T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK NÖRLUND UZAYI VE MATRİS OPERATÖRLERİ

DOKTORA TEZİ

GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ

DENİZLİ, EKİM-2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK NÖRLUND UZAYI VE MATRİS OPERATÖRLERİ

DOKTORA TEZİ

GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ

DENİZLİ, EKİM-2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ tarafından hazırlanan " **MUTLAK NÖRLUND UZAYI VE MATRİS OPERATÖRLERİ** " adlı tez çalışmasının savunma sınavı 06.10.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL	....
Üye Prof. Dr. İbrahim ÇANAK Ege Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. İsmail YASLAN Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Şebnem YILDIZ Ahi Evran Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/10/2017 tarih ve 42/11-b... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 2014FBE061 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Can

GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ

ÖZET

MUTLAK NÖRLUND UZAYI VE MATRİS OPERATÖRLERİ
DOKTORA TEZİ
GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, EKİM-2017

Bu çalışma giriş bölümüyle birlikte beş ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremlerin ifadeleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde Sarıgöl'ün (2010) tanımından özel durumda Nörlund matrisiyle elde edilen $|N, p_n, \theta_n|_k$ mutlak Nörlund toplanabilme metodu ile toplanabilen serilerin $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı tanımlanarak bu uzayın bazı topolojik yapısı, kapsama ilişkileri incelenmiş ve $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dualleri ile Schauder bazı belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı ile ilgili matris operatörleri karakterize edilerek bu operatörlerin normları ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri belirlenmiş ve aynı zamanda Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü kullanılarak bu operatörlerin kompakt olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Böylece bilinen bazı önemli sonuçlar genelleştirilmiştir.

Beşinci bölümde ise Cesàro ortalamasının içermediği ve Thorpe (1986) tarafından ayrıca tanımlanan $(C, -1)$ ortalaması göz önüne alınarak $|C_{-1}|_k$ uzayı tanımlanmış ve topolojik yapısı incelendikten sonra bu uzayla ilgili matris operatörleri karakterize edilmiştir. Böylece aynı zamanda Sarıgöl'ün (2016) bazı sonuçları da $\alpha \geq -1$ aralığına genişletilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Mutlak Nörlund Toplanabilme Metodu, Mutlak Cesàro Toplanabilme Metodu, Matris Operatörleri, BK-Uzayı, Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü, Kompakt Operatörler.

ABSTRACT

ABSOLUTE NÖRLUND SPACES AND MATRIX OPERATORS
PH.D THESIS
GÜLLÜ CANAN HAZAR GÜLEÇ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. MEHMET ALİ SARIGÖL)

DENİZLİ, OCTOBER 2017

This study consists of five main chapters with the introduction part.

In chapter 2, the basic definitions and theorems used in the following sections are given.

In chapter 3, by defining the space $\left|N_p^\theta\right|_k$ as the set of all series summable by the absolute Nörlund summability method $|N, p_n, \theta_n|_k$ obtained by the definition of Sarıgöl (2010) with the special case of the Nörlund matrix, its some topological structures and inclusion relations are studied and also $\alpha-, \beta-, \gamma-$ duals and the Schauder base are determined.

In chapter 4, by characterizing some matrix operators defined on the space $\left|N_p^\theta\right|_k$, their norms and Hausdorff measure of noncompactness are determined. Also, by applying the Hausdorff measure of noncompactness, the necessary and sufficient conditions for such operators to be compact are given. Therefore some known important results are generalized.

In chapter 5, taking into account the mean (C,-1), not included by the general Cesàro mean and introduced by Thorpe (1986) separately, the space $|C_{-1}|_k$ is defined and after investigating topological structure, $\alpha-, \beta-, \gamma-$ duals and the Schauder base are obtained, and matrix operators related to this space are charaterized. Thus, also, some results of Sarıgöl (2016) are extended to the range $\alpha \geq -1$.

KEYWORDS: Absolute Nörlund Summability, Absolute Cesàro Summability, Matrix Operators, BK-Spaces, Measure of Hausdorff Noncompactness, Compact Operators**.**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

₵	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
ω	:	Kompleks değerli bütün dizilerin uzayı
$\boldsymbol{c}$	:	Kompleks değerli yakınsak dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\ell_k}$	:	k-mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\boldsymbol{\ell_\infty}$	:	Kompleks değerli sınırlı dizilerin uzayı
$\boldsymbol{bv}$	:	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$	:	X den Y ye olan matrislerin sınıfı
$(\boldsymbol{s_n})$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$\boldsymbol{B_X}$	:	X uzayının birim küresi
$\boldsymbol{S_X}$	:	X uzayının kapalı birim yuvarı
$\boldsymbol{X^\alpha}$	:	X dizi uzayının α duali
$\boldsymbol{X^\beta}$	:	X dizi uzayının β duali
$\boldsymbol{X^\gamma}$	:	X dizi uzayının γ duali
$\boldsymbol{X_A}$	:	X dizi uzayında A matrisinin toplama alanı

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, hiçbir zaman emeğini anlayışını ve zamanını esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e ve Fen–Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim. Ayrıca her zaman bana güvenmiş destek olmuş aileme, eşime ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

1821 yılında Augustin Louis Cauchy (1789-1857) yayınladığı "Analyse algebrique" adlı çalışmasında bir sıfır dizisinin aritmetik ortalamasının yine bir sıfır dizisi, keza yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu ispatlamak suretiyle toplanabilme teorisinin temelini atan ilk matematikçilerden biri olmuştur. Ancak, ondan çok daha önce Euler ve çağdaşları ve hatta ondan da önce Leibnitz ve Newton gibi tanınmış matematikçiler dizi ve serilerle ilgilenmişler ve özellikle serileri yapılan hesapların doğal bir sonucu olarak görmüşlerdir. Bu görüşün sonucu olarak, James Bernoulli 1696 yılında

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

bağıntısını kullanmış ve Euler ise hiç bir şeyden kuşkulanmadan bu eşitlikte $x = -1$ koyarak Euler paradoksal eşitliği adı verilen

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

eşitliğini elde etmiş ve bu bağıntıyı birçok yerde kullanmıştır.

Yakınsaklık kavramının ortaya atılmasından çok önce ve sezgisel olarak bulunan bu sonuçlar Cauchy'nin yukarıda belirtilen teoremlerinden sonra bir anlam kazanmış ve toplanabilme teorisinin temelini oluşturmuştur. Çünkü,

$$x_n = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$$

dizisi yakınsak olmadığı halde bunun aritmetik ortalamasının $1/2$ ye yakınsadığı ve bu sonucun Euler tarafından verilen sonuç ile aynı olduğu görülmüş ve böylece yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkmıştır.

Bu konuda ilk olarak 1882 de O. Hölder (1859-1937) tarafından aşağıdaki yakınsaklık tanımı verilmiştir: Herhangi bir (x_n) dizisi için

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} x_v,\ h_n^{(2)} = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} h_v^{(1)}, ..., h_n^{(p)} = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} h_v^{(p-1)}, p \geq 2$$

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} h_n^{(p)} = s$ ise (x_n) dizisine s ye H_p limitlenebilir veya toplanabilirdir denilerek $x_n \to s\,(H_p)$ ile gösterilmiştir. Daha sonra Cesàro, Euler, Abel, Borel, Le Roy, Riesz,... toplanabilme metotları ifade edilerek yakınsaklık kavramı genelleştirilmiştir. Bunun yanısıra dizilerin yerine serilerin kısmi toplamlar dizisi alınarak bu metotlarla serilerin toplamları hesaplanmış ve böylece toplanabilme teorisi önemli gelişme kaydetmiştir.

Günümüze kadar yakınsaklık kavramı bu özel metotlar ve matris metotları başta olmak üzere farklı yöntemlerle genelleştirilmiştir. Bu bağlamda ilk genelleştirme çalışmalarından biri Voroni'nin, Rus doğabilimci ve fencilerin 1902 deki 11. kongresinde sunduğu bildiri (St. Petersburg (s. 60-1)) ve Nörlund'un 1920 de Acta Univ. lund (2) 16, 3 nolu makalesinde ifade ettiği (N, p_n) Nörlund ortalaması ile tanımlanan toplanabilme metotudur.

Ayrıca 1937'de F.M. Mears, Ann. Math. 38, 3 nolu makalesinde Nörlund ortalamasını kullanarak farklı bir yöntemle $|N, p_n|$ mutlak Nörlund toplanabilme metodunu ifade etmiş ve bu metot D. Borwein and F. P. Cass tarafından 1968 yılında Math. Zeitschr.103 nolu makalesinde indisel olarak $|N, p_n|_k$ metoduna genişletilmiş ve böylece aynı zamanda k. dereceden mutlak yakınsak seriler uzayı da genelleştirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremlerin ifadeleri verilmiştir. Ayrıca bu çalışma boyunca K reel veya kompleks sayıların cismini gösterecektir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay) U boş olmayan bir küme ve K reel ve kompleks sayıların bir cismi olsun. Eğer

$$+ : U \times U \to U; \ \ (x, y) \longrightarrow x + y \ , \cdot : K \times U \to U; \ \ (a, x) \longrightarrow a.x$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri her $a, b \in K$ ve her $x, y, z \in U$ için,

$(L1)$ $x + y = y + x$
$(L2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$
$(L3)$ $x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in U$ vardır.
$(L4)$ $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in U$ vardır.
$(L5)$ $1.x = x$
$(L6)$ $a (x + y) = ax + ay$
$(L7)$ $(a + b) x = ax + bx$
$(L8)$ $a (bx) = (ab) x$

özelliklerini sağlıyorsa bu taktirde U kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay denir. Eğer $K = \mathbb{R}$ ise U ya reel lineer uzay ve $K = \mathbb{C}$ ise U ya kompleks lineer uzay adı verilir.

