T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BALANS SAYILARI VE PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ KARADAĞ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BALANS SAYILARI VE PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ KARADAĞ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

DENİZ KARADAĞ tarafından hazırlanan **"BALANS SAYILARI ve PELL DENKLEMLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 30.06.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç.Dr. Mustafa AŞCI
....

Üye
Doç.Dr. Ummahan ACAR
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi
....

Üye
Doç.Dr. Canan CELEP YÜCEL
Pamukkale Üniversitesi
....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/07/2017.. tarih ve 28/16..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması PAUBAP tarafından 2016 FBE 028 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

DENİZ KARADAĞ

ÖZET

BALANS SAYILARI VE PELL DENKLEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DENİZ KARADAĞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2017

Bu tez temel olarak dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sayılar teorisindeki temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca indirgeme bağıntısı, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve bunlara ilişkin indirgeme bağıntıları, Binet Formülleri ile üreteç fonksiyonları oluşturuldu.

İkinci bölümde $x^2 - dy^2 = 1$ ve $x^2 - dy^2 = N$ tipindeki Pell denklemleri tanımlanarak çözümlerinin varlığı üzerinde duruldu. Bu bölümde ayrıca sürekli kesir kavramı tanımlanarak $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımı yardımıyla $x^2 - dy^2 = 1$ ve $x^2 - dy^2 = N$ tipindeki Pell denklemlerinin temel ve genel çözümlerine ulaşıldı.

Üçüncü bölümde Balans ve Kobalans sayıları tanımlanarak Balans ve Kobalans sayıları için kriterler ortaya kondu. Balans ve Kobalans sayılarının indirgeme bağıntıları, Binet Formülleri ve de üreteç fonksiyonları verildi. Bu bölümde ayrıca Lucas-Balans , Lucas-Kobalans sayıları tanımlanarak indirgeme bağıntıları ile Binet Formülleri verildi.

Dördüncü bölümde Gaplı Balans sayı ve k-Gaplı Balans sayı tanımları yapılarak 2-gaplı, 3-gaplı, 4-gaplı, 5-gaplı Balans sayıları için Binet Formüllerine $x^2 - 2y^2 = 7$, $x^2 - 8y^2 = 17$, $x^2 - 2y^2 = 31$, $x^2 - 8y^2 = 49$ genel Pell denklemlerinin genel çözümleri ile bağlantı kurularak ulaşıldı. Ayrıca, $k = 2,3,4,5$ için k-gaplı Balans sayıları ile Lucas Balans ve Lucas Kobalans sayıları arasındaki bağıntılara ulaşıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Pell denklemleri, Sürekli kesirler, Balans sayıları, Kobalans sayıları, Lucas-Balans sayıları, Lucas-Kobalans sayıları

ABSTRACT

BALANCING NUMBERS AND PELL EQUATIONS
MSC THESIS
DENİZ KARADAĞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC.PROF.DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, JUNE 2017

This thesis is mainly composed of four main sections. In the first section, basic definitions and theorem in number theory are given moreover, recurrence relations, Fibonacci and Lucas numbers sequence and related recurrence relations, besides Binet and Generating functions are formed.

In the second part of the study, $x^2 - dy^2 = 1$ and $x^2 - dy^2 = N$ type Pell equations are identified and thus the presence of solutions are dwelled on. Besides, in this sections, by identifying the consept of continued fraction with the help of $\sqrt{d}$'s continued fractions expansion, fundemantel and general solutions of $x^2 - dy^2 = 1$ and $x^2 - dy^2 = N$ type Pell equation are obtained.

In the third section of the study , Balancing and Cobalancing numbers are defined to intoduce a criteria. In addition, recurrence relations of Balancing and Cobalancing numbers, Binet formulas and generating functions are given. Here also Lucas-Balancing, , Lucas-Cobalancing are defined and Binet formulas with reccurance relations are given.

In forth and last section, by defining Gap Balancing numbers and k-Gap Balancing numbers for $k = 2,3,4,5$, the Binet formulas $x^2 - 2y^2 = 7$, $x^2 - 8y^2 = 17$, $x^2 - 2y^2 = 31$, $x^2 - 8y^2 = 49$ are obtained by correlating with general solutions of general Pell equations. Moreover, for $k = 2,3,4,5$, the relations between $k-$ Gap Balancing numbers and Lucas-Balancing , Lucas-Cobalancing numbers are archieved.

KEYWORDS:Pell equations, Continued fractions, Balancing numbers, Cobalancing numbers, Lucas-Balansing numbers, Lucas-Cobalancing numbers

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi $=\{1,2,3,...\}$
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbf{a}\mid\mathbf{b}$	:	a, b’yi böler
$\mathbf{F_n}$	:	n. Fibobacci Sayısı
$\mathbf{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
$\mathbf{g(x)}$	:	Fibonacci Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\mathbf{h(t)}$	:	Lucas Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\mathbf{B_n}$	:	n. Balans Sayısı
$\mathbf{C_n}$	:	n. Lucas Balans Sayısı
$\mathbf{b_n}$	:	n. Kobalans Sayısı
$\mathbf{c_n}$	:	n. Lucas Kobalans Sayısı
$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}$	:	n’nin r’li kombinasyonu
$\lvert\mathbf{x}\rvert$	:	x’in mutlak değeri
$\lfloor\mathbf{x}\rfloor$	:	x’in taban fonksiyonu
$\lceil\mathbf{x}\rceil$	:	x’in tavan fonksiyonu
$\mathbf{T_n}$	:	n. Üçgensel sayı
$(\mathbf{a},\mathbf{b})$	:	a ile b nin en büyük ortak böleni
$\{\mathbf{a_n}\}_{\mathbf{n=1}}^{\infty}$	:	Genel terimi a_n olan sayı dizisi

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, sabrı ve güler yüzüyle destek olup cesaretlendiren saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa AŞCI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatımın her aşamasında sevgi ve şefkatini üzerimden eksik etmeyen desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen bu noktalara gelmemde büyük pay sahibi olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın bütün aşamalarında emeği olan değerli öğretmenlerime, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Pamukkale Üniversitesi Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Deniz KARADAĞ

1 GİRİŞ

Matematikte reel sayı dizileri, barındırdıkları özellikler ve bu özelliklerin uygulama alanları itibariyle önemli bir yere sahiptir. Fibonacci 1175 -1250 yılları arasında yaşamış bir İtalyan matematikçidir. Babasının işi sebebiyle bir çok Arap ve Doğu şehrini gezme imkanı bulan Fibonacci, oralarda kullanılan Arap ve Hint sayı sistemlerini inceleme imkanı bulmuştur. Bu sayı sisteminin kolaylıklarını görüp o zamanlar İtalya'da kullanılan romen rakam sayı sistemini değiştirmeye uğraş vermiştir. Bu amaçla "Liber Abaci" isimli eserini ortaya koymuştur. Bu eserinde bu sayı sisteminde dört işlemi açıklamış ayrıca eserinde cebir ve geometri alanındaki çalışmalarına da yer vermiştir. Fibonacci'nin bugünkü ünü bu kitapta yer alan bir zeka sorusundan kaynaklanır. Fibonaccinin zeka sorusu ; Bir çift (1 erkek 1 dişi) tavşanın bulunduğu bir çiftlikte bu tavşan çifti 1 aylıkken genç olduklarından üreyemiyorlar. Fakat ikinci ayın sonunda üreme yeteneğine sahip olup ürüyorlar. Kabul edilsin ki her ay yetişkin çiftler üreyip çoğalmaya devam ederlerse her ayın sonunda kaç çift tavşan bulunur? Problemin çözümüne ilişkin tavşan çiftlerinin sayısı 1,1,2,3,5,8,13,21,... şeklinde bir sayı dizisi ürettiği görülecektir. Bu sayılara Fibonacci sayıları, diziye de Fibonacci dizisi denir. Problemdeki Fibonacci sayı dizisini $n \geq 1$ için $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ başlangıç koşullarını düşünerek $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ şeklinde tanımlamak da mümkündür. Bu durumda sayılar teorisinde diziyi indirgeme bağıntısı yardımıyla tüm terimlerine hükmedecek şekilde incelemek de mümkün olmuştur. Benzer şekilde Fransız matematikçi Edouard Lucas (1842-1891) tarafından, Lucas sayı dizisi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 1$ için $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ indirgeme bağıntısı tanımlamıştır. Lucas sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisi ile pek çok bağlantısı yapılan çalışmalarla ortaya çıkarılmıştır. Fibonacci sayıları doğadan sanata mimariden mühendisliğe bir çok alanda kendine yer edinmiştir.

1999 yılında Behera ve Panda, Balans sayı kavramını tanımlamışlardır. Yapılan çalışmalarda Balans sayı dizisinin aynı Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi indirgeme bağıntılarına, binet formüllerine ulaşmışlardır. Böylelikle Balans sayı dizisinin genel özelliklerine ulaşmak mümkün olmuştur. Balans sayılarından başka Lucas-Balans sayı dizisi, Kobalans sayı dizisi, Lucas-Kobalans sayı dizisi tanımlamaları da yapılarak birbiriyle olan ilişkileri ortaya konmuştur.

Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi Balans sayı dizisi, Lucas-Balans sayı dizisi, Kobalans sayı dizisi, Lucas-Kobalans sayı dizisi tanımları verildi. Bir doğal sayının bu sayı dizilerine ait olma şartları ortaya kondu. Ayrıca şartları sağlayan dizinin terimlerine ulaşmak için Pell denklemi ve Genel Pell denklemi tanımlaması yapıldı. Sürekli kesirlerin Pell denklemlerinin çözümü ile olan ilişkisi araç olarak kullanılarak bu sayı dizilerine ait indirgeme bağıntıları ile Binet Formülleri oluşturuldu. Çalışmanın son bölümünde gaplı Balans sayı tanımı verilerek Pell denklemleri yardımıyla gaplı Balans sayı dizilerinin tüm terimleri bulunarak Balans sayı dizisi, Lucas-Balans sayı dizisi, Kobalans sayı dizisi, Lucas-Kobalans sayı dizisi ile olan ilişkileri ortaya konmuştur.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Çalışmanın bu bölümünde, ileri bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1: $\{a_n\}$ reel sayısı dizisi, $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a_n = f\left(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_{n-k}\right) \tag{1.1}$$

fonksiyonuna k. mertebeden bir indirgeme bağıntısı denir.

İndirgeme bağıntısı (1.1) eşitliğiden de görüleceği üzere, dizinin her bir teriminin kendisinden önceki bir takım terimlerin fonksiyonu olarak ifadesini içermektedir.

Tanım 1.1.2: $a_1(n)$, $a_2(n)$, $a_3(n)$, ..., $a_k(n)$ ve $h(n)$ $\mathbb{N}$ den $\mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar, $a_1 \neq 0$ olmak üzere,

$$A_{n+1} = a_1(n) A_{n-k+1} + a_2(n) A_{n-k+2} + ... + a_k(n) A_n + h(n) \tag{1.2}$$

bağıntısına k. mertebeden değişken katsayılı lineer indirgeme bağıntısı denir.

Eğer ki (1.2) eşitliğinde, $a_i(n) = c_i$ $(1 \leq i \leq k)$ ler ve $h(n) = h_0$ sabit fonksiyonlar ise

$$A_{n+1} = c_1 A_{n-k+1} + c_2 A_{n-k+2} + ... + c_k A_n + h_0 \tag{1.3}$$

ifadesine k. mertebeden sabit katsayılı lineer indirgeme bağıntısı denir.

