PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $\mathcal{A}$-TOPLANABİLME VE POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Onur GENÇ**

**Anabilim Dalı : Matematik**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN**

**KASIM/2013**

## YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 111441017 nolu öğrencisi Onur GENÇ tarafından hazırlanan "$A$-TOPLANABİLME VE POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

**Juri Başkanı :** **Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL (PAÜ)**

**Tez Danışmanı :** **Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN (PAU)**

**Jüri Üyesi :** **Yrd. Doç. Dr. Aslı ÖZTÜRK KİRAZ (PAÜ)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08/01/2014. tarih ve ……02/15…. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü**
**Prof. Dr. Nuri KOLSUZ**

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Onur GENÇ

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

# ÖZET

## $\mathcal{A}$ – TOPLANABİLME VE POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar tanıtılıp bunlara ilişkin bilinen bazı sonuçlar hatrlatılmıştır. Üçüncü bölümde, $C[a,b], C_{2\pi}$ ve $C(K)$ uzaylarında tanımlı lineer pozitif operator dizileri için Korovkin tipli teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde , toplam süreci metodu kullanılarak geliştirilen korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde verilen teoremler için yaklaşımın oranı hesaplanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Korovkin Teoremi, pozitif lineer operatörler, $\mathcal{A}$ -toplanabilme

# SUMMARY


## $\mathcal{A}$ – SUMMABILITY AND POSITIVE LINEAR OPERATORS

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In chapter two, the basic definitions and consepts have ben recalled and some results concerning these concepts have also considered. In chapter three, we obtain Korovkin type approximation theorems for linear positive operators on $C[a,b], C_{2\pi}$ and $C(K)$. In chapter four, Korovkin type approximation theorems developed with the help of summation process has been analysed. In the final chapter, the rate of convergence has been examined for theorems given in chapter four.



**Keywords**: Korovkin Theorem, positive linear operators, $\mathcal{A}$ - Summabiltiy.

# ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda beni yönlendiren ve bana yardımcı olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN'a ve desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Onur GENÇ

# 1. GİRİŞ

Klasik Yaklaşım Teorisi, Alman matematikçi Karl Weierstrass'ın sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinom olacağını ispat etmesiyle başlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır. Örneğin Bernstein polinomlarının $C\left[0,1\right]$uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonraları lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla $\left(L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabını iki matematikçi Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine kaynak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır.

Kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonların yaklaşımı hakkındaki klasik Korovkin Teoremi, bir lineer pozitif operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına ilişkin şartları belirler. Burada pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yaklaşmaması durumunda yakınsaklık kaybını gidermek için Cesaro tipli toplanabilme metotlarını kullanmak yarar sağlar (Bojanic ve Khan 1992). Fejer, Cesaro metodunun sürekli periyodik fonksiyonların Fourier serisini yakınsak yapmada etkili olduğunu göstermiştir.

Yaklaşım Teorisi'nde son zamanlarda matris toplanabilme metodu kullanılarak lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı çalışılmaktadır. Bu tezde 1983 yılında T. Nishishiraho tarafından bir matris toplanabilme yöntemi kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

### 2.1. Lineer Pozitif Operatörler

**Tanım 2.1.1.** $X$ boştan farklı bir küme, $F$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$
$$. : F \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $X$ kümesine $F$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\forall a, b \in F$ için

$L_1)$ $x + y = y + x$,

$L_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$L_3)$ $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,

$L_4)$ $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

$L_5)$ $1.x = x$,

$L_6)$ $a(x + y) = ax + ay$,

$L_7)$ $(a + b)x = ax + bx$,

$L_8)$ $a(bx) = (ab)x$.

**Tanım 2.1.2.** Vektör uzayları üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

**Tanım 2.1.3.** $X$ ve $Y$ aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer,

$$\forall x, y \in X \text{ ve } \forall a, b \in F \text{ için } L(ax+by) = a.L(x)+b.L(y)$$

şartları sağlanıyorsa $L'$ ye lineer operatör denir Maddox[14].

**Tanım 2.1.4.** X, Y vektör uzayları ve $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. $L$ operatörünün $x$ noktasındaki değeri $L(f;x) = g(x)$ şeklinde gösterilir.

$X$ uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ ise $L$ operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.4'ü sağlayan $L$ operatörüne lineer pozitif operatör denir.

**Teorem 2.1.5.** $X, Y$ vektör uzayları , $L: X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu taktirde,

**a)** $L$ operatörü monoton artandır.

**b)** $|L(f)| \leq L(|f|)$

koşulları sağlanır.

**İspat**

**a)** $f < g$ olsun.

$$f < g \Rightarrow g - f > 0 \Rightarrow L(g) - L(f) > 0 \Rightarrow L(g) > L(f)$$

elde edilir. Böylece $L$ operatörünü monoton artandır.

**b)** $-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ olduğunu gösterirsek istenilen elde edilir.

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

$$\Rightarrow -L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

$$\Rightarrow |L(f)| \le L(|f|)$$

**Tanım 2.1.6.** $X$ kompleks veya reel vektör uzayı olmak üzere $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona $X$ üzerinde bir norm ve $\left(X, \| \ \|\right)$ ikilisine de normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in F$ olsun.

$N_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

$N_2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$,

$N_3)$ $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

**Tanım 2.1.7.** $X$ boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona $X$ üzerinde bir metrik ve $(X, d)$ ikilisine de metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ olsun.

$M_1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$M_2)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$M_3)$ $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ [14].

**Tanım 2.1.8.** $(X, d)$ metrik uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon)$ varsa $(x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir.

**Tanım 2.1.9.** $(X, d)$ metrik uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon)$ varsa $(x_n)$ dizisine yakınsaktır denir.

**Tanım 2.1.10.** $(X, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi $X$' in bir elemanına yakınsıyorsa $(X, d)$'ye tam metrik uzay denir. [14].

**Tanım 2.1.11.** Tam ve normlu bir lineer uzaya Banach uzayı denir.

**Tanım 2.1.12.** $(X,d_1)$ ve $(Y,d_2)$ iki metrik uzay ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon $a\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $d_1(x,a)<\delta$ olduğunda $d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$ olacak şekilde $\exists\delta>0$ sayısı varsa $f$ fonksiyonu $a$ noktasında süreklidir denir. Eğer, $f$ fonksiyonu $\forall x\in X$ için sürekli ise $f$ 'ye $X$ uzayında süreklidir, kısaca süreklidir denir.

