 veya $3^3+26-52^0$	6
$26\times2\times1^0$ veya $26\times2\times52^0$	6
5^2+26+1^0 veya $5^2+26+52^0$	5
$26\times2^{-1}\times2^2$	1
$(3^3-1^0)\times2$	1
3^3+4+5^2	1
$\dfrac{(\frac{1}{2})^{-4}+(\frac{1}{6})^{-2}}{52^0}$	1

Tablo 4.6'ya bakıldığında öğrencilerin 52 sayısının istenen şartlara uyacak şekilde dengini oluşturma konusunda başarılı oldukları söylenebilir. Öğrenciler tarafından en sık oluşturulan denkliğin 26×2 ifadesini 1 ile çarpmak; 3^3+26 ifadesinden 1 çıkarmak ve 5^2+26 ifadesi ile 1'i toplamak şeklinde oluşturulan ifadeler olduğu

söylenebilir. Buna karşılık negatif üsse sahip değerlerin yalnızca 2 ifadede karşımıza çıktığı görülmektedir. Bu sayıların tercih edilme sıklığındaki fazlalığın nedeni öğrencilerin doğal sayılar ile taban ve üssü pozitif olan üslü sayılara ilişkin daha iyi bir anlayış geliştirmeleri ve kendilerini rahat hissetmelerinden kaynaklanmış olabilir.

52 sayısının dengini oluşturan öğrencilerde 2'sinin oluşturduğu denk ifade soruda verilen şartlara uymamaktadır.

Bu öğrencilerden 1'i (Selin) verilen şartlara uymayan 3 farklı denk ifade yazmıştır. Bu ifadelerden ilki $5^2 \times 2 + 52^0 + 1^0$ 'dır. Burada öğrenci soruda istenen yalnızca 3 sayıyı kullanma şartını sağlamamıştır. Araştırmacı tarafından bu hatırlatıldığında tekrar denemiş ve bu sefer $3^3 \times 2 - 2$ ifadesini söylemiştir. Bu sefer öğrenci 3 sayı kullanmıştır ancak 3 farklı sayı kullanmamıştır. Bu aşamada öğrenciye araştırmacı tarafından 52 sayısına 3 farklı sayı ile ulaşıp ulaşamayacağı sorulmuştur. Öğrenci tekrar denediğinde verilen sayılar içinden yalnızca 2 tanesini kullanarak 26×2 denk ifadesini oluşturabilmiştir. Yeterli zaman verilmiş ve öğrenci verilen sayıları incelemiştir fakat başka bir denklik oluşturamamıştır. Oluşturduğu denk ifade soruda verilen şartlara uymayan öğrencilerden diğeri ise $26 \div 2^{-1}$ denk ifadesini yazabilmiştir (Meriç). Bu öğrencinin 1'den küçük bir sayı ile bölme işlemini tercih etmiş olması sebebiyle *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşenini kullanmış olduğunu söyleyebiliriz. Öğrencilerin 52 sayısının dengini farklı şekillerde başarıyla oluşturabildikleri söylenebilir. Bunun yanında Selin'in son ifadesine $[26 \times 2]$ ve Meriç'in oluşturduğu ifadeye baktığımızda ifadelerinde 2 değer kullandıkları ve farklı bir değer daha kullanmalarının gerektiği görülmektedir.. Kullanılabilecek diğer sayılar arasında çarpma işleminin etkisiz elemanı olan 1 değerine karşılık gelen sayılar bulunmaktadır. Fakat burada soruda verilen şartlar, uygun bir denk ifade oluşturma becerisini gösterme bakımından önemlidir. Bu sebeple öğrencilerin sayıları denk hale getirebildikleri fakat istenen şartlara uyma konusunda yetersiz oldukları söylenebilir.

4.5.2 Dördüncü Soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

1 öğrenci verilen sayılar ile 52 sayısının dengini oluşturamamıştır. Bu öğrencinin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

Melis: [2^2 ile 5^2'yi çarpmayı deniyor] *Sonra üç üssü üçü de verdim ama olmuyor. Toplama yaptım onunla olmadı. Çarpma yapacağım şimdi.*

A: Neyle neyi topladın olmadı?

Melis: Üç üssü üç, iki üssü iki, beş üssü iki, üç üssü üçü topladım. Şimdi çarpacağım.

A: Hepsini çarpacaksın?

Melis: hıhı evet.

A: Elli ikiye ulaşmak için?

Melis: Evet.

Öğrencinin ifadelerinden de görüldüğü gibi öğrenci $3^3 + 2^2 + 5^2$ işleminin sonucu ile 52 sayısına ulaşamadığında bu değerleri çarpmayı denemektedir. Bu öğrencinin $3^3 \times 5^2 \times 2^2$ ifadelerini oluşturmuş olmasına bakılarak *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşenine yönelik eksikliği olduğu söylenebilir.

1 öğrenci negatif ve 0. kuvvete sahip üslü sayılar ile ilgili sahip olduğu yanılgılar nedeniyle aşağıdaki şekilde matematiksel olarak doğru olmayan hem de istenen koşula uymayan ifadeler yazmıştır (Emre).

$$2^{-1} \times 25 = 2 \times 25$$

$$(\frac{1}{2})^{-4} + (\frac{1}{6})^{-2} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{52}$$

$$2^2 \times 3^3 - 52^0 - 2^2 = 4 \times 27 - 52 - 4$$

4.6 Beşinci Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

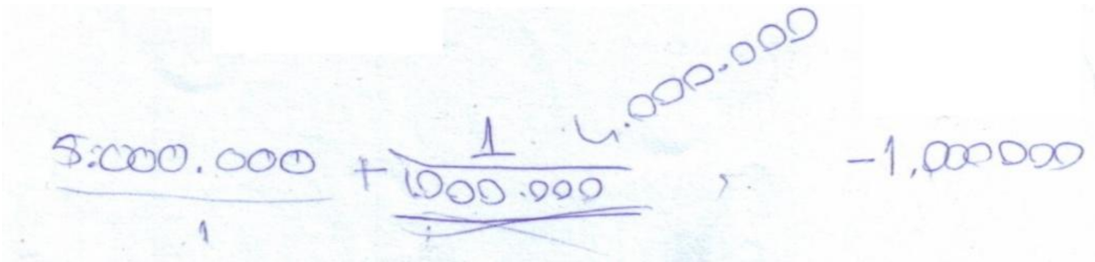
Bu soruda yalnızca 1 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Bu sebeple en düşük başarı oranının (% 5) en düşük bu soruda olduğu söylenebilir. Başarının düşüklüğü sorunun yapısının temel olarak tahmine dayalı olmasından kaynaklanmış olabilir. Buradan öğrencilerin etkili tahminde bulunma konusunda zorlandıkları sonucuna varılabilir. Bunun yanısıra öğrencilerin üslü sayıların değerini hesaplamadıklarında büyüklüğünü kavramada zorlandıkları söylenebilir. Bunun sebebi öğrencilerin, 10^6 veya 10^{-6} gibi üslü sayıların büyüklüklerini işlem yapmadan belirlemeye yönelik çok fazla deneyim geçirmemiş olmaları olabilir. Görüşmeler sırasında görülmüştür ki öğrenciler için 10^6 değeri "1'in sağ yanına 6 tane sıfır eklemek" gibi mekanik bir işlemi çağrıştırmaktadır. Öğrenciler 10^6 değerinin 10^{-6}'nın yanında oldukça büyük bir değere karşılık geldiğini kavrayamadıkları söylenebilir. 10^6 ve 10^{-6} üslü sayıları için sırasıyla 1 000 000 ve 0,000 001 veya $\frac{1}{1000000}$ şeklinde karşılıklarını yazan öğrenciler de elde ettikleri sayıların büyüklükleri arasındaki farkı sezememiştir. Öğrencilerin sayı anlayışarındaki yetersizliğin doğal sayılar ve rasyonel sayılar için de geçerli olduğu söylenebilir.

Öğrencilerin çözüm yolları analiz edildiğinde 5 öğrencinin çözümlerinde sayı duyusu kullandığı görülmüştür. Bu öğrencilerden 2'si sayı duyusu kullanarak bir tahminde bulunmuştur, 3'ü yalnızca 10^6 veya 10^{-6} sayılarının büyüklüklerini kavrayabilmiş fakat bir cevaba ulaşmamıştır. Sayı duyusu kullanarak bir tahminde bulunan 2 öğrenciden yalnızca 1'inin cevabı doğrudur. Bunun yanında 6 öğrenci sorunun çözümünde standart işlemleri uygulamaya çalışmıştır. 3 öğrenci matematiksel olarak doğru olmayan işlemler ile 6 öğrenci ise negatif kuvvete sahip üslü sayının anlamını doğru bilmedikleri için yanlış bir sonuca varmıştır. Bu soru için sayı duyusu kullanımının düşük olduğu söylenebilir.

Kullanılan sayı duyusu bileşenlerinin *sayı büyüklüğü ile sayısal tahmin* olduğu söylenebilir. Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.6.1 Beşinci Soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

Bu soruda 5 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Bu öğrencilerden 2'si bir tahminde bulunmuştur. Bu öğrencilerin kullandıkları sayı duyusu bileşeninin *sayı büyüklüğü* ve *sayısal tahmin* olduğu söylenebilir. Fakat öğrencilerden bulduğu tahmini açıklaması istendiğinde, öğrencilerin gerekli açıklamayı yapamadıkları görülmüştür. Yakın tahminde bulunan Ongun isimli öğrencinin ifadeleri ve cevabı Şekil 4.5'te verilmiştir.



Şekil 4.5 : Beşinci soru için Ongun'un cevabı

Ongun: O zaman beş ile çarparsak, bu geliyor. Sonra daha bunlar var. Yaklaşık dört milyon.

A: Nasıl karar verdin?

Ongun: Şimdi dört milyon şuranın sonucu olarak buldum. Sonra ne yaptım artı 1 bölü milyon var. Yaklaşık dört milyon. Bu işlemi yapmam için paydalarını eşitlemem lazım. Hani buranın eşiti dersek birazcık zor eşitleniyor.

Ongun isimli öğrenci ifadede verilen her bir üslü sayının değerini yazıp ifadeyi yeniden düzenleyerek $4 \times 10^6 + 10^{-6}$ haline getirmiştir. Düzenlediği bu ifadede istenen şekilde 10^{-6} değerini ihmal ederek cevabın yaklaşık olarak 4 milyon olduğunu belirtmiştir. Fakat nasıl karar verdiği sorulduğunda payda eşitleme işlemi yapması gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin bu yaklaşımı *sayısal tahmin* bileşeni adı altında değerlendirilebilir. Fakat öğrenci bu şekilde oluşturduğu sonucun yeterince güvenilir olmadığını düşünmüş olabilir. Bir başka ifade ile öğrenci yaptığı tahmini değerli görmeyip standart işlemler ile devam etmesi gerektiğini düşünmüş olabilir.

Tahminde bulunan bir diğer öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Ali: Yaklaşık bir sonuç… Ya bir sayıyı yuvarlayabiliriz. Zor gözüküyor aslında.

A: Değerlerini düşünürsen her birinin?

Ali: Ya sonuç yaklaşık beş milyon. Sonuç değil de tahminen.

A: Nasıl karar verdin beş milyon olduğuna?

Ali: Aslında emin değilim öyle kafadan attım. Yorum yapamayacağım.

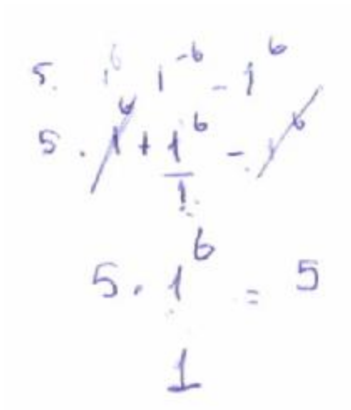
Öğrenci üslü sayıların değerlerini yazarak ifadeyi düzenlemiştir. 10^{-6} ile 10^{6}'nın değerlerine baktığında bu sayıları toplamanın zor olduğunu düşünerek ikisini de ihmal etmiş ve cevabın 5 milyon olacağını tahmin etmiştir. Ali'nin tahmini yeterince güvenilir bir tahmin olmasa da ifadeyi anlamlandırarak bir değer vermesi açısından geçerli bir yanıttır. Ali'nin bu yaklaşımı da *sayısal tahmin* bileşeni adı altında değerlendirilebilir. Ali nasıl karar verdiği açıklaması istendiğinde Ongun'a benzer şekilde düşüncesini önemsemeyerek "*kafadan attığını*" belirtmiştir. Öğrencilerin tahminde bulunarak bir yanıt elde etmeyi önemli bir beceri olarak görmedikleri söylenebilir.