Eğer ki (1.3) eşitliğinde $h_0 = 0$ ise

$$A_{n+1} = c_1 A_{n-k+1} + c_2 A_{n-k+2} + ... + c_k A_n \tag{1.4}$$

ifadesine k. mertebeden sabit katsayılı homojen indirgeme bağıntısı denir.

Teorem 1.1.1: $\{a_n\}$ reel dizisinin indirgeme bağıntısı,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{1.5}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0 \tag{1.6}$$

denklemine indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi denir. Bu denklemin birbirinden farklı kökleri de α_1 ve α_2 olsun. Bu durumda (1.5) bağıntısının genel çözümü;

$$a_n = A.\alpha_1^n + B.\alpha_2^n \tag{1.7}$$

olur.

Örnek 1.1.1:

$$\begin{aligned} a_1 &= 7 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad (n > 2) \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısına sahip dizinin genel çözümünü bulalım.

İndirgeme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 6 = 0$ şeklinde olup kökleri $\alpha_1 = 3$ ve $\alpha_2 = -2$ bulunur. Buradan genel çözüm,

$$a_n = A.3^n + B.(-2)^n$$

şeklinde olacaktır. Başlangıç koşulları sağlatılırsa ; $A = 1$ ve $B = -2$ bulunur. Genel çözüm,

$$a_n = 3^n - 2.(-2)^n \quad (n > 2)$$

şeklinde olur.

Teorem 1.1.2:

$\{a_n\}$ reel sayı dizisi $c_1,\ c_2, \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{1.8}$$

sabit katsayılı lineer homojen indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0 \tag{1.9}$$

olsun. Bu denklemin kökleri $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ise (1.8) in genel çözümü

$$a_n = (A + B.n)\,\alpha^n$$

şeklindedir.

Örnek 1.1.2:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \ \ (n > 2) \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısına sahip dizinin genel çözümünü bulalım.

İndirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

buradan kökleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ bulunur. Buradan genel çözüm,

$$a_n = (A + Bn)\,.2^n$$

şeklinde olacaktır. Başlangıç koşulları sağlatılırsa ; $A = \dfrac{1}{4}$ ve $B = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Genel çözüm

$$a_n = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}n\right)2^n$$

$$a_n = (1+n).2^{n-2}$$

şeklinde olur.

Tanım 1.1.3: Fibonacci sayı dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.10}$$

indirgeme bağıntısı ile belirlenmiştir. Gösterimde, F_n ile n. Fibonacci sayısı ifade edilir.

Tanım 1.1.4: Lucas sayı dizisi, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{1.11}$$

indirgeme bağıntısı ile belirlenmiştir. Gösterimde, L_n ile n. Lucas sayısı ifade edilir.

Tanım 1.1.5: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T_n = 1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

sayısına n. Üçgensel sayı denir.

Tanım 1.1.6: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P_n = n.(n+1)$$

formundaki sayılara Pronik sayı denir. $P_1 = 2$, $P_2 = 6$, $P_3 = 12$, $P_4 = 20$ sayıları birer Pronik sayıdır.

Teorem 1.1.3: (Fibonacci ve Lucas Sayıları Binet Formülleri) F_n, Fibonacci dizisinin n. terimi olmak üzere, karakteristik denklemi ;

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup kökleri,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} && \text{(Altın Oran)} \\ \beta &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} && \text{(Gümüş Oran)} \end{aligned}$$

n. Fibonacci ve Lucas sayıları,

$$\begin{aligned} (i)\ \ F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ (ii)\ \ L_n &= \alpha^n + \beta^n \end{aligned}$$

İspat.

(i) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklinde olup kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Genel çözüm,

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

şeklinde olur. Fibonacci sayı dizisi için başlangıç koşulları $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$ sağlatılırsa, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ o halde Fibonacci sayı dizisi için Binet Formulü,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ise $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

(ii) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklinde olup kökleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

bulunur. Genel çözüm,

$$L_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

şeklinde olur. Lucas sayı dizisi için başlangıç koşulları $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ sağlatılırsa, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ o halde Lucas sayı dizisi için Binet Formulü,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

bulunur.

Teorem 1.1.4 : F_n Fibonacci sayı dizisinin n. terimi olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad , \quad n \geq 1 \qquad \text{(Cassini Özdeşliği)}$$

dir.

İspat. Tümevarım prensibi gereği,

$n = 1$ için $F_0 F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1 = (-1)^1$ doğrudur.

$n = k$ için $F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$ doğru kabul edelim.

$n = k + 1$ için

$$F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2$$

$$= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_{k-1} F_k - F_{k-1} F_{k+1} - F_{k+1}^2$$

$$= F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k - F_k^2 - (-1)^k$$

$$= F_k F_{k+1} - F_k (F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1}$$

$$= F_k F_{k+1} - F_k F_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1}$$

özdeşliğin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 1.1.5: (Fibonacci Sayı Dizisi Üreteç Fonksiyonu)

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \ (n \geq 3) \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanmış Fibonacci sayı dizisinin elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

İspat. Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonunu $g(x)$ ile gösterecek olursak,

$$g(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_1 x + F_2 x^2 + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_1 x + F_2 x^2 + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n$$

$$= F_1 x + F_2 x^2 + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$= x + x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + x^2 + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - x \right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + x^2 + x \left(g(x) - x \right) + x^2 g(x)$$

$$= x + x^2 + x g(x) - x^2 + x^2 g(x)$$

elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \left(1 - x - x^2\right) g(x) &= x \\ g(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de üreteç fonksiyon yardımıyla Fibonacci indirgeme bağıntısının genel çözümü olan Binet Formulüne ulaşacağımızı görelim.

$$\begin{aligned} 1-x-x^2 &= \left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \\ &= (1-\alpha x)(1-\beta x) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{c_1}{1-\alpha x}+\frac{c_2}{1-\beta x}$$

gerekli işlemlerle $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ elde edilir ki

$$g(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\alpha x}+\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\beta x}$$

terimlerin seri açılımları yazılırsa,

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n x^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n x^n$$

son olarak,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)x^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.6: (Lucas Sayı Dizisi Üreteç Fonksiyonu)

$$\begin{aligned} L_1 &= 1,\ L_2=3, \\ L_n &= L_{n-1}+L_{n-2},\ (n\geq 3) \end{aligned}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanmış Lucas sayı dizisinin elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$h\left(x\right) = \frac{x + 2x^2}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

İspat. Lucas sayı dizisi için üreteç fonksiyon $h\left(x\right)$ olsun.

$$h\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n$$

$$= L_1 x + L_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} L_n x^n$$

$$= x + 3x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(L_{n-1} + L_{n-2}\right) x^n$$

$$= x + 3x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-2} x^n$$

$$= x + 3x^2 + x \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-2} x^{n-2}$$

$$= x + 3x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} L_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n$$

$$= x + 3x^2 + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n - x\right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n$$

$$= x + 2x^2 + x \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n$$

$$= x + 2x^2 + xh\left(x\right) + x^2 h\left(x\right)$$

$$h\left(x\right) = x + 2x^2 + xh\left(x\right) + x^2 h\left(x\right)$$

buradan,

$$h\left(x\right) = \frac{x + 2x^2}{1 - x - x^2}$$

elde edilir.

2 PELL DENKLEMLERİ

2.1 Pell Denklemlerinin Tarihçesi

Diafantos, Milattan sonra 325 yıllarından sonra Roma'da yaşamış Yunan matematikçidir. Diafantos, özellikle cebir alanında kökleri tamsayılar olan denklemlerin çözümleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu sebepledir ki kökleri tamsayılar olan polinom yapıdaki denklemler Diofant denklemler olarak adlandırılmıştır. Bu tipteki denklemler yüzyıllarca matematikçilerin ilgi alanına girmiş ve üzerinde bir çok çalışma yapılmıştır. Diofant denklemlerin özel bir hali olan Pell denklemi, d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = 1$$

çözümleri $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olan denklemdir.

Pell denklemleri üzerine Brahmagupta'dan önce Diafantos ve Arşimed de çalışmalar yapmıştır. Arşimed'in Cattle problemi üzerine yaptığı çalışmasının bir aşamasında Pell denklemi ile karşılaşılması ve çözüm sunulması konu ile ilgilendiğini göstermektedir.

Hintli astronom ve matematikçi olan Brahmagupta (598-670) Pell Denklemleri üzerine ciddi anlamda derinlemesine çalışma yapan ilk kişiydi.
Eğer (a, b) ve (c, d) ikilileri $x^2 - dy^2 = 1$ formundaki Pell denkleminin birer çözümleri ise $(bc \pm ad\ ,\ bd \pm nac)$ ikilileri de birer çözümdür.
Eğer (a, b) ikilisi $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise $(2ab, b^2 + na^2)$ ikilisi de bir çözümdür.

Teoremleri ile "Pell denklemlerinin bir çözümü varsa sonsuz çözümü vardır." yargısına ulaşması Brahmagupta'nın konu üzerine ne kadar önemli bulgulara ulaştığının da bir göstergesidir.

Brahmagupta'dan sonra Pell denklemleri üzerine çalışan bir diğer kişi de Hintli matematikçi ve astronom Bhaskara II (1150) dir. Bhaskara II , $(1, m)$ Pell denkleminin aşikar bir çözümü iken $x = (am + b) / k$, $y = (bm + na)^2$ çözümleri $nx^2 + (m^2 - n) / k = y^2$ Pell denkleminin çözümleri olduğu olduğunu keşfetmiştir. Pell denklemlerinin çözümleri üzerine katkı sunan bir diğer kişi de Narayana'dır. Narayana Bahaskara'nın geliştirdiği metoda yeni örnekler eklemiştir.

Avrupalı matematikçiler, Hintli matematikçilerin kendilerinden 500 yıl kadar öncesine dayanan çalışmaları olduğundan haberdar değillerdi. Pell denklemleri Fermat'ın yayınladığı teoremlerle sayılar teorisinde ilgi odağı haline gelmiştir. Tarihler 1657 yılının Şubat ayını gösterdiğinde Fermat'ın yayınladığı $d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $dy^2 + 1$ nin tamkare olmasını sağlayacak y tamsayılarının bulunuşu problemi bizi yine $x^2 - dy^2 = 1$ şartını sağlayan y değerlerinin bulunuşuna götürür ki Pell denklemi burada problemle uğraşanların dikkatinden kaçmamıştır. Fermat'ın yayınladığı problemlere bir çok matematikçi çözüm üretmeye çalışmıştır. Bu denklemlerin çözümü üzerine uğraşan matematikçilerden bazıları Frenicle de Bessy , Brouncker ve Wallis'tir. Brouncker, Pell denklemlerine Lagrange'nin sunduğu sürekli kesirler yaklaşımına benzer bir çözüm geliştirmiştir. Sürekli kesirler yaklaşımı konseptini Lagrange ortaya koymuş ve ispatlamıştır.

1658 de Rahn, John Pell'in de yardımıyla içeriğinde Pell denklemi barındıran bir cebir kitabı yayınlamıştır. Pell Denklemlerine ismini veren John Pell'in denklem ile tek ilgisinin bu olduğu bilinmektedir. Euler, bu konu üzerine çalışma yapan ilk kişi John Pell (1611-1685) olmamasına rağmen bu formdaki denklemlere onun ismini vererek literatürde Pell denklemleri olarak yer edinmesine neden olmuştur.