## 2.2. Temel Toplanabilme Kavramları

Bu kısımda tezde ihtiyaç duyacağımız matris toplanabilme metodundan ve buna ilişkin bazı sonuçlardan söz edeceğiz. Öncelikle matris toplanabilme metodunu hatırlatacağız sonra da $A$ - toplanabilme kavramı ile ilgili bazı bilgiler vereceğiz.

**Tanım 2.2.1.** $A:=(a_{nk}),k,n=1,2,3,...$ sonsuz matris ve bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Reel ya da kompleks terimli $x$ dizisinin "$A-$*dönüşüm*" dizisi $Ax:=((Ax)_n)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$(Ax)_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$$

şeklinde tanımlanır. (Burada her bir $n$ için seri yakınsak kabul edilmektedir.)

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=L$$

koşulu gerçekleniyorsa $x$ dizisi $L$ değerine "$A-$*toplanabilir*" denir. Eğer her yakınsak $(x_n)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}x_n=L$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n=L$ koşulu sağlanıyorsa $A$ *regüler matris* adını alır [14], [5].

$A=\left(a_{nk}\right)$ matrisinin regüler olması aşağıdaki Silverman-Toeplitz Teoremi ile karakterize edilir.

**Teorem 2.2.2.** Bir $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$i)\sup\limits_{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|<\infty$ ,

$ii)$ Her $k$ için $a_k=\lim\limits_{n}a_{nk}=0$,

$iii)\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}=1$

koşullarının sağlanmasıdır [5],[14].

Bell[2], ve Steiglitz[22] Tanım 2.2.1' deki düşünceyi kullanarak $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisi yerine $\mathcal{A}:=\left\{A^{(n)}\right\}=\left\{a_{kj}^{(n)}\right\}$ matris dizisini alarak daha genel olan aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

**Tanım 2.2.3.** $\mathcal{A}:=\left\{A^{(n)}\right\}=\left\{a_{kj}^{(n)}\right\}$, $k,j=1,2,3,...$ sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere, verilen bir $x=\left(x_j\right)$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{(n)}x_j=L\text{ , ( } n \text{ 'ye göre düzgün)}$$

koşulu gerçekleniyorsa $\left(x_j\right)$ dizisi $L$ değerine "$\mathcal{A}$ *–toplanabilir*" denir [2], [22].

Eğer $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A^{(n)}=A$ ise $\mathcal{A}$ *–toplanabilme* klasik matris toplanabilmeyi verir.

$I$ birim matris olmak üzere, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A^{(n)}=I$ ise $\mathcal{A}$ *– toplanabilme* klasik yakınsaklığa indirgenir.

### 2.3. Süreklilik Modülü

Bu kısımda 4. Bölümde yakınsaklık oranı olarak adlandırılan hesaplamayı yaparken kullanılacak olan süreklilik modülü kavramı ve özellikleri verilecektir.

**Tanım 2.3.1.** $f \in C[a,b]$ olsun. $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü $w(f,\delta)$ şeklinde gösterime sahip olup

$$w(f,\delta) = \sup_{x\in[a,b],\,|x-t|<\delta} |f(x) - f(t)|$$

şeklinde tanımlıdır Altimore[1].

**Teorem 2.3.2.** Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

**(i)** $w(f,\delta) \geq 0$

**(ii)** $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow w(f,\delta_1) \leq w(f,\delta_2)$

**(iii)** $w(f+g,\delta) \leq w(f,\delta) + w(g,\delta)$

**(iv)** $w(f,m\delta) = m.w(f,\delta)$

**(v)** $\lambda \in R^+$ için $w(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1).w(f,\delta)$

**(vi)** $w(f,|t-x|) \geq |f(t) - f(x)|$

**(vii)** $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right).w(f,\delta)$

**İspat.**

**(i)** $w(f,\delta) \geq 0$ olduğu açıktır.

**(ii)** $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $|t-x| \leq \delta_1$ , $|t-x| \leq \delta_2$ kümesi tarafından kapsanır. Dolayısıyla supremum özelliğinden $w(f,\delta_1) \leq w(f,\delta_2)$ bulunur.

**(iii)** $w(f+g,\delta) \leq w(f,\delta) + w(g,\delta)$ olduğu açıktır.

**(iv)** $w\left(f,m\delta\right)=\sup\limits_{\substack{|t-x|\le m.\delta \\ t,x\in[a,b]}}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$

$$
\begin{aligned}
w\left(f;m.\delta\right)&=\sup_{|h|\le\delta}\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right| \\
&=\sup_{\substack{|h|\le\delta \\ h\in[a,b]}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right]\right| \\
&\le\sup_{|h|\le\delta}\sum_{k=0}^{m-1}\left|f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right| \\
&\le w\left(f;\delta\right)+w\left(f;\delta\right)+...+w\left(f;\delta\right) \\
&=m.w\left(f;\delta\right)
\end{aligned}
$$

**(v)** $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ için $\|\lambda\|\le\lambda\le\|\lambda\|+1\le\lambda+1$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow w\left(f;\lambda\delta\right)&\le w\left(f;\left(\|\lambda\|+1\right)\delta\right) \\
&\le\left(\|\lambda\|+1\right).w\left(f;\delta\right) \\
&\le\left(\lambda+1\right).w\left(f;\delta\right)
\end{aligned}
$$

**(vi)** $w\left(f;|t-x|\right)=\sup\limits_{\substack{|t-x|\le\delta \\ x,t\in[a,b]}}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\ge\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$

elde edilir.

**(vii)** $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\le w\left(f;\dfrac{|t-x|}{\delta}.\delta\right)\le\left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right).w\left(f;\delta\right)$

şeklindedir.

## 3. KOROVKIN TEOREMLERİ

Bu bölümde yaklaşımlar teorisinde önemli bir yeri olan 1953'te Korovkin[10] tarafından verilen yaklaşım teoremlerini ve bu teoremlerin ispatlarını vereceğiz. Burada kullanılan $C[a,b]$ uzayı $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olup

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

normuna göre Banach Uzayı'dır.