Aynı zamanda U nun boş olmayan herhangi bir V alt kümesi verildiğinde, eğer her $a, b \in K$ ve $x, y \in V$ için $ax + by \in V$ ise V ye U nun lineer altuzayı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.2 (Metrik Uzay) U boştan farklı bir küme ve $d : U \times U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x, y, z \in U$ için

$(M1)$ $d (x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$(M2)$ $d (x, y) = d (y, x)$
$(M3)$ $d (x, y) \leq d (x, z) + d (z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye bir metrik (uzaklık) fonksiyonu ve (U, d) ikilisine de bir metrik uzay adı verilir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.3 (Normlu Uzay) U bir kompleks lineer uzay ve $\|\cdot\| : U \to \mathbb{C}$; $\quad x \to \|x\|$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $x, y \in U$ ve $a \in \mathbb{C}$ için

$(N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
$(N2)$ $\|ax\| = |a| \|x\|$
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlanıyorsa bu durumda $\|\cdot\|$ ya U üzerinde bir norm ve $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay adı verilir (Maddox 1970).

Normlu uzay $d(x, y) = \|x - y\|$ ile aynı zamanda bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.4 (Cauchy Dizisi) $(U, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n), U da bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) e U da bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.5 (Normlu Uzayda Yakınsak Dizi) $(U, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n), U da bir dizi ve $x \in U$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ olduğunda

$$\|x_n - x\| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) e, x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ veya $\lim_n x_n = x$ biçiminde gösterilir (Kreyszig 1978).

Normlu uzayda yakınsak her dizi aynı zamanda bir Cauchy dizisidir, fakat bunun tersi her zaman doğru değildir (Kreyszig 1978).

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu normlu uzaya ise Banach uzayı (tam uzay) adı verilir (Kreyszig 1978).

Sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olan uzaya ayrılabilir uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.6 (Lineer Operatör) U ve V kompleks lineer uzaylar olsun. Eğer $T : U \to V$ dönüşümü, her $x, y \in U$ ve $a, b \in K$ için

$$T\left(ax + by\right) = aT\left(x\right) + bT\left(y\right)$$

şartını sağlıyorsa T ye lineer operatör veya lineer dönüşüm denir (Maddox 1970).

$V = \mathbb{C}$ olması durumunda ise T ye lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Sınırlı Lineer Operatör) U ve V normlu uzaylar ve $T : U \to V$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in U$ için

$$\|Tx\| \leq M\,\|x\|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunabiliyorsa T ye sınırlıdır denir ve T nin normu

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq \theta, x \in U\right\}$$

ile tanımlanır (Kreyszig 1978).

Burada her $x \in U$ $(x \neq \theta)$ için $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M$ olduğundan sınırlı lineer dönüşümün normu mevcuttur ve her $x \in U$ için $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$ dir. Aynı zamanda bu norm

(1) $\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| : \|x\| < 1\right\}$
(2) $\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| : \|x\| = 1\right\}$
(3) $\|T\| = \inf\left\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\,\|x\|\right\}$

normlarına denktir (Kreyszig 1978).

Sınırlı lineer dönüşümlerin $B\left(U, V\right)$ kümesi yukarıdaki normlara göre normlu lineer uzaydır ve $V = U$ olması durumunda bu uzay $B\left(U\right)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.8 (Banach Steinhause Teoremi) $\left(A_n\right)$, U Banach uzayından V normlu uzayı içine sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi olsun. Eğer her bir

$x \in U$ için

$$\sup_n \|A_n(x)\| = c_x < \infty$$

ise bu taktirde

$$\sup_n \|A_n\| < \infty$$

dur. Yani $(\|A_n\|)$ norm dizisi sınırlıdır (Wilansky 1964).

Teorem 2.1.9 U ve V normlu uzaylar ve $T : U \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde T dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig 1978).

Eğer U ile V arasında normu koruyan birebir-örten lineer bir dönüşüm varsa bu uzaylara izomorfik uzaylar adı verilir ve $U \cong V$ ile gösterilir (Mursaleen 2011).

Bu çalışma boyunca k^*, $k > 1$ olmak üzere k nın eşleniğini gösterecektir yani $1/k + 1/k^* = 1$ olacaktır.

Teorem 2.1.10 (Hölder Eşitsizliği) $1 < k < \infty$ ve $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0, y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^k\right)^{1/k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{k^*}\right)^{1/k^*}$$

dır (Kreyszig 1978).

Teorem 2.1.11 (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq k < \infty$, $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, $y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu + y_\nu)^k\right)^{1/k} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^k\right)^{1/k} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^k\right)^{1/k}$$

dır (Kreyszig 1978).

2.2. Dizi Uzayları

w kompleks veya reel terimli dizilerin kümesini göstermek üzere toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır ve w nın herhangi bir alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir (Boss ve Peter 2000). Aynı zamanda aşağıdaki uzaylar w nın temel alt uzayları olup doğal normlarına göre Banach uzayıdır:

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_v) \in w : \sup_v |x_v| < \infty\right\}$$

$$c=\left\{x=(x_v)\in w:\lim_{v} x_v=s,\ s\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\ell_k=\left\{x=(x_v)\in w:\sum_{v=0}^{\infty}|x_v|^k<\infty,k\geq 1\right\}$$

$$bv=\left\{x=(x_v)\in w:\sum_{v=0}^{\infty}|x_v-x_{v-1}|<\infty,x_{-1}=0\right\}$$

$$b_s=\left\{x=(x_v)\in w:\left(\sum_{v=0}^{n}x_v\right)\in\ell_\infty\right\}$$

$$c_s=\left\{x=(x_v)\in w:\left(\sum_{v=0}^{n}x_v\right)\in c\right\}.$$

Örneğin, ℓ_k uzayının doğal normu

$$\|x\|=\left(\sum_{v=0}^{\infty}|x_v|^k\right)^{1/k},\ k\geq 1$$

dir.

Tanım 2.2.1 (FK-uzayı) U bir dizi uzayı olmak üzere tam lineer metrik uzay olsun. Eğer her $n\geq 0$ için $p_n:U\to\mathbb{C};\ \ p_n(x)=x_n$ koordinat fonksiyoneli sürekli ise U ya FK-uzayı denir (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Normlu FK-uzayına ise BK-uzayı adı verilir (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Tanım 2.2.2 (Matris Dönüşümü) U ve V, w nın iki alt uzayı ve $A=(a_{nj})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. $x=(x_j)\in U$ verilsin. Eğer her $n\geq 0$ için

$$A_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}x_j,$$

eşitliğinin sağındaki seri yakınsak ise $A(x)=(A_n(x))$ e, $x=(x_j)$ dizisinin A-dönüşüm dizisi adı verilir. Ayrıca her $x\in U$ için $Ax=(A_n(x))\in V$ ise bu durumda A, U dan V ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A\in(U,V)$ veya $A:U\to V$ ile gösterilir (Maddox 1970).

Aynı zamanda matris dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Teorem 2.2.3 FK uzayları arasında tanımlı herhangi bir matris dönüşümü süreklidir (Wilansky 1984).

Tanım 2.2.4 Her $v,n\geq 0$ için $A=(a_{nv})$ bir sonsuz matris olsun. Eğer $v>n$ için $a_{nv}=0$ ve $a_{nn}\neq 0$ ise A ya üçgensel matris denir (Malkowsky ve Rakočević 2007).

Tanım 2.2.5 U, w nın bir alt kümesi olsun.

$$U^{\alpha}=\{\varepsilon\in w:\forall x\in U \text{ için } (\varepsilon_v x_v)\in\ell\ \},$$

$$U^{\beta}=\{\varepsilon\in w:\forall x\in U \text{ için } (\varepsilon_v x_v)\in c_s\ \},$$

$$U^{\gamma}=\{\varepsilon\in w:\forall x\in U \text{ için } (\varepsilon_v x_v)\in b_s\}$$

ve

$$U_A=\{x\in w:A(x)\in U\} \tag{2.2.1}$$

kümelerine sırasıyla U uzayının α-, β-, γ- dualleri ve U da A matrisinin toplama alanı denir (Başar 2011).

Tanım 2.2.6 (Schauder Bazı) U normlu bir dizi uzayı olsun ve $(b^{(n)})$ dizisi verilsin. Eğer her $x\in U$ için

$$\lim_{m\to\infty}\left\|x-\sum_{n=0}^{m}\alpha_n b^{(n)}\right\|=0$$

olacak şekilde bir tek (α_n) skaler dizisi mevcut ise $(b^{(n)})$ dizisine U uzayının bir Schauder bazı denir ve bu durumda $x=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n b^{(n)}$ yazılır (Kreyszig 1978).

Örneğin, $e^{(n)}$ her bir n için n.terimi 1 ve diğer bütün terimleri sıfır olan bir dizi olmak üzere $\left(e^{(n)}\right)$ dizisi doğal normuna göre ℓ_k uzayının bir Schauder bazıdır.

2.3 Toplanabilme Metotları

Bu kısımda toplanabilme metotları önemli bir yer tutacaktır ve bu tanımlarda söz konusu olan Σa_v reel veya kompleks terimli sonsuz seriyi ve (s_n) ise bu serinin kısmi toplamlar dizisini gösterecektir.

Tanım 2.3.1 (Cesàro Toplanabilme Metodu) $\alpha>-1$ ve $n\geq 1$ için

$$A_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} \text{ ve } A_0^{\alpha}=1$$

olmak üzere (s_n) ve (na_n) dizilerinin α. mertebeden ve n. (C,α) Cesàro ortalamalarını sırasıyla σ_n^{α} ve τ_n^{α} ile gösterelim, yani

$$\sigma_n^{\alpha}=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}s_{\nu} \tag{2.3.1}$$

ve

$$\tau_n^{\alpha}=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{v=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}\nu a_{\nu} \tag{2.3.2}$$

olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha = s$ ise Σa_n serisi s değerine (C,α) toplanabilirdir denir (Hardy 1949). Burada (2.3.1) dönüşümüne karşılık gelen matris

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}, 0 \le \nu \le n \\ 0, \quad \nu > n \end{cases} \tag{2.3.3}$$

dir. Bu matrise aynı zamanda α-nıncı mertebeden Cesàro matrisi denir. Özel olarak $\alpha = 1$ için $(C,1)$ Cesàro ortalaması elde edilir yani (s_n) ve (na_n) dizilerinin $(C,1)$ Cesàro ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_n^1 = \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_\nu \tag{2.3.4}$$

ve

$$\tau_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} \nu a_\nu$$

ile verilir. Ayrıca (2.3.4) dönüşümüne karşılık gelen matris

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, 0 \le \nu \le n \\ 0, \quad \nu > n \end{cases}$$

dir.