3 öğrenci ise soruda verilen üslü sayıların anlamlarını büyüklük olarak bilmektedir. Bu öğrenciler 10^6 için *"o bir şey, o baya büyük"* ve 10^{-6} için *"0 ile 1'in arasında bir yerde. Nerede… 1'e yakın bir yerde. Yok, 0'a yakın"* gibi ifadeler kullanmaktadır. Bu öğrencilerin *sayı büyüklüğüne* kavrayabildikleri halde bu büyüklüğün bütün ifade içindeki değerlerini dikkate almadıkları yani sayıların diğer sayılara göre büyüklükleri konusunda yetersiz oldukları görülmüştür. Bu şekilde düşünen öğrenciler sayı büyüklüklerini kavramalarına rağmen standart işlemleri uygulamaya devam etmiştir. Öğrenciler 10^6'nın çok büyük, 10^{-6}'nın çok küçük olduğunu bildikleri halde bu ifadelerin yer aldığı bir ifade hakkında yorum yapamamaktadırlar. Buradan sayı büyüklüğünü bilmenin her zaman yeterli olmadığı bunun yanında sayıların göreceli büyüklükleri hakkında doğru bir anlayışa sahip olmanın da gerektiği sonucuna varılabilir.

4.6.2 Beşinci Soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

6 öğrenci standart işlemleri uygulamaya çalışmıştır. 3'ü bu işlemleri uygularken çeşitli işlem hataları yapmıştır.

3 öğrenci matematiksel olarak doğru olmayan işlemler ile bir sonuca varmıştır. 2'si 10^6 ve 10^{-6} değerlerinin çarpım durumunda olmasalar dahi sadeleşerek cevabın 5×10^6 olması gerektiğini belirtmiştir. Begüm isimli öğrenci 10^6 için 1'in yanına 6 tane 0 koyarak veya 10^{-6}'yı kesirli şekilde yazarak üslü sayıları doğru şekilde ifade edebilmiştir. Fakat öğrenci bu dönüşümden sonra onların büyüklüğünü doğru ifade edemediği görülmüştür. Bu öğrencinin *sayıların büyüklüğüne* ilişkin eksikliğinin olduğu söylenebilir. Matematiksel olarak yanlış işlemler uygulayan öğrencilerden 1'i ise (Esin) her 10 değerinin yerine 1 sayısını yerleştirerek bir sonuca varmıştır. Öğrencinin yaptığı işlemler Şekil 4.6'da verilmiştir.



Şekil 4.6 : Beşinci soru için Esin'in cevabı

Esin isimli öğrenci önce küçük bir değer vererek 10^6 ve 10^{-6} değerlerini sadeleştirmenin doğru olup olmayacağını kontrol etmek istemiştir. Bu düşüncenin güzel bir yaklaşım olduğu söylenebilir. Öğrenci küçük bir değer olduğu için 1 sayısını seçmiştir. Fakat seçilen 1 değeri için 1^6 ve 1^{-6} üslü sayıları birbirine eşittir ve üsler ters işaretli olduklarında birbirine eşittirler. Bu da öğrencinin yanılgıya düşmesine sebep olmuştur. Öğrencinin 1'in özel bir durum yarattığını farketmemesi ve 10^6 ve 10^{-6}'yı birbirine eşit olarak kavraması sebebiyle yanlış bir cevaba ulaştığı söylenebilir.

6 öğrenci ise negatif kuvvete sahip üslü sayıların değerlerinin doğrusunu bilmediği için yanlış bir cevaba ulaşmıştır.

4.7 Altıncı Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

6. soruya 4 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Bu soru için başarı oranının (% 20) oldukça düşük olduğu söylenebilir. Toplam 14 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 2'si sayı duyusu ile doğru cevaba ulaşabilmiştir. Diğer 12 öğrenci ise çözüm yollarında sayı duyusunu kullanmış fakat hatalı yorumda bulundukları için yanlış yanıt vermiştir. Öğrencilerin 3 farklı değeri karşılaştırmaları gerektiğinde verileri koordineli olarak değerlendirmede zorlandıkları belirtilebilir. Bu soru ile benzer olan 3. soruya göre 6. sorudaki başarı düşüklüğünün sebebinin 3 değeri aynı anda karşılaştırmada yaşadıkları zorluk olduğu söylenebilir. 3. soruda öğrencilerden iki değerden büyük olan değerin hangisi olduğuna karar vermeleri istenmiştir. 6. soruda ise bir değerin verilen iki değerden hangisine daha yakın olduğunu belirlemeleri istenmektedir. Bunun için ifade çiftleri arasında büyüktür ve küçüktür şeklinde değerlendirme yapmak yeterli olmayacaktır. Soruda öğrenciler

tarafından verilen cevapların *denk gösterimler, sayı büyüklüğü* ve *sayısal tahmin bileşenleri* ile ilgili olduğu söylenebilir.

2 öğrenci soruda doğrudan standart işlemleri uygulayarak ifadelerin tam değerlerini bulmuştur. 2 öğrenci işlem hataları ile yanlış bir sonuca varmıştır. 1 öğrenci ifadedeki hata miktarlarının birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. 1 öğrenci ise ifadelerin değerleri için yanlış bir tahminde bulunmuştur.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.7.1 Altıncı soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

6. soruda 14 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 2'si doğru yanıt vermiştir. Bu öğrencilerden 1'i ifadelerin değerlerini doğru tahmin etmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Emre: Sonuçları en yaklaşık olanı dedim ben. Bu* [$3^2 \times 2^2$'yı kast ederek] *daha yaklaşık geldi. Şimdi bu iki üssü üç sekiz ediyor. Sekiz ile yirmi yediyi çarpınca çok çıkıyor. Bu dört şu da dokuz. Dört ile dokuzu düşününce şuna* [$3^3 \times 2^2$] *daha yaklaşık oluyor. Birincinin cevabına daha yaklaşık oluyor dedim. Birincisinde hata daha azdır dedim. Burada dört ile dokuzu, burada yirmi yedi ile sekizi çarpacağız. Oradaki yirmi yedi ile dört, yüz sekiz. Şu dokuzla dört. Otuz altı ediyor. Öbürkü yirmi yedi ile sekiz ediyor.*

Görüldüğü gibi Emre isimli öğrenci üslü sayıları daha kolay düşünebilmek için doğal sayılara çevirerek çarpımlar için bir tahminde bulunmaya çalışmıştır. Öğrencinin doğal sayılar ile daha rahat düşünebildiği söylenebilir. Emre $3^3 \times 2^2$ ve $3^2 \times 2^2$ ifadesindeki çarpanlar küçük olduğu için değerlerini hesaplamıştır. Bu iki değerin birbirine olan yakınlıklarının $3^3 \times 2^3$ ifadesine göre daha az olduğunu düşünerek doğru sonuca ulaşmıştır. Bu öğrencinin *sayısal tahmin* becerisini kullandığı söylenebilir.

Sayı duyusu kullanarak doğru yanıt veren diğer öğrenci yukarıda verilen Emre isimli öğrenciye benzer şekilde üslü sayıların doğal sayı olarak karşılıkları ile düşünmüştür. Ongun isimli bu öğrencinin çarpma işlemlerini nasıl yürüttüğüne ilişkin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Ongun: Yüz sekiz ile sekizi çarpacağız pardon. Yüz sekiz ile sekizi çarparsak, sekiz yüz sekiz kere sekiz altmış dört. Sekiz yüz altmış dört geliyor rakamlar.

Görüldüğü gibi öğrenci 108×8 işlemini $(100+8) \times 8 = (100 \times 8) + (8 \times 8) = 864$ şeklinde bir denkliğe dönüştürmüştür. Öğrencinin çarpma işlemini zihninden uygulamaya çalışırken bazı aşamalarında uygun denk ifadelere çevirerek işlem yaptığı söylenebilir. Bu sebeple öğrencinin çözümünün sayısal tahmin bileşeni ile ilgili olmayıp *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu belirtilebilir.

9 öğrenci tarafından ifadelerdeki çarpanlar karşılaştırılmıştır. Öğrencilerin tamamı karşılaştırmayı doğru yapmıştır. Fakat öğrenciler karşılaştırmalarının son aşamasında yorum hatası yapmıştır. Bu öğrencilerden Şenay isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Şenay: Şimdi burada [$3^2 \times 2^2$'yı kast ederek] *değerini azaltmış ya üçün. Çok azaltmış gibi geldi bana. Yani daha büyük olanın değerini azalttığı için baya bir azaltmış oldu. Burada* [$3^3 \times 2^3$'yı kast ederek] *küçücük yani iki üçten daha küçük olduğu için onu büyültmekte daha az bir hata olmuş olur.*

Şenay isimli öğrenci $3^3 \times 2^2$ ile $3^2 \times 2^2$ ifadelerinden ilkinin daha büyük olup birinin diğerinin 3 katı olduğunu ve $3^3 \times 2^2$ ile $3^3 \times 2^3$ ifadelerinden ilkinin daha küçük olup biri diğerinin 2 katı olduğunu fark ettiği söylenebilir. Bu aşamaya kadar öğrencilerin çarpanları büyüklüklerine göre karşılaştırabilmek için ifadeleri ayrıştırarak düşünebilmesinin *denk gösterimler* ve *sayı büyüklüğü* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir. Bu aşamadan sonra öğrencinin yorumunun hatalı olduğu ve fark ettiği büyük ve küçük olan ifadeler ile kat fikrini bir arada düşünemediği söylenebilir. Katılımcıların neredeyse yarısının (% 45) bu şekilde düşündüğü olduğu söylenebilir.

Çarpımları karşılaştıran öğrencilerden 5'i ikinci yol olarak standart işlemleri uygulamıştır. Standart işlemleri uyguladığında doğru cevaba ulaşmıştır. Bu öğrencilerden Su isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Su: Evet bununla bunun [$3^3 \times 2^2$ ile $3^3 \times 2^3$'yı kast ederek] *arasıda daha az fark olduğu için daha yakın oluyor. Yani tahminim yanlışmış.*

A: Neden yanlış sence?

Su:Şaşırdım sanırım iki daha küçük olduğu için daha az olur sanmıştım ama. Hani farkı daha az olur diye düşünmüştüm.

Diğer öğrenciler gibi Su isimli öğrenci de bulduğu sonucun ilk tahmininden farklı olduğunu gördüğünde ilk yöntemindeki hatanın nedenini anlayamamıştır. Bu şekilde düşünen öğrencilerin kullandıkları yöntemlerinin kontrollerini yapamadıkları söylenebilir. Bunun yanısıra hatalarını anlayamadıkları halde emin oldukları ilk yöntemlerinin yanlış ve standart işlemlerinin doğru olduğunu düşünmüştür. Öğrencilerin bu sebeple standart işlemlere güvenlerinin fazla olduğu söylenebilir.

3 öğrenci ise verilen $3^2 \times 2^2$ ve $3^3 \times 2^3$ ifadelerini sırasıyla 6^2 ve 6^3 şeklinde denk hallerine dönüştürdükten sonra akıl yürütmeye çalışmıştır. Öğrencilerin bu noktada kullandıkları sayı duyusu bileşeninin *denk gösterimler* olduğu söylenebilir. Öğrenciler bu aşamadan sonra ifadelerdeki ortak olmayan kısımları karşılaştırmıştır. İfadelerin denklerini oluşturan öğrenciler çarpanları karşılaştıran öğrencilerle benzer şekilde yanlış yorumlarda bulunmuştur. Bu öğrencilerden 1'i doğrudan bu yöntemi uygulamıştır. 2'si ise soruyu ilk gördüklerinde standart işlemeleri uygulamaya yönelmiştir. Araştırmacı tarafından "o işlemleri yapmadan cevaplayabilir misin?" sorusu yöneltildiğinde sayıların dengini oluşturmaya yönelmiştir.

Begüm: Bunun sonucu [$3^2 \times 2^2 = 6^2$] *otuz altı ya. Bu* [$3^3 \times 2^2$] *otuz altıdan büyüktür. O zaman bunun sonucu* [$3^3 \times 2^3 = 6^3$] *daha büyük olduğu için o yüzden öyle düşündüm daha azdır diye.*

Begüm isimli öğrencinin $3^3 \times 2^3 = 6^3$ ve $3^3 \times 2^2$ ifadelerinin ikisinin de büyük bir değer olduğunu ve bu sebeple büyük değerlerin birbirine daha yakın olacağına düşündüğü söylenebilir. Begüm isimli öğrenci $3^3 \times 2^3 = 6^3$ ve $3^2 \times 2^2 = 6^2$ şeklinde denk ifadeler oluşturmuştur. Fakat öğrenci daha sonra aradaki farkı dikkate almadan iki büyük değer birbirine daha yakındır şeklinde yanlış bir düşünce geliştirmiştir.

Buğra isimli öğrenci ise ilk önce her bir ifadeyi 9×4'e bölerek aşağıdaki şekilde sadeleştirmiştir. Daha sonra bulduğu denk ifadeler üzerinden yorum yapmıştır.

$$\frac{3^3 \times 2^2}{9 \times 4} = 3 \times 1 \qquad \frac{3^2 \times 2^2}{9 \times 4} = 1 \times 1 \qquad \frac{3^3 \times 2^3}{9 \times 4} = 3 \times 2$$

Aslında öğrencinin görüldüğü gibi ifadeleri işlem yapabilmek için çok kolay bir hale dönüştürdüğü söylenebilir. Fakat öğrenci bu noktadan sonra aşağıdaki yorumu yaparak yanlış yanıt vermiştir.