Pell denklemleri, tarih boyunca matematikteki ilerlemeler dikkate alındığında daha az öneme sahip olsa da sayılar teorisinde ve yer bulduğu matematiğin diğer uygulama alanlarında son derece önemli bir yere sahiptir.

2.2 Pell Denklemleri

Tanım 2.2.1 : $d > 0$ tamkare olmayan tamsayı ve $x,\ y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{2.1}$$

denklemine Pell Denklemi denir.

Tanım 2.2.2 : $d > 0$ tamkare olmayan tamsayı ve $x,\ y,\ N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = N \tag{2.2}$$

denklemine Genel Pell Denklemi denir. Pell denklemleri (x, y) ikilisi için sağlanıyorken

$$(x, -y), (-x, y), (-x, -y)$$

ikilileri için de sağlanacağından çalışmamızda Pell denklemlerinin çözümlerini pozitif (x, y) ikilileri için araştırmak yeterli olacaktır. Ayrıca (2.2) nin bir çözümü (x, y) ikilisi ise bu çözüm $x + y\sqrt{d}$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.1 : $x^2 - 5y^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü $(9, 4)$ olup $x + y\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}$ şeklindedir.

Örnek 2.2.2 : $x^2 - 7y^2 = 3$ Pell denkleminin çözümü yoktur.

Verilen denklemin $\bmod 4$ deki sorgulamaları,

x, y tek	$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 4$	$1 - 7.1 \equiv 3 \pmod 4$	mümkün değil.
x, y çift	$x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod 4$	$0 - 7.0 \equiv 3 \pmod 4$	mümkün değil.
x tek y çift	$x^2 \equiv 1,\ y^2 \equiv 0 \pmod 4$	$1 - 7.0 \equiv 3 \pmod 4$	mümkün değil.
x çift y tek	$x^2 \equiv 0,\ y^2 \equiv 1 \pmod 4$	$0 - 7.1 \equiv 3 \pmod 4$	mümkün değil.

2.3 Sürekli Kesirler

Çalışmamızın bu kısmında Pell denklemlerinin çözümünde araç olarak kullanacağımız Sürekli Kesir kavramı üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.3.1 : a_0, a_1, a_2, ... , a_n reel sayılar, a_1, a_2, ..., a_n pozitif olmak üzere,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{2.3}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir. a_0, a_1, a_2, ..., a_n reel sayılarına kısmi bölümler ya da kısmi paydalar denir. Eğer a_0, a_1, a_2, ..., a_n reel sayılarının hepsi tamsayı ise sonlu sürekli kesire basit sürekli kesir denir.

Örnek 2.3.1 : $\dfrac{104}{29}$ sayısının sürekli kesir açılımını bulalım.

104 ve 29 sayılarına öklit algoritması uygularsak;

$$\begin{aligned}
104 &= \mathbf{3}.29 + 17 \\
29 &= \mathbf{1}.17 + 12 \\
17 &= \mathbf{1}.12 + 5 \\
12 &= \mathbf{2}.5 + 2 \\
5 &= \mathbf{2}.2 + 1
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\frac{104}{29} = 3 + \frac{17}{29} = 3 + \frac{1}{29/17}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{17}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17/12}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{17}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17/12}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{12}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12/5}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5/2}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Elde edilen son ifade $\frac{104}{29}$ sayısının sürekli kesir karşılığıdır. Bundan sonra yazım kolaylığı açısından

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

eşitliğinin yerine,

$$\frac{a}{b} = [a_0 : a_1, a_2, a_3, ..., a_n] \tag{2.4}$$

gösterimi kullanılacaktır. O halde,

$$\frac{104}{29} = [3; 1, 1, 2, 2, 2]$$

olur.

Örnek 2.3.2 : $-\dfrac{120}{13}$ sayısının sürekli kesir açılımını bulalım.

$$\begin{aligned}
-\frac{120}{13} &= -10+\frac{10}{13}\\
&= -10+\cfrac{1}{\cfrac{13}{10}}\\
&= -10+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{10}}\\
&= -10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{10}{3}}}\\
&= -10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden görüleceği üzere,

$$-\frac{120}{13}=[-10,1,3,3]$$

şeklinde sürekli kesir açılımına sahiptir.

Bu arada rasyonel sayıların sürekli kesir şeklindeki yazılışları tek türlü değildir.

$$\frac{a}{b}=[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n]$$

sürekli kesrinde $a_n=(a_n-1)+\dfrac{1}{1}$ eşitliği dikkate alınırsa $a_n>1$ olan sürekli kesri,

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n]=[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n-1,1]$$

şeklinde de yazılabilir. O halde her rasyonel sayı iki şekilde sürekli kesre sahiptir. Bunlardan birinde terim sayısı tek diğerinde ise çifttir. Örnek 2.3.1 deki sürekli kesir

$$\frac{104}{29}=[3;1,1,2,2,2]=[3;1,1,2,2,1,1]$$

şeklindeki iki farklı yazıma sahiptir.

Tanım 2.3.2 : $k \leq n$ olmak üzere, $[a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ sürekli kesrine $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sürekli kesrinin k. yakınsayanı denir. Burada k ve n sayıları negatif olmayan tamsayılar olup $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sürekli kesrinin k. yakınsayanını $C_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.3.3 : $\dfrac{319}{139}$ kesrinin yakınsayanlarını hesaplayalım.

$$\frac{319}{139} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Buradan,

$$C_0 = [2] = 2$$

$$C_1 = [2; 3] = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$C_2 = [2; 3, 2] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \frac{16}{7}$$

$$C_3 = [2; 3, 2, 1] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{23}{10}$$

$$C_4 = [2; 3, 2, 1, 1] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{39}{17}$$

$$C_5 = [2; 3, 2, 1, 1, 3] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}} = \frac{140}{61}$$

$$C_6 = [2;3,2,1,1,3,2] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}} = \frac{319}{139}$$

Teorem 2.3.1 : $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayılar ve $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ pozitif olsun. $p_0, p_1, ..., p_n$ ve $q_0, q_1, ..., q_n$ dizileri;

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, \qquad q_0 = 1 \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, \qquad q_1 = a_1 \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \qquad k = 2, 3, ..., n \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, k. yakınsayan

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, ...a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

dır.(Mollin, 1998).

İspat. Teoremi tümevarım ile ispatlayalım.

$k = 0$ için $C_0 = [a_0] = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$

$k = 1$ için $C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$

Şimdi, $2 \leq k < n$ eşitliğini sağlayan k tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim.

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

olsun. p_j, q_j tanımları dikkate alınırsa p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2} reel sayıları sadece a_0, a_1, ..., a_{k-1} kısmi paydalara bağlıdır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlikte $a_k = a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$ değişimini yapabilir ki o zaman,

$$C_{k+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}]$$

$$= \left[a_0; a_1, a_2, \dots a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right]$$

$$= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}\left(a_k p_{k-1} + p_{k-2}\right) + p_{k-1}}{a_{k+1}\left(a_k q_{k-1} + q_{k-2}\right) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

bu da eşitliğin $k+1$ için de doğru olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.2: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi a_0 hariç a_k lar (2.5) deki gibi tanımlansın.

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

dir. (Mollin, 1998).

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $k = 1$ için

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) .1 - a_0 a_1 = 1$$

den görüleceği üzere ifade doğrudur. k için önermenin doğruluğunu kabul edelim.

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

olsun.

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= \left(a_{k+1} p_k + p_{k-1}\right) q_k - p_k \left(a_{k+1} q_k + q_{k-1}\right) \\ &= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} \\ &= -\left(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k\right) \\ &= -(-1)^{k-1} \end{aligned}$$

$$= (-1)^k$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için ifadenin doğru olduğu görülür.

Şimdi de rasyonel sayılar gibi irrasyonel sayıların da sürekli kesir açılımlarını ifade edecek bir teorem verelim.

Teorem 2.3.3 : $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı olmak üzere, a_0, a_1, a_2, ... tamsayıları aşağıdaki şekilde tanımlansın,

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor \quad , \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad , \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

o halde,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

dır. (Rosen, 1993).

İspat. İndirgeme bağıntısının tanımı $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ şeklinde olduğundan a_k ların her birinin tamsayı olduğu görülür. Ayrıca tümevarımla $\forall k \in \mathbb{N}$ için α_k ların her birinin irrasyonel olduğunu ve buna karşılık α_{k+1} lerin de var olduğunu gösterelim.

$k = 0$ için, $\alpha = \alpha_0$ ın irrasyonel olduğunu biliyoruz.
α_k irrasyonel kabul ederek α_{k+1} lerin de irrasyonel olduğunu gösterelim.

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

eşitliğinden de görüleceği üzere, α_k irrasyonel ve a_k tamsayı olduğundan $\alpha_k - a_k$ bir irrasyoneldir. Buradan da $1/(\alpha_k - a_k) = \alpha_{k+1}$ in irrasyonel olduğu görülür. Ayrıca,

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

bu eşitlikten α_{k+1} rasyonel ise α_k nın da rasyonel olduğu görülür ki çelişki ortaya çıkar.

Şimdi de

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

olduğunu gösterelim.

α_k irrasyonel ve a_k tamsayı ise $\alpha_k \neq a_k$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} a_k &< \alpha_k < a_k + 1 \\ 0 &< \alpha_k - a_k < 1 \\ \alpha_{k+1} &= \frac{1}{\alpha_k - a_k} > 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki sonuç olarak

$$a_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \geq 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

buradan anlaşılıyor ki $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ler birer pozitif tamsayıdır. Teoremin ifadesindeki yenilemeli bağıntıyı kullanarak,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = [a_0; a_1, \alpha_2] \\ &\vdots \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}} = [a_0; a_1, \ \ldots \ a_k, \alpha_{k+1}] \end{aligned}$$

Burada, $k \longrightarrow \infty$ için $[a_0; a_1, \ \ldots \ a_k, \alpha_{k+1}]$ yaklaşımının α olduğunu gösterelim. $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ ifadesi $[a_0; a_1, a_2 \ \ldots]$ in k. yaklaşımı olmak üzere Teorem 2.3.1 den

$$[a_0; a_1, \ \ldots \ a_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha - C_k &= \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \\
&= -\frac{(p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k)}{(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})\, q_k} \\
&= \frac{(-1)^k}{(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})\, q_k}
\end{aligned}$$

Elde edilen son ifadede $\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} > a_{k+1}q_k + q_{k-1} = q_{k+1}$ eşitsizliği de dikkate alınırsa,

$$\alpha - C_k < \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$$

$q_k \geq k$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} |\alpha - C_k| = 0$ yani $\lim_{k\to\infty} \alpha = C_k$ dır. Sonuç olarak $[a_0; a_1, a_2, \ \ldots]$ sonsuz sürekli kesri α ya yakınsar.

Örnek 2.3.4 : $\sqrt{7}$ sayısının sürekli kesir açılımını yapalım.

$$a_0 = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{7}+2}{3} \right\rfloor = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{7}+1}{2} \right\rfloor = 1, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{7}+1}{3} \right\rfloor = 1, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1} = \sqrt{7}+2$$

$$a_4 = \lfloor \sqrt{7}+2 \rfloor = 4, \qquad \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = \alpha_1$$

$$a_5 = \left\lfloor \frac{\sqrt{7}+2}{3} \right\rfloor = 1 = a_1, \qquad \alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = \alpha_2$$

O halde $\sqrt{7}$ nin sürekli kesir açılımı devirli olup

$$\begin{aligned}\sqrt{7} &= [a_0; a_1, a_2, \ldots] \\ \sqrt{7} &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] \\ &= \left[2; \overline{1, 1, 1, 4}\right]\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.3.4 : x bir irrasyonel sayı, $\dfrac{a}{b}$, $(b > 1)$ rasyonel sayı ve $(a, b) = 1$ olmak üzere

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

ise $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısı, x'in sürekli kesir yaklaşımı olan $\dfrac{p_n}{q_n}$ lerden birisidir.