Mutlak Cesàro toplanabilme metodu ilk olarak Fekete (1911) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.2 $\alpha > -1$ ve (σ_n^α) dizisi (2.3.1) ile verilmiş olsun. Eğer (σ_n^α) sınırlı salınımlı bir dizi yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha\right| < \infty, \ \sigma_{-1}^\alpha = 0$$

ise Σa_n serisine $|C,\alpha|$ toplanabilirdir denir. Özel olarak, bu metot $\alpha = 1$ için $|C,1|$ toplanabilme metoduna indirgenir.

Fekete (1911) nin tanımı Flett (1957) tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Tanım 2.3.3 $1 \le k < \infty, \alpha > -1$ ve her $n \ge 0$ için σ_n^α, (2.3.1) ile verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}\left|\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha\right|^k < \infty, \sigma_{-1}^\alpha = 0 \tag{2.3.5}$$

ise Σa_n serisine $|C,\alpha|_k$ toplanabilirdir denir. Bu metot özel olarak $k = 1$ için $|C,\alpha|$ toplanabilme metoduna ve $\alpha = 1$ için $|C,1|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir (Flett 1957).

Diğer taraftan Kogbetliantz (1925) ın $\tau_n^\alpha = n\left(\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha\right)$ eşitliği göz önüne alınırsa (2.3.5) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\tau_n^\alpha|^k < \infty$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Son zamanlarda farklı bir yaklaşımla Sarıgöl (2016), $\alpha > -1$ için Flett'in metodu ile toplanabilen serilerin $|C_\alpha|_k$ uzayını tanımlayarak

$$|C_\alpha|_k = \left\{ a = (a_v) : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1/k} A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} v A_{n-v}^{\alpha-1} a_v \right|^k < \infty \right\},$$

eşitliğini elde etmiş ve bu uzayın topolojik yapısı ile matris operatörlerini incelemiştir. Böylece yeni bir çalışma alanı da yaratılmıştır.

Benzer olarak herhangi bir A matrisinin k. dereceden mutlak konservatifliği ise Das (1970) tarafından

$$\mathcal{A}_k = \left\{ s = (s_v) : \sum_{v=1}^{\infty} v^{k-1} |s_v - s_{v-1}|^k < \infty \right\}$$

olmak üzere $A \in B(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k)$, $k \geq 1$, olarak tanımlanmıştır. Burada dikkat edilmelidir ki A üçgensel bir matris ise $\mathcal{A}_k$ ile $\alpha = 0$ için elde edilen $|C_0|_k$ arasında yakın bir ilişki vardır. Gerçekten

$$a \in |C_0|_k \Leftrightarrow s \in \mathcal{A}_k$$

dir ve dolayısıyla

$$\hat{a}_{nv} = \begin{cases} \sum_{r=v}^{n} (a_{nr} - a_{n-1,r}), & 0 \leq v \leq n \\ 0, & v > n \end{cases} \tag{2.3.6}$$

olmak üzere

$$A \in (\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_k) \iff \hat{A} \in (|C_0|_k, |C_0|_k)$$

yazılabilir.

Tanım 2.3.4 (Nörlund Toplanabilme Metodu) (p_n) reel veya kompleks sayıların bir dizisi ve $P_n = p_0 + p_1 + ... + p_n \neq 0\,(n \geq 0)$; $P_{-n} = p_{-n} = 0$ olsun. Bu durumda

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}s_\nu = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} P_{n-\nu}a_\nu \tag{2.3.7}$$

eşitliği ile tanımlı (t_n) dizisine (s_n) dizisinin Nörlund ortalaması denir ve (N, p_n) ile gösterilir. Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise Σa_n serisi s değerine (N, p_n) toplanabilirdir denir (Hardy 1949).

Ayrıca (2.3.7) dönüşümüne karşılık gelen matris

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_{n-\nu}}{P_n}, 0 \leq \nu \leq n \\ 0, \quad \nu > n \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.3.5 $1 \leq k < \infty$ ve (t_n) dönüşüm dizisi (2.3.7) ile verilmiş olsun. Eğer,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty, t_{-1} = 0$$

ise bu taktirde Σa_n serisine $|N, p_n|_k$ toplanabilirdir denir (Borwein ve Cass 1968).

Bu metot $k = 1$ için Mears (1937) tarafından verilen $|N, p_n|$ toplanabilme metoduna, $\alpha > -1$ ve $p_n = A_n^{\alpha-1}$ için $|C, \alpha|_k$ metoduna indirgenir.

Tanım 2.3.5, Umar ve Khan (1977) tarafından da n çarpanı yerine P_n/p_n terimi alınarak tekrar ifade edilmiştir. Bu tanımın da Mears'ın tanımını kapsadığı aşikardır.

Tanım 2.3.6 (Riesz Toplanabilme Metodu) (p_n) terimleri negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $n \to \infty$ için $P_n = p_0 + p_1 + ... + p_n \to \infty$ olsun. Bu durumda

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \tag{2.3.8}$$

eşitliği ile tanımlı (T_n) dizisine (s_n) nin (R, p_n) Riesz ortalaması veya $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ağırlıklı ortalaması denir. Eğer $\lim_{n\to\infty} T_n = s$ ise Σa_n serisi s değerine (R, p_n) veya $\left(\overline{N}, p_n\right)$ toplanabilirdir denir (Hardy 1949).

Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_\nu}{P_n}, 0 \leq \nu \leq n \\ 0, \quad \nu > n \end{cases}$$

dir.

Son zamanlarda özel matrisler yerine genel matrisler, n veya P_n/p_n çarpanı yerine keyfi bir çarpan alınarak bu metotlar Sarıgöl (2010) tarafından aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

Tanım 2.3.7 Σa_v, kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan sonsuz bir seri ve (θ_n) negatif olmayan terimlerin bir dizisi olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left|A_n(s) - A_{n-1}(s)\right|^k < \infty, \tag{2.3.9}$$

ise Σa_v serisine $|A, \theta_n|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 2010).

Eğer özel olarak A ağırlıklı ortalama matrisi alınırsa $|A, \theta_n|_k = \left|\overline{N}, p_n, \theta_n\right|_k$ Sulaiman (1992), $|A, P_n/p_n|_k = \left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Bor (1985), $|A, n|_k = |R, p_n|_k$ Sarıgöl (1992) ve Nörlund ortalama matrisi alınırsa $|A, n|_k = |N, p_n|_k$ Borwein ve Cass (1968) olur.

Bu arada $\left|\overline{N}, p_n, \theta_n\right|_k$ metodu ile toplanabilen serilerin $\left|\overline{N}_p^{\theta}\right|_k$ uzayı tanımlanarak bu uzay üzerindeki bazı matris sınıfları karakterize edilmiştir (Sarıgöl 2011).

Tanım 2.3.8 A, B toplanabilme metodu ve $\epsilon = (\epsilon_v)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer Σa_v serisi A toplanabilir olduğunda $\Sigma \epsilon_v a_v$ serisi B toplanabilir ise ϵ dizisine toplanabilme çarpanı denir ve $\epsilon \in (A, B)$ ile gösterilir (Sarıgöl ve Bor 1995).

Mutlak toplanabilme çarpanları ve bu metotların karşılaştırılması günümüze kadar Mehdi (1960) Mazhar (1971) Sarıgöl (1992,1993,2015) ve Sarıgöl ve Bor (1995) gibi bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Dikkat edelimelidir ki bu araştırma konusu I birim matrisi ve

$$w_{nv} = \begin{cases} \varepsilon_v, v = n \\ 0, v \neq n \end{cases} \tag{2.3.10}$$

ile tanımlı $W = (w_{nv})$ köşegen matrisi gibi özel matris dönüşümlerine karşılık gelmektedir.

Şimdi bu çalışmada önemli rol oynayacak olan lemmaları verelim.

Lemma 2.3.9 $1 < k < \infty$ ve N pozitif tam sayıların herhangi sonlu bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $A \in (\ell_k, \ell)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_{(\ell_k,\ell)} = \sup_N \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} a_{nv} \right|^{k^*} \right\}^{1/k^*} < \infty$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz 1977).

Aşağıdaki lemma, Lemma 2.3.9 daki norma eşdeğer normu verip uygulama açısından daha kullanışlıdır.

Lemma 2.3.10 $1 < k < \infty$ olsun. Bu taktirde, $A \in (\ell_k, \ell)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\|A\|'_{(\ell_k,\ell)} = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}| \right)^{k^*} \right\}^{1/k^*} < \infty$$

olmasıdır. Ayrıca $\|A\|'_{(\ell_k,\ell)} = \xi \|A\|_{(\ell_k,\ell)}$ olacak şekilde $\xi \in [1,4]$ vardır (Sarıgöl 2015).

Bu lemmanın ikinci kısmından $\|A\|_{(\ell_k,\ell)} \leq \|A\|'_{(\ell_k,\ell)} \leq 4 \|A\|_{(\ell_k,\ell)}$ olduğu açıktır.

Lemma 2.3.11 $1 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda, $A \in (\ell, \ell_k)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\|A\|_{(\ell,\ell_k)} = \sup_v \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nv}|^k \right\}^{1/k} < \infty$$

olmasıdır (Maddox 1970).