> *Buğra: Burada dördü sadeleştiririz. Yirmi yedi ile dokuzu üç olur. Dört ile sekizi sadeleştiririz. Üç çarpı ikidir. Üç üssü üç çarpı iki üssü üç daha yakındır.*

Öğrencinin ifadeleri, değerleri ve aralarındaki farklarının kolayca bulunabileceği bir hale dönüştürdüğü söylenebilir. Fakat öğrenci bu aşamadan sonra sonuca ulaşabilmek için değerlerini bulup aradaki farka bakmak yerine çarpanları karşılaştırma yoluna gitmiştir. İlk ifadedeki 3 çarpanı ile ikinci ifadedeki 1 çarpanı arasındaki farkın, birinci ifadedeki 1 çarpanı ile üçüncü ifadedeki 2 çarpanı arasındaki farktan fazla olduğunu düşünerek ilk ifadenin üçüncü ifadeye daha yakın olduğunu düşündüğü söylenebilir.

Selin isimli öğrenci ise ilk yöntem olarak üslü sayıların değerlerini $3^2 \times 2^2 = 3.3.2.2$ ifadesine benzer olarak açmıştır. Sonrasında ise ikinci ve üçüncü ifadeyi ilk ifade ile karşılaştırmıştır (Şekil 4.7). İfadelerdeki farklı olan değerlerin 3 ve 2 olduğunu belirtmiştir. Bu aşamaya kadar öğrencinin düşüncesinin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeninin kullanımı ile ilgili bir örnek olduğu söylenebilir. Bu noktadan sonra Selin diğer öğrencilere benzer şekilde 2'nin 3'ten daha küçük olduğunu düşünerek yanlış yanıt vermiştir. Farklı bir yöntemle nasıl yapabilirdin diye sorulduğunda ise Selin, Buğra isimli öğrenciye benzer şekilde denk ifade oluşturmuş ve yorumlamıştır. Öğrencinin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşenini kullandığı söylenebilir.

Şekil 4.7 : Altıncı soru için Selin'in cevabı

4.7.2 Altıncı soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

2 öğrenci çeşitli hatalar yaparak yanlış sonuca varmıştır. Suna isimli öğrenci verilen $3^3 \times 2^2$ ifadesindeki üsleri sırasıyla 2 ve 3 ile çarparak $3^3 \times 2^2 = 3^6 \times 2^6$ şeklinde hatalı bir sonuç bulmuştur. Burada öğrencinin kuvvetleri eşitlemenin ifadenin

değerini bozmadığını düşündüğü söylenebilir. Gülin isimli öğrenci ise çarpma işlemini uygularken hem tabanlarını hem kuvvetleri kendi arasında çarparak $3^3 \times 2^2 = 6^6$ şeklinde hatalı işlem yapmıştır. Bu öğrencinin üsleri aynı olan üslü sayıları çarparken tabanlar çarpılır kuralını yanlış bir şekilde uyguladığı söylenebilir.

1 öğrenci her iki ifadedeki hata miktarının birbirine eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Mustafa: Bence ikisinde de daha az hata var. İkisi de yani birinde fark oluyor birinde fark olmuyor. Mesela birinde üç üssü üç ile iki üssü ikinin arasında fark oluyor. İki üssü iki ile iki arasında fark olmuyor. Bunda da aynı. Yani bence ikisi de daha az hatalı.*
>
> *A: İkisi de aynı miktarda mı hataya sahip?*
>
> *Mustafa: Evet.*

Mustafa isimli öğrencinin oldukça sezgisel bir tahminde bulunduğu ve tahminleri için yeterli dayanaklar geliştiremediği söylenebilir.

1 öğrenci ise ifadelerin değerlerini hesaplarken işlem hataları yapmış ve yanlış tahminde bulunmuştur. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Aylin: Çünkü bunun açılımı* [3^2'yi kast ederek] *ile bunun açılımını* [2^2'yi kast ederek] *çarptığımız zaman otuz altı ediyor. Yüz sekiz ile otuz altının arasında baya bir fark var. Bununla bunun çarpımı* [$3^3 \times 2^3$'yı kast ederek] *neydi? Bu yirmi yedi ile sekiz. Yedi kere sekiz kaçtı ya yetmiş iki miydi? Öyleydi herhalde. İki kere sekiz on altı. Bu* [$3^3 \times 2^3$] *daha yakın oluyor. Bu bence* [$3^3 \times 2^2$] *bununla bunu açıp çarptığımızda hani bu kadar* [$3^2 \times 2^2$'yı kast ederek] *bir düşük bir sayı çıkmıyor. Çünkü üç üzeri üç yirmi yedi üç tane iki de sekiz. Yani bunların çarpımı daha fazla.*

Aylin ilk ifadenin hangi ifadeye daha yakın olduğuna karar verebilmek amacıyla ifadelerin tam değerlerini bulmak için standart işlemleri zihninden uygulamaya çalışmıştır. Küçük değerler için hatasız işlemler yapmıştır. 27 ile 8'i zihinden çarpmak için de standart çarpma algoritmasını kullanmaya çalıştığı söylenebilir. Çünkü Aylin ilk önce 8 ile 7'yi daha sonra 8 ile 2'yi çarpmaya çalışmıştır. Aylin de Mustafa isimli öğrenciye benzer şekilde cevabın herhangi bir dayanağı olmadan 36'dan daha büyük bir sayı çıkacağını belirtmiştir.

2 öğrencinin soruda kullandıkları tek yöntem doğrudan standart işlemleri uygulayarak ifadelerin tam değerlerini bulmak olmuştur.

4.8 Yedinci Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda 10 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Sayı duyusu kullanan öğrencilerin tamamı doğru yanıt vermiştir. Kullanılan sayı duyusu bileşeni *sayı büyüklüğü* olduğu söylenebilir. Sayı duyusu kullanmayan öğrenciler verilen sayının her iki üslü ifadeye de eşit uzaklıkta olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerden 1'i verilen üslü sayıları birbirine bölerek kat fikrini kullanmıştır. Diğer 7 öğrenci üslü sayıların kuvvetleri arasındaki fark eşit olduğu için verilen sayının iki ifadeye de eşit uzaklıkta olduğunu söylemiştir. 2 öğrenci ise üslü sayıların değerlerini doğru ifade edemediği için yanlış yanıt vermiştir.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.8.1 Yedinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

Bu soruda 10 öğrenci sayı duyusu kullanarak doğru yanıt vermiştir. Bu öğrencilerden 8'i 2^{10}'un değerinin diğer iki sayıya göre oldukça büyük olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerden ikisinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Buğra: Çünkü iki üssü altıdan sonra sayılar büyüyor. Böldükçe de uzaklaşıyor sayıdan. İki üssü daha küçük daha küçük, daha yakındır. Bu yüzden iki üssü iki daha yakındır.*

> *Cenk: Bence buna daha yakındır. Çünkü arasında yine şu iki üzeri yedi iki üzeri sekiz falan var. Bunda da dört sayı var. Ama burada sayılar biraz daha küçülüyor. Burada ise kopuyor direkt baya yükseliyor. Öyle düşünürsek iki üzeri ikiye daha yakındır.*

İfadelerden anlaşıldığı gibi öğrenciler 2^6'dan sonra üssün değeri büyüdükçe üslü sayının değerindeki büyümeyi fark ettiği söylenebilir. Bu sebeple öğrenciler 2^6 ile 2^2 arasındaki uzaklığın 2^{10} ile olandan küçük olduğunu belirtmiştir. Bu akıl yürütmenin *sayı büyüklüğü* bileşeni ile ilgili bir örnek olduğu söylenebilir.

1 öğrenci ilk önce üsler arasındaki farka baktığında aynı olduğunu belirtmiştir. Daha açık şekilde ifade etmek gerekirse 2^2 ile 2^6 sayılarının üsleri arasındaki fark ve 2^6

ile 2^{10} sayılarının üsleri arasındaki fark 4'tür ve birbirine eşittir. Bu sebeple öğrenci verilen sayının iki ifadeye de eşit uzaklıkta olduğunu belirtmiştir. Fakat sonrasında 2^{10}'un değerinin oldukça büyük olduğunu fark etmiş ve doğru yanıt vermiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Selin: İki üstü on ile iki üstü altı arasında da dört fark var. Yani ortasındadır. Ama hangisine daha yakındır diyor dimi? Bu dört. Ooo iki üstü ikiye daha yakındır. Çünkü iki üssü altı altmış dörde eşit gelir. İki üssü iki de dörde eşit gelir. Ama iki üssü on yani zaten altmış dört. Böyle ikişerli şekilde katlanacağı için iyice uzaklaşır ondan. İki üstü ikiye daha yakındır.*

Görüldüğü gibi Selin ilk önce sayılar arasındaki farkın eşit olduğunu düşünmüştür. 2^6 ile 2^7 üslü sayıları arasındaki farkın bile 2^2 ile 2^6 arasındaki farktan daha fazla olduğunu fark etmiştir. Bu sebeple öğrencinin çözümünün *sayı büyüklüğü* sayı duyusu bileşeni ile ilişkilendirilebilir.

1 öğrenci soruyu okuduktan sonra her bir üslü sayının değerini bulmaya çalışmıştır. Araştırmacı tarafından o işlemleri yapmadan karar verip veremeyeceği sorulduğunda verilen değerleri tekrar incelemiştir. 2^{10} değerinin diğerlerine göre oldukça büyük olduğunu fark etmiştir. Bu öğrencinin sayı büyüklüğü sayı duyusu bileşeni ile ilgili yeteneği olduğu halde standart işlemleri yapmaya eğilimi olduğu teşvik edildiğinde sayı duyusunu kullanabildiği söylenebilir.

4.8.2 Yedinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

7 öğrenci verilen üslü sayıların farklarını bulmak için $2^6 - 2^2 = 2^4$ şeklinde bir çıkarma işlemi yaparak değerin her iki üslü sayıya da eşit uzaklıkta olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin çözümlerinin sayı duyusu kullanan Selin isimli öğrencinin ilk düşüncesine benzer olduğu söylenebilir. Selin üslü sayıların doğasını anlamlandırabildiği için sayı büyüklüklerini kavrayarak sayılar arasındaki uzaklığın eşit olamayacağını fark etmiştir. Eşit olduğunu düşünme yanılgısının birbibiri ile ilişkili iki sebebi olduğu söylenebilir. Bu sebeplerden biri üslü sayılarla çıkarma işlemine yönelik eksiklik olabilir. Daha önemli olan ikinci sebep ise üslü sayıları içselleştirememiş olmaları nedeniyle üsteki değişimin sayıdaki etkisini kavrayamamaları olduğu söylenebilir. Bu sebeple öğrenciler mecburen yanlış hatırladıkları standart algoritmalara bağlı kalmış olabilirler.

1 öğrenci sayılar arasında bölme işlemi uygulayarak kaç kat fark olduğunu bulmuştur. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Ege: Zaten yine bunda da bölersek iki üssü altı bölü iki üssü iki eşittir. İki üssü dört yapar. O da [$\frac{2^{10}}{2^6}$] iki üssü dört yapar. Ama şimdi ikisinin de eşit değil midir uzaklıkları? Şimdi aralarındaki farkı ölçmek için bölme yapacağım. İkisinde de aynı sonuç çıktı. İki üssü dört. Oradan eşit olduğunu buldum. İşlem yapmadan. Yani eşit uzaklıkta olduğu için, böldüğümüzde katsayıları aynı eşit ikisinin de eşit olacağını düşündüm.*

Ege isimli öğrenci ifadelerinden de anlaşıldığı gibi sayılar arasındaki uzaklığı bulabilmek için $\frac{2^6}{2^2} = 2^4$ ve $\frac{2^{10}}{2^6} = 2^4$ şeklinde bölme işlemlerini kullanmıştır. Burada uzaklığı karşılaştırmak için kat fikrini kullanması öğrencinin toplamsal ve çarpımsal büyümeye ilişkin yanılgısı olduğu ve üstel fonksiyonlardaki değişimin toplamsal olduğunu düşündüğü söylenebilir.

2 öğrenci üslü sayıların değerlerini bilmemektedir. Bu şekilde düşünen öğrencilerden birinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *A: İki üssü altının değeri için ne dedin?*
>
> *Mustafa: On iki.*
>
> *A: İiki üssü ikinin değeri için?*
>
> *Mustafa: Dört.*
>
> *A: İki üssü onun değeri için?*
>
> *Mustafa: Yirmi. Sekiz. Aralarındaki fark aynı.*

Öğrenciler üslü sayının değerini bulabilmek için taban ve üslerin çarpılması gerektiğini düşünmüştür. Bu sebeple $2^2 = 2\times 2$, $2^6 = 2\times 6$ ve $2^{10} = 2\times 10$ şeklinde ifadeler oluşturmuş ve aralarındaki uzaklıkların eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin taban ve üs şeklinde yazılan sembolik gösterimlerin ne anlama geldiğini anlamlandıramadığı söylenebilir.