**Teorem 3.1.** $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun.

$f_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2$ olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

$(i)$ $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim_n \|L_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$.

$(ii)$ $\lim_n \|L_n(f_i) - f_i\| = 0$ [10].

**İspat.** Yeterliliğin ispatı açıktır. Çünkü, $\forall f \in C[a,b]$ için eşitlik sağlandığına göre $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ ile verilen fonksiyonlar $C[a,b]$ uzayının elemanı olduğundan istenen eşitlik sağlanır.

Şimdi gerekliliğin ispatına geçelim.

$f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall t, x$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$|t-x| \geq \delta \text{ ise } \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

olur. Buradan,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| < 2M_f < 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Buna göre tüm  ’de

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olduğu görülür.

Bulunan son eşitsizliğe $L_n$ lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)<L_n\left(\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)$$

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\leq \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2.M_f}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\right\}$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.$$

$$\left.-2x\left(L_n(t;x)-x\right)+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon\left(L_n(1;x)-1\right)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.$$

$$\left.-2x\left(L_n(t;x)-x\right)+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right\}$$

$$\leq\varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{2M_f}{\delta^2}\left\{\left|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|\left|L_n(t;x)-x\right|+\left|x^2\right|\left|L_n(1;x)-1\right|\right\}$$

$$<\varepsilon+\varepsilon\left\|L_n1-1\right\|+\frac{2M_f}{\delta^2}\left(\left\|L_nt^2-x^2\right\|-2b\left\|L_nt-x\right\|+b^2\left\|L_n1-1\right\|\right)$$

elde edilir. Burada $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)<\varepsilon \tag{3.1}$$

bulunur. Şimdi de

$$\|L_n f - f\| = \sup_{x\in[a,b]} \left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| \to 0, (n\to\infty)$$

olduğunu gösterelim.

$$\left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| = \left|L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)\right|$$

$$\leq L_n\left(\left|f(t) - f(x)\right|;x\right) + \left|f(x)\right|\left|L_n(1;x) - 1\right|$$

$$\leq L_n\left(\left|f(t) - f(x)\right|;x\right) + \|f\|.\|L_n(1;x) - 1\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Hipotez ve (3.1) nedeniyle $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim_n \sup_{x\in[a,b]} \left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| = 0$ olduğu görülür.

**Örnek 3.2.** $C[0,1]$ deki Bernstein operatörünün Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz.

**Çözüm**. $C[0,1]$ de verilen Bernstein Operatörü

$$B_n(f;x) = \sum_{k=o}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlı olup,

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} 1.\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(x + (1-x)\right)^n = 1$$

bulunur. O halde $\lim_n \|B_n 1 - 1\| = 0$ olduğu açıktır.

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}$$
$$=x((1-x)+x)^{n-1}$$
$$=x$$

olduğundan

$$\lim_{n}\underset{0\le x\le 1}{maks}\left|B_n(t;x)-x\right|=0$$

elde edilir.

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{n.k!(n-2-k)!}x^{k+2}(1-x)^{n-2-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k}$$
$$=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$
$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

eşitliği gerçeklenir. O halde,

$\lim_{n}\underset{0\le x\le 1}{maks}\left|B_n(t^2;x)-x^2\right|=0$ olduğu görülür.

**Örnek 3.3.** $C[0,r]$' de verilen Szasz Operatörünün Korovkin Teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz.

**Çözüm.** $C[0,r]$' de verilen Szasz Operatörü

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olup

$$S_n(1;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx}e^{nx} = 1$$

bulunur. O halde $\lim_{n}\|S_n 1 - 1\| = 0$ olduğu açıktır.

$$S_n(t;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k x^{k+1}}{k!}$$

$$= x.e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= x$$

olduğundan $\lim_{n}\underset{0\le x\le r}{maks}\left|S_n(t;x) - x\right| = 0$ elde edilir.

$$S_n(t^2;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}+e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^{k+2}}{k!}+e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k+1}}{k!}$$

$$= x^2 e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}+\frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= x^2+\frac{x}{n}$$

eşitliği gerçeklenir. O halde, $\lim_n \underset{0\le x\le r}{maks}\left|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|=0$ elde edilir.

Şimdi periyodik fonksiyonlar uzayında verilen Korovkin tipli yaklaşım teoremi verelim.

**Teorem 3.4.** $C[0,2\pi]$, $2\pi$ periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı ve lineer pozitif operatörlerin dizisi $L_n : C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

$(i)$ $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim_n \left\|L_n f - f\right\|_{C[0,2\pi]}=0$.

$(ii)$ $f_1(t)=1$, $f_2(t)=\sin t$, $f_3(t)=\cos t$ için $\lim_n \left\|L_n f_i - f_i\right\|=0$.

**İspat.** Yeterliliğin ispatı açıktır. $\forall f \in C[0,2\pi]$ için eşitlik sağlandığına göre

$f_1(t)=1, f_2(t)=\sin t, f_3(t)=\cos t$ ile verilen fonksiyonlar için de istenen eşitlik sağlanır.

Şimdi gerekliliğin ispatına geçelim.

$f$ sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $|x-t|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x$ için

$$\left|f(x)-f(t)\right|<\varepsilon \tag{3.2}$$

gerçeklenir. $f$, □ de sınırlı olduğundan

$$\left|f(x)-f(t)\right| \le \left|f(x)\right| + \left|f(t)\right| \le 2M_f \tag{3.3}$$

elde edilir.

Şimdi $x \in \left(t-\delta, 2\pi + t - \delta\right]$ aralığını alalım.

$t-\delta < x \le t-\delta+2\pi \Rightarrow -\delta < x-t \le 2\pi-\delta$

olur. Son olarak $\delta < x-t \le 2\pi-\delta$ aralığını alalım.

$$\frac{\delta}{2} < \frac{x-t}{2} \le \pi - \frac{\delta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\delta}{2} < \sin\frac{x-t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\frac{x-t}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} > 1 \tag{3.4}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.2) , (3.3) ve (3.4) ifadeleri nedeniyle,

$$\begin{aligned} \left|f(x)-f(t)\right| &< \varepsilon + 2M_f.1 \\ &< \varepsilon + 2M_f.\frac{\sin^2\frac{(x-t)}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Bu son eşitsizliğe $L_n$ lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right| \le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right) + \left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$$< \varepsilon.L_n(1;x) + 2M_f.L_n\left(\frac{\sin^2\frac{x-t}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}};x\right) + \left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right| \tag{3.6}$$

olduğu görülür.