Teorem 2.3.5 : $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin pozitif bir çözümü (p, q) olsun. O halde $\dfrac{p}{q}$ ifadesi $\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

İspat. Teoremin hipotezinden $p^2 - dq^2 = 1$ yazılabilir. Buradan

$$\left(p - q\sqrt{d}\right)\left(p + q\sqrt{d}\right) = 1$$

elde edilir ki $p - q\sqrt{d} > 0$ olmalıdır çünkü denklemin diğer bileşenleri pozitiftir. O halde $p > q\sqrt{d}$ olur. Denklemden

$$\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q\left(p + q\sqrt{d}\right)}$$

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} < \frac{\sqrt{d}}{q\left(q\sqrt{d} + q\sqrt{d}\right)} = \frac{\sqrt{d}}{2q^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2q^2}$$

$$\left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

elde edilir ki teorem 2.3.4 den $\dfrac{p}{q}$ ifadesi$\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımı olan $\dfrac{p_n}{q_n}$ lerden birisi olduğu görülür.

Teorem 2.3.6 : d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $|N| < \sqrt{d}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = N$ ise o zaman $\dfrac{x}{y}$, $\sqrt{d}$ nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır. (Pekasil,2006).

Teorem 2.3.7 : d pozitif tamkare olmayan bir tamsayı olsun. Eğer,

$$x^2 - dy^2 = 1 \qquad (x > 0\ ,\ y > 0) \tag{2.6}$$

denkleminin bir çözümü varsa sonsuz sayıda çözümü vardır. Eğer,

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad (x > 0\ ,\ y > 0) \tag{2.7}$$

denkleminin bir çözümü varsa (2.6) ve (2.7) denklemlerinin sonsuz sayıda çözümü vardır. (Stark 1997).

Teorem 2.3.8 : d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ için $\dfrac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir k. yaklaşımını göstersin ve n, $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir yaklaşımının periyodu olsun. O zaman n çift ise $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin çözümleri $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ ve $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin çözümü yoktur. n tek ise $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin çözümleri $x = p_{2jn-1}$ $y = q_{2jn-1}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ ve $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin çözümleri $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = p_{(2j-1)n-1}$ $j = 1, 2, 3, ...$ dir.

Örnek 2.3.5: $x^2 - 15y^2 = 1$ denkleminin çözümlerini bulalım.
$d = 15$ olduğundan $\sqrt{15}$ in sürekli kesir açılımı ve periyodu,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left\lfloor \sqrt{15} \right\rfloor = 3 \quad , \quad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{6} \\
a_1 &= \left\lfloor \frac{\sqrt{15}+3}{6} \right\rfloor = 1 \quad , \quad \alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{15}+3}{6} - 1} = \sqrt{15}+3 \\
a_2 &= \left\lfloor \sqrt{15}+3 \right\rfloor = 6 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{15}+3-6} = \frac{\sqrt{15}+3}{6} = \alpha_0 \\
&\cdots \quad , \quad \cdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup $\sqrt{15} = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [3; 1, 6, 1, 6, \ldots] = \left[3; \overline{1, 6}\right]$ o halde $\sqrt{15}$ in periyodu 2 dir. Teorem 2.3.8 ye göre, $x = p_{2j-1}$ ve $y = q_{2j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ ifadeleri çözümler olacaktır.

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [3,1] = 3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1} = \frac{p_1}{q_1} \text{ ise } (x,y) = (p_1, q_1) = (4,1) \\
C_3 &= [3,1,6,1] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{31}{8} = \frac{p_3}{q_3} \text{ ise } (x,y) = (31,8) \\
C_5 &= [3,1,6,1,6,1] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{244}{63} = \frac{p_5}{q_5} \text{ ise } (x,y) = (244,63)
\end{aligned}
$$

Teorem 2.3.7 de dikkate alındığında $x^2 - 15y^2 = 1$ denkleminin sonsuz çözümü olup pozitif çözümler,

$$(x,y) = (4,1)\,,\ \ (31,8)\,,\ \ (244,63)\,,\ \ \ldots$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.3: $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bütün çözümleri içerisinde bir $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ çözümü için $x + y\sqrt{d}$ ifadesi alabileceği değerlerden en küçük değere ulaşıyorsa (x_0, y_0) çözümüne, en küçük pozitif çözüm veya temel çözüm denir.

Örnek 2.3.6: $x^2 - 7y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü, $(x,y) = (8,3)$ dir. Çünkü bundan sonra gelen pozitif çözümü $(x,y) = (127,48)$ olup, $8 + 3\sqrt{7} < 127 + 48\sqrt{7}$ tür.

Teorem 2.3.9: $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü varsa tektir.

İspat. Kabul edelim ki $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin farklı iki temel çözümü (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) şeklinde ayrıca $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ dir. O halde temel çözüm tanımından,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$$

olur ki buradan da $(x_1 - y_1) + \sqrt{d}\,(y_1 - y_2) = 0$ yazılır. Bu durumda $x_1 - x_2 = 0$ ve $y_1 - y_2 = 0$ ise $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ yazılır ki o halde temel çözüm varsa tektir.

Şimdi de temel çözümden yola çıkarak $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin tüm çözümleri arasındaki bağlantıyı ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.3.10: $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda diğer çözümler,

$$(1) \qquad x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$$

$$(2) \qquad x_n - y_n\sqrt{d} = \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^n$$

olmak üzere, $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ şeklindedir.

İspat. $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir çözüm olduğundan,

$$\begin{aligned} x_0^2 - dy_0^2 &= 1 \\ \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right) &= 1 \\ \left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^n\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n &= 1^n \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılırsa,

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n = \binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}\left(y_0\sqrt{d}\right) + \cdots + \binom{n}{n}\left(y_0\sqrt{d}\right)^n$$

n çift ise $\left(y_0\sqrt{d}\right)^n \in \mathbb{Z}$, n tek ise $\left(y_0\sqrt{d}\right)^n \notin \mathbb{Z}$ olacağından, tamsayı terimlerle oluşan toplamı x_n , irrasyonel terimlerle oluşan toplam $y_n\sqrt{d}$ ile ifade edilirse,

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{d}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (2) de,

$$\left(x_0 - y_0\sqrt{d}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{d}$$

gösterilebilir.

Şimdi de $x^2 - dy^2 = N$ Genel Pell denkleminin çözümlerine bakalım.

Tanım 2.3.4: d tamkare olmayan bir pozitif tamsayı, $N \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $x + y\sqrt{d}$ ile $x' + y'\sqrt{d}$ ifadeleri

$$x^2 - dy^2 = N$$

denkleminin çözümleri olsunlar. $u + v\sqrt{d}$ ifadesi $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü iken

$$x' + y'\sqrt{d} = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(u + v\sqrt{d}\right) \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanıyorsa $x + y\sqrt{d}$ ile $x' + y'\sqrt{d}$ çözümlerine aynı sınıftadırlar denir. Aynı sınıfta yer alan çözümlerin kümesine çözüm sınıfı denir. Ayrıca $x + y\sqrt{d}$ ile $x' + y'\sqrt{d}$ çözümlerine (2.2) nin ilgili çözümleri denir.

Teorem 2.3.11: d tamkare olmayan bir pozitif tamsayı, $N \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $x + y\sqrt{d}$ ile $x' + y'\sqrt{d}$ ifadeleri

$$x^2 - dy^2 = N$$

denkleminin çözümleri olsunlar. $x + y\sqrt{d}$ ile $x' + y'\sqrt{d}$ çözümlerinin aynı sınıfta olmaları için gerek ve yeter şart $N \mid xx' - yy'd$ ve $N \mid xy' - x'y$ olmasıdır.

Teorem 2.3.12: d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun,

$$x^2 - dy^2 = N$$

denkleminin bir K sınıfının temel çözümü $x + y\sqrt{d}$ ve

$$x^2 - dy^2 = 1$$

denkleminin temel çözümü $u_1+v_1\sqrt{d}$ ise

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{v_1}{\sqrt{2(u_1+1)}}\sqrt{N} \\ 0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(u_1+1)N} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (Robertson, 2004).

Örnek 2.3.7: $x^2-11y^2=13$ Pell denkleminin tamsayı çözümünün olup olmadığını araştıralım.

$x^2-11y^2=1$ denkleminin temel çözümü $u+v\sqrt{11}=10+3\sqrt{11}$olur. $x^2-11y^2=13$ denkleminin bir K sınıfına ait temel çözümü $x+y\sqrt{11}$ olsun.

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{3}{\sqrt{2(10+1)}}\sqrt{13}=\sqrt{\frac{117}{22}}<3 \\ 0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(10+1)13}=\sqrt{\frac{143}{2}}<9 \end{aligned}$$

sınırlamalarından, $y\in[0,3)$ için $11y^2+13$ ün tamkare olup olmadığını kontrol edersek $y\in\{0,\pm1,\pm2\}$ değerleri için tamkare olamayacağından $x^2-11y^2=13$ denkleminin tamsayılarda çözümü yoktur.

Teorem 2.3.13: d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $x^2-dy^2=N$ genel Pell denkleminin bir K sınıfının temel çözümü $x_1+y_1\sqrt{d}$ olsun ve $x^2-dy^2=1$ Pell denkleminin bir temel çözümü $u_1+v_1\sqrt{d}$ olsun. O halde $x^2-dy^2=N$ denkleminin bir K sınıfına ait tüm pozitif tamsayı çözümleri $x_n+y_n\sqrt{d}$ olmak üzere,

$$x_{n+1}+x_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)\left(u_1+v_1\sqrt{d}\right)^n$$

formulü ile bulunur. (Nagell, 1981).

Örnek 2.3.8: $x^2 - 7y^2 = 29$ genel Pell denkleminin tamsayılardaki çözümlerini araştıralım.

$x^2 - 7y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $u + v\sqrt{7} = 8 + 3\sqrt{7}$ olur. $x^2 - 7y^2 = 29$ denkleminin bir K sınıfına ait çözüm $x + y\sqrt{7}$ için sınır belirlenirse

$$
\begin{aligned}
0 &\leq y \leq \frac{3}{\sqrt{2\left(8+1\right)}}.\sqrt{29} < 4 \\
0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\left(8+1\right).29} < 12
\end{aligned}
$$

Buradan, $y \in [0, 4)$ olur ki $y = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ değerlerinden $7y^2+29$ ifadesini tamkare yapan değerler $y = \pm 1$ olur. O halde $x^2 - 7y^2 = 29$ denkleminin temel çözümleri $x + y\sqrt{7} = \pm 6 \pm \sqrt{7}$ olur. Bu çözümlerden farklı sınıflarda olanları belirlenirse Teorem 2.3.11 gereği $x + y\sqrt{7} = 6 + \sqrt{7}$ ile $x + y\sqrt{7} = -6 - \sqrt{7}$ aynı sınıftadırlar çünkü,

$$29 \mid 6.\left(-6\right) - 1.\left(-1\right).7 \text{ ve } 29 \mid 6.\left(-1\right) - 1.\left(-6\right)$$

O halde $x + y\sqrt{7} = 6 + \sqrt{7}$ ile $x + y\sqrt{7} = -6 - \sqrt{7}$ çözümleri ilgili olduğundan çözüm sınıfları aynıdır. Benzer şekilde $x + y\sqrt{7} = 6 - \sqrt{7}$ ile $x + y\sqrt{7} = -6 + \sqrt{7}$ çözümleri de ilgilidir. Genel çözüm için $x + y\sqrt{7} = 6 + \sqrt{7}$ ile $x + y\sqrt{7} = -6 + \sqrt{7}$ ayrık sınıflara ait çözümleri alalım. $x + y\sqrt{7} = -6 + \sqrt{7}$ çözümü temel çözüm tanımına uymadığından aynı sınıfta yer alan $x + y\sqrt{7} = 27 + 10\sqrt{7}$ çözümünü alalım. O halde tüm tamsayı çözümler iki ayrık sınıfta

$$
\begin{aligned}
x_n + y_n\sqrt{7} &= \left(6 + \sqrt{7}\right)\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n \\
x'_n + y'_n\sqrt{7} &= \left(27 + 10\sqrt{7}\right)\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n
\end{aligned}
$$

şeklinde olur.