4.9 Sekizinci Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruya 7 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Sorunun çözümünde 11 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Kullanılan sayı duyusu bileşenlerinin *referans noktası kullanımı, sayı büyüklüğü ve sayısal tahmin* olduğu söylenebilir. 1 öğrenci tabanı küçük olan sayının çok, tabanı büyük olan sayının az çarpılması gerektiğini ve bu sebeple her iki değerin birbirine eşit olabileceğini belirtmiştir. 2 öğrenci standart işlemler ile cevaba ulaşmıştır. 6 öğrencinin ise üslü sayılara ilişkin yanılgılarının olduğu görülmüştür.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

4.9.1 Sekizinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

11 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. 8 öğrenci 21^{-3} ve 31^{-2} üslü sayılarını sırasıyla 20^{-3} ve 30^{-2} şeklinde düşünerek yanıt vermiştir. Bu öğrencilerden ikisinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Cenk: Sadece yirmi bir üstü üç düşünürsek payda olarak gözetmezsek, yirmi bir üzeri üç otuz bir üzeri ikiden daha büyüktür. Orada basamak artıyor gibi düşündüm. Yani üç tane yirmi birin çarpımı, bir de iki tane otuz birin çarpımı. Bunda* [21^3'te] *daha büyük basamak oluyor. Öyle düşündüm ondan dolayı bu yirmi bir üzeri üç otuz bir üzeri ikiden daha büyük. Ama bir bölü yirmi bir olarak düşündüğümde, bunun paydası daha büyük olduğu için, bu daha küçük oluyor. Mesela ilk çarparsak; bunu sanırsam üç yüz kırk bir gibi bir şey çıkıyor. Burada, e burada direkt çarpınca bunu dokuz yüzlü yaklaşık bir şey. Zaten otuz çarpı otuz dokuz yüzlü bir şey çıkacak. Öyle düşünürsek bu bir daha çarpılınca daha büyük olacak.*

> *Melis: Ya aslında ben ne yaptım biliyor musunuz? Ben bir bölü yirmi biri bir bölü yirmiye yuvarladım. O da bir bölü dört yüz çıktı. Bir de bir bölü yirmi bir ile bir daha çarpacağız daha da küçüleceğini düşündüm. Bir bölü otuz biri de bir bölü otuza yuvarladım. Otuz ile otuzu çarptım. Dokuz yüz çıktı Daha da küçük olduğu için sayı değeri, paydadaki sayı değeri daha küçük olacağı için otuz bir daha büyüktür yirmi birden. O şekilde düşündüm.*

Melis ve Cenk isimli öğrenciler 21^{-3} ve 31^{-2} üslü sayılarını sırasıyla 20^{-3} ve 30^{-2} şeklinde düşündükleri söylenebilir. Cenk isimli öğrenci 31^{2} değerinin *"900'lü bir şey çıkacağını"* ama 21^{3} ifadesinde "*basamak sayısı arttığı için"* daha büyük bir değer olacağını belirtmiştir. Melis isimli öğrenci 20^{-3} ve 30^{-2} ifadelerinin değerlerini düşünerek cevaba karar vermiştir. Cenk ve Melis isimli öğrencilerin 10'un katlarını referans alıp 21^{-3} ve 31^{-2}'in yaklaşık değerleri ile karar verdikleri söylenebilir. Bu nedenle bu öğrencilerin çözümleri *referans noktası kullanımı* ve *sayısal tahmin* sayı duyusu bileşenleri ile ilişkilendirilebilir.

2 öğrenci ilk çözüm yolu olarak standart işlemlere yönelmiştir. Öğrencilere o işlemleri yapmadan hangi işareti yerleştirmeleri gerektiğine karar verip veremeyecekleri sorulduğunda yukarıdaki 8 öğrencinin kullandığı çözüme benzer bir çözüm kullanmıştır. Tablo 4.7'de bu şekilde düşünen öğrencilerden Aydın'ın çözüm yolları verilmiştir.

Tablo 4.7: Sekizinci soruda Aydın'ın çözümleri

1. Çözüm yolu	2. Çözüm yolu
"Bu işte açardım. Tek tek işte hangisi daha büyük ise sayının ona göre işaret koyacaktım arasında."	*"Bu yani bir dakika bu üç basamaklı mı dört basamaklı mı ne çıkacak ama bu daha yüksek basamak çıkacak yirmi bir ondan dolayı basamağı daha yüksek daha çok şey olduğu için büyüktür"*

İfadelerinden de anlaşıldığı gibi Aydın ilk çözüm yolunda ifadelerin değerlerini bularak yanıt verebileceğini belirtmiştir. Burada ilginç olan öğrencinin ikinci düşüncesinde görüldüğü gibi sayı duyusu kullanarak pratik bir şekilde yanıt verebileceği halde uzun ve standart hesaplamayı tercih ediyor olmasıdır. Öğrencinin standart işlemlere yönelik eğilimin fazla olduğu fakat teşvik edildiği durumda sayı duyusunu kullanabildiği söylenebilir. Aydın'ın ikinci çözümünün benzer şekilde *referans noktası kullanımı* ve *sayısal tahmin* sayı duyusu bileşenleri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

3 öğrenci ise üslü sayılar arasındaki farkın az olduğunu belirterek 21 sayısını 3 defa çarpmanın 31 sayısını iki defa çarpmaktan daha fazla büyüteceğini belirtmiştir. Bu öğrencilerden Ege isimli öğrencilerin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Ege: Şimdi ikisi de büyük sayı bir kere nasıl açıklayacağım? Her zaman bu geçerli değil. Ama mesela sayılar arasındaki farka baktığımızda on sayılık bir fark var. Bu fazla büyük olmayacağı için. Hani fazla aralarındaki fark büyük değil. Bir iki ile otuz bir arasıdaki fark kadar değil. Ona yani ona ilişkin buldum

Ege isimli öğrenciler ifadelerinde iki sayının da büyük ve birbirine yakın olduklarını belirtmiştir. Bu sebeple 21^3 değerinin üssünün daha büyük olması sebebiyle 31^2 değerinden daha büyük olacağını belirtmiştir. Öğrencinin cevabının sezgisel kaldığı fakat yine de *sayı büyüklüklerine* yönelik doğru bir hissinin olduğu söylenebilir.

4.9.2 Sekizinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

9 öğrenci sayı duyusu kullanmamıştır. Bu öğrencilerden 1'i 21^{-3} sayısının tabanının küçük olduğunu ama kuvvetteki değerin mutlak değerce büyük olduğunu buna karşın 31^{-2}'in tabanının büyük olduğunu ama kuvvetinin mutlak değerce küçük olduğunu belirtmiştir. Eyşan isimli öğrenci bu sebeple üslü sayıların birbirine eşit olabileceğini belirtmiştir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Eyşan: Evet bunun tabanı daha büyük. Ama burada da iki kere yan yana yazıp çarpacağım. Eşit olabilir aslında. Gene ilk olarak eşittir.

A: Nasıl karar verdin eşit olduğuna?

Eyşan: Burada üç kere yazacağım daha küçük bir sayı. Ama burada iki kere. Daha büyük bir sayı o yüzden eşittir.

Öğrencinin soruda verilen büyük değerler için standart işlemler yerine tahmine yönelmiş olmasının istenen bir durum olduğu söylenebilir. Fakat öğrencinin tahminde bulunurken hiçbir dayanak kullanmadan olasılıklardan birini seçtiği görülmektedir. Büyük bir sayının az sayıda tekrar çarpılaması gibi ifadelerin oldukça sezgisel yaklaşımlar olduğu söylenebilir. Öğrencinin tahmin yürütmeye ilişkin yeterli deneyim geçirmemiş olması bu durumun sebebi olabilir.

Öğrencilerden 2'si cevaba yalnızca standart işlemleri uygulayarak ulaşabilmiştir. Öğrencilere başka türlü çözüp çözemeyeceği sorulduğunda da farklı bir çözüm yolu üretemedikleri görülmüştür. Öğrencilerin standart işlemleri kullanmadan verilen ifadeler üzerinde yorum yapmakta zorlandıkları söylenebilir.

6 öğrencinin ise negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamı ile ilgili doğru bir bilgiye sahip olmadığı görülmüştür.

4.10 Dokuzuncu Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda sayı duyusu kullanan öğrencilerin tamamının çözümleri birbirine benzerdir. Bu sebeple sayı duyusu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin yanıtları ayrı başlıklar altında incelenmemiştir.

Bu soruda 13 öğrencinin sayı duyusu kullandığı söylenebilir. Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 2'sinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Cenk: Burada ise yedi üzeri eksi ikiyi düşünürsek, payda olarak düşünürsek 1 bölü kırk dokuz çıkar.Mesela bu* [7^{-3} 'ü kast ederek] *bir bölü elli olarak düşünelim. Bunu da* [7^{-4} 'ü kast ederek] *bir bölü elli bir olarak düşünelim bu daha büyüktür.*
>
> *Melis: O da bir bölü kırk dokuz ediyor. Ama biz bunu bir kere daha bir bölü yedi ile çarparsak, şu yedi eksi yedi üssü eksi üç ile aldığımızda bir daha bir bölü yedi ile çarparsak daha büyük bir sonuç çıkacak. Yani şu paydada daha büyük bir sonuç çıkacak. O da pay olduğu için sayıyı küçültecek.*

Öğrenciler sayıların anlamlarını bildiğini ifade etmiş ve tam değerleri hesaplamaya gerek duymadan verilen üslü sayıları doğru bir şekilde sıralayabilmiştir. Cenk isimli öğrenci 7^{-2}'nin değerini $\frac{1}{49}$ olarak ifade etmiştir. 7^{-3} sayısının değerini yaklaşık $\frac{1}{50}$ olarak, 7^{-4} değerini de $\frac{1}{51}$ olarak belirtmiştir. Öğrencinin 7^{-3} ve 7^{-4} için verdikleri değerlerin gerçek büyüklüklerine yakın olmadığı açıktır. Ancak Öğrencinin $\frac{1}{49}$ sayısını *referans* alarak diğer sayılar ile karşılaştırabilecek şekilde değerler vermeye çalıştığı söylenebilir. Melis isimli öğrencinin üsteki değişimin nasıl bir sayı büyüklüğünü nasıl etkilediğini öngererek karşılaştırma yaptığı söylenebilir. Bu şekilde düşünen öğrencilerin çözümlerinin *sayı büyüklüğü* sayı duyusu bileşeni ile ilişkili olduğu söylenebilir.

6 öğrenci ise üslü sayıları sahip oldukları kuvvetlere göre doğru sıralamıştır. Sıralamalarının arkasındaki akıl yürütmeleri sorgulandığında ise öğrencilerin verilen

üslü ifadelerin anlamını doğru bilmedikleri görülmüştür. Bu öğrencilerden Mustafa ve Suna isimli öğrencilerin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Mustafa: Aklımda kalan şöyle bir doğru vardı. 0 üstünde olanlar daima büyük olur. Negatif olanlar küçük olur. Aklımda bu kalmış ben ona göre sıralama yaptım.

A: Yedi üssü ikinin değeri nedir?

Mustafa: On dört.

Suna: Zaten sayı doğrusunda sıfırdan sonra eksi bir eksi iki. Şimdi sayı doğrusuna bakarsak pozitif sayılarda sıfıra yaklaştıkça sayı küçülür. Eksilerde ise sıfıra yaklaştıkça büyüdüğü için, eksi iki en büyük olur, daha sonra eksi üç, daha sonra da eksi dört gelir.

A: Şimdi sen üstleri sıraladın dimi? Nasıl bir etki yapıyor o negatif sayılar

Suna: Yine aynı. Buradaki gibi yediyi yan yana eksi üç kere çarpacağız. O zaman da aynı olur.

Mustafa isimli öğrenci verilen üslü sayıları doğru bir şekilde sıralamıştır. Sonrasında sıralamasının nedeni sorulduğunda bu sıralamayı aklında kalan bir kurala dayanarak yaptığını açıklamıştır. Sayıların değerleri sorulduğunda $7^2 = 14$ şeklinde yanlış bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Benzer şekilde Suna isimli öğrencinin de sayıları üslerine göre doğru bir şekilde sıraladığı görülmektedir. Fakat sayıların anlamlarını bilip bilmediği sorgulandığında öğrencinin 7^{-3} için "*7'yi yan yana -3 kere çarpmak"* gibi matematiksel olarak doğru olmayan ifadeler kullandığı görülmektedir.

Şeyda isimli bir öğrenci ise her bir ifadenin dengini hesaplayarak doğru bir sıralama yapmıştır. Öğrencinin sayıları karşılaştırmak için hepsinin tam değerini bulmaya gerek duyuyor olması öğrencinin sayı büyüklüğüne yönelik bir hisse sahip olmamasından kaynaklanmış olabilir.