$\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)=\frac{1-\cos(x-t)}{2}$ ve sinüs ve cosinüs fonksiyonları $2\pi$ periyotlu olduğundan $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ ve $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ eşitlikleri sağlanır. Şimdi (3.5) eşitsizliğinde $x=2k\pi+x$ yazarsak,

$$\left|f(x+2k\pi)-f(t)\right|<\varepsilon+2M_f.1<\varepsilon+2M_f.\frac{\sin^2\frac{(x+2k\pi-t)}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned}
&x\in(t-\delta,2\pi+t-\delta]\\
&x+2\pi\in(2\pi+t-\delta,4\pi+t-\delta]\\
&x+4\pi\in(4\pi t-\delta,6\pi+t-\delta]\\
&\ldots\\
&x+2k\pi\in(2k\pi+t-\delta,(2k+2)\pi+t-\delta]
\end{aligned}$$

olduğundan $(t-\delta,2\pi+t-\delta]$ kısıtlanmasında çalışmak yeterlidir. Şimdi (3.6) eşitsizliğini tekrar ele alalım.

$$\begin{aligned}
\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\le{}& \varepsilon.L_n(1;x)+2M_f.\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n\left(\sin^2\frac{(x-t)}{2};x\right)\\
&+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|
\end{aligned}$$

$$<\varepsilon.L_n(1;x)+2M_f.\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x.\cos t-\sin x.\sin t}{2};x\right)+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$$<\varepsilon.L_n(1;x)+2M_f\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left[L_n(1;x)-\cos x.L_n(\cos t;x)-\sin x.L_n(\sin t;x)\right]\right\}$$

$n\to\infty$ için limit alınırsa, $\varepsilon$ keyfi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi çift değişkenli lineer pozitif operatör dizileri için Klasik Korovkin Teoremini verelim.

Burada $I=[a,b], J=[c,d]$ ve $K=I\times J$ olmak üzere $C(K)$ vektör uzayı ise $K$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı ile gösterilecektir. Bu uzay üzerindeki norm ise

$$\|f\| = \sup_{(x,y)\in K}|f(x,y)|$$

şeklinde tanımlıdır.

**Teorem 3.5.** $\{L_n\}$ **,** $C(K)$ dan $C(K)$ uzayına tanımlı pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_n \sup_{x,y}|L_n(1;x,y)-1| = 0,$$
$$\lim_n \sup_{x,y}|L_n(t;x,y)-x| = 0,$$
$$\lim_n \sup_{x,y}|L_n(\tau;x,y)-y| = 0$$

ve

$$\lim_n \sup_{x,y}\left|L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right| = 0$$

koşulları gerçeklenirse, her $f\in C(K)$ için

$$\lim_n \sup_{x,y}\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-f(x,y)\right| = 0$$

sağlanır.

**İspat** $f\in C(K)$ alalım. O halde $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta(\varepsilon)$ vardır ∍ $\|(x,y)-(t,\tau)\|<\delta$ koşulu sağlandığında

$$\left| f\left(t,\tau\right)-\left(x,y\right)\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left\|\left(x,y\right)-\left(t,\tau\right)\right\| \geq \delta \Rightarrow \frac{\left\|\left(x,y\right)-\left(t,\tau\right)\right\|}{\delta} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-\tau\right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. Ayrıca $f$ fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left| f\left(t,\tau\right)- f\left(x,y\right)\right| \leq 2.M_f$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\left| f\left(t,\tau\right)- f\left(x,y\right)\right| \leq 2.M_f.\frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-\tau\right)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. O halde tüm □ kümesinde

$$\left| f\left(t,\tau\right)- f\left(x,y\right)\right| \leq \varepsilon + 2.M_f.\frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-\tau\right)^2}{\delta^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$\left| f\left(t,\tau\right)- f\left(x,y\right)\right| \leq \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}.\left[x^2+y^2-2\left(xt+y\tau\right)+t^2+\tau^2\right]$$

eşitsizliğinin her iki tarafına $L_n$ lineer pozitif operatörünü uygularsak,

$$\left|L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)-L_n\left(f\left(x,y\right);x,y\right)\right| < \varepsilon.L_n\left(1;x,y\right)+\frac{2M_f}{\delta^2}.\Big[\left(x^2+y^2\right).L_n\left(1;x,y\right)$$

$$-2x.L_n\left(t;x,y\right)-2y.L_n\left(\tau;x,y\right)+L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)\Big]$$

olur. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right| \le \varepsilon.L_n(1;x,y)+\frac{2M_f}{\delta^2}.\Big[\left(x^2+y^2\right).\left(L_n(1;x,y)-1\right)$$
$$-2x.\left(L_n(t;x,y)-x\right)-2y.\left(L_n(\tau;x,y)-y\right)+\left(L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right)\Big]$$

elde edilir. O halde eşitsizliğin son hali

$$\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right|$$
$$\le \varepsilon.\left|L_n(1;x,y)\right|+\frac{2M_f}{\delta^2}\Big[\left(x^2+y^2\right).\left|L_n(1;x,y)-1\right|+|2x|.\left|L_n(t;x,y)-x\right|$$
$$+|2y|.\left|L_n(\tau;x,y)-y\right|+\left|L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right|\Big]$$

şeklinde olup burada $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right|\le\varepsilon \tag{3.7}$$

eşitsizliği bulunur.

$$\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-f(x,y)\right|\le\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right|$$

$$+\left|L_n\left(f(x,y);x,y\right)-f(x,y)\right|+\left|f(x,y)\right|\left|L_n(1;x,y)-1\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir. (3.7) nedeniyle

$$\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-f(x,y)\right|<\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon$ yeterince keyfi olduğundan,

$$\lim_n\sup_{x,y}\left|L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)-f(x,y)\right|=0$$

bulunur.