3 BALANS VE KOBALANS SAYILARI

Sayılar teorisi alanında Balans ve Kobalans Sayı Dizileri kavramı tanımlaması ve de özel Diofant denklemlerinin çözümleri ile olan ilişkisi ilk defa Behera ve Panda tarafından 1999 yılında yapılmıştır. Balans ve Kobalans Sayılarının özel Diofant denklemlerinin çözümleri ile olan ilişkisi onun özelliklerini incelemeyi kayda değer kılmaktadır.

3.1 Balans Sayıları

Tanım 3.1.1 : n, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + r) \qquad (3.1)$$

eşitliğini sağlayan n doğal sayısına "Balans Sayısı" denir. Eşitlikteki r sayısına n sayısına karşılık gelen balansır denir. Ayrıca Balans sayılarının indirgeme bağıntısı, başlangıç koşulları $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ ve $n \geq 2$ icin

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 3.1.1 : 6, 35, 204 sayıları balansırları sırasıyla 2, 14, 84 olan birer Balans sayısıdır.

Şimdi, Balans sayı tanımından yola çıkarak bir sayının ne zaman Balans sayısı olacağına ilişkin kriterler belirleyelim. (3.1) eşitliğinin her iki yanına $1 + 2 + 3 + ... + n$ toplamı eklenirse,

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r} \qquad (3.2)$$

elde edilir. $T_n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{(n-1).n}{2} + \frac{n.(n+1)}{2} &= \frac{(n+r).(n+r+1)}{2} \\ n^2 &= \frac{(n+r).(n+r+1)}{2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Buradan r nin eşiti,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \tag{3.4}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.1: (3.4) ifadesinden görüleceği üzere, n nin bir Balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2+1$ nin tamkare olmasıdır.

Sonuç 3.1.2 : (3.3) ifadesinden görüleceği üzere, n bir Balans sayısı ise karesi bir üçgensel sayı olmak zorundadır.

Sonuç 3.1.3 : (3.3) de $n + r = m$ denirse,

$$n^2 = \frac{m.(m+1)}{2} \tag{3.5}$$

elde edilir ki m. üçgensel sayı bir n sayısının karesine eşit ise n sayısı bir Balans sayısı olur ve balansırı $r = m - n$ dir.

Teorem 3.1.1 : **(Balans Sayıları Binet Formulü)** B_n, n. Balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \tag{3.6}$$

dır.

İspat. Balans sayıları indirgeme bağıntısında $n \geq 3$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

olduğunu biliyoruz. İndirgeme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

kökleri, $\alpha_1 = 3 + \sqrt{8}$ ve $\alpha_2 = 3 - \sqrt{8}$ bulunur. Genel çözüm,

$$B_n = c_1.\left(3+\sqrt{8}\right)^n + c_2.\left(3-\sqrt{8}\right)^n$$

Başlangıç şartları $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ sağlatılırsa,

$$\begin{aligned} 1 &= c_1.\left(3+\sqrt{8}\right) + c_2.\left(3-\sqrt{8}\right) \\ 6 &= c_1.\left(3+\sqrt{8}\right)^2 + c_2.\left(3-\sqrt{8}\right)^2 \end{aligned}$$

denklemleri çözülürse, $c_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{8}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{8}}$ bulunur. Buradan genel çözüm;

$$B_n = \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}}$$

bulunur.

Teorem 3.1.2 : B_n, n. Balans sayısı ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}$$

dir.

İspat. Tümevarım kullanırsak,

$n = 2$ için $B_2^2 = 6^2 = 1 + 1.35 = 1 + B_1B_3$ doğru.

$n = k$ için, $B_k^2 = 1 + B_{k-1}B_{k+1}$ kabul edelim.

$n = k + 1$ için,

$$\begin{aligned}
B_{k+1}^2 &= B_{k+1}B_{k+1} \\
&= (6B_k - B_{k-1})\, B_{k+1} \\
&= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \\
&= 6B_kB_{k+1} - (B_k^2 - 1) \\
&= B_k\,(6B_{k+1} - B_k) - 1 \\
&= B_kB_{k+2} + 1
\end{aligned}$$

o halde teorem $n = k + 1$ için de doğrulanır.

Teorem 3.1.3 : x Balans sayısı olmak üzere,

$$(i) \qquad f\,(x) \;=\; 2x\sqrt{8x^2+1}$$

$$(ii) \qquad g\,(x) \;=\; 3x + \sqrt{8x^2+1}$$

ifadeleri de birer Balans sayısıdır.

İspat. (i) Sonuç 3.1.1 den x Balans sayısı ise $8x^2+1$ bir tamkaredir. Sonuç 3.1.2 gereği T_{8x^2+1} üçgensel sayısının tamkare olduğunu gösterirsek karekökü de Balans sayısı olacaktır. T_{8x^2+1} sayısı

$$T_{8x^2+1} = \frac{8x^2\,(8x^2+1)}{2} = 4x^2\left(8x^2+1\right)$$

şeklinde olduğundan tamkaredir o zaman karekökü Balans sayısı olmak zorundadır. O halde $2x\sqrt{8x^2+1}$ bir Balans sayısıdır.

(ii) $8g^2\,(x) + 1 \;=\; \left(8x + 3\sqrt{8x^2+1}\right)^2$ olduğundan Sonuç 3.1.1 gereği $g\,(x)$ bir Balans sayısı olmak zorunda.

Dikkat edilirse, x bir Balans sayısı ise $f\left(x\right)$ çift Balans sayılarını vermektedir. $g\left(x\right)$ ifadesindeyse x çift Balans sayısı ise $g\left(x\right)$ tek Balans sayısını, x tek Balans sayısı ise $g\left(x\right)$ çift bir Balans sayısını vermektedir.

Teorem 3.1.4: x bir Balans sayısı olmak üzere,

$$3x-\sqrt{8x^2+1},\ x,\ 3x+\sqrt{8x^2+1}$$

sayıları birbirini takip eden ardışık üç Balans sayısıdır.

İspat. Öncelikle,

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= 3x+\sqrt{8x^2+1} \\ \overline{g\left(x\right)} &= 3x-\sqrt{8x^2+1} \end{aligned}$$

olsun. x Balans sayısı için $x=B_n$ kabul edelim. İndirgeme bağıntısından ardışığı olan sayısı, B_{n+1}

$$B_{n+1}=6B_n-B_{n-1}$$

olacaktır.

$$B_{n+1}=3B_n+\left(3B_n-B_{n-1}\right) \tag{3.7}$$

burada,

$$\begin{aligned} \left(3B_n-B_{n-1}\right)^2 &= 9B_n^2-6B_nB_{n-1}+B_{n-1}^2 \\ &= 9B_n^2-\left(B_{n+1}+B_{n-1}\right)B_{n-1}+B_{n-1}^2 \\ &= 9B_n^2-B_{n-1}B_{n+1}-B_{n-1}^2+B_{n-1}^2 \\ &= 9B_n^2-B_{n-1}B_{n+1} \end{aligned}$$

$$= \quad 9B_n^2 - \left(B_n^2 - 1\right)$$

$$= \quad 8B_n^2 + 1$$

elde edilir ki (3.7) da yerine yazılırsa,

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

sonucuna varılır. O halde x in ardışığı olan Balans sayısı $g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$ dir.

Şimdi de $g(x)$ fonksiyonu altında $3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}$ i incelersek

$$\begin{aligned} g\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}\right) &= 3\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}\right) + \sqrt{8\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}\right)^2 + 1} \\ &= 9B_n - 3\sqrt{8B_n^2 + 1} + 3\sqrt{8B_n^2 + 1} - 8B_n \\ &= B_n \end{aligned}$$

o halde $\overline{g(x)} = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$ fonksiyonu x'ten hemen önce gelen Balans sayısıdır.

Teorem 3.1.5: (**Balans Sayı Dizisi Üreteç Fonksiyonu**) B_n, n. Balans sayısı ve $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ olmak üzere,

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

dir.

İspat. $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ Balans sayı dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$g(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n + \cdots$$

olsun.

$$\begin{aligned} 6xg(x) &= 6xB_0 + 6B_1x^2 + 6B_2x^3 + \cdots + 6B_{n-1}x^n + \cdots \\ x^2g(x) &= B_0x^2 + B_1x^3 + B_2x^4 + \cdots + B_{n-2}x^n + \cdots \end{aligned}$$

yazılır ve buradan,

$$g(x) - 6xg(x) - x^2g(x) = B_0 + (B_1 - B_0)x + (B_2 - 6B_1 - B_0)x^2 + \cdots$$

$B_0 = 0$, $B_1 = 6$ ve $n \geq 2$ için $B_{n+1} - 6B_n - B_{n-1} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} g(x) - 6xg(x) - x^2g(x) &= x \\ g(x) &= \frac{x}{1 - 6x - x^2} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.1.2: B_n, n. Balans sayısı olmak üzere,

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

eşitliğini gerçekleyen C_n'e n. Lucas-Balans sayısı denir.

Teorem 3.1.6: $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lucas-Balans sayı dizi olmak üzere, $C_1 = 3, C_2 = 17$ ve $n \geq 2$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, \ (n \geq 2)$$

dir.

İspat. Lucas-Balans sayı tanımından,

$$C_{n+1} = \sqrt{8B_{n+1}^2 + 1}$$

$$C_{n+1}^2 = 8B_{n+1}^2 + 1$$

yazabilir. Teorem 3.1.4 den,

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 &= 8\left(3B_n + \sqrt{8B_n^2+1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2+1} + 8B_n\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yine Lucas-Balans sayı tanımı dikkate alınırsa,

$$C_{n+1}^2 = (3C_n + 8B_n)^2$$

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n \tag{3.8}$$

yazabilir. Teorem 3.1.4 'ten

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n \tag{3.9}$$

eşitliğini de yazabiliriz. (3.8) ve (3.9) eşitlikleri toplanarak,

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7: (Lucas-Balans Sayıları Binet Formulü) $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lucas-Balans sayısı dizisi ve $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$C_n = \frac{\alpha_1^{2n} + \alpha_2^{2n}}{2}$$

dir.

3.2 Kobalans Sayıları

Tanım 3.2.1 : n, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1+2+3+...+n=(n+1)+(n+2)+...+(n+r) \tag{3.10}$$

eşitliğini sağlayan n doğal sayısına "Kobalans Sayısı" denir. Burada r sayısına da n sayısına karşılık gelen kobalansır denir.