4.11 Onuncu Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda 12 öğrencinin sayı duyusu kullandığı söylenebilir. Bu öğrencilerin çözümleri *denk gösterimler, sayı büyüklüğü* ve *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşenleri ile ilişkilendirilebilir. Sayı duyusu kullanmayan 8 öğrenciden 6'sının negatif kuvvete sahip üslü sayılara yönelik yanlış bilgisi vardır. 1 öğrenci çarpma işleminin sonucunun her zaman çarpanlardan daha büyük olduğunu, bölme işlemin de ise bölümün her zaman bölünen ve bölenden daha küçük olduğunu düşünmektedir. 1 öğrenci ise rasyonel sayılarla bölme ve çarpma işleminin anlamını doğru ifade edememiştir.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenecektir.

4.11.1 Onuncu soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

Bu soruda 12 öğrencinin sayı duyusu kullandığı söylenebilir. Sayı duyusu kullanan 8 öğrenci soruda tanımlanan ifadeleri bölme ve çarpma işlemleri şeklinde yazdıktan sonra yorum yapabilecekleri denk ifadelere dönüştürmüştür.

Bu öğrencilerden 2'si oluşturduğu denk ifadelerde "işlemlerin" aynı olmasına dikkat etmiştir. Bu öğrenciler $1254 \div 12^{-21}$ ifadesini 1254×12^{21} şeklinde yazdıktan sonra 1254×12^{-21} ile karşılaştırmıştır. Bu aşamadan sonra cevaba ulaşmak için 12^{-21} ile 12^{21} ifadelerin değerlerini karşılaştırması yeterli olmuştur. Bu şekilde düşünen öğrencilerin 12^{-21} ifadesinin 1'den küçük bir değer olduğunu ve çarpma işlemine olan etkisini düşündüğünü söylemek güçtür. Bu sebeple bu şekilde düşünen öğrencinin cevabını *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşeni ile ilişkilendirmenin de güç olduğu söylenebilir.

6'sı ise verilen "sayıların" aynı şekilde ifade edilmesine dikkat etmiştir. Bu şekilde daha kolay düşünebilmiştir. Bu öğrenciler $1254 \div 12^{-21}$ ifadesini 1254×12^{21} ve 1254×12^{-21} ifadesini de $\frac{1254}{12^{21}}$ şeklinde yazmıştır. Daha sonra 1254×12^{21} ve $\frac{1254}{12^{21}}$ ifadelerini karşılaştırarak ilk ifadenin daha büyük bir değere eşit olduğunu belirtmiştir. Bu şekilde düşünen öğrencilerin pozitif tam sayıların yer aldığı ifadeler ile daha rahat düşünebildikleri söylenebilir. Soruda verilen ifadeleri işlemleri veya sayıları aynı olacak şekilde denk ifadelere dönüştüren her iki öğrenci grubunun *denk gösterimler* sayı duyusu bileşenini kullandığı söylenebilir.

1 öğrenci 12^{-21}'in 1'den küçük olduğunu belirterek "*bir bölü iki ile çarpmak aynı zamanda ikiye bölmek demek miydi? İşte o zaman çarpma daha küçük oluyor"* açıklaması ile doğru cevaba yönelmiştir. Bu öğrencinin *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşenini kullandığı söylenebilir.

2 öğrenci ise 1254 sayısının bir üslü sayı halindeki ifadesini düşünerek karar vermiştir. Bu öğrencilerden Meriç isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Meriç: Ya bu sayı* [1254] *iki üssü bir şeyler olabilir bence. Bölü on iki de bir şey olmaz. Eksi yirmi bir bu üslü sayılarda bölmelerde, ya alt taraf eksi olduğunda zaten çıkarırdık. Artı yirmi bir olarak çıkardı. Daha büyük bir sonuç olarak çıkar diye düşündüm.*

İfadelerinden görüldüğü gibi Meriç 1254 sayısını bir üslü ifadeye dönüştürülebileceğini fark etmektedir. Öğrenci paydadaki üssün +21 şeklinde paya çıkartılabileceğini belirtmesi sebebiyle bölmenin daha büyük bir sayı vereceğini belirtmiştir. Öğrencinin bu aşamadan sonra zihninden üslü sayılarla standart bir şekilde bölme ve çarpma işlemi kuralını uyguladığında sonucun neler çıkacağını öngörmeye çalıştığı söylenebilir. 1254 sayısının bir üslü ifadeye dönüşümünü düşünen öğrencilerin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşenini kullandığı söylenebilir.

1 öğrenci verilen değerleri daha küçük bir değere eşitleyerek düşünmüştür. Melis isimli bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Melis: Bu da iki üssü eksi bir yine aynı şekilde çarpalım di mi? Evet doğru. Mesela onu iki üssü eksi bir ile böleceğim. On bölü bir bölü iki diyorum Çarpıyorum iki diyorum. Bir çıkıyor, yirmi çıkıyor. Bunu çarptığımda on ile bir bölü iki, beş çıkıyor yani. Şunun* [bölme işlemini kast ederek] *sonucu daha büyük.*

Görüldüğü gibi Melis isimli öğrenci 1254 için 10 ve 12^{-21} için 2^{-1} değerini kullanmıştır. Öğrencinin 12^{-21} için 1'den küçük bir değer seçmeye dikkat ettiği için *sayı büyüklüğünün* farkında olduğu söylenebilir. Ama bu aşamadan sonra ifadelerinde de anlaşıldığı gibi standart işlemleri uygulamadan karar veremediği söylenebilir.

4.11.2 Onuncu soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanmayan öğrencilerin cevapları

1 öğrenci rasyonel sayılarla bölme ve çarpma işleminin anlamını bilmemektedir. Bu öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Buğra: Bunda kesirli sayılarda bölme de çarpma da aynı olduğu için ikisi de eşit olur. Mesela bir bölü dört olsa. Bir bölü dört ikisi de çarpmada dörde bölüp birisini alırız. Bölmede de dörde bölüp birisini alırız.

Buğra isimli öğrenci kesirli sayılarla bölme işleminin çarpma işlemi ile aynı anlama geldiğini düşünmektedir. Bir doğal sayıyı $\frac{1}{4}$ ile bölmenin ve çarpmanın "*4'e bölüp 1 parçasını almak*" şeklinde düşünmetedir. Bu öğrencinin çarpma işlemi için öğrendiği anlamın bölme işlemi için de geçerli olduğunu düşündüğü söylenebilir.

1 öğrenci çarpma işleminin sonucunun her zaman çarpanlardan daha büyük olduğunu, bölme işleminde ise bölümün her zaman bölünen ve bölenden daha küçük olduğunu düşünmektedir. Şeyda isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

Şeyda: Çarpmada daha çok, bölmede hani paylaştırdığımız için daha küçük bir sayı kalır. Çarpmada ise bu sayıyı katlayarak büyültürüz.

Şeyda isimli öğrencinin çarpmayı her zaman "katlama" ve bölmeyi ise "paylaştırma" olarak ifade etmesinin dikkat çekici olduğu söylenebilir. Öğrenci için katlama fikrinin arttırmayı, paylaştırma fikrinin ise azaltmayı çağrıştırdığı söylenebilir. Bu sebeple öğrencinin 1'den küçük sayılar ile bölme ve çarpma işlemini yorumlarken yanılgıya düştüğü söylenebilir. Bir başka ifade ile öğrencinin *işlemlerin etkileri* konusunda yetersiz olduğu ifade edilebilir.

6 öğrencinin negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamı ile ilgili doğru bir bilgiye sahip olmadığı görülmüştür.

4.12 On birinci Soruya Yönelik Öğrenci Cevaplarının Analizi

Bu soruda 10 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Kullanılan sayı duyusu bileşenlerinin sayıların *denk gösterimleri, sayı büyüklüğü ve işlemlerin etkileri* olduğu söylenebilir. Sayı duyusu kullanmayan 10 öğrenciden 6'sı negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamı ile ilgili doğru bir bilgiye sahip değildir. 3 öğrenci 10^{-7} ile bölme işlemi yaparken hata yapmıştır. 1 öğrenci ise standart işlemleri uygulamadan cevaba ulaşamayacağını belirtmiştir. Bu soruya sayı duyusu kullanan öğrencilerin tümü yani 10 öğrenci (% 50) doğru yanıt vermiştir.

Aşağıda sayı duyusunu kullanan ve kullanmayan öğrencilerin çözümleri ayrı başlıklar altında incelenecektir.

4.12.1 On birinci soruyu yanıtlarken sayı duyusu kullanan öğrencilerin cevapları

Bu soruda 10 öğrenci sayı duyusu kullanmıştır. Sayı duyusu kullanan öğrencilerden 1'i 10^{-7}'nin çok küçük bir sayı olduğunu ve çok küçük bir sayı ile bölme işlemi yapıldığında büyük bir sayı elde edileceğini belirtmiştir.

> *Cenk: On üzeri eksi yedi çok küçük bir sayıdır. Büyük bir sayıyı normal bir sayıya bölersek, bir de bu sayıyı aynı sayıyı, daha küçük bir sayıya bölersek küçük sayıya böldüğümüz sayı daha büyük olur.*

Görüldüğü gibi Cenk isimli öğrenci hiçbir işleme gerek duymadan sayıların ve işlemlerin anlamını düşünerek yanıt vermiştir. Bu şekilde düşünen öğrencinin *işlemlerinin etkileri*nin farkında olduğu söylenebilir. Sorunun çözüm için en pratik çözüm yollarından biri olan bu yaklaşımın öğrencilerin çok azı (% 5) tarafından kullanıldığı belirtilebilir.

7 öğrenci $175 \div 10^{-7}$ ifadesini 175×10^{7} şeklinde yazmıştır. Daha sonra 10^{7}'nin oldukça büyük bir ifadeye eşit olduğunu belirterek sonucun çok büyük çıkacağını belirtmiştir. Öğrencilerin doğal sayılar ile daha rahat akıl yürütmeleri sebebiyle bölme işlemini çarpma işlemine çevirdikleri belirtilebilir. Bu öğrencilerin 10^{7} ile pozitif bir sayının çarpımının oldukça büyük bir sayı verdiğinin farkında olması sebebiyle *işlemlerin etkileri*nin farkında olduğu söylenebilir.

2 öğrenci 175'i üslü sayı şeklinde ifade ederek $175 \div 10^{-7}$ ifadesini $x^{x} \div 10^{-7}$ şeklinde tekrar düzenleyerek yanıt vermiştir. Bu öğrencilerden Ali'nin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Ali: Bu da bu sayı x üssü x gibi bir şey olsun. Bölü on üssü eksi yedi olacak. Bunun üssünü yukarı çıkardığımızda yine böyle artı olacak. İşte toplarız sayı yine büyür.*

İfadelerinden anlaşıldığı gibi Ali 175 sayısını x^{x} şeklinde ifade edilebileceğini belirtmiştir. Burada Ali'nin x değeri yerine soruya uygun olarak herhangi bir değer yerleştirilebileceğini ifade etmeye çalıştığı söylenebilir. Öğrencinin bu düşüncesinin *denk gösterimler* sayı duyusu bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir. Sonra üslü sayılarla standart bölme işlemi kuralını zihinden uygulamaya çalıştığında 10^{-7} değerindeki üssün işaret değiştirerek yukarı çıktığında sayının değerini büyüteceğini belirtmiştir.

4.12.2 On birinci soruyu yanıtlarken sayı duyusunu kullanmayan öğrencilerin cevapları

1 öğrenci sorunun cevabına ulaşmak için işlem yapması gerektiğini belirtmiştir. İşlemleri uygulamadan herhangi bir çözüm üretememiştir. Öğrencinin soruda verilen ifade hakkında bir yorum yapamadığı söylenebilir.

3 öğrenci ifadedeki işlemleri uygulamaya çalışırken işlem hataları yapmıştır. Bu öğrencilerden Mustafa isimli öğrencinin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

> *Mustafa: 175'ten çok küçük çünkü 175 bölersek 175'i 1 bölü 10 milyona bölersek çok küçük olur 175'ten.*
>
> *A: Neden çok küçük olur?*
>
> *Mustafa: 175'i 10 milyona bölersek ifade çok küçülür.*

6 öğrenci negatif kuvvete sahip üslü sayıların anlamı ile ilgili doğru bir bilgiye sahip değildir.

4.13 Öğrencilerin Sayı Duyusu Bileşenleri Bakımından Üslü Sayı Duyuları

Bulgular incelendiğinde genel olarak; öğrencilerin standart işlemleri uygulama eğilimleri olduğu görülmüştür. Sorunun yapısının, soruda bulunan işlem sayısının ve sayıların büyüklüğünün sayı duyusu kullanımını etkilediği söylenebilir.