Lemma 2.3.12

a-) $A \in (\ell, c) \Leftrightarrow (i)$ $v \geq 0$ için $\lim_n a_{nv}$ mevcut, (ii) $\sup_{n,v} |a_{nv}| < \infty$.

b-) $A \in (\ell, \ell_\infty) \Leftrightarrow (ii)$ sağlanır.

c-) $1 < k < \infty$ için

$$A \in (\ell_k, \ell_\infty) \Leftrightarrow (iii) \sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|^{k^*} < \infty.$$

d-) $A \in (\ell_k, c) \Leftrightarrow (i)$ *ve* (iii) sağlanır (Stieglitz ve Tietz 1977).

Teorem 2.3.13 (q_n), $q_0 > 0$ olan negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisi ve $D = (d_{nv})$ üçgensel matris olsun. Eğer

$$(a) \ \sup_r \sum_{v=r}^{\infty} \left| \frac{d_{vr} Q_{v-r}}{P_v} \right| < \infty$$

$$(b)\ \sup_v \left|\frac{P_v}{Q_v}\varepsilon_v\right| < \infty$$

$$(c)\ \sup_r \left|\sum_{v=r}^{\infty} d_{vr}\varepsilon_k\right| < \infty$$

bu taktirde

$$\Omega_{nv}^q = \begin{cases} \frac{Q_{n-v}}{Q_n} - \frac{Q_{n-v-1}}{Q_{n-1}}, & 0 \leq v \leq n, \\ 0, & v > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sup_r \sum_{n=r}^{\infty} \left|\sum_{v=r}^{n} \Omega_{nv}^q \varepsilon_v d_{vr}\right| < \infty$$

dur (Bosanquet ve Das 1979).

2.4 Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü

Bu kısımda Hausdorff Kompaktsızlık ölçüsü ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1 S ve H bir (X,d) metrik uzayının alt kümeleri ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer her $h \in H$ için $d(h,s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ varsa, S ye H nin ε-neti denir. Eğer S sonlu ise, bu durumda H nin S ε-netine H nin sonlu bir ε-*net*i denir (Mursaleen ve diğ. 2011).

Tanım 2.4.2 H bir (X,d) metrik uzayının alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. H kümesinin her ε için sonlu bir ε neti varsa bu H kümesine total sınırlıdır denir (Mursaleen ve diğ. 2011).

Total sınırlı her küme sınırlıdır. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Tanım 2.4.3 (Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü) μ_X, (X,d) metrik uzayında X in boştan farklı bütün sınırlı alt kümelerinin sınıfı olsun. Eğer $Q \in \mu_X$ ise bu durumda Q nun Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : Q,\ X \text{ de sonlu } \varepsilon\text{-netine sahiptir}\}$$

ile tanımlanır ve $\chi : \mu_X \to [0,\infty)$ dönüşümüne Q kümesinin Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü denir (Malkowsky ve diğ. 2004).

Lemma 2.4.4 Q, Q_1 ve Q_2 kümeleri X metrik uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(a) $\chi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ total sınırlıdır
(b) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$
(c) $\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$
(d) $\chi(Q_1 \cup Q_2) = maks\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$
(e) $\chi(Q_1 \cap Q_2) = \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$ (Malkowsky 2010).

Teorem 2.4.5 X bir normlu uzay ve Q, Q_1 ve Q_2 kümeleri X in sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(a) $\chi(Q_1+Q_2) \leq \chi(Q_1)+\chi(Q_2)$
(b)$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda Q) = |\lambda|\, \chi(Q)$
(c) $\forall\ x \in X$ için $\chi(Q+x) = \chi(Q)$ (Darbo 1955).

Tanım 2.4.6 X ve Y Banach uzayları olmak üzere $L : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. χ_1, χ_2 sırasıyla X ve Y uzayları üzerinde tanımlı Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri ve μ_X, μ_Y sırasıyla X ve Y kümelerinin boştan farklı bütün sınırlı alt kümelerinin sınıfları olsun. Eğer

$$\forall Q \in \mu_X \text{ için } L(Q) \in \mu_Y$$

ve

$$\chi_2(L(Q)) \leq M\chi_1(Q)$$

şartını sağlayan $0 < M \leq \infty$ sayısı varsa $L : X \to Y$ lineer operatörüne (χ_1, χ_2)-sınırlıdır denir.

Eğer L operatörü (χ_1, χ_2)-sınırlı ise

$$\|L\|_{(\chi_1,\chi_2)} = \inf\left\{M > 0 : \forall Q \in \mu_X \text{ için } \chi_2(L(Q)) \leq M\chi_1(Q)\right\}$$

sayısına L nin (χ_1, χ_2) kompaktsızlık ölçüsü adı verilir. Özel olarak, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ için $\|L\|_{(\chi,\chi)} = \|L\|_\chi$ yazılır (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Tanım 2.4.7 X ve Y metrik uzay ve $f : X \to Y$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her sınırlı $Q \subset X$ kümesi için $\overline{f(Q)}$ kapanış kümesi Y de kompakt ise f ye kompakttır denir ve kompakt dönüşümlerin kümesi $\mathcal{K}(X,Y)$ ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Kompakt dönüşüm diziler cinsinden aşağıdaki biçimde karakterize edilebilir.

Teorem 2.4.8 X ve Y normlu uzay ve $L : X \to Y$ lineer operatörü olsun. Bu durumda L nin kompakt olması için gerek ve yeter şart X deki her sınırlı (x_n) dizisi için $(L(x_n))$ dizisinin Y de yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır (Şuhubi 2001).

Teorem 2.4.9 Eğer X, Y Banach uzayları ve $L \in B(X,Y)$ ise bu taktirde $\|.\|_\chi$, $B(X,Y)$ üzerinde bir yarınormdur ve

(a) $\|L\|_\chi \leq \|L\|$

(b) $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ için $\|L+K\|_\chi = \|L\|_\chi$ (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Teorem 2.4.10 X sonsuz boyutlu normlu uzay ve $B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ birim küre olsun. Bu durumda $\chi(B_X) = 1$ dir (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Aşağıdaki sonuç BK uzayı olan ℓ_k uzayının sınırlı bir alt kümesinin Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünü hesap etmek için son derece kullanışlıdır.

Lemma 2.4.11 $1 \leq k < \infty$ için $X = \ell_k$ veya $X = c_0$ olmak üzere Q, X normlu uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. Eğer $P_n : X \to X$, her $x \in X$ için $P_r(x) = (x_0, x_1, ..., x_r, 0, ...)$ ile tanımlı bir operatör ise bu durumda I, X de bir birim operatör olmak üzere

$$\chi(Q) = \lim_{r\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_r)(x)\| \right)$$

dir (Rakočević 1998).

Lemma 2.4.12 X ve Y Banach uzayları, $L \in B(X,Y)$ ve $S_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, X de kapalı birim yuvarı göstersin.Bu durumda,

$$\|L\|_\chi = \chi(L(S_X))$$

ve

$$L \in \mathcal{K}(X,Y) \quad \Leftrightarrow \|L\|_\chi = 0,$$

dır (Malkowsky ve Rakočević 2000).

Lemma 2.4.13 X normlu bir dizi uzayı ve χ_T ve χ sırasıyla X_T ve X de tüm sınırlı kümelerin koleksiyonu olan $\mathcal{M}_{X_T}$ ve $\mathcal{M}_X$ üzerinde Hausdorff kompaktsızlık ölçülerini göstersin. Bu durumda $T = (t_{nv})$ bir sonsuz üçgensel matris olmak üzere her $Q \in \mathcal{M}_{X_T}$ için

$$\chi_T(Q) = \chi(T(Q))$$

dur (Malkowsky ve Rakočević 2007).

3. MUTLAK $\left|N_p^{\theta}\right|_k$ NÖRLUND UZAYI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $|N, p_n, \theta_n|_k$ Nörlund toplanabilme metodu ile toplanabilen bütün serilerin $\left|N_p^{\theta}\right|_k$ uzayını tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik özelliklerini, ℓ_k uzayını kapsadığını, α-, β-, γ- duallerini ve bazını içeren teoremleri vereceğiz.

Öncelikle belitilmelidir ki (t_n) dizisi (2.3.7) ile tanımlı (s_n) dizisinin Nörlund ortalaması ise

$$\left|N_p^{\theta}\right|_k = \left\{a = (a_\nu) : \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty,\ k \geq 1\right\},$$

yazılabilir. Burada özel olarak $\theta_n = n$ ve $p_n = A_n^{\alpha-1}\,(n \geq 1)$ alınırsa $\left|N_p^{\theta}\right|_k = |C_\alpha|_k$ ve $p_0 = 1$, $p_n = 0$ alınırsa $\left|N_p^{\theta}\right|_k = \mathcal{A}_k$ olur. Diğer taraftan (s_n) dizisi Σa_n serisinin kısmi toplamlar dizisi olduğuna göre

$$\left|N_p^{\theta}\right|_k = \left\{a = (a_v) : \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left|\sum_{v=0}^{n} \left(\frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-1-v}}{P_{n-1}}\right) a_\nu\right|^k < \infty,\ k \geq 1\right\}$$

ifade edilebilir. Eğer $1 \leq k < \infty$ için $T^{(p)} = (t_{nv}^{(p)})$ ve $E^{(k)} = (e_{nv}^{(k)})$ matrisleri

$$t_{nv}^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{P_{n-v}}{P_n}, & 0 \leq v \leq n \\ 0, & v > n, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$e_{nv}^{(k)} = \begin{cases} -\theta_n^{1/k^*}, & v = n-1 \\ \theta_n^{1/k^*}, & v = n \\ 0, & v \neq n, n-1, \end{cases} \tag{3.2}$$

ile tanımlanırsa bu durumda (2.2.1) gösterimine göre $\left|N_p^{\theta}\right|_k = (\ell_k)_{E^{(k)}T^{(p)}}$ yazılabilir. Ayrıca $T^{(p)}$ üçgensel matris olduğundan bir $S^{(p)}$ inversi mevcuttur. Şimdi $S^{(p)}$ matrisini hesap edelim. Eğer $p_0 \neq 0$ ise açıkça görüldüğü üzere

$$\sum_{v=0}^{n} P_{n-v} C_v = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir (C_n) dizisi vardır. Dolayısıyla $n \geq 1$ için $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \neq 0$ olmak üzere

$$y_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} P_{n-v} x_v$$

gerek ve yeter şart

$$x_n = \sum_{v=0}^{n} C_{n-v} P_v y_v$$

dür. Bu ise Nörlund dönüşümünün tersinin mevcut olduğunu ve üstelik $S^{(p)} = (s_{nv}^{(p)})$ matrisinin

$$s_{nv}^{(p)} = \begin{cases} C_{n-v}P_v, 0 \leq v \leq n \\ 0, \ v > n \end{cases} \tag{3.3}$$

olduğunu gösterir.