Örnek 3.2.1 : 2, 14, 84 sayıları kobalansırları sırasıyla 1,6 ve 35 olan birer Kobalans sayıdır.

(3.10) ifadesinin her iki yanına $1+2+3+...+n$ eklenirse,

$$\begin{aligned} 2T_n &= T_{n+r} \\ n(n+1) &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

buradan r çekilirse,

$$r=\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+8n+1}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1: n nin Kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2+8n+1$ tamkare olmalıdır.

Sonuç 3.2.2: n Kobalans sayısı ise $n(n+1)$ üçgensel sayıdır.

Sonuç 3.2.3:: n bir Kobalans sayısı ise $n \cdot (n+1)$ ve $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ birer üçgensel sayıdır.

Burada $n=0$ için $8.0^2+8.0+1=1$ tamkare olduğundan dolayı 0'i Kobalans sayısı kabul edeceğiz. n.Kobalans sayısını b_n ile gösterirsek ilk üç Kobalans sayısı $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=14$ olur.

Şimdi Kobalans sayılarını bulmak için sonuç 3.2.3'ü kullanalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n < \sqrt{n \cdot (n+1)} < n+1$ olduğundan bir Pronik-üçgensel sayıyı T ile gösterecek olursak, $\left\lfloor \sqrt{T} \right\rfloor = n$ bir Kobalans sayısı olacaktır.

Örnek 3.2.2: 6 ve 210 birer Pronik-üçgensel sayı olduğundan, $\left\lfloor \sqrt{6} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor \sqrt{210} \right\rfloor = 14$ birer Kobalans sayısıdır. Gerçekten $b_2 = 2$ ve $b_3 = 14$ birer Kobalans sayısıdır.

Teorem 3.2.1: x bir Kobalans sayısı ise,

$$(a) \qquad f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

$$(b) \qquad g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$$

fonksiyonları da birer Kobalans sayısıdır.

İspat. a) x bir Kobalans sayısı olsun. $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$ eşitliği gereği $x < f(x)$ olur.

$$x = 3f(x) - \sqrt{8f^2(x) + 8f(x) + 1} + 1$$

olduğu ve de x ile $f(x)$'in pozitif birer tamsayı olduğu göz önüne alınırsa

$$8f^2(x) + 8f(x) + 1$$

ifadesi bir tamkare tamsayı olmak zorundadır. O halde $f(x)$ bir Kobalans sayısıdır.

b) $f(f(x)) = g(x)$ olduğundan (a) maddesine göre $g(x)$ de bir Kobalans sayısı olur.

Teorem 3.2.2: x bir Kobalans sayısı olmak üzere,

(a) x'in ardışığı olan Kobalans sayısı, $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$ dir.

(b) $\overline{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$ in ardışığı olan Kobalans sayısı, x'tir.

İspat. Öncelikle $f(x)$'in 1-1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} f &: [0,\infty) \to [2,\infty) \\ f(x) &= 3x + \sqrt{8x^2+8x+1} + 1 \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta artan bir fonksiyondur. Çünkü

$$f'(x) = 3 + \frac{8x+4}{\sqrt{8x^2+8x+1}} > 0$$

o halde f, $1-1$ dir. Ayrıca, $\forall x \in [0,\infty)$ için $x < f(x)$ dir. O halde f'nin ters fonksiyonu mevcut olup,

$$f^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$$

şeklinde ve $f^{-1}(x) < x$ dir. Şimdi $f^{-1}(x)$ in Kobalans sayısı olduğunu göstermek için Sonuç 3.2.1 i araç olarak kullanalım.

$$8\left[f^{-1}(x)\right]^2 + 8\left[f^{-1}(x)\right] + 1 = \left(-8x + 3\sqrt{8x^2+8x+1} - 4\right)^2$$

eşitliği gereği $f^{-1}(x)$ bir Kobalans sayısıdır.

İspatı tamamlamak için ardışık iki Kobalans sayısı arasında başka bir Kobalans sayısının bulunamayacağını gösterelim. Tümevarım prensibini kullanırsak,

$f(b_1) = b_2$ ve $f(b_2) = b_3$ doğrudur.

b_{n-1} ile b_n $(n = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ arasında başka bir Kobalans sayısının bulunmadığını kabul edelim. Gösterelim ki b_k ile b_{k+1} arasında bulunmaz. Aksini kabul etseydik.

$$b_k < y < b_{k+1}$$

şartına uyan y Kobalans sayısı var olsaydı,

$$f^{-1}(b_k) < f^{-1}(y) < f^{-1}(b_{k+1})$$

Teorem 3.2.2 (b) den, $f^{-1}(b_k) = b_{k-1}$ ve $f^{-1}(b_{k+1}) = b_k$

$$b_{k-1} < f^{-1}(y) < b_k$$

olurdu. Oysa ki $f^{-1}(y)$ yi ardışık iki Kobalans sayısı arasında bulunmayacağını kabul etmiştik bu kabul ile üstteki eşitsizlik çelişir.

Teorem 3.2.3: $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, Kobalans sayısı dizisi $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ olmak üzere indirgeme bağıntısı

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2 \qquad (n \geq 2)$$

dır.

İspat. Teorem 3.2.2 den

$$b_{n+1} = 3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1$$

$$b_{n-1} = 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1$$

eşitlikleri yazılacağından buradan $(n \geq 2)$ için,

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4: (Kobalans Sayı Dizisi Binet Formulü) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Kobalans sayı dizisi, $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$olmak üzere,

$$b_n = \frac{\alpha_1^{2n-1} - \alpha_2^{2n-1}}{4\sqrt{2}}$$

dir.

Teorem 3.2.5: (Kobalans Sayı Dizisi Üreteç Fonksiyonu) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Kobalans sayı dizisi olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

dir.

Sonuç 3.2.4: $b_n = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1})$

Teorem 3.2.5 den,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)} \\ &= \frac{2x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-6x+x^2} \end{aligned}$$

Burada Balans sayıları için üreteç fonksiyon, $g(x) = \dfrac{x}{1-6x+x^2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1-x} \cdot g(x) \\ &= 2\left(x + x^2 + \cdots\right) \cdot g(x) \end{aligned}$$

elde edilir ki $f(x) = 2(x + x^2 + \cdots) \cdot g(x)$ eşitliğinin her iki yanındaki aynı dereceli x^n in katsayıları kıyaslanırsa, $f(x)$ den $b_n x^n$ şeklindeyken $2(x + x^2 + \cdots) \cdot$ $g(x)$ ifadesinden

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(2x^k\right)\left(B_{n-k}x^{n-k}\right)$$

şeklinde olacaktır. O halde,

$$b_n = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1})$$

dir.

Tanım 3.2.2: b_n, n. Kobalans sayısı olmak üzere,

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

eşitliğini sağlayan c_n'e n.Lucas-Kobalans sayısı denir.

b bir Kobalans sayısı ise $8b^2 + 8b + 1$ in tamkare olduğunu biliyoruz. O halde $c = \sqrt{8b^2 + 8b + 1}$ ifadesinin bir tamsayı olacağı aşikardır.

Örnek 3.2.3: $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 14$ olduğudan $c_1 = \sqrt{8b_1^2 + 8b_1 + 1} = 1$, $c_2 = \sqrt{8b_2^2 + 8b_2 + 1} = 7$, $c_3 = \sqrt{8b_3^2 + 8b_3 + 1} = 41$ dir.

Özel matrisler kullanarak Balans, Kobalans, Lucas-Balans, Lucas-Kobalans sayıları ve aralarındaki ilişkileri Matris teorisinin uygulamalarından faydalanarak elde etmek de mümkündür. Çalışmamızın bu bölümünde (P.K. Ray 2009)'in Doktora Tezi "Balancing and Cobalancing Numbers" da yer alan matris uygulamalarına yer verilmiştir.

Teorem 3.2.6: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n = \begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dir.

İspat. Tümevarımla ispatlayalım.

$n = 1$ için,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_0 & B_1 \\ -B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan doğrudur.

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$A^k = \begin{bmatrix} -B_{k-1} & B_k \\ -B_k & B_{k+1} \end{bmatrix}$$

$n = k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Üstteki ifadeden

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} -B_{k-1} & B_k \\ -B_k & B_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -B_k & 6B_k - B_{k-1} \\ -B_{k+1} & 6B_{k+1} - B_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -B_k & B_{k+1} \\ -B_{k+1} & B_{k+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O halde $n \geq 1$ için,

$$A^n = \begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.2.7: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n \cdot B = \begin{bmatrix} -B_n & 2b_{n+1} + 1 \\ -B_{n+1} & 2b_{n+2} + 1 \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dir.

Teorem 3.2.8: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n \cdot C = \begin{bmatrix} C_{n-1} & C_n \\ C_n & C_{n+1} \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dir.

Teorem 3.2.9: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n \cdot D = \begin{bmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dir.

4 GAP BALANS SAYILARI

Bu bölümde (S.S. Rout 2015) un Doktora Tezinde verilen Gap Balans sayıları ve ardından $k-$gap Balans sayılarının $k = 2, 3, 4, 5$ için özel tipteki Pell denklemleri ile ilişkisi incelenecektir.

4.1 $k-$Gap Balans Sayıları

$1+2+\cdots+n$ toplamında ardışık k tane terimi (terimler baştan ya da sondan olmamak koşuluya) silerek silinen bu terimlerle iki parçaya ayrılan toplamların eşitliğini düşünerek $k-$gap Balans sayı tanımlarını verelim. Burada $k-$gap Balans sayıları g_k ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.1: k bir tek doğal sayı olmak üzere,

$$1+2+\cdots+\left(n-\frac{k+1}{2}\right)=\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\left(n+\frac{k+3}{2}\right)+\cdots+(n+r) \quad (4.1)$$

eşitliğini sağlayan n doğal sayısına $k-$gap Balans sayısı denir. Eşitliği sağlayan r ye n ye karşılık gelen $k-$gap balansır denir.

Tanım 4.1.2: k bir çift doğal sayı olmak üzere,

$$1+2+\cdots+\left(n-\frac{k}{2}\right)=\left(n+\frac{k}{2}+1\right)+\left(n+\frac{k}{2}+2\right)+\cdots+(n+r) \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlayan n değerine karşılık gelen $2n+1$ doğal sayısına $k-$gap Balans sayısı denir. Eşitliği sağlayan r ye n ye karşılık gelen $k-$gap balansır denir.

Tanımlamalardaki $k-$gap Balans sayısının neden bazen n neden bazen $2n+1$ alındığını açıklayalım. Tanım 4.1.1 de k tek olduğunda atılan k ardışık sayının ortancası olan n daima doğal sayıdır. Fakat Tanım 4.1.2 de k çift olduğunda atılan k ardışık sayının ortancası hiçbir zaman doğal sayı olmamaktadır. Bu sebeble k çift iken $k-$gap Balans sayısı atılan $k-$ardışık doğal sayıda ortanca terim oluşmadığından ortancaya en yakın iki terim olan $n+(n+1)$ toplamı ile tanımlanmıştır.

4.2 $2-$Gap Balans Sayıları

Tanım 4.2.1: $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+2) + (n+3) + (n+4) + \cdots + (n+r) \qquad (4.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $2n+1$ sayısına $2-$gap Balans sayısı denir. Buradaki r ye n ye karşılık gelen $2-$gap balansır denir.

Örnek 4.2.1: $1 + 2 + 3 = 6$ olduğundan, 9 sayısı balansırı 2 olan bir $2-$gap Balans sayısıdır.