Üslü sayı alanı ile ilgili yürütülen bu çalışma öğrencilerin doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılardaki anlayışlarını da görme açısından bir fırsat sunmuştur. Öğrenciler için doğal sayılar, kendilerini en rahat hissettikleri ve dönüşümlerinde en sık kullandıkları sayı alanı olmuştur. Örnek olarak 4. soru için öğrencilerin tabanı ve üssü doğal sayı olan değerleri seçme eğilimleri verilebilir. Bir diğer örnek olarak öğrencilerin doğal sayılar arasındaki *işlemlerin etkilerini* anlamada daha başarılı oldukları görülmüştür. 1'den küçük bir sayı ile çarpma ve bölme işlemi yapmanın etkisi hakkında çok az öğrenci yorum yapabilmiştir. Bunun yanında ilk 4 sorunun temel olarak *denk gösterimler* bileşeni ile ilgili olduğu söylenebilir. Öğrenciler denk gösterimler bileşenini bu bileşene yönelik hazırlanmamış diğer sorularda da kullanmıştır. Örneğin 10 ve 11. sorular üslü sayılar ile işlemlerde işlemlerin etkilerinin anlaşılabilmesi ile ilgili olarak hazırlanmıştır. Öğrencilerin bu sorularda verilen değerleri, daha rahat düşünebilecekleri tabanı ve üssü doğal sayı olacak şekilde üslü sayıları içeren ifadelere dönüştürmek için denk gösterimler sayı duyusu bileşenini kullandıkları görülmüştür. Bunun yanında öğrencilerin bu dönüşümleri yaparken yanılgılara düştükleri ve üslü sayılar ile ilgili kuralları birbirine karıştırdıkları söylenebilir. Bunun yanısıra öğrencilerin denk ifade oluşturma konusundaki başarılarını, denk ifadeleri karşılaştırarak yorumlama konusunda sürdüremedikleri görülmüştür.

Tam sonuca gerek olmadığını anlayan öğrenciler, işlemleri uygulamak yerine *tahmin*de bulunma eğilimi göstermiştir. Öğrencilerin nasıl tahminde bulunacaklarını bilmedikleri ve tahminlerinin oldukça sezgisel kaldığı görülmüştür. Bunun yanısıra yakın tahminlerde bulunan öğrencilerin tahmini önemli bir beceri olarak görmemeleri önemli bir bulgudur. Tahmin konusundaki yetersizliklerinin *referans noktası* kullanma konusundaki başarısızlıkları ile ilişkili olduğu söylenebilir. 8. soru en fazla referans noktası kullanılan soru olmuştur. bu soru için referans noktası kullanımındaki artışın nedeni sorunun yapısından kaynaklanmış olabilir. Referans noktası kullanımı ile ilgili olan 1. soru zihinden veya kağıt kalem ile hesaplama yapılabilecek $\frac{1}{4}$ ile 0,76 toplamak gibi değerleri içermektedir. Bu sebeple öğrenciler bu yolu tercih etmiş olabilirler. Fakat 8. soruda verilen 21^{-3} ile 31^{-2} sayıları hesaplama yapmak için oldukça büyük değerlerdir ve sırasıyla 20^{-3} ile 30^{-2} değerlerini referans noktası olarak seçmek iyi bir yoldur.

Öğrencilerin *sayı büyüklükleri*ni kavrama konusunda yetersiz olduğu görülmüştür. Örneğin, öğrenciler için $\frac{1}{4}$ ile 0,76'yı topladıklarında 1'den küçük bir sayı elde etmeleri hiç şaşırtıcı bir şey değildir. Çünkü öğrencilerin bu sayıları çeyrek veya yarımdan daha büyük sayılar olarak düşünmek yerine; işlem yapmak için kullandıkları nesneler olarak gördükleri söylenebilir. Bir başka ifade ile öğrencilerin sayı büyüklükleri hakkında yeterli hisleri olmadığı için işlemlerin sonucunda buldukları değerin doğruluğu hakkında bir düşünceleri de oluşmamaktadır. Benzer şekilde, sayı büyüklüğünü kavrayan öğrencilerin de sayıların birbirine göre durumlarını karşılaştırma konusunda yetersiz oldukları görülmüştür. Örneğin, 10^5 ve

10^{-5} değerlerinin büyüklüğü hakkında fikri olan öğrenciler bu sayıların bulunduğu ifade için bir tahminde bulunamamıştır. Buradan sayı büyüklüklerinin anlaşılması yanında sayıların diğer sayılar içersindeki yerinin anlaşılmasının da önemli olduğu söylenebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Araştırmanın sonucunda öğrencilerin üslü sayılara yönelik sayı duyusu kullanımlarının düşük olduğu görülmüştür. Çalışmada öğrencilerin üslü sayılarda yetersiz sayı duyusu kullanımının temelinde tam sayılar ve rasyonel sayı anlayışlarındaki eksikliklerden kaynaklandığı görülmüştür. Nitekim, Duatepe-Paksu (2008) tarafından üslü ve köklü sayılar konusundaki yanılgıların önlenmesi için mutlaka tam sayılar ve rasyonel sayılar konularındaki bilgi eksikliklerinin giderilmesi gerektiği belirtilmiştir. Bu sonuç farklı ülkelerde gerçekleştirilmiş tam sayılar ve rasyonel sayıları konu alan pek çok çalışmadaki sayı duyusunun yetersizliği bulgusu ile örtüşmektedir (Harç, 2010; Işık ve Kar, 2011; Kayhan-Altay, 2010; Menon, 2004; Mohamed ve Johnny, 2010; Reys vd., 1999; Singh, 2009; Yang, 2005).

Öğrencilerin kısa ve pratik yöntemler yerine uzun zaman alan ve işlemlere dayalı çözümlere yönelmesi araştırmanın diğer bir önemli sonucudur. Araştırmada öğrencilerin standart işlemleri ve önceden ezberledikleri kuralları kullanma eğilimlerinin oldukça fazla olduğu görülmüştür. Bu sonuç farklı ülkelerde gerçekleştirilmiş pek çok çalışmanının bulguları ile örtüşmektedir (Harç, 2010; Işık ve Kar, 2011; Kayhan-Altay, 2010; Reys ve Yang, 1998; Singh, 2009; Yang ve Huang, 2004; Yang, 2005). Bunun yanında öğrencilerin bir takım kuralları takip ettikleri ve ulaştıkları sonuçların anlamlılığı ile ilgili herhangi bir hisse sahip olmadıkları ve bu sebeple sonuçlarını kontrol edemedikleri görülmüştür. Bu bulgu öğrencilerin buldukları sonuçları yorumlamada güçlük yaşadıklarını belirten Işık ve Kar'ın (2011) çalışmasındaki bulgular ile örtüşmektedir.

Araştırmada öğrencilerin standart işlemleri tercih ettiği fakat uzun işlemleri uygulamadan yapıp yapamayacakları sorulduğunda sayı duyusu kullandıkları görülmüştür. Bu çalışma öğrencilerin cesaretlendirildiklerinde sayı duyusu kullandığını belirten diğer çalışmalar ile tutarlıdır (Markovits ve Pang, 2007; Reys ve Yang, 1998).

Araştırma, sorunun yapısının sayı duyusu kullanımını belirleyen önemli bir faktör olduğunu ortaya koymuştur. Öğrenciler her soruyu okuduklarında kalemi ellerine alarak yazı yazmaya hazır bir hale bürünmüştür. Bir başka ifade ile öğrenciler sorulara standart işlemleri uygulama alışkanlığı ile yaklaşmıştır. Öğrenciler bu şekilde çözemeyeceklerini anladıklarında durup düşünmeye ve farklı yöntemler aramaya yönelmiştir. Buradan hareketle problemlerin çözüm yolu için düşünmeden, daha önce benzer durumda karşılaştıklarında yaptıkları gibi tanıdık yöntemler ile çözülebileceği hissini yaratmaması gerektiği söylenebilir. Bu sonuç sorunun yapısının kullanılan sayı duyusunu etkilediğini belirten Sturdevant'ın (1991) çalışması ile desteklemektedir.

Araştırmanın bir diğer sonucu tahminde bulunmaya çalışan öğrencilerin nasıl tahmin yürüteceklerini bilmedikleri ve bir karara varabilmek için yeterli dayanak noktaları seçememeleridir. Bu sebeple öğrencilerin tahminleri oldukça sezgisel kalmıştır. Bu sonuç alanyazındaki öğrencilerin tahmin konusundaki yetersizliklerini destekleyen diğer çalışmalar ile örtüşmektedir. (Kayhan-Altay, 2010; Menon, 2004; Reys vd., 1999). Bunun yanında başarılı bir tahminde bulunan az sayıda öğrencinin (5. soruda öğrencilerin % 10) bulduğu sonucu yeterli görmediği ve standart işlemleri uygulaması gerektiğini düşündüğü görülmüştür. Bir başka ifade ile öğrencilerin tahmin etmeyi önemli bir beceri olarak görmedikleri ve tahmine güvenemedikleri sonucuna varılmıştır.

Benzer şekilde tahmin becerisindeki yetersizliğe paralel olarak öğrencilerin referans noktası kullanımın da az olduğu görülmüştür. 1, 8 ve 9. sorular öğrenciler tarafından referans noktası bileşeninin kullanıldığı sorulardır. Birinci ve dokuzuncu soruda referans noktası yalnızca 2 öğrenci ve sekizinci soruda 8 öğrenci tarafından kullanılmıştır. Öğrencilerin referans noktası kullanım becerilerinin düşük olduğu söylenebilir (Markovits ve Pang, 2007; Reys vd., 1999).

Araştırmanın sonucunda öğrencilerin işlemlerin etkilerini anlamaya yönelik yetersizliklerinin olduğu görülmüştür. Öğrencilerin 1'den küçük sayılar ile çarpma ve bölme işleminin, sonucu nasıl etkilediğini düşünmek yerine kuralları uygulama eğilimde olduğu görülmüştür. Bunun yanısıra öğrenciler çarpma işleminin sonucunun her zaman çarpanlardan daha büyük olduğu, bölme işleminde ise bölümün her zaman bölünen ve bölenden daha küçük olduğu şeklinde bir yanılgıya sahip olduğu görülmüştür. Bu sonuç işlemlerin etkilerini anlama konusunda yetersizliklerin olduğunu belirten Türkiye ve Malezya'da gerçekleştirilmiş diğer çalışmalar ile örtüşmektedir (Harç, 2010; Mohamed ve Johnny, 2010; Singh, 2009). Buna karşın Amerika Birleşik Devletleri'nde Sturdevant'ın (1991) gerçekleştirdiği çalışmada belirttiği işlemlerin etkilerini anlama bileşeni ile ilgili sorularda diğer bileşenlere göre öğrencilerin biraz daha başarılı oldukları bulgusu ile çelişmektedir. Bu çelişki; öğretim programlarında standart hesaplamalara ve tam sonuç elde etmeye verilen değerler ile öğrencinin içinde bulunduğu kültürün sayı duyusu becerisi üzerinde yarattığı farklılıktan (Aunio vd., 2006; Markovits ve Pang, 2007; Reys vd., 1999) kaynaklanmış olabilir.

Öğrencilerin doğal sayı olan taban ve üsse sahip üslü sayılarda çarpma ve bölme işlemlerinin etkisini anlamada negatif kuvvetlere göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu sebeple öğrencilerin ifadedeki üslü sayıları bu forma dönüştürdükten sonra karar verdikleri görülmüştür. Bu sonuç Avcu'nun (2010) öğrencilerin tabanı ve üssü doğal sayı olan ifadeleri karşılaştırmaya yönelik sorularda yüksek başarıya sahip oldukları, farklı sayı alanına sahip taban ve kuvveti içeren ifadelerin yer aldığı sorularda zihinsel karşılaştırmaları yaparken zorlandıkları ve düşük başarı gösterdikleri bulgusu ile örtüşmektedir.

Araştırma öğrencilerin hesaplama yapmadıklarında, çok büyük ve çok küçük olan üslü sayı büyüklüklerini sezmekte zorlandıklarını ortaya çıkarmıştır. Bu sonuç Sastre ve Mullet (1998) tarafından yapılan çalışmada 13-14 ve 16-17 yaş grubundaki öğrencilerin üstel ifadelerin değerlerini sezgisel olarak tahmin ederken zorlandıkları bulgusu ile örtüşmektedir. Öğrenciler özellikle çok büyük ve çok küçük sayıları anlamlandırmakta zorlanmıştır. Öğrencilerin bu sayılara yönelik düşünceleri yanına *"üs değeri kadar sıfır koymak"* gibi oldukça mekaniktir. Bir başka ifade ile sayılar büyüdükçe veya küçüldükçe öğrencilerin sayı büyüklüğünü kavramakta zorlandıkları söylenebilir. Benzer şekilde mevcut araştırmanın Pike ve Forrester (1996) tarafından yapılan çalışma 6-11 yaşları arasındaki öğrencilerin 1-100 arasındaki sayılar arasında sayı büyüklüklerini belirlemede 1-1000 arasındaki sayılara göre daha iyi olmaları bulgusu ile desteklendiği söylenebilir.

Araştırmanın sonucu olarak öğrencilerin üslü sayıların üssündeki artışın sayı büyüklüğüne olan etkisini anlamada yetersizliklerinin olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerdeki genel eğilim, bu artışın toplamsal olduğunu düşünme yönündedir. Bu bulgu Sastre ve Mullet (1998)'daki bulgular ile örtüşmektedir.