**Teorem 3.6.** $\mathcal{A}:=\left(A^{(n)}\right)=\left\{a_{kj}^{(n)}\right\}$ terimleri negatif olmayan reel terimli sonsuz regüler matris, $L_j$ , $C^*\left(\mathbb{R}^2\right)$ den $C^*\left(\mathbb{R}^2\right)$ ye lineer pozitif opreratör dizisi, $f_0(u,v)=1,\ f_1(u,v)=\cos u$ , $f_2(u,v)=\sin u$ , $f_3(u,v)=\cos v$ , $f_4(u,v)=\sin v$

olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

$(i)$ $\forall f_i(u,v) \in C^*(\mathbb{R}^2)$ için $\lim_{n\to\infty}\|L_n(f_i)-f_i\|=0$.

$(ii)$ $\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|=0$.

**İspat.** Yeter şartın ispatı aşikardır. Şimdi gerek şartın ispatına geçelim.

$\forall f \in C^*(\mathbb{R}^2)$ , $I$ ve $J$ $2\pi$ uzunluğunda kapalı aralıklar olsun. $(x,y)\in I\times J$ olmak üzere $f$ sürekli olduğundan $\forall \varepsilon>0$ için $\exists \delta(\varepsilon)$ vardır $\ni$ $|u-x|<\delta$ , $|v-y|<\delta$ olduğunda

$$\left|f(u,v)-f(x,y)\right|<\varepsilon \tag{5.1}$$

şeklindedir. Diğer yandan $\forall f \in C^*(\mathbb{R}^2)$ olduğundan

$$\left|f(u,v)-f(x,y)\right|<2\|f\| \tag{5.2}$$

eşitsizliği sağlanır.Şimdi $2\pi$ boyundaki $(x-\delta, 2\pi+x-\delta]$ ve$(y-\delta, 2\pi+y-\delta]$ aralıkları düşünelim.

$$\delta < x-u < 2\pi-\delta \Rightarrow \frac{\delta}{2}<\frac{x-u}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}>1$$

ve benzer işlemlerle

$$\frac{\sin^2\left(\frac{y-v}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}>1$$

elde edilir. $\forall(u,v)\in(x-\delta,2\pi+x-\delta]\times(y-\delta,2\pi+y-\delta]$ için

$$\left|f(u,v)-f(x,y)\right|<\varepsilon+\frac{2\|f\|}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}.\varphi(u,v) \tag{5.3}$$

bulunur. Burada

$$\varphi(u,v)=\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{y-v}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-\cos u.\cos x-\sin x.\sin u-\cos y.\cos v-\sin y.\sin v\right] \tag{5.4}$$

şeklindedir. (5.4)' e $L_n$ lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}L_n(\varphi;x,y)=\frac{1}{2}\Big[&2L_n(f_0;x,y)-\cos x.L_n(f_1;x,y)-\sin x.L_n(f_3;x,y)\\&-\cos y.L_n(f_2;x,y)-\sin y.L_n(f_4;x,y)\Big]\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Şimdi (5.3)'e $L_n$ lineer pozitif operatör uygulanırsa,

$$\left|L_n\left((f;x,y)-f(x,y)\right)\right|\leq\varepsilon+\left(\varepsilon+\|f\|\right).\left|L_n(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|+\frac{2\|f\|}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}L_n(\varphi;x,y)$$

sağlanır. Bu eşitsizlikte (5.5) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}\left|L_n\left((f;x,y)-f(x,y)\right)\right|\leq\ &\varepsilon+\left(\varepsilon+\|f\|+\frac{2\|f\|}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)\left|L_n\left((f_0;x,y)-f_0(x,y)\right)\right|\\&+\frac{\|f\|}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\Big\{\left|L_n\left((f_1;x,y)-f_1(x,y)\right)\right|+\left|L_n\left((f_2;x,y)-f_2(x,y)\right)\right|\\&+\left|L_n\left((f_3;x,y)-f_3(x,y)\right)\right|+\left|L_n\left((f_4;x,y)-f_4(x,y)\right)\right|\Big\}\end{aligned} \tag{5.6}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin supremumu alınırsa

$$\|L_n f - f\| \leq \varepsilon + B\left\{\|L_n f_0 - f_0\| + \|L_n f_1 - f_1\| + \|L_n f_2 - f_2\| + \|L_n f_3 - f_3\| + \|L_n f_4 - f_4\|\right\}$$

bulunur. Burada

$$B = \varepsilon + \|f\| + \frac{2\|f\|}{\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}$$

dır. Böylece elde edilen son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa istenen sonuç elde edilir.

# 4. TOPLANABİLME VE KOROVKIN TİPLİ TEOREMLER

Bu bölümde Nishishiraho[17] tarafından $\mathcal{A}$-Toplanabilme metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve bu teoremlerin ispatları incelenmiştir.

**Tanım 4.1.** $\mathcal{A} = \left\{A^{(n)}\right\} = \{a_{kj}^{(n)}\},\ k, j = 1,2,3,...$ reel terimli sonsuz matris dizisi olmak üzere, her $j$ için $L_j : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatör olsun. Eğer her $f \in C[a,b]$ için $\{L_j(f)\}$ dizisi $f$ fonksiyonuna $\mathcal{A}-$Toplanabilir ise yani her $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_j a_{kj}^{(n)} L_j(f) - f\right\| = 0\ , \quad (n \text{ ‘ye göre düzgün})$$

koşulu gerçekleniyorsa $\{L_j\}$ dizisine "$\mathcal{A}$ *–toplam süreci*" adı verilir.

$L_j$ , $C[a,b]$ uzayını $C[a,b]$ uzayına dönüştüren her bir $n,k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\|L_j(1)\right\| < \infty \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her bir $n,k \in \mathbb{N}$ ve $\forall f \in C[a,b]$ için

$$B_k^{(n)}(f;x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(f(t);x)\ , \quad k = 1,2,3,...$$

ile tanımlı operatörü ele alalım.

$$\left\|B_k^{(n)}(f)\right\| = \sup_{x\in[a,b]}\left|B_k^{(n)}(f;x)\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a.b]}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(\left|f(t)\right|;x\right)$$

$$\leq \sup_{x\in[a.b]} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(\|f\|;x\right)$$

$$\leq \|f\| \sup_{x\in[a,b]} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j\left(1;x\right)$$

$$\leq \|f\|.\left\|B_k^{(n)}\left(1\right)\right\|$$

elde edilir. Burada (4.1) koşulu nedeniyle $B_k^{(n)}$ operatörü, her bir $n,k$ için anlamlı olup $B_k^{(n)}(f)\in B[a,b]$ olur.