Herhangi bir α reel sayısı için $\Delta^\alpha x_n$ terimini eşitliğin sağındaki seri yakınsak olmak üzere

$$\Delta^\alpha x_n = \sum_{v=n}^{\infty} A_{v-n}^{-\alpha-1} x_v; \ n \geq 0$$

ile tanımlayacağız. Aynı zamanda

$$\Omega_{nv}^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{P_{n-v}}{P_n} - \dfrac{P_{n-1-v}}{P_{n-1}}, 1 \leq v < n \\ 0, \qquad\qquad v > n \end{cases}, \ P_{-1} = 0,$$

olmak üzere

$$\Omega_{nn}^{(p)} = P_0/P_n, \ n \geq 1, \Omega_{00}^{(p)} = 1,$$

$$G_{nv} = \sum_{r=v}^{n} P_r C_{n-r} \ ; v, n \geq 0,$$

$$D_1 = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \lim_m \sum_{v=r}^{m} \varepsilon_v G_{vr} \text{ mevcut} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_{m,r} \left| \sum_{v=r}^{m} \varepsilon_v G_{vr} \right| < \infty \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_m \sum_{r=0}^{m} \left| \theta_r^{-1/k^*} \sum_{v=r}^{m} \varepsilon_v G_{vr} \right|^{k^*} < \infty \right\}$$

$$D_4 = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_r \sum_{n=r}^{\infty} |\varepsilon_n G_{nr}| < \infty \right\}$$

$$D_5 = \left\{ \varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \theta_r^{-1/k^*} \sum_{n=r}^{\infty} |\varepsilon_n G_{nr}| \right\}^{k^*} < \infty \right\}$$

gösterimlerini kullanacağız.

Öncelikle $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayının ℓ_k uzayından türetilmesi nedeniyle bu uzaylar arasındaki kapsama ilişkisini araştıralım.

Teorem 3.1 (θ_n) pozitif sayıların sınırlı bir dizisi, $p_0 > 0$ ve $n \geq 1$ için $p_n \geq 0$ olsun. Eğer (p_n) artmayan bir dizi ise bu durumda $1 \leq k < \infty$ için

$$\ell_k \subset \left|N_p^\theta\right|_k .$$

İspat $\ell_k \subset \left|N_p^\theta\right|_k$ kapsamasının sağlandığını ispatlamak için her $x \in \ell_k$ için

$$\|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} \leq M \|x\|_{\ell_k}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sayısının olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $x \in \ell_k$ alalım ve

$$\Delta T_n^{(p)}(x) = \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-1-v}}{P_{n-1}} \right) x_v = \sum_{v=1}^{n} \Omega_{nv}^{(p)} x_v$$

olsun. Bu durumda $1 < k < \infty$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \left|\Delta T_n^{(p)}(x)\right|^k \leq \sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \sum_{v=1}^{n} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| |x_v|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| \right\}^{k-1}$$

eşitsizliği elde edelir. Hipotezden, $0 \leq v \leq n$ için $\Omega_{nv}^{(p)} \geq 0$ bulunur. Gerçekten (P_n) artan bir dizi ve (p_n) artmayan bir dizi olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega_{nv}^{(p)} &= \frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-v-1}}{P_{n-1}} \\ &= \frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-v} - p_{n-\nu}}{P_{n-1}} \\ &= \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left(P_n p_{n-\nu} - P_{n-v} p_n \right) \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$\frac{P_{n-v}}{P_n} \geq \frac{P_{n-v-1}}{P_{n-1}}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| &= \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-v-1}}{P_{n-1}} \right) \\ &\leq \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{P_{n-v}}{P_{n-1}} - \frac{P_{n-v-1}}{P_{n-1}} \right) = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $\lim_n \dfrac{p_n}{P_n} = 0$ ve dolayısıyla $\lim_n \dfrac{P_{n-1}}{P_n} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=v}^{\infty} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| &= \lim_m \sum_{n=v}^{m} \left(\frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-v-1}}{P_{n-1}} \right) \\ &= \lim_m \left(\sum_{n=v}^{m} \frac{P_{n-v}}{P_n} - \sum_{n=v-1}^{m-1} \frac{P_{n-v}}{P_n} \right) = 1 \end{aligned}$$

yani

$$\sum_{v=1}^{n} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| \leq 1, \quad \sum_{n=v}^{\infty} \left|\Omega_{nv}^{(p)}\right| = 1$$

elde edilir. Ayrıca (θ_n) sınırlı bir dizi olduğundan her n için $\theta_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır. Böylece her m için

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \left|\Delta T_n^{(p)}(x)\right|^k &\leq \sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \sum_{v=1}^{n} \Omega_{nv}^{(p)} \left|x_v\right|^k \\ &\leq M^{k-1} \sum_{v=1}^{m} \left\{ \sum_{n=v}^{m} \Omega_{nv}^{(p)} \right\} \left|x_v\right|^k = M^{k-1} \sum_{v=1}^{m} \left|x_v\right|^k\end{aligned}$$

yani

$$\|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} \leq M^{1/k^*} \|x\|_{\ell_k},$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teoremlerde $p_0 \neq 0$ alınmıştır.

Teorem 3.2 $1 \leq k < \infty$ ve (θ_n) negatif olmayan sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda

a-) $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı, $T^{(p)}$ ve $E^{(k)}$ sırasıyla (3.1) ve (3.2) ile tanımlı matrisler olmak üzere

$$\|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} = \left\|E^{(k)} o T^{(p)}(x)\right\|_{\ell_k}$$

normuna göre bir BK-uzayıdır ve aynı zamanda ℓ_k uzayına izomorftur yani $\left|N_p^\theta\right|_k \cong \ell_k$ dır.

b-) Eğer $U_{E^{(k)}oT^{(p)}}$, $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayının kapalı bir alt uzayı ise U, ℓ_k uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

c-) $1 < k < \infty$ için $\left|N_p^\theta\right|_k^\beta = D_1 \cap D_3$ ve $k = 1$ için $\left|N_p^\theta\right|_1^\beta = D_1 \cap D_2$ dir.

d-) $1 < k < \infty$ için $\left|N_p^\theta\right|_k^\gamma = D_3$ ve $k = 1$ için $\left|N_p^\theta\right|_1^\gamma = D_2$ dir.

e-) $1 < k < \infty$ için $\left|N_p^\theta\right|_k^\alpha = D_5$ ve $k = 1$ için $\left|N_p^\theta\right|_1^\alpha = D_4$ dür.

f-) Her $v, n \geq 0$ için $b^{(v)} = (b_n^{(v)})$ dizisini

$$b_n^{(v)} = \begin{cases} \theta_v^{-1/k^*} \sum_{r=v}^{n} C_{n-r} P_r, & v \leq n \\ 0, & v > n \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $(b^{(v)})$ dizisi $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayının bir Schauder bazıdır.

İspat a-) ℓ_k doğal normuna göre BK-uzayı, $\left|N_p^\theta\right|_k = (\ell_k)_{E^{(k)}T^{(p)}}$ ve $E^{(k)}T^{(p)}$

bir üçgensel matris olduğundan Wilansky'nin Teorem 4.3.2 (1984) [p. 61] den dolayı $1 \leq k < \infty$ için $\left|N_p^\theta\right|_k$ bir BK-uzayıdır.

Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için $\left|N_p^\theta\right|_k$ ile ℓ_k uzayı arasında lineer, birebir örten ve normu koruyan bir dönüşümün olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için (3.1) ve (3.2) ile tanımlı

$$T^{(p)} : \left|N_p^\theta\right|_k \to (\ell_k)_{E^{(k)}} \text{ ve } E^{(k)} : (\ell_k)_{E^{(k)}} \to \ell_k$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. Bu durumda $T^{(p)}$ and $E^{(k)}$ fonksiyonları lineer birebir ve örten dönüşüm olduğundan $E^{(k)}oT^{(p)}$ bileşke fonksiyonunun aynı özelliklere sahip olduğu açıktır. Gerçekten, örneğin, örtenliğini göstermek için $z = (z_n) \in \ell_k$ alalım. Bu durumda

$$y = (y_n) = (\Sigma_{v=0}^n \theta_v^{-1/k^*} z_v) \in (\ell_k)_{E^{(k)}}$$

olacağından

$$x = (x_n) = (\Sigma_{v=0}^n P_v C_{n-v} y_v) \in \left|N_p^\theta\right|_k$$

seçilirse

$$z = \left(E^{(k)}oT^{(p)}\right)(x) \in \ell_k$$

elde ederiz. Bu ise isteneni verir. Ayrıca,

$$\left\|E^{(k)}oT^{(p)}(x)\right\|_{\ell_k} = \|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k}$$

olduğuna göre $E^{(k)}oT^{(p)}$ dönüşümü normu korur. Böylece ispat tamamlanır.