Araştırmada denk gösterimler sayı duyusu bileşeni ile ilgili sorularda öğrencilerin üslü sayıların çarpımını içeren ifadelerde ayrıştırma ve birleştirme işlemlerini başarılı şekilde yapabildikleri görülmüştür. Fakat öğrencilerin bu dönüşümleri başarıyla yaptıkları halde elde ettikleri yeni ifadeleri karşılaştırma konusunda sınırlılıklara sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrenciler iki farklı ifadeyi büyüklüğüne göre başarı ile karşılaştırırken; 3 farklı ifadenin birbirine göre uzaklıklarına karar verilmesi gerektiğinde ifadeleri koordineli bir şekilde düşünemedikleri görülmüştür. Bu bulgu Singh'in (2009) gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin denk ifadeleri karşılaştırmak için yorum yapamadıkları ve hesaplama yapmaya çalıştıkları bulgusu ile örtüşmektedir.

Araştırmada öğrencilerin doğal sayılar ve pozitif taban ve üsse sahip üslü sayılar ile daha rahat işlem yaptıkları görülmüştür. Bunun yanında öğrencilerin rasyonel sayılara yönelik anlayışlarındaki yetersizliğin olduğunu ortaya konmuştur. Öğrencilerin bu konudaki yetersizlikleri onların kuralları anlamadan uygulamasına ve buldukları sonuçları yorumlamakta ve kontrol etmekte zorlanmasına sebep olmuştur. Farklı araştırmalar da öğrencilerin öğrencilerin rasyonel ve ondalık sayıların doğasını anlamaya yönelik kavramsal anlayışlarının yetersiz olduğunu göstermiştir (Kayhan-Altay, 2010; Markovits ve Pang, 2007; Mohamed ve Johnny, 2010; Reys ve Yang, 1998; Reys vd., 1999; Singh, 2009).

Araştırma sonucunda öğrencilerin a^{-1} ifadesinin üssündeki (-) değerinin tabana etki ederek bu ifadenin $-a^{1}$ ifadesine eşit olduğunu düşünme ya da a^{-1} ifadesinin doğrudan a^{1} ifadesine eşit olduğunu düşünme gibi hataların olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra a^{0} ifadesinin a olduğu şeklinde yanılgılara sahip öğrencilerin de olduğu görülmüştür. Bu yanılgılar daha önceki araştırmacılar tarafından belirtilen kavram yanıgıları içerisinde yer almaktadır (Avcu, 2010; Cengiz, 2006; Duatepe-Paksu, 2008; Şenay, 2002).

5.2 Öneriler

Araştırmada kullanımına ilişkin yetersizliklerin olduğu belirlenen sayı duyusu bileşenlerine yönelik kazanımlara ders programlarında daha fazla yer verilmelidir.

Öğrencilerin sayı duyularının gelişimi için, öğretmenlerin sayı duyusu ile ilgili düşüncelerinin ve becerilerinin önemli olduğu söylenebilir. Matematik eğitimi konusunda çalışan araştırmacılar tarafından Türkiye’deki öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının üslü sayı duyularının ve düşüncelerinin incelendiği bir çalışma gerçekleştirilebilir. Çalışmanın araştırma grubunu 8. sınıf öğrencileri oluşturmuştur ve öğrenciler üslü sayılarla işlemler ve negatif üs ile çalışmanın yürütüldüğü yıl içerisinde karşılaşmıştır. Ayrıca matematik eğitimi konusunda çalışan araştırmacıları tarafından üslü sayılar ile ilgili daha fazla deneyim geçirme fırsatı olan 9 ve 10. sınıf öğrencilerin üslü ifadeler ile ilgili sayı duyularının incelendiği bir çalışma gerçekleştirilebilir. Bunun yanında araştırmacılar tarafından farklı sayı formlarında sayı duyusu gelişimini sağlayacak etkinlikleri içeren deneysel bir çalışma gerçekleştirilebilir.

Öğretmenlerin öğrencilerinin sayı duyusu becerilerini değerlendirebilecek ve geliştirmelerine yardımcı olabilecek yeterlilikte olması gerekmektedir. Bunun için öğretmenlerin sayı duyusu kavramının ne olduğunu hem teorik hem de pratik olarak öğrenmelerine imkan sunan hizmet-içi eğitim seminerleri düzenlenmesi önerilebilir.

Öğrenciler derslerde akran etkileşimleri ve tartışmalar ile matematiksel bilgileri yorumlama ve oluşturma şansı bulmalıdır. Derslerde üslü sayı anlayışları ve işlemlerine yönelik tartışmalara yer verilmelidir. Öğrencilerin özellikle *işlemlerin etkileri* sayı duyusu bileşenine yönelik yetersizlikler olduğu dikkat çekmiştir. Öğrencilerin farklı sayı formlarını içeren işlemlerin sonuçları hakkında, hesaplama yapmadan yorumda bulunmalarını sağlayacak ortamlar hazırlanmalıdır.

Öğretmenler tarafından, sayı duyusu kullanımını gerektirecek etkinlikler hazırlanmalı ve öğrenciler sayı duyusu kullanımı konusunda cesaretlendirilmelidir. Zamanından önce verilen kurallar öğrencilerin anlamlı öğrenmelerini engellemektedir. Bu sebeple anlamlı öğrenme gerçekleşmeden kurallar öğrencilere öğretilmemelidir.

Araştırmada tahminde bulunan öğrencilerin bu şekilde elde ettikleri sonucun değerli olmadığını düşündükleri görülmüştür. Öğrencilerin tahmin eğilimleri eğilimlerine ket vurulmamalı, tahminen bir sonuç bulmanın matematiksel olarak önemli bir beceri olduğu ve özellikle hangi durumlarda kullanılabileceği vurgulanmalıdır.

Öğrencilerin üslü sayılar ve üslü sayılarla işlemler ile ilgili yanılgılarının olduğu görülmüştür. Öğrenciler bazı durumlarda sahip oldukları bu yanılgılar nedeniyle yanlış bir düşünce ile doğru cevaba ulaşabilmiştir. Öğrencilerin yanılgılarının fark edilebilmesi için öğretmenler tarafından açık uçlu soruları içeren ölçme ve değerlendirmelere ve bunun yanısıra sınıf içinde tartışma etkinliklerine yer verilmelidir.

KAYNAKLAR

Aunio, P., Niemivirta, M., Hautamaki, J., Van Luit, J. E. H., Shi, J. ve Zhang, M. (2006). Young children's number sense in China and Finland. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50(5), 483–502.

Avcu, R. (2010). Eight graders' capabilities in exponents: making mental comparisons. *Practice and Theory in System of Education,* 5(1), 39–48.

Cengiz, Ö. M. (2006). *Reel sayıların öğretiminde bir kısım ortaöğretim öğrencilerinin yanılgıları ve yanlışları üzerine bir çalışma.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Duatepe-Paksu, A. (2008). *Üslü ve köklü sayılardaki öğrenme güçlükleri*. Özmantar, M. F. ve Akkoç, H. (Eds): Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri. Pegem Akademi, Ankara, 9-39.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics learning disabilities: a view from developmental psychology. *Journal of learning disabilities,* 30, 20-33.

Greeno, J. G. (1989). Some conjectures about number sense. In J. Sowder and B. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference.* San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Greeno, H. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain source. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(3), 170-218.

Harç, S. (2010). *6. Sınıf öğrencilerinin sayı duygusu kavramı açısından mevcut durumlarının analizi,* Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Işık, C. ve Kar, T. (2011). İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin sayı algılama ve rutin olmayan problem çözme becerilerinin incelenmesi, *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 12(1), 57-72.

Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal*, 14 (2), 133–149.

Kayhan-Altay, M. (2010). *İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Sayı Duyularının; Sınıf Düzeyine, Cinsiyete Ve Sayı Duyusu Bileşenlerine Göre İncelenmesi,* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Markovits, Z. ve Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25 (1), 4–29.

Markovits, Z. ve Pang, J. (2007)**.** The ability of sixth grade students in Korea and Israel to cope with number sense tasks. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 241–248*)* Seoul: PME.

McIntosh, A., Reys, B. J. ve Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics,* 12(3), 2-9.

MEB, (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Menon, R. (2004). Elementary school children's number sense. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved March, 10, 2011, from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramamenon.pdf.

Mohamed, M. ve Johnny, J. (2010). Investigating number sense among students. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 317-324.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2004). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Anı yayıncılık.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods (*3rd Ed.). London:Sage publications.

Pike, C. D. ve Forrester, M. A. (1996). The role of number sense in children's estimating ability. *Proceedings of the Day Conference, British Society for Research into Learning Mathematics (pp. 43–48).* Institute of Education, London: BSRLM. Retrieved May 28, 2010, from http://bsrlm.org.uk/IPs/ip16-3/BSRLM-IP-16-3-Full.pdf

Pitta-Pantazi, D., Chiristou, C. ve Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 301-311.

Resnick, L. B. (1989)**.** Defining, assessing and teaching number sense. In J. Sowder and B. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference.* San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, R. E. ve Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth- grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), 225–237.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., ve Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of Students in Australia, Sweeden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99 (2), 61–70.

Sastre, M. T. M. ve Mullet, E. (1998). Evolution of the Intuitive Mastery of the relationship between base, exponent, and number magnitude in high-school students. *Mathematical Cognition*, 4(1), 67-77.

Singh, P. (2009). An assessment of number sense among secondary school students. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (October,8).[online]:http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

Sowder, J. T. ve Schappelle, B. P. (Eds.) (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics:* Report of a conference. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Sturdevant, R. J. (1991). Investigating the use of number sense by elementary students in grades 4, 6, and 8 (Doctor of Pilosophy of Missouri-Colombia, 1991).

Şenay, Ş. C. (2002). *Üslü ve köklü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanılgıları üzerine bir araştırma.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Yang, D. C. ve Huang, F. Y. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation, and number sense of sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 30 (4), 373–389

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31,* 317-333.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EKLER

Ek-1 Üslü Sayı Çiftlerini Karşılaştırma Testi

Adı, Soyadı:

Sınıf:

Cinsiyet: Kız ( ), Erkek ( )

Sevgili arkadaşlar,

Pamukkale üniversitesinde yüksek lisans öğrencisiyim. Tez çalışmam için yardımınıza ihtiyacım var. Sizden istediğim >**,** <**,** veya = işaretlerini kullanarak sorularda verilen üslü sayıları karşılaştırmanız. Karşılaştırmayı yaparken varsa kullandığınız özellikleri ve nasıl düşündüğünüzü her bir sorunun yanındaki boşluğa kısaca belirtiniz. Yardımcı olduğunuz için teşekkür ederim.

Esra İYMEN

SORULAR

1. $23^{8}, \ldots, 23^{13}$
2. $(-12)^{13}, \ldots, (-12)^{17}$
3. $0.5^{25}, \ldots, 0.5^{31}$
4. $(-0.3)^{35}, \ldots, (-0.3)^{43}$
5. $23^{-8}, \ldots, 23^{-13}$
6. $(-12)^{-7}, \ldots, (-12)^{-9}$
7. $0.5^{-14}, \ldots, 0.5^{-23}$
8. $(-0.3)^{-15}, \ldots, (-0.3)^{-21}$

9. $24^9, \ldots, 15^9$
10. $(-14)^{19}, \ldots, (-25)^{19}$
11. $-17^{-9}, \ldots, 15^{-19}$
12. $(-12)^{-13}, \ldots, (-14)^{-13}$
13. $0.7^8, \ldots, 0.4^8$
14. $0.5^{-15}, \ldots, 0.6^{-15}$
15. $(0.3)^{19}, \ldots, (-0.5)^{19}$
16. $(-0.8)^{-17}, \ldots, (-0.7)^{-17}$
17. $24^{3/5}, \ldots, 15^{3/5}$
18. $17^{(-3/5)}, \ldots, 15^{(-3/5)}$
19. $0.7^{5/7}, \ldots, 0.4^{5/7}$
20. $0.3^{(-3/5)}, \ldots, 0.5^{(-3/5)}$

Ek-2 Görüşme Soruları Taslağı ve Uzman Görüş Formu

Sayın Uzman,

Pamukkale Üniversitesi İlköğretim Bölümü'nde, İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin sayı duyusu bileşenleri bakımından üslü sayı duyularının incelenmesine yönelik bir tez hazırlamaktayım. Aşağıda çalışmamla ilgili kısa bilgiler yer almaktadır.

Ekte yer alan görüşme soruları aşağıda belirtilen sayı duyusunun 5 bileşenine yönelik hazırlanmıştır. Her bir sorunun yanında hangi bileşen için hazırlandığı ve öğrenciden alınabilecek olası cevaplar bulunmaktadır. Görüşme sorularının belirtilen bileşenleri yansıtma durumunu, 1 ile 5 arasında (1 en düşük, 5 en yüksek olacak şekilde) puanlama yaparak değerlendirirseniz sevinirim.