Örnek 4.2.2: $1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 11 + 12 + 13$ olduğundan, 19 sayısı balansırı 4 olan bir $2-$gap Balans sayısıdır.

(4.3) eşitliğinde $y = 2n+1$ dersek ve r'yi çekersek,

$$r = \frac{-y + \sqrt{2y^2+7}}{2} \qquad (4.4)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $y \in \mathbb{N}$'in $2-$gap Balans sayısı olması için gerek ve yeter şart

$$2y^2 + 7$$

ifadesinin tamkare olmasıdır.

Çalışmamızda (4.3) eşitliğine uymamasına karşın,

$$\begin{aligned} 2.1^2 + 7 &= 9 = 3^2 \\ 2.3^2 + 7 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

olduğundan 1 ve 3'ü de birer $2-$gap Balans sayısı kabul edeceğiz. O halde $2-$gap Balans sayılarının ilk dördü 1, 3, 9, 19 olur.

Teorem 4.2.1: Bütün $2-$gap Balans sayıları,

$$\{6B_n + C_n,\ 6B_n - C_n\}$$

formundadır.

İspat. y bir $2-$gap Balans sayısı ise $2y^2+7$ nin tamkare olması gerektiğini Sonuç 4.2.2 den biliyoruz. $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x^2 = 2y^2 + 7$ eşitliğini inceleyelim.

$$x^2 - 2y^2 = 7 \tag{4.5}$$

Öncelikle Pell denkleminin genel çözümünü bulalım.

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{4.6}$$

Pell denkleminin temel çözümü, $u + v\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ dir. (4.5) denkleminin bir K sınıfına ait temel çözüm $x + y\sqrt{2}$ olsun Teorem 2.3.12'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{2}{\sqrt{2\,(3+1)}}.\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{2}} < 2 \\ 0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\,(3+1)\,.7} = \sqrt{14} < 4 \end{aligned}$$

Buradan $y \in [0, 2)$ değerlerinden $2y^2 + 7$ ifadesinin tamkare yapanlar, $y = 1$ olacağından $x = \pm 3$ bulunur ki (4.5) denkleminin çözümleri $x + y\sqrt{2} = \pm 3 + \sqrt{2}$ olur. Bu çözümlerden farklı sınıfları temsilen $x+y\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}$, $x+y\sqrt{2} = -3+\sqrt{2}$ çözümleri alınır. Ancak $-3 + \sqrt{2}$ çözümüyle ilgili olup negatif olmayan çözüm $5 + 3\sqrt{2}$ dir. O halde (4.5) denkleminin farklı sınıflara ait tüm çözümleri Teorem 2.3.13 yardımıyla,

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(5 + 3\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \tag{4.7}$$

$$x'_n + y'_n\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \tag{4.8}$$

Buradan, (4.7) ifadesi eşleniği ile beraber düşünülürse,

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(5+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

$$x_n - y_n\sqrt{2} = \left(5-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$$

bu denklemlerden,

$$y_n = \frac{\left(5+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(5-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

aynı işlemler (4.8) eşitliği içinde gerçekleştirildiğinde,

$$x'_n + y'_n\sqrt{2} = \left(3+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

$$x'_n - y'_n\sqrt{2} = \left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$$

Buradan,

$$y'_n = \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

$\alpha_1 = 1+\sqrt{2}$ ve $\alpha_2 = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere y_n ve y'_n düzenlenirse,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\left(5+3\sqrt{2}\right)\alpha_1^{2n} - \left(5-3\sqrt{2}\right)\alpha_2^{2n}}{2\sqrt{2}} \\ &= 6.\frac{\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}}{2} \\ &= 6B_n + C_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_n &= \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\alpha_1^{2n} - \left(3-\sqrt{2}\right)\alpha_2^{2n}}{2\sqrt{2}} \\ &= 6.\frac{\alpha_1^{2n}-\alpha_2^{2n}}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha_1^{2n}+\alpha_2^{2n}}{2} \\ &= 6B_n - C_n \end{aligned}$$

Sonuç 4.2.3: x_n, n. g_2-Balans sayısı olmak üzere, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$x_{2n-1} = 6B_n - C_n, x_{2n} = 6B_n + C_n$$

dir.

Sonucun doğruluğu için $6B_n - C_n < 6B_n + C_n < 6B_{n+1} - C_{n+1}$ eşitsizliğini sağlandığını gösterelim. Eşitsizliğin sol yanı $n \geq 1$ için $C_n > 0$ olduğundan doğrudur. Eşitsizliğin sağ tarafına bakalım. $n \geq 1$ için $3B_n + C_n = B_{n+1}$ eşitliği Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.7 vasıtasıyla gösterilebilir. Ayrıca $n \geq 1$ için $B_{n-1} < B_n$ ve $B_n > 0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
6B_n + C_n &= 3B_n + 3B_n + C_n \\
&= 3B_n + B_{n+1} \\
&< 11B_n + 2\left(B_n - B_{n-1}\right) + B_{n+1} \\
&= 2\left(6B_n - B_{n-1}\right) + B_{n+1} + B_n \\
&= 2B_{n+1} + B_{n+1} + B_n
\end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.7 yardımıyla $B_n = 3B_{n+1} - C_{n+1}$ bilgisi oluşturularak yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
6B_n + C_n &< 3B_{n+1} + 3B_{n+1} - C_{n+1} \\
&= 6B_{n+1} - C_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir o halde $n \geq 1$ için

$$6B_n - C_n < 6B_n + C_n < 6B_{n+1} - C_{n+1}$$

olur.

Teorem 4.2.2: x_n, n. 2−gap Balans sayısı ve $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 19$ olmak üzere, $n = 2, 3, \ldots$ için

$$x_{n+2} = 6x_n - x_{n-2}$$

indirgeme bağıntısına sahiptir.

Teorem 4.2.3: (2−gap Balans Sayıları Binet Formulü) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 2−gap Balans sayı dizisi $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $n = 0, 1, ...,$

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1^{n+2} - \alpha_2^{n+2}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{\alpha_1^n + \alpha_2^n}{2} & \text{n çift ise} \\ \dfrac{\alpha_1^{n+2} - \alpha_2^{n+2}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\sqrt{2}} & \text{n tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

4.3 3−Gap Balans Sayıları

Tanım 4.3.1: y, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + (y - 2) = (y + 2) + (y + 3) + \cdots + (y + r) \tag{4.9}$$

eşitliğini sağlayan y'e 3−gap Balans sayısı denir. Burada y'ye karşılık gelen r'ye 3−gap balansır denir.

Örnek 4.3.1: 47 sayısı balansırı 19 olan bir 3−gap Balans sayısıdır.

Gerçekten $1 + 2 + \cdots + 66$ toplamından $46 + 47 + 48$ toplamı atıldığında,

$$1 + 2 + \cdots + 45 = 49 + 50 + \cdots + 66$$

olur.

Şimdi (4.9) dan r çekilirse,

$$r = \frac{-(2y + 1) + \sqrt{8y^2 + 17}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1: $y \in \mathbb{N}$'in $3-$gap Balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul

$$8y^2 + 17$$

ifadesinin tamkare olmasıdır.

Ayrıca, $5^2 = 8.1^2 + 17$ ve $7^2 = 8.2^2 + 17$ olduğundan 1 ve 2 sayılarıda tanıma uymamasına rağmen birer $3-$gap Balans sayısı olarak kabul edilirler.

O halde $3-$gap Balans sayılarına ulaşmak için $x^2 = 8y^2 + 17$ denkleminin sağlayan $y \in \mathbb{Z}^+$ değerlerini bulalım.

$$x^2 - 8y^2 = 17$$

genel Pell denklemi için çözüm aşamalarını yapalım. $x^2 - 8y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü, $u + v\sqrt{8} = 3 + \sqrt{8}$ olur. $x^2 - 8y^2 = 17$ denkleminin K sınıfının temel çözümü $x + y\sqrt{8}$ olsun. Teorem 2.3.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2(3+1)}}.\sqrt{17} < 2 \\ 0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(3+1).17} < 6 \end{aligned}$$

sınırlamalarına ulaşırız buradan $y \in [0, 2)$ ise $y = 0,\ 1$ değerleri için $8y^2 + 17$ nin tamkare olup olmadığına bakarsak $y = 1$ için $x = \pm 5$ olur. $x^2 - 8y^2 = 17$ denkleminin temel çözümleri $\pm 5 + \sqrt{8}$ olur. Buradan $x + y\sqrt{8} = 5 + \sqrt{8}$ ve $x + y\sqrt{8} = -5 + \sqrt{8}$ farklı sınıflardaki çözümler olurlar. Pozitiflik şartını sağlamak için $x + y\sqrt{8} = -5 + \sqrt{8}$ yerine $x + y\sqrt{8} = 7 + 2\sqrt{8}$ çözümünü alırsak farklı sınıflara ait çözümler Teorem 2.3.13 yardımıyla,

$$\begin{aligned} x_n + y_n\sqrt{8} &= \left(5 + \sqrt{8}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^n \\ x'_n + y'_n\sqrt{8} &= \left(7 + 2\sqrt{8}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^n \end{aligned}$$

şeklinde olurlar. Her bir sınıfa ait denklemi eşlenikler ile beraber düşünürsek,

$$x_n + y_n\sqrt{8} = \left(5+\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n$$

$$x_n - y_n\sqrt{8} = \left(5-\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n$$

buradan,

$$y_n = \frac{\left(5+\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(5-\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}}$$

ve de

$$x'_n + y'_n\sqrt{8} = \left(7+2\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n$$

$$x'_n - y'_n\sqrt{8} = \left(7-2\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n$$

buradan da

$$y'_n = \frac{\left(7+2\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(7-2\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}}$$

olur.

Teorem 4.3.1: Bütün $3-$gap Balans sayıları $n = 0, 1, \ldots$ için

$$\{5B_n + C_n, 5B_{n+1} - C_{n+1}\}$$

formundadır.

İspat.

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\left(5+\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(5-\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\ &= 5.\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} + \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^n + \left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2} \\ &= 5B_n + C_n \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
y_n' &= \frac{\left(7+2\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^n-\left(7-2\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
&= 5.\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{n+1}-\left(3-\sqrt{8}\right)^{n+1}}{2\sqrt{8}}-\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{n+1}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{n+1}}{2} \\
&= 5B_{n+1}-C_{n+1}
\end{aligned}
$$

4.4 4−Gap Balans Sayıları

Tanım 4.4.1: $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1+2+\cdots+(n-2)=(n+3)+(n+4)+\cdots+(n+r) \tag{4.10}$$

eşitliğini sağlayan n doğal sayısına karşılık gelen $2n+1$ sayısına $4-$gap Balans sayısı denir. Burada n ye karşılık gelen r'ye $4-$gap balansır denir.

Örnek 4.4.1: 23 sayısı balansırı 5 olan bir $4-$gap Balans sayısıdır.

Gerçekten $1+2+\cdots+15+16$ toplamından $10+11+12+13$ toplamı atıldığında,

$1+2+\cdots+9=14+15+16$ olduğundan 23 sayısı balansırı 5 olan bir $4-$gap Balans sayısıdır.

Şimdi (4.10) daki eşitlikte $y=2n+1$ alınır ve r çekilirse,

$$r=\frac{-y+\sqrt{2y^2+31}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.1: $y \in \mathbb{N}$'in $4-$gap Balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul

$$2y^2+31$$

ifadesinin tamkare olmasıdır.