b-) $\left|N_p^\theta\right|_k$ bir BK-uzayı olduğundan $U_{E^{(k)}oT^{(p)}}$ uzayının tam uzay olduğunu göstermek yeterdir. Şimdi

$$y^n = E^{(k)}oT^{(p)}(x^n)$$

olmak üzere

$$\|y^n - y^m\|_{\ell_k} = \|x^n - x^m\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} \to 0$$

olduğundan, eğer (x^n) dizisi $U_{E^{(k)}oT^{(p)}}$ uzayında bir Cauchy dizisi ise, bu durumda (y^n) dizisi U da bir Cauchy dizisi olur. Böylece, U nun tam uzay olduğunu göz önüne alırsak (y^n) dizisi bir $y \in U$ noktasına yakınsar. Bu ise $y = E^{(k)}oT^{(p)}(x)$ olacak şekilde bir $x \in U_{E^{(k)}oT^{(p)}}$ nın varlığını ve ayrıca

$$\|x^n - x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} = \|y^n - y\|_{\ell_k} \to 0$$

olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

c-) $1 < k < \infty$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\beta$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $\varepsilon x \in cs$ olmasıdır. Şimdi $y = T^{(p)}(x)$ olsun. Bu durumda $n \geq 0$ için $z_n = \theta_n^{1/k^*}(y_n - y_{n-1}), y_{-1} = 0$, dersek $z \in \ell_k$ olur. Dolayısıyla (3.3) den,

$$x_n = \sum_{v=0}^{n} P_\nu C_{n-\nu} y_\nu \text{ ve } y_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} \theta_r^{-1/k^*} z_r$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j x_j &= \sum_{j=0}^{m} \left\{\sum_{v=j}^{m} P_j C_{v-j} \varepsilon_v\right\} y_j \\ &= \sum_{r=0}^{m} \left\{\theta_r^{-1/k^*} \sum_{v=r}^{m} \varepsilon_v G_{vr}\right\} z_r \\ &= \sum_{v=0}^{m} \mu_{mv} z_v\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\mu_{mr} = \begin{cases} \theta_r^{-1/k^*} \sum_{v=r}^{m} \varepsilon_v G_{vr}, 0 \leq r \leq m \\ 0, \qquad r > m \end{cases} \tag{3.4}$$

dir. Böylece Lemma 2.3.12 den

$$\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\beta \Leftrightarrow \mu \in (\ell_k, c)$$

veya eşdeğer olarak $\varepsilon \in D_1 \cap D_3$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

$k = 1$ durumu, benzer şekilde ispatlanır.

d-) $1 < k < \infty$ olsun.Bu durumda, $\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\gamma$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $\left(\sum_{v=0}^{n} \varepsilon_v x_v\right) \in \ell_\infty$ olmasıdır. Teorem 3.2 c) de olduğu gibi $y = T^{(p)}(x)$ ve $n \geq 0$ için

$$z_n = \theta_n^{1/k^*}(y_n - y_{n-1}), y_{-1} = 0$$

olmak üzere

$$x \in \left|N_p^\theta\right|_k \Leftrightarrow z \in \ell_k.$$

Dolayısıyla, $\mu = (\mu_{mr})$ matrisi (3.4) ile tanımlı olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j x_j = \sum_{v=0}^{m} \mu_{mv} z_v$$

yazılabilir. Böylece Lemma 2.3.12 den

$$\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\gamma \Leftrightarrow \mu \in (\ell_k, \ell_\infty)$$

veya eşdeğer olarak $\varepsilon \in D_3$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

$k = 1$ için ispat benzer şekilde yapılır.

e-) $1 < k < \infty$ ve $\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\alpha$ olsun. Bu durumda $\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $\varepsilon x = (\varepsilon_n x_n) \in \ell$ olmasıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon_n x_n &= \varepsilon_n \sum_{v=0}^{n} P_\nu C_{n-\nu} \sum_{r=0}^{v} \theta_r^{-1/k^*} z_r \\ &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{v=r}^{n} \varepsilon_n P_\nu C_{n-\nu} \theta_r^{-1/k^*} z_r \\ &= \delta_n(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_{nr} = \begin{cases} \sum_{v=r}^{n} \varepsilon_n P_\nu C_{n-\nu} \theta_r^{-1/k^*}, & 0 \le r \le n \\ 0, & r > n \end{cases}$$

dir. Bu durumda her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $\varepsilon x = (\varepsilon_n x_n) \in \ell$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \ell_k$ için $\delta(z) \in \ell$ olmasıdır veya denk olarak

$$\varepsilon \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\alpha \Leftrightarrow \delta \in (\ell_k, \ell)$$

dir. Böylece Lemma 2.3.10 dan teoremin ispatı tamamlanır.

$k = 1$ için benzer olarak Lemma 2.3.11 den ispat tamamlanır.

f-) $e^{(v)} = (e_n^{(v)})$ olmak üzere $\left(e^{(v)}\right)$ dizisi ℓ_k uzayının bir bazı olduğundan $\left(b^{(v)}\right)$ dizisi $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı için bir bazdır. Gerçekten, eğer $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ ise bu durumda öyle bir $z \in \ell_k$ vardır ki

$$z = \left(E^{(k)} o T^{(p)}\right)(x)$$

dir. Böylece (a) dan dolayı $v \ge 0$ için

$$x_v = \left(E^{(k)} o T^{(p)}\right)_v^{-1}(z)$$

olmak üzere

$$\left\| x - \sum_{v=0}^{m} x_v b^{(v)} \right\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} = \left\| z - \sum_{v=0}^{m} z_v e^{(v)} \right\|_{\ell_k} \to 0, \ (m \to \infty)$$

elde edilir. Bu ise $x = \sum_{v=0}^{\infty} x_v b^{(v)}$ demektir. Bu gösteriminin tek olduğu ise üçgen eşitsizliğinden açıktır.

Dikkat edilmelidir ki, (f) şıkkı aynı zamanda $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayının Schauder bazını bulmak için bir yöntem vermektedir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.2 den kolayca elde edilir.

Sonuç 3.3 Eğer $1 \leq k < \infty$ ve (θ_n) pozitif sayıların bir dizisi ise $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı ayrılabilirdir.

4. MUTLAK NÖRLUND UZAYINDA MATRİS VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayında tanımlı bazı matris operatörlerini karakterize edeceğiz. Ayrıca bu operatörlerin normlarını ve Hausdorff kompaktsızlık ölçülerini belirleyeceğiz. Bununla birlikte Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünü uygulayarak bu operatörlerin kompakt olması için gerek ve yeter şartları içeren teoremleri vereceğiz ve bu sonuçlardan faydalanarak bilinen bazı sonuçları da genelleştireceğiz.

Bu bölümde geçen teoremlerde $p_0 \neq 0$ alınmıştır.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki $1 \leq k < \infty$ ve her $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Ayrıca $\overline{L} = \left(\overline{\ell}_{jv}\right)$ ve $\widehat{D} = \left(\widehat{d}_{nv}\right)$ matrislerini

$$\overline{\ell}_{jv} = \lim_m \sum_{r=v}^{m} a_{jr} G_{rv}, \tag{4.1}$$

$$\widehat{d}_{nv} = \theta_n^{1/k^*} \sum_{j=0}^{n} \Omega_{nj}^{(q)} \overline{\ell}_{jv}; n \geq 1, v \geq 0 \tag{4.2}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde $A \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\forall j, v \geq 0 \text{ için } \overline{L} \text{ tanımlı}, \tag{4.3}$$

$$\forall j \text{ için } \sup_{m,v} \left| \sum_{r=v}^{m} a_{jr} G_{rv} \right| < \infty, \tag{4.4}$$

$$\sup_{v} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{d}_{nv} \right|^k < \infty \tag{4.5}$$

olmasıdır.

İspat $1 \leq k < \infty$ olsun. $A \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart her n için $(a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in (|N_p|)^\beta$ ve her $x \in |N_p|$ için $A(x) \in \left|N_q^\theta\right|_k$ olmasıdır. Dolayısıyla, Teorem 3.2 (c) den $(a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in D_1 \cap D_2$ yazılabilir veya eşdeğer olarak her n için (4.3) ve (4.4) şartları sağlanır. Şimdi (4.5) şartının sağlandığını göstermek için $x \in |N_p|$ alalım ve (3.1) ve (3.2) yi kullanarak

$$E^{(1)} o T^{(p)} : |N_p| \to \ell,\ E^{(k)} o T^{(q)} : \left|N_q^\theta\right|_k \to \ell_k$$

bileşke operatörlerini tanımlayalım. Bu durumda bu operatörlerin lineer birebir ve örten olduğu açıktır. Öte yandan $n \geq 0$ için

$$T_n^{(p)}(x) = y_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_{n-v}}{P_n} x_\nu$$

ve

$$z_n = \left(E^{(1)} o T^{(p)}\right)_n (x) = y_n - y_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{P_{n-v}}{P_n} - \frac{P_{n-1-v}}{P_{n-1}} \right) x_\nu$$

yazılabilir. Eğer $z_n = \Delta y_n$, $y_{-1} = 0$ dersek $z \in \ell$ olup ayrıca