Şimdi [17]'deki toplam süreci yardımıyla geliştirilen Korovkin tipli teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını verelim.

**Teorem 4.2.** $\mathcal{A}:=\left(A^{(n)}\right)=\left(a_{kj}^{(n)}\right)$ terimleri negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $L_j$ , $C[a,b]$ den $C[a,b]$ ye dönüşüm yapan ve (4.1) koşulunu sağlayan lineer pozitif oprerator dizisi, $f_i\left(t\right)=t^i$ , $i=0,1,2$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

$(i)$ $\forall f\in C[a,b]$ için $\lim_k\left\|B_k^{(n)}f-f\right\|=0$ , ( n'ye göre düzgün ).

$(ii)$ $\lim_k\left\|B_k^{(n)}\left(f_i\right)-f_i\right\|=0$ , ( n'ye göre düzgün ).

**İspat.** Yeterliliğin ispatı açıktır. Çünkü, $\forall f\in C[a,b]$ için eşitlik sağlandığına göre $f_1\left(t\right)=1,\ f_2\left(t\right)=t,\ f_3\left(t\right)=t^2$ ile verilen fonksiyonlar $C[a,b]$ uzayının elemanı olduğundan istenen eşitlik sağlanır. Şimdi gereklilik kısmını ispatlayalım.

$\forall f\in C[a,b]$ alalım. O halde $\forall\varepsilon>0$ için $|t-x|<\delta$ iken $\forall t,x$ için

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

yazılır ve $|t-x|\geq\delta$ ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından ve $f$ sınırlı olduğundan

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left|f(t)\right|+\left|f(x)\right|\leq 2M_f.\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olduğu görülür. Bu durumda tüm  ’de

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+2M_f.\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur. $B_k^{(n)}$ lineer pozitif operatör olduğundan

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-f(x)\right|\leq\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-B_k^{(n)}(f(x);x)\right|+\left|B_k^{(n)}(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\leq B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

$$\leq B_k^{(n)}\left(\varepsilon+2M_f.\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

$$=\varepsilon.B_k^{(n)}(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}B_k^{(n)}\left[(t-x)^2;x\right]+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

$$=\varepsilon.B_k^{(n)}(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[B_k^{(n)}(t^2;x)-2x.B_k^{(n)}(t;x)+x^2.B_k^{(n)}(1;x)\right]$$

$$+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

elde edilir. Bulunan son eşitsizlikte $k\to\infty$ için limit alınırsa, $\varepsilon$ keyfi olduğundan,

$$\forall f\in C[a,b] \text{ için } \lim_n\left\|B_k^{(n)}(f_i)-f_i\right\|=0\,,\ (n\text{'ye göre düzgün})$$

olduğu görülür.

Şimdi çift değişkenli fonksiyonlar için Teorem 3.5 ‘te verilen Klasik Korovkin Teoreminin toplam süreci kullanılarak geliştirilmiş hali olan aşağıdaki teoremi ve bu teoremin ispatını inceleyelim.

**Teorem 4.3.** $\mathcal{A}:=\left(A^{(n)}\right)=a_{kj}^{(n)}$ terimleri negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $L_j : C(K) \to C(K)$ olmak üzere (4.1) koşulunu sağlayan lineer pozitif opreratörlerin bir dizisi olsun.

Bu taktirde n'ye göre düzgün olarak

$$\lim_k \sup_{x,y} \left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(1;x,y\right)\right)-1\right|=0$$

$$\lim_k \sup_{x,y} \left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(t;x,y\right)\right)-x\right|=0$$

$$\lim_k \sup_{x,y} \left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(\tau;x,y\right)\right)-y\right|=0$$

$$\lim_k \sup_{x,y} \left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)\right)-\left(x^2+y^2\right)\right|=0$$

koşulları gerçeklenirse, $\forall f \in C(K)$ için

$$\lim_k \sup_{x,y} \left| B_k^{(n)}\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|=0 \text{ , (n'ye göre düzgün )}$$

dır.

**İspat.** $f \in C(K)$ alalım. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon)$ vardır $\ni$ $\left\|(x,y)-(t,\tau)\right\|<\delta$ koşulunu sağlandığında

$$\left|f\left(t,\tau\right)-(x,y)\right|<\varepsilon$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|(x,y)-(t,\tau)\right\| \geq \delta \Rightarrow \frac{\left\|(x,y)-(t,\tau)\right\|}{\delta} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-\tau\right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

olduğu görülür. Ayrıca $f$ fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left|f\left(t,\tau\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq 2.M_f$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\left| f(t,\tau) - f(x,y) \right| \le 2.M_f . \frac{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir, dolayısıyla tüm  kümesinde

$$\left| f(t,\tau) - f(x,y) \right| \le \varepsilon + 2.M_f . \frac{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left| f(t,\tau) - f(x,y) \right| \le \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} . \left[ x^2 + y^2 - 2(xt + y\tau) + t^2 + \tau^2 \right]$$

eşitsizliğinin her iki tarafına $B_k^{(n)}$ lineer pozitif operatörünü uygularsak,

$$\left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)\right) - B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right) \right| \le \varepsilon . B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y)\right)$$

$$+ \frac{2M_f}{\delta^2} . \left[ \left(x^2+y^2\right) . B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y)\right) - 2x . B_k^{(n)}\left(L_n(t;x,y)\right) - 2y . B_k^{(n)}\left(L_n(\tau;x,y)\right) \right.$$

$$\left. + B_k^{(n)}\left(L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)\right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)\right) - B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right) \right| \le \varepsilon . B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y)\right)$$