Görüşleriniz için teşekkür ederim.

Esra İYMEN

Sayı duyusu, sayısal durumların yönetiminde matematiksel kararlar verebilmeyi, sayı ve işlemler arasındaki genel anlayışları, etkili ve kullanışlı stratejiler geliştirebilmek için esnek yollar içerisinde bu anlayışları kullanma eğilimini ve becerisini ifade eder (Reys vd., 1999). Sayı duyusu ile ilgili çalışan araştırmacılar bu becerinin bileşenlerine yönelik çeşitli sınıflandırmalar yapmışlardır (Greeno, 1991; McIntosh vd., 1992; Markovits ve Sowder, 1994; Reys vd., 1999). Bileşenlere yönelik yapılan sınıflandırmalardaki benzerlikler dikkate alınarak belirlenen 5 bileşen ve her birinin kısaca ne ifade ettiği aşağıda verilmektedir.

1. **Denk gösterimler:** Problem durumları içerisindeki ifadelerin, problemin çözümü için daha kullanışlı olan denk halini bilme ve kullanma eğilimini ifade eder.

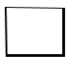
2. **Sayısal tahmin:** Problem durumları için tam çözümün gerekli olup olmadığını fark edebilme ve problemin çözümü için yeterli hassaslıkta yakın tahminlerde bulunabilmeyi ifade eder.

3. **Sayı büyüklükleri:** Sayıların ne ifade ettiğini ve diğer sayılara olan uzaklıkları ile ilgili anlayışları ifade eder.

4. **İşlemlerin etkileri:** Sayılar üzerindeki işlemlerin etkilerine yönelik anlayışları ifade eder. 1'den küçük sayılar ile çarpma veya bölme işlemleri yapıldığında sayının büyüklüğündeki değişim ile ilgili anlayışları içerir.

5. **Referans noktası kullanımı:** Gerekli olduğu durumlarda cevaba ulaşmayı kolaylaştıracak şekilde referans noktaları seçip kullanabilmeyi ifade eder. 10’un katlarını, 4/9’un yarımdan biraz küçük olduğunu veya 0.98’in 1’e yakın olduğunu düşünmek referans noktası kullanımına örnek olarak verilebilir.

Görüşme Soruları ve Belirttiği Bileşenler ile Sayı Duyusuna Sahip Öğrencinin Akıl Yürütme Örnekleri

S	Soru	Sayı Duyusuna Sahip Öğrencinin Akıl Yürütme Örnekleri	Sayı Duyusu Bileşeni	Puan	Açıklama
1	$4^{-1} + 0{,}76 \ldots 2^{0}$ Boşluğa “>”, “<” veya “=” işaretlerinden hangilerini yerleştirebiliriz? (Markovits ve Pang’den (2007) uyarlandı.)	4^{-1} sayısının 1/4’e, 2^{0} sayısının 1’e ve 0,76 sayısının 3 çeyrekten biraz büyük bir sayıya eşit olduğunu düşünerek, Bir çeyrek ile 3 çeyrekten biraz büyük bir değerin toplamının 1 den büyük olacağını fark eder.	Denk gösterimler		
			Referans noktası kullanımı		
2	Aşağıda belirtilen işlemlerin ifade ettikleri değerleri, yanında verilen şekiller üstünde tarayarak gösterebilir misiniz? $3^{-1} + 2^{-1}$  $5^{0} - 3 \times 4^{-1}$ 	3^{-1} sayısının 1/3’e, 4^{-1} sayısının 1/4’e, 2^{-1} sayısının 1/2’ye ve 5^{0} sayısının 1’e eşit olduğunu kullanır, örneğin ikinci soruda bir bütünden 3 çeyrek çıkarılması şeklinde düşünür.	Denk gösterimler		
			Referans noktası kullanımı		
3	“$3^{6} \times 5^{9}$ işleminin sonucu, $3^{8} \times 5^{7}$ işleminin sonucundan daha büyüktür.” Bu ifade sizce doğru mudur? Nasıl karar verdiniz?	3^{8} ile 5^{9} sayılarının denklerini düşünerek $3^{6} \times 5^{9} = 3^{6} \times 5^{2} \times 5^{7}$ ile $3^{8} \times 5^{7} = 3^{6} \times 3^{2} \times 5^{7}$ şeklinde ifade ettikten sonra denk olmayan kısımları karşılaştırır.	Denk gösterimler		

4	134 323 sayısı 2^{-1}'in kaç katıdır? Bu sorunun cevabını kısa yoldan nasıl çözebilirsiniz?	İşlem yapmadan önce 2^{-1}'in yarıma eşit olduğunu düşünerek 134 323 sayısının içindeki yarım sayısını bulabilmek için sayının 2 ile çarpılması gerektiğini düşünür.	Denk gösterimler		
5	Aşağıdaki sayılardan tam 3 tanesiyle çarpma, bölme, çıkarma veya toplama işlemlerini kullanarak 52 sayısına ulaşabilir misiniz? (Markovits ve Pang'den (2007) uyarlandı.) $(\frac{1}{2})^{-4}$, 2^2, $(\frac{1}{6})^{-2}$, 52^0, 3^3, 1^0, 26, 2^{-1}, 5^2, 2	Verilen üslü sayılardan 3'ünü içerecek şekilde $52=(\frac{1}{2})^{-4}+((\frac{1}{6})^{-2}\times 1^0)$ gibi 52 sayısına denk bir ifade düşünür.	Denk gösterimler		
6	$2\times10^8+5\times10^8+10^{-8}-10^8$ İfadesinin yaklaşık değeri nedir?	Verilen değerler arasında 10^{-8} sayısının oldukça küçük bir değer olduğunu düşünerek yaklaşık değeri için ihmal etmesidir.	Sayısal tahmin		

S	Soru	Sayı Duyusuna Sahip Öğrencinin Akıl Yürütme Örnekleri	Sayı Duyusu Bileşeni	Puan	Açıklama
7	$\frac{2^{-1} \times 10^{47}}{9^{47} \times 0{,}547} = ?$ İşleminin yaklaşık değeri nedir?	2^{-1} ile 0,547 ve 10^{47} ile 9^{47}'nin yaklaşık olarak birbirine eşit olduğunu düşünerek sadeleştirebilir.	Sayısal tahmin		
			Referans noktası kullanımı		
8	$3^3 \times 2^2$ İşleminin sonucunun $3^2 \times 2^2$ veya $3^3 \times 2^3$ olduğunu söylemek birer tahmindir. Hangi tahmindeki hata daha azdır? Neden?	Verilen iki tahminden ilki gerçek değerin 1/3'ü, ikinci tahmin gerçek değerin 2 katı olduğundan, gerçek değer ile tahmini değerler arasındaki farkı karşılaştırdığında pozitif bir sayının 1/3'ünün 2 katından daha yakın bir tahmin olduğunu düşünür.	Sayısal tahmin		
9	2^6 sayısı 2^2 ile 2^{10} sayılarından hangisine daha yakındır?	2^6 ile 2^7 değerleri arasındaki farkın dahi, 2^6 ile 2^2 arasındaki farktan fazla olduğunu düşünür.	Sayı büyüklükleri		
10	21^{-3}…31^{-2} Boşluğa ">", "<" veya "=" işaretlerinden hangilerini yerleştirebiliriz?	Tabandaki 21 ve 31 sayılarının yaklaşık olarak 20 ve 30 sayılarına eşit olduğunu düşünerek 20^{-3} ve 31^{-2} sayılarını karşılaştırır.	Sayı büyüklükleri		
			Referans noktası kullanımı		
11	7^{-3}, 7^{-4}, 7^{-2} sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayanız.	Negatif kuvvetli sayıların ne ifade ettiğini düşünerek sıralamayı yapar.	Sayı büyüklükleri		
12	$\frac{1254}{17^{-21}}$ İşleminin sonucu, $1254 \cdot 17^{-21}$ işleminin sonucundan küçüktür." Bu ifade sizce doğru mudur?	17^{-21} sayısının birden küçük olduğunu düşünerek 1254 sayısının 1'den küçük bir sayıyla bölündüğünde büyüyeceğini, çarpıldığında ise küçüleceğini düşünür.	İşlemlerin etkileri		

13	$175 \div 10^{-7}$ İşleminin sonucu için aşağıdakilerden hangisinin doğru olduğunu söyleyebilirsiniz? Neden? a) 175'ten çok küçük b) 175'ten çok büyük c) 175'ten biraz küçük d) 175'ten biraz büyük e) İşlem yapmadan cevap veremeyiz. (Yang'dan (2005) uyarlandı.)	10^{-7} sayısının 175'e göre oldukça küçük bir sayı olduğunu düşünüp, bölme işlemi sonucunda oldukça büyük bir sayı elde edeceğini fark eder.	İşlemlerin etkileri		

Ek–3 Görüşme Sorularının Uzman Görüşünden Alınan Ortalama Puanları

Soru No	Ortalama	Aralık
	4,785714	2
1	4,769231	2
	4,857143	1
2	3,692308	3
3	4,461538	3
4	4,5	3
5	4,5	3
6	4,5	3
	4,357143	4
7	4	4
8	4,642857	1
9	4,714286	1
	4,571429	3
10	4	4
11	4,928571	1
12	4,214286	3
13	5	0

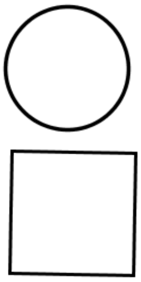
Ek–4 Görüşme Soruları

1) $4^{-1}+0{,}76\,\square\,2^{0}$ Kutunun sağındaki ve solundaki ifadelerin <u>yaklaşık değerlerini</u> düşünerek kutuya “>”, “<” veya “=” işaretlerinden birini yerleştiriniz.

2) Aşağıda belirtilen işlemlerin ifade ettikleri değerleri, altında verilen şekiller üstünde tarayarak gösterebilir misiniz?

$4^{-1}+2^{-1}$

$5^{0}-3\times 4^{-1}$



3) “$3^{6}\times 5^{9}$ işleminin sonucu, $3^{8}\times 5^{7}$ işleminin sonucundan daha büyüktür.” Bu ifade sizce doğru mudur? Nasıl karar verdiniz?

4) Aşağıdaki sayılardan tam 3 tanesiyle çarpma, bölme, çıkarma veya toplama işlemlerini kullanarak 52 sayısına ulaşabilir misiniz?

$(\frac{1}{2})^{-4}$, 2^{2}, $(\frac{1}{6})^{-2}$, 52^{0}, 3^{3}, 1^{0}, 26, 2^{-1}, 5^{2}, 2

5) $5\times 10^{6}+10^{-6}-10^{6}$ ifadesinin <u>yaklaşık</u> değerini tek bir sayı ile ifade edebilir misiniz?

6) $3^{3}\times 2^{2}$ işleminin sonucunun $3^{2}\times 2^{2}$ veya $3^{3}\times 2^{3}$ olduğunu söylemek birer tahmindir. Hangi tahmindeki hata daha azdır? Neden?

7) 2^{6} sayısı 2^{2} ile 2^{10} sayılarından hangisine daha yakındır?

8) $21^{-3}\,\square\,31^{-2}$ kutuya “>”, “<” veya “=” işaretlerinden hangilerini yerleştirebiliriz?

9) 7^{-3}, 7^{-4}, 7^{2}, 7^{-2}, sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayanız.

10) 1254 sayısının 12^{-21} ile bölümü ve 12^{-21} ile çarpımı karşılaştırıldığında hangi işlemin sonucu daha büyük olur?

11) $175\div 10^{-7}$ işleminin sonucu için aşağıdakilerden hangisinin doğru olduğunu söyleyebilirsiniz? Neden?

a) 175’ten çok küçük

b) 175’ten çok büyük

c) 175’ten biraz küçük

d) 175’ten biraz büyük

e) İşlem yapmadan cevap veremeyiz.

Ek–5 Üslü Sayı Çiftlerini Karşılaştırma Testi Madde Güçlük İndeksleri

Soru No	Madde Güçlük İndeksi
1	0.96
2	0.74
3	0.12
4	0.34
5	0.65
6	0.33
7	0.4
8	0.73
9	0.85
10	0.62
11	0.66
12	0.24
13	0.82
14	0.38
15	0.72
16	0.26

Ek–6 Öğrencilerin çözümlerinin ilişkili olduğu sayı duyusu bileşenlerinin sorulara göre dağılımı

Soru/ Bileşenler	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Denk gösterimler	✓	✓	✓	✓	✓		✓				✓	✓
Sayısal tahmin				✓		✓	✓		✓			
Sayı büyüklükleri				✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
İşlemlerin etkileri					✓						✓	✓
Referans noktası kullanımı	✓								✓	✓		

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Esra İYMEN

Doğum Yeri ve Tarihi: Kırklareli-12/04/1986

Adres: Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Kınıklı Kampusü İlköğretim Bölümü Denizli.

Lisans Üniversite: Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

Yabancı Dil: İngilizce (ÜDS 2009: 70.00)

İletişim: esraiymen@gmail.com.