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} z_j$$

ve

$$x_n = \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu C_{n-\nu} y_\nu$$

bulunur. Dolayısıyla (3.3) den dolayı $\overline{L}^{(n)} = \left(\overline{\ell}_{mj}^{(n)}\right)$ matrisi

$$\overline{\ell}_{mj}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{v=j}^{m} a_{nv} G_{vj}, 0 \leq j \leq m \\ 0, \qquad j > m \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sum_{v=0}^{m} a_{nv} x_v = \sum_{j=0}^{m} \left(P_j \sum_{v=j}^{m} a_{nv} C_{v-j} \right) y_j = \sum_{j=0}^{m} \overline{\ell}_{mj}^{(n)} z_j,$$

yazılabilir. Diğer taraftan herhangi bir $R = (r_{nv})$ matrisi için $R = (r_{nv}) \in (\ell, c)$ ise $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv} x_v$ serisi n ye göre düzgün yakınsaktır. Çünkü Lemma 2.3.12 den dolayı serinin kalan terimi n ye göre düzgün olarak sıfıra gider yani

$$\left| \sum_{v=m}^{\infty} r_{nv} x_v \right| \leq \sup_{n,v} |r_{nv}| \sum_{v=m}^{\infty} |x_v| \to 0 \ \ (m \to \infty)$$

olur ve dolayısıyla

$$\lim_n R_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_n r_{nv} x_v \tag{4.6}$$

yazılabilir. Böylece (4.3) ve (4.4) sağlandığına göre $\overline{L}^{(n)} = \left(\overline{\ell}_{mj}^{(n)}\right) \in (\ell, c)$ olup (4.6) nedeniyle

$$A_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lim_m \overline{\ell}_{mj}^{(n)} \right) z_j = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\ell}_{nj} z_j = \overline{L}_n(z)$$

elde ederiz. Bu demektir ki her $x \in |N_p|$ için $A(x) \in \left|N_q^\theta\right|_k$ ancak ve yalnız her $z \in \ell$ için $\overline{L}(z) \in \left|N_q^\theta\right|_k$ dır. Ayrıca $\left|N_q^\theta\right|_k = (\ell_k)_{E^{(k)} T^{(q)}}$ olduğuna göre

$$\widehat{D} = E^{(k)} o T^{(q)} \overline{L}$$

olmak üzere $\overline{L}(z) \in \left|N_q^\theta\right|_k$ yani $\widehat{D}(z) \in \ell_k$ dır. Böylece $A \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ dır ancak ve yalnız $(4.3), (4.4)$ ve $\widehat{D} \in (\ell, \ell_k)$ sağlanır. Eğer $\overline{D} = T^{(q)} \overline{L}$ dersek

$$\widehat{D} = E^{(k)} o \overline{D}$$

olur. Matris çarpımlarının tanımı nedeniyle $\overline{D}$ matrisi

$$\overline{d}_{nv} = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_{n-j}}{Q_n} \overline{\ell}_{jv}; v, n \geq 0,$$

olacağından $\widehat{D}$ matrisi

$$\widehat{d}_{nv} = \theta_n^{1/k^*} \sum_{j=1}^{n} \Omega_{nj}^{(q)} \overline{\ell}_{jv}; v \geq 0, n \geq 1$$

bulunur. Böylece Lemma 2.3.11 den, $\widehat{D} \in (\ell, \ell_k) \Leftrightarrow$ (4.5) sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2 $1 \leq k < \infty$ ve her $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Ayrıca $\widehat{D} = \left(\widehat{d}_{nv}\right)$ matrisi (4.2) ile tanımlansın. Eğer $A \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ ise A matrisi sınırlı bir lineer operatöre karşılık gelir ve üstelik

$$\|A\|_{\left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)} = \sup_v \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left| \widehat{d}_{nv} \right|^k \right\}^{1/k}$$

$$\|A\|_\chi = \lim_{r \to \infty} \sup_v \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} \left| \widehat{d}_{nv} \right|^k \right\}^{1/k}$$

olur.

İspat Teorem 3.2 den $\left|N_p^\theta\right|$ ve $\left|N_q^\theta\right|_k$ uzayları BK-uzayları olduğundan teoremin ilk kısmı Wilansky (1984)[p.57] nin Teorem 4.2.8 den elde edilir.

Şimdi A matrisinin normunu hesap etmek için Teorem 4.1 de verilen

$$L_1 = E^{(1)} o T^{(p)} \to \ell; \; L_2 = E^{(k)} o T^{(q)} \to \ell_k$$

operatörlerini göz önüne alalım. Bu durumda Teorem 4.1 den

$$x \in |N_p| \Leftrightarrow y = L_1(x) \in \ell$$

olduğuna göre

$$\|x\|_{|N_p|} = \|y\|_\ell$$

yazılabilir. Buradan da Lemma 2.3.11 ve $A = L_2^{-1} o \widehat{D} o L_1$ olduğu göz önüne alınırsa her $x \in |N_p|$ için

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\left(|N_p|,\left|N_q^\theta\right|_k\right)} &= \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\| L_2^{-1}\widehat{D}\left(L_1\left(x\right)\right)\right\|_{\left|N_q^\theta\right|_k}}{\|x\|_{|N_p|}} \\
&= \sup_{y\neq\theta} \frac{\left\|\widehat{D}\left(y\right)\right\|_{\ell_k}}{\|y\|_{\ell}} \\
&= \left\|\widehat{D}\right\|_{(\ell,\ell_k)} \\
&= \sup_{v} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{d}_{nv}\right|^k \right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teoremin son kısmının ispatı için $S = \{x \in |N_p| : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını ele alalım. Bu durumda Lemma 2.4.11- Lemma 2.4.13 den

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\chi} &= \chi\left(AS\right) = \chi\left(L_2AS\right) = \chi\left(\widehat{D}L_1S\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_{y\in L_1S} \left\|\left(I-P_r\right)\widehat{D}(y)\right\|_{\ell_k} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\|\widehat{D}^{(r)}\right\|_{(\ell,\ell_k)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_{v} \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} \left|\widehat{d}_{nv}\right|^k \right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $P_r : \ell_k \to \ell_k$ operatörü $P_r(y) = (y_0, y_1, ..., y_r, 0, ...)$ ve $\widehat{D}^{(r)} = \left(\bar{d}_{n\nu}^{(r)}\right)$ matrisi

$$\bar{d}_{n\nu}^{(r)} = \begin{cases} 0, \ 1 \leq n \leq r \\ \widehat{d}_{nv}, \quad n > r \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Böylece Lemma 2.3.11 den istenen elde edilir.

Teorem 4.2 ve Lemma 2.4.12 göz önüne alınarak $\left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ sınıfındaki kompakt operatörler de karakterize edilebilir.

Sonuç 4.3 Teorem 4.2 nin hipotezleri altında,

$$A \in \mathcal{K}\left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right) \Leftrightarrow \|A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty} \sup_{v} \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} \left|\widehat{d}_{nv}\right|^k \right\}^{1/k} = 0.$$

Eğer W matrisi (2.3.10) daki gibi alınırsa bu durumda $W \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ ifade eder ki Σx_v serisi $|N_p|$ toplanabilir olduğunda $\Sigma\varepsilon_v x_v$ serisi $\left|N_q^\theta\right|_k$ toplanabilirdir. Ayrıca I birim matris olmak üzere $I \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ ise bu toplanabilme metotlarının karşılaştırılması yani $|N_p| \subset \left|N_q^\theta\right|_k$ anlamına gelir. Buna göre

Teorem 4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir; Eğer $A = I$ alınırsa, $\overline{L} = \left(\overline{\ell}_{nv}\right)$ ve $\widehat{D} = \left(\widehat{d}_{nv}\right)$ matrisleri

$$R_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n-j} Q_j,\ R_{-1} = 0$$

olmak üzere

$$\overline{\ell}_{nv} = \begin{cases} G_{nv}, 0 \leq v \leq n \\ 0, \quad v > n, \end{cases}$$

$$\widehat{d}_{nv} = \begin{cases} \theta_n^{1/k^*} \sum_{r=v}^{n} P_r \left(\dfrac{R_{n-r}}{Q_n} - \dfrac{R_{n-1-r}}{Q_{n-1}}\right),\ 0 \leq v \leq n \\ 0, \qquad\qquad v > n, \end{cases} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.1 in (4.5) şartı (4.8) şartına indirgenir ve diğer şartları doğrudan sağlanır.

$$\sup_{\nu} \sum_{n=v}^{\infty} \left| \theta_n^{1/k^*} \sum_{r=v}^{n} P_r \left(\frac{R_{n-r}}{Q_n} - \frac{R_{n-1-r}}{Q_{n-1}}\right) \right|^k < \infty. \tag{4.8}$$

Şu halde buradaki notasyonlarımıza göre aşağıdaki sonuç ifade edilebilir. Bu sonucun $k = 1$ özel hali ise McFadden (1942) tarafından verilmiştir.

Sonuç 4.4 $1 \leq k < \infty$ ve (θ_n) pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu taktirde, $I \in \left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart (4.8) koşulunun sağlanmasıdır. Üstelik $\widehat{D}$, (4.7) ile tanımlı matris olmak üzere

$$\|I\|_{\left(|N_p|, \left|N_q^\theta\right|_k\right)} = \left\|\widehat{D}\right\|_{(\ell, \ell_k)}$$

dır.

Ayrıca $A = W$ ve $k = 1$ seçilirse Teorem 4.1 den Bosanquet and Das (1979) ın aşağıdaki sonucu elde edilir.

Sonuç 4.5 (q_n), $q_0 > 0$ olan negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisi olsun. Eğer

$$\sup_{v} \sum_{j=v}^{\infty} \left| \frac{G_{jv} Q_{j-v}}{P_j} \right| < \infty, \sup_{v} \left| \frac{P_v \varepsilon_v}{Q_v} \right| < \infty \text{ ve } \sup_{v} \sum_{j=v}^{\infty} |G_{jv} \varepsilon_j| < \infty \tag{4.9}$$

şartları sağlanıyorsa, bu taktirde $W \in (|N_p|, |N_q|)$ ve üstelik

$$\|W\|_{(|N_p|, |N_q|)} = \sup_{v} \sum_{n=v}^{\infty} \left| \sum_{j=v}^{n} \Omega_{nj}^{(q)} \varepsilon_j G_{jv} \right|.$$

İspat Bu durumda $\overline{L} = \left(\overline{\ell}_{jv}\right)$ matrisi

$$\overline{\ell}_{jv} = \begin{cases} \varepsilon_j G_{jv}, \ v \leq j \\ 0, \ v > j, \end{cases}$$

olur ve dolayısıyla (4.5) şartı (4.9) şartına indirgenir. Böylece Teorem 2.3.13 göz önüne alınarak Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 den istenen elde edilir.

Aynı zamanda Teorem 4.1, $P_n = A_n^{\alpha}$, $Q_n = A_n^{\delta}$, ve $\theta_n = n$ özel durumu için Sarıgöl (2016) ün aşağıdaki sonucuna indirgenir.

Sonuç 4.6 Kabul edelim ki $\alpha > -1, \delta > -1$, $1 \leq k < \infty$ ve $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli bir matris olsun. Ayrıca $\widehat{D}$ matrisini

$$\widehat{d}_{nv} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^{1/k} A_n^{\delta}} \sum_{j=1}^{n} j A_{n-j}^{\delta-1} a_{j0}, n \geq 1, v = 0 \\ \dfrac{v A_v^{\alpha}}{n^{1/k} A_n^{\delta}} \sum_{j=1}^{n} j A_{n-j}^{\delta-1} \Delta^{\alpha}\left(\frac{a_{jv}}{v}\right); n, v \geq 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde, $A \in \left(|C_{\alpha}|, |C_{\delta}|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta^{\alpha}\left(\frac{a_{vr}}{r}\right) \text{ mevcut, } r \geq 1, v \geq 0,$$

$$\sup_{m,v} \left| v A_v^{\alpha} \sum_{r=v}^{m} A_{r-v}^{-\alpha-1} \frac{a_{nr}}{r} \right| < \infty \text{ , } n \geq 0,$$

$$\sup_{v} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{d}_{nv} \right|^k < \infty$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in \left(|C_{\alpha}|, |C_{\delta}|_k\right)$ ise A matrisine sınırlı bir lineer operatöre karşılık gelir ve bunun normu

$$\|A\|_{\left(|C_{\alpha}|,|C_{\delta}|_k\right)} = \left\|\widehat{D}\right\|_{(\ell,\ell_k)}$$

dır.

İspat Eğer $n \geq 0$ için $P_n = A_n^{\alpha}$, $Q_n = A_n^{\delta}$,ve $\theta_n = n$ ise $|N_p| = |C_{\alpha}|$ ve $\left|N_q^{\theta}\right|_k = |C_{\delta}|_k$ olduğu açıktır. Önce Bosanquet and Das (1979) ın aşağıdaki eşitliklerini hatırlatmak yerinde olacaktır. $\alpha \neq -1, -2, ..., v \geq 1$ için

$$\sum_{r=v}^{n} A_r^{\alpha} A_{n-r}^{-\alpha-2} = \frac{v A_v^{\alpha} A_{n-v}^{-\alpha-1}}{n}, \quad \frac{A_{n-v}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} - \frac{A_{n-v-1}^{\alpha}}{A_{n-1}^{\alpha}} = \frac{v A_{n-v}^{\alpha-1}}{n A_n^{\alpha}}, \tag{4.11}$$

ve $n = v = 0$ için eşitliğin her iki tarafı 1 dir. Ayrıca kolayca görülebilir ki $n \geq 1$ için

$$C_0 = A_0^{-\alpha-2} = 1, C_n = A_n^{-\alpha-2} \text{ ve } A_{-n}^{\alpha} = 0$$

olur ve böylece (4.11) eşitliğinden

$$G_{r\nu}=\begin{cases}\dfrac{\nu A_\nu^\alpha A_{r-\nu}^{-\alpha-1}}{r}, & 1\le \nu\le r\\ 0, & \nu>r\end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{r=\nu}^{m}a_{nr}G_{r\nu} &= \nu A_\nu^\alpha\sum_{r=\nu}^{\infty}a_{nr}\frac{A_{r-\nu}^{-\alpha-1}}{r}\\ &= \nu A_\nu^\alpha\Delta^\alpha\left(\frac{a_{n\nu}}{\nu}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Şu halde

$$\overline{\ell}_{nv}=vA_v^\alpha\Delta^\alpha\left(\frac{a_{nv}}{v}\right);\ v,n\ge 1,\ \overline{\ell}_{n0}=a_{n0},$$

ve

$$\widehat{d}_{n0}=\sum_{j=1}^{n}\Omega_{nj}^{(q)}a_{j0};\ \widehat{d}_{nv}=n^{1/k^*}vA_v^\alpha\sum_{j=1}^{n}\Omega_{nj}^{(q)}\Delta^\alpha\left(\frac{a_{jv}}{v}\right);v,n\ge 1$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1 den ispat tamamlanır.

Bu sonuç, $\delta>\alpha$, $k=1$ ve $A=I$ özel durumu için Kogbetliantz(1925), $\alpha>-1$, $\delta>\alpha+1/k^*$, $k\ge 1$ ve $A=I$ için Flett (1957) ve $k>1$, $\delta\ge 0$, α negatif olmayan tamsayı ve $A=W$ matrisi için Mehdi (1960) ve üçgensel matris için Sarıgöl (2012) ün aşağıdaki sonuçlarına indirgenir.

Sonuç 4.7 Eğer $\alpha>-1$, $\delta>\alpha+1/k^*$ ve $k\ge 1$ ise $I\in\left(|C_\alpha|,|C_\delta|_k\right)$ (Flett 1957).

Sonuç 4.8 Eğer $k>1$, $\delta\ge 0$ ve α negatif olmayan bir tamsayı ise $W\in\left(|C_\alpha|,|C_\delta|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i)\quad \Delta^\alpha\varepsilon_v=O\left(v^{-\alpha}\right),$$

$$(iia)\ \varepsilon_v=O\left(v^{\delta-\alpha-1+1/k}\right)\quad\left(\delta<\alpha+1/k^*\right),$$

$$(iib)\ \varepsilon_v=O\left\{(\log v)^{-1/k}\right\}\quad\left(\delta=\alpha+1/k^*\right),$$

$$(iic)\ \varepsilon_v=O(1)\quad\left(\delta>\alpha+1/k^*\right),$$

olmasıdır (Mehdi 1960).

Sonuç 4.9 Eğer A üçgensel bir matris ve $k\ge 1$ ise bu taktirde $A\in(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_v\sum_{n=v}^{\infty}n^{k-1}\left|\hat{a}_{nv}\right|^k<\infty.$$

olmasıdır (Sarıgöl 2012).

Eğer $n \geq 1$ için $p_0 = q_0 = 1, p_n = q_n = 0$ alınırsa, $1 \leq k < \infty$ için $\left|N_p^\theta\right|_k = \left\{a \in w : \left(\theta_n^{1/k^*} a_n\right) \in \ell_k\right\}$ bulunur. Böylece Sarıgöl (2011) deki yol izlenerek aşağıdaki sonuç elde edilir. Bu sonuç aynı zamanda $A = I$ ve $k = 1$ için Sunouchi (1949) ve Bosanquet (1945) in sonucunu kapsar.

Sonuç 4.10 $1 \leq k < \infty$ ve $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli herhangi bir üçgensel matris olsun. Ayrıca $\widehat{D}$ matrisini

$$\widehat{d}_{nv} = \begin{cases} \sum_{m=v}^{n} \dfrac{\theta_n^{1/k^*} q_n Q_{m-1}}{Q_n Q_{n-1} p_v} \left(P_v a_{mv} - P_{v-1,} a_{m,v+1}\right), 0 \leq v \leq n \\ 0, \qquad v > n \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde $A \in \left(\left|\overline{N}_p\right|, \left|\overline{N}_q^\theta\right|_k\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_v \sum_{n=v}^{\infty} \left|\widehat{d}_{nv}\right|^k < \infty$$

olmasıdır. Üstelik $A \in \left(\left|\overline{N}_p\right|, \left|\overline{N}_q^\theta\right|_k\right)$ ise

$$\|A\|_{\left(\left|\overline{N}_p\right|, \left|\overline{N}_q^\theta\right|_k\right)} = \left\|\widehat{D}\right\|_{(\ell, \ell_k)}.$$

Burada $\left|\overline{N}_p^\theta\right|_k$ mutlak ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilen bütün serilerin kümesidir yani

$$\left|\overline{N}_p^\theta\right|_k = \left\{a = (a_v) : \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\theta_n^{1/k^*} p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v\right|^k < \infty\right\} \tag{4.12}$$

dir.

İspat Öncelikle $n, v \geq 0$ için $\widehat{d}_{nv} = \theta_n^{1/k^*} a_{nv}$ olmak üzere Teorem 4.1 den

$$A \in \left(|C_0|, \left|C_0^\theta\right|_k\right) \Leftrightarrow \widehat{D} \in (\ell, \ell_k)$$

olduğu görülür. Ayrıca D matrisi

$$d_{nv} = \begin{cases} \sum_{m=v}^{n} \frac{q_n Q_{m-1}}{Q_n Q_{n-1} p_v} \left(P_v a_{mv} - P_{v-1,} a_{m,v+1}\right), 0 \leq v \leq n \\ 0, \qquad v > n \end{cases}$$

biçiminde alınırsa

$$A \in \left(\left|\overline{N}_p\right|, \left|\overline{N}_q^\theta\right|_k\right) \Leftrightarrow D \in \left(|C_0|, \left|C_0^\theta\right|_k\right),$$

veya eşdeğer olarak $\widehat{D} \in (\ell, \ell_k)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.1 den ispat tamamlanır.

Teorem 4.11 Kabul edelim ki $1 < k < \infty$ ve her $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Ayrıca $\overline{L} = (\overline{\ell}_{nv})$ matrisi Teorem 4.1 de olduğu gibi ve $\widehat{F} = \left(\widehat{f}_{nv}\right)$ matrisi

$$\widehat{f}_{nv} = \theta_v^{-1/k^*} \sum_{j=1}^{n} \Omega_{nj}^{(q)} \overline{\ell}_{jv}, v \geq 0, n \geq 1, \tag{4.13}$$

ile tanımlanmış olsun. Bu taktirde $