Burada, $2.3^2+31=7^2$ ve $2.5^2+31=9^2$ olduğundan verilen tanıma uymasa da 3 ve 5 sayıları da birer $4-$gap Balans sayısı kabul edilirler.

O halde $4-$gap Balans sayılarına ulaşmak için $x^2=2y^2+31$ genel Pell denklemini tüm çözümlerini bulalım.

$$x^2-2y^2=31$$

genel Pell denklemi için $x^2-2y^2=1$ denkleminin temel çözümü $u+y\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ olur. $x^2-2y^2=31$ denklemi için temel çözüm $x+y\sqrt{2}$ olsun Teorem 2.3.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{2}{\sqrt{2\,(3+1)}}.\sqrt{31}<4 \\ 0 &< |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\,(3+1)\,.31}<8 \end{aligned}$$

sınırlamalarına ulaşılır ki $y\in[0,3)$, $x\in(0,8)$ bulunur. $y=0,1,2,3$ değerlerinden $2y^2+31$ ifadesini tamkare yapan değerler $y=3$ olurken $x=\pm7$ elde edilir.Buradan elde edilen dört çözüm $x+y\sqrt{2}=\pm7+3\sqrt{2}$ olur. Bu çözümlerden farklı sınıflarda olanlar $x+y\sqrt{2}=7+3\sqrt{2}$ ile $x+y\sqrt{2}=-7+3\sqrt{2}$ bulunur. $x+y\sqrt{2}=-7+3\sqrt{2}$ temel çözüm tanımına uyan aynı sınıfta $x+y\sqrt{2}=9+5\sqrt{2}$ elemanı alınır.
O halde, $x^2-2y^2=31$ denkleminin farklı sınıflara ait tüm çözümleri,

$$\begin{aligned} x_n+y_n\sqrt{2} &= \left(7+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n \\ x_n'+y_n'\sqrt{2} &= \left(9+5\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n \end{aligned}$$

şeklinde olurlar. Her bir çözüm sınıfını eşleniği ile beraber düşünülerek,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\left(7+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(7-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \\ y_n' &= \frac{\left(9+5\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(9-5\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.4.1: Bütün $4-$gap Balans sayıları $n = 0, 1, \ldots$ için

$$\{14B_n + 3C_n,\ 14B_{n+1} - 3C_{n+1}\}$$

formundadır.

İspat.

$$y_n = \frac{\left(7+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(7-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

$$y'_n = \frac{\left(9+5\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(9-5\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\left(7+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(7-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \\ &= 14.\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}} + 3.\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3+2\sqrt{2}\right)^n}{2} \\ &= 14B_n + C_n \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} y'_n &= \frac{\left(9+5\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(9-5\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \\ &= 14.\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}}{4\sqrt{2}} - 3.\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2} \\ &= 14B_{n+1} - 3C_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur.

4.5 $5-$Gap Balans Sayıları

Tanım 4.5.1: y, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + (y-3) = (y+3) + (y+4) + \cdots + (y+r)$$

eşitliğini sağlayan y'ye $5-$gap Balans sayısı denir. Burada y'ye karşılık gelen r ye $5-$gap balansır denir.

Örnek 4.5.1: 42 sayısı, balansırı 17 bir $5-$gap Balans sayısıdır. Gerçekten,

$$1 + 2 + \cdots + 59$$

toplamından $40 + 41 + 42 + 43 + 44$ toplamı atılırsa,

$$1 + 2 + \cdots + 39 = 45 + 46 + \cdots + 59$$

eşitliği gerçeklenir.

$$1 + 2 + \cdots + (y-3) = (y+3) + (y+4) + \cdots + (y+r)$$

eşitliğinden r çekilirse,

$$r = \frac{-(2y+1) + \sqrt{8y^2 + 49}}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.5.1: $y \in \mathbb{N}$ in $5-$gap Balans sayısı olması için gerek ve yeter şart

$$8y^2 + 49$$

ifadesinin tamkare olmasıdır.

Burada, $8.2^2 + 49 = 9^2$ ve $8.3^2 + 49 = 11^2$ olduğundan tanıma uymasa da 2 ve 3 sayıları da birer $5-$gap Balans sayısı kabul edilir.

O halde bütün Balans sayılarına ulaşmak için $x^2 = 8y^2 + 49$ şartına uyan y değerlerini bulalım.

$$x^2 - 8y^2 = 49$$

genel Pell denklemi için $x^2 - 8y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $u + v\sqrt{8} = 3 + \sqrt{8}$ olur. $x^2 - 8y^2 = 49$ denklemi için bir K sınıfına ait temel çözümü $x + y\sqrt{8}$ olsun. Teorem 2.3.12 yardımıyla

$$0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2(3+1)}}.\sqrt{49} < 3$$

$$0 < |x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(3+1).49} < 10$$

sınırlamalarından, $y \in [0,3)$ ve $x \in (0,10)$ elde edilir ki $y = 0,1,2$ değerinden $8y^2 + 49$ ifadesini tamkare yapan $y = 0,2$ değerlerine karşılık $x = \pm 7, \pm 9$ bulunur ki $x^2 - 8y^2 = 49$ denklemine ait dört temel çözüm $x + y\sqrt{8} = \pm 7 + 0\sqrt{8}$,$x + y\sqrt{8} = \pm 9 + 2\sqrt{8}$ olur. Bunlardan üç farklı sınıf temel çözüm $x + y\sqrt{8} = 7 + 0\sqrt{8}$, $x + y\sqrt{8} = \pm 9 + 2\sqrt{8}$ olur ki $x + y\sqrt{8} = -9 + 2\sqrt{8}$ çözümü ile aynı sınıfta olan temel çözümü $x + y\sqrt{8} = 11 + 3\sqrt{8}$ alınırsa $x^2 - 8y^2 = 49$ denkleminin üç farklı sınıfa ait tüm çözümler Teorem 2.3.13 yardımıyla,

$$x_n + y_n\sqrt{8} = \left(7 + 0\sqrt{8}\right)\left(3 + 2\sqrt{8}\right)^n$$

$$x'_n + y'_n\sqrt{8} = \left(9 + 2\sqrt{8}\right)\left(3 + 2\sqrt{8}\right)^n$$

$$x''_n + y''_n\sqrt{8} = \left(11 + 3\sqrt{8}\right)\left(3 + 2\sqrt{8}\right)^n$$

şeklinde bulunur. Buradan, y, y', y'' değerleri,

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{\left(7+0\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(7-0\sqrt{8}\right)\left(32\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
y'_n &= \frac{\left(9+2\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(9-2\sqrt{8}\right)\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
y''_n &= \frac{\left(11+3\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(11-3\sqrt{8}\right)\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.5.1: Bütün 5−gap Balans sayıları $n = 0, 1, \ldots$ için

$$\{9B_n + 2C_n,\ 9B_{n+1} - 2C_{n+1},\ 7B_{n+1}\}$$

formundadır.

İspat.

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{\left(7+0\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(7-0\sqrt{8}\right)\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
&= 7.\frac{\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
&= 7B_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'_n &= \frac{\left(9+2\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(9-2\sqrt{8}\right)\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
&= 9.\frac{\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}}+2.\frac{\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2} \\
&= 9B_n+2C_n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_n'' &= \frac{\left(11+3\sqrt{8}\right)\left(3+2\sqrt{8}\right)^n-\left(11-3\sqrt{8}\right)\left(3-2\sqrt{8}\right)^n}{2\sqrt{8}} \\
&= 9.\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{n+1}-\left(3-\sqrt{8}\right)^{n+1}}{2\sqrt{8}}-2.\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{n+1}-\left(3-\sqrt{8}\right)^{n+1}}{2} \\
&= 9B_{n+1}-2C_{n+1}
\end{aligned}
$$

bulunur.

5 SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için var olan indirgeme bağıntıları, Binet Formülleri ,Üreteç fonksiyonları incelenmiştir.. Balans, Kobalans sayı dizisi tanımlamaları verilerek tanımlara bağlı olarak da Lucas Balans ve Lucas Kobalans sayı dizileri ve özellikleri incelenmiştir. Balans ve Kobalans sayı dizilerinin var olma şartlarının Pell denklemleri ile olan ilişkisinden yola çıkılarak Genel Pell denklemlerinin çözüm aşamalarıyla Balans ve Kobalans sayı dizileri için indirgeme bağıntılarıyla Binet formulleri çalışılmıştır. Ayrıca $k-$gap Balans sayı tanımları verilerek $k = 2, 3, 4, 5$ için özel durum incelemesi yapıldı. $k-$gap Balans sayılarının $k = 2, 3, 4, 5$ durumları için Binet formülleri oluşturuldu bundan yola çıkılarak Lucas-Balans ve Lucas-Kobalans sayıları ile olan ilişkileri elde edildi.

Öneri olarak, çalışmamızda $k = 2, 3, 4, 5$ özel durumları için ortaya konan ilişkilerin $k-$gap Balans sayıları için daha genel bir incelemesi yapılarak $k-$gap Balans sayılarının indirgeme bağıntıları, Binet formulleri, Üreteç fonksiyonları elde edilebilir. Ayrıca $k-$gap Balans sayılarının Lucas-Balans ve Lucas-Kobalans sayıları ile olan ilişkileri ortaya çıkarılabilir. Böylelikle $k-$gap Balans sayılarıyla ilgili yeni çalışma alanları açılarak matematikteki diğer sayı dizileriyle olan ilişkileri keşfedilebilir.

6. KAYNAKLAR

A.Behera and G. K. Panda., “On the square root of triangular numbers”, *The Fibonacci Quart*, 37(2):98-105, (1999).

BARBEAU, E. J., “Pell’s Equation”, Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2003).

G.K. Panda., “Sequence balancing and cobalancing numbers”, *The Fibonacci Quart*, (p265-271) , (2007).

G.K Panda., “Some fascinating properties of balancing numbers”, Applications of Fibonacci Numbers” Vol.10, Kluwer Academic Pub. (2006)

Koshy, T. "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", A Wiley-Interscience Publication, (2001).

Michel, W., Pell’s equation”, (01.06.2017), https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/BamakoPell2010.pdf , (2016).

MOLLIN, R. A., Fundamental Number Theory with Applications, CRC Press, Boca Raton, New York-London-Tokyo (1998).

NAGELL, T., “Introduction to Number Theory”, Chelsea Publishing Company, New York, (1981).

PEKASİL, M., “Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri”, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı* Yüksek Lisans Tezi, Sakarya (2006).

Rout, S. S., “Some Generalizations and Properties of Balancing Numbers”, Ph.D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, Rourkela, India (2015).

Ray P. K., “Balancing and Cobalancing Numbers”, Ph. D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, Rourkela, India (2009).

Robertson J.P.,“Solving Generalized Pell Equations $x^2 - dy^2 = N$ ”, (01.06.2017), http://www.jpr2718.org/pell.pdf, (2004).

ROSEN, H. K., “Elementary Number Theory And Its Application, 3d Edition”, Addison –Wesley, (1993).

STARK, H., M., “An Introduction To Number Theory”, Markham Pub. Co., Chicago, (1997).

V.E Hoggatt Jr., “Fibonacci and Lucas Numbers”, Houghton Mifflin Company, (1969).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	DENİZ KARADAĞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	IĞDIR - 14/03/1980
Lisans Üniversite	:	MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	:	karadagdeniz@gmail.com
İletişim Adresi	:	Hasan Tekin Ada Anadolu Lisesi Yunusemre Mh., 6461 Sk. No2/A, 20070 Denizli, Türkiye