$$+ \frac{2M_f}{\delta^2} . \left[ \left(x^2+y^2\right) . B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y) - 1\right) - 2x . \left( B_k^{(n)}\left(L_n(t;x,y)\right) - x \right) \right.$$

$$\left. - 2y . \left( B_k^{(n)}\left(L_n(\tau;x,y)\right) - y \right) + \left( B_k^{(n)}\left(L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)\right) - \left(x^2+y^2\right) \right) \right]$$

bulunur. Dolayısıyla eşitsizliğin son hali

$$\left| B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(t,\tau);x,y\right)\right) - B_k^{(n)}\left(L_n\left(f(x,y);x,y\right)\right) \right|$$

$$\le \varepsilon . \left| B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y)\right) \right| + \frac{2M_f}{\delta^2} . \left\{ \left(x^2+y^2\right) . \left| B_k^{(n)}\left(L_n(1;x,y)\right) - 1 \right| \right.$$

$$+ |2x| . \left| B_k^{(n)}\left(L_n(t;x,y)\right) - x \right| \quad + |2x| . \left| B_k^{(n)}\left(L_n(t;x,y)\right) - x \right|$$

$$+|2y|.\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(\tau;x,y\right)\right)-y\right|+\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(t^2+\tau^2;x,y\right)\right)-\left(x^2+y^2\right)\right|\Big\}$$

olur. Burada $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)\right)-B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(x,y\right);x,y\right)\right)\right|<\varepsilon \tag{4.2}$$

eşitsizliği bulunur. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)\right)-f\left(x,y\right)\right| &\le \left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)\right)-B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(x,y\right);x,y\right)\right)\right| \\ &+\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(x,y\right);x,y\right)\right)-f\left(x,y\right)\right| \\ &+\left|f\left(x,y\right)\right|\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(1;x,y\right)\right)-1\right|\end{aligned}$$

gerçeklenir. (4.2) nedeniyle bu son eşitsizlik

$$\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)\right)-f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$$

halini alır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğuna göre,

$$\lim_k \sup_{x,y}\left|B_k^{(n)}\left(L_n\left(f\left(t,\tau\right);x,y\right)\right)-f\left(x,y\right)\right|=0\ ,\ \left(n'\text{ye göre düzgün}\right)$$

bulunur.

## 5. YAKINSAKLIK ORANI

Daha önceki bölümlerde $L_n(f)$ fonksiyon dizisinin $f$ fonksiyonuna belirli koşullar altında yakınsamasına ilişkin teoremleri incelemiştik. Burada $L_n(f;x)-f(x)$ farkı sıfıra yakınsayan bir fonksiyon dizisi olarak göz önüne alınabilir. $\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq \beta_n$ eşitsizliğinde $\beta_n \to 0$ olacak şekilde küçülen $\beta_n$ dizisi bulunabiliyorsa $\beta_n$'nin sıfıra yaklaşım hızı $L_n(f)$'in $f$'e yaklaşım hızını değerlendirmemize yardımcı olur.

Bu bölümde [11] ve [20] kaynakları incelenmiştir ve süreklilik modülü kullanılarak bulunan yaklaşım oranlarına dair olan teoremler verilmiştir.

**Teorem 5.1.** $L_n : C[a,b]\to C[c,d]$, $\left([c,d]\subset[a,b]\right)$ lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. $x\in[c,d]$ ise

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|+\left[L_n(1;x)+\sqrt{L_n(1;x)}\right].w(f;\alpha_n(x))$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\alpha_n^2(x)=L_n\left((t-x)^2;x\right)$ şeklindedir.

**İspat** Süreklilik modülünün özelliğinden

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq w\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}.\delta\right)\leq\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right).w(f;\delta)$$

sağlanır. Burada eşitsizliğe $L_n$ lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left|L_n(f;x)-f(x)\right|&\leq\left|L_n\left(f(t)-f(x)\right);x\right|+\left|L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right|\\&\leq L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|\\&\leq w(f;\delta).\left[L_n(1;x)+\frac{L_n\left(|t-x|;x\right)}{\delta}\right]+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\le w(f;\delta)\left[L_n(1;x)+\frac{\left[L_n\left((t-x)^2;x\right)\right]^{1/2}\left[L_n\left(1^2;x\right)\right]^{1/2}}{\delta}\right]$$

$$+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

elde edilir. O halde $\alpha_n(x)=\left[L_n\left((t-x)^2;x\right)\right]^{1/2}$ alınırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\le w(f;\delta).\left[L_n(1;x)+\frac{\alpha_n(x)\sqrt{L_n(1;x)}}{\delta}\right]$$

$$+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$\delta=\alpha_n$ alınırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\le w(f;\alpha_n(x)).\left[L_n(1;x)+\sqrt{L_n(1;x)}\right]+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

bulunur. Bu ise aranan sonuçtur.

**Teorem 5.2.** $L_n:C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve $\forall f\in C[0,2\pi]$ olsun. Bu taktirde

$$\left|L_n f-f\right|\le\|f\|.\left|L_n(1)-1\right|+w(\mu_n)\left|L_n(1)+1\right|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$\mu_n(x)=\pi.\left\{L_n\left[\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right);x\right]\right\}^{1/2}$$

dır.

**İspat** $x\in[0,2\pi]$ alalım ve $t\in R^+$ olsun.

$$\delta<|t-x|\le\pi\Rightarrow|t-x|<\pi.\sin\frac{|t-x|}{2}$$

şeklinde olup

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le w(|t-x|) = w\left(\frac{|t-x|}{\delta}.\delta\right)$$

$$\le \left[1+\left\lfloor\frac{|t-x|}{\delta}\right\rfloor\right].w(f;\delta)$$

$$\le \left[1+\frac{(t-x)^2}{\delta}\right].w(f;\delta)$$

elde edilir.

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left[1+\frac{\pi^2}{\delta^2}\sin^2\left(\frac{|t-x|}{2}\right)\right].w(f;\delta)$$

olduğu görülür. Bu ise $|t-x| \le \delta$ ve $|t-x| > \delta$ olduğunda $k \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $|t+2k\pi-x| \le \delta$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla tüm $\mathbb{R}$ 'de

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left[1+\frac{\pi^2}{\delta^2}\sin^2\left(\frac{|t-x|}{2}\right)\right].w(f;\delta)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlikte her iki tarafa $L_n$ operatörü uygulanırsa,

$$\left|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)\right| \le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

$$\le \left\{L_n(1;x)+\frac{\pi^2}{\delta^2}L_n\left[\sin^2\frac{|t-x|}{2};x\right]\right\}.w(f;\delta)$$

$$\le \left\{L_n(1;x)+\frac{\mu_n^2(x)}{\delta^2}\right\}.w(f;\delta)$$

bulunur. Burada $\mu_n > 0$ ve $\delta = \mu_n$ alınırsa;

$$\left|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)\right| \le \left\{L_n(1;x)+1\right\}.w\left(f;\mu_n\right)+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$$\le w\left(\mu_n\right).\left\|L_n(1)+1\right\|+\left\|f(x)\right\|.\left\|L_n(1;x)-1\right\|$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Burada dikkat edilmelidir ki $n \to \infty$ için $\mu_n \to 0$ olduğundan

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \to 0$$

dır, bu da ispatı tamamlar.

Şimdi [20]'de verilen teoremi inceleyelim.

**Teorem 5.3.** $A := \left(A^{(n)}\right) = \left(a_{kj}^{(n)}\right)$ terimleri negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $L_j : C[a,b] \to C[a,b]$ (4.1) koşulunu sağlayan lineer pozitif oprertörlerin dizisi olsun. Bu taktirde

$$\left\|B_k^{(n)}(f)-f\right\| \le \|f\|.\left\|B_k^{(n)}(1)-1\right\|+w(\mu_k^{(n)}).\left\|B_k^{(n)}(1)+1\right\|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$\mu_k^n(x)=\sqrt{B_k^{(n)}(t-x)^2}$$

dır.

**İspat**. Süreklilik modülünün özelliğinden

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le w\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}.\delta\right) \le \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right).w\left(f;\delta\right)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-f(x)\right| \le \left|B_k^{(n)}(f(t);x)-B_k^{(n)}(f(x);x)\right|+\left|B_k^{(n)}(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\le B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1)-1\right|$$

$$\leq B_k^{(n)}\left[\left(1+\left\lfloor\frac{t-x}{\delta}\right\rfloor\right).w\left(f,\delta\right);x\right]+\ \left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1)-1\right|$$

$$\leq B_k^{(n)}\left[\left(1+\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta}\right).w\left(f,\delta\right);x\right]+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1)-1\right|$$

$$\leq w\left(f,\delta\right)\left[B_k^{(n)}\left(1\right)+B_k^{(n)}\left(\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2};x\right)\right]+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1)-1\right|$$

$$=w\left(f,\delta\right)\left[B_k^{(n)}\left(1\right)+\frac{1}{\delta^2}B_k^{(n)}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right]+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1)-1\right|$$

elde edilir. Burada

$$\delta:=\mu_k^{(n)}=\sqrt{B_k^{(n)}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}$$

alınırsa,

$$\left\|B_k^{(n)}\left(f\right)-f\right\|\leq w\left(\mu_k^{(n)}\right)\left\|B_k^{(n)}\left(1\right)+1\right\|+\left\|f\right\|.\left\|B_k^{(n)}(1)-1\right\|$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

## KAYNAKLAR

**[1]. Altomare, F. and Campiti, M.,** 1994: Korovkin type Approximation Theory and its Application, Walter de gruyter publ., Berlin, Germany.

**[2]. Bell, H. T.,** 1973: Order summability and almost convergence. Proc. Amer. Math. Soc., 38; 548-552.

**[3]. Bohman, H.,** 1952: On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2; 43-56.

**[4]. Bojanic, R. and Khan, M. K.,** 1992: Summability of Hermite-Fejer interpolation for functions of bounded variation. *J. Nat. Sci.* Math., 32; 5-10.

**[5]. Boos, J.,** 2000: Classical and Modern Methods in Summability. Oxford *Mathematical Monographs, Oxford Science Publ.,* London.

**[6]. Freedman, A. R., Sember, J. J. and Raphel, M.,** 1978: *Some Cesaro-type summability spaces*. Proc. London. Math. Lett. 18; 1339-1344.

**[7]. Gadjiev A.D**, 1976: Theorems of the type of P.P. Korovkin's theorems. Mat. Zametki, 20; 781-786.

**[8]. Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H.,** 1995: Lineer Pozitif Operator Dizilerinin Yakınsaklığı. *Ankara Üniversitesi Yayınları.*

**[9]. King, J. P. and Swetits, J. J.,** 1970: Positive linear operators and summability. *J. Austral. Math.* Soc., 11; 281-290.

**[10].Korovkin, P. P.,** 1953: On convergence of linear positive operators in the space of continuos functions. Doklady Akad. Nauk SSSR. 90; 961-964.

**[11]. Korovkin, P. P.,** 1960: Linear Operators and Theory of Approximation. *Hindustan publ.* Co., Delhi.

**[12]. Lorentz, G. G.,** 1948: A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math*., 80; 167-190.

**[13]. Lorentz, G. G.,** 1986: Bernstein polynomials. *Chelse Publ. Company.* New York.

[14]. **Maddox, I. J.,** 1978: A new type of convergence. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83; 61-64.

[15]. **Miller, H. I. and Orhan, C.,** 2001: On almost convergent and statistically convergent subsequences. Acta Math. Hungar., 93; 135-151.

[16]. **Mohapatra, R. N.,** 1977: Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators. *J. Approx. Theory*. 20; 239-250.

[17]. **Nishishiraho, T.,** 1981: Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces. *Tohoku Math. J.,* 33; 109-126.

[18]. **Nishishiraho, T.,** 1983: Convergence of positive linear approximation process. *Tohoku Math. J.,* 33; 109-126.

[19]. **Rudin, W.,** 1953: *Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill Book Company*. New York, USA.

[20]. **Swetits, J.J.,** 1979: On summability and positive linear oparators. *J. Approx. Theory*, 25; 186-188.

[21]. **Zygmund, A.,** 1979: Trigonometric Series. *Cambridge University Press.*

[22].**Stieglitz, M.,** 1973: Eine verallgenmeinerung des begriftts festkonver-genz. *Math. Japonica*, 18; 53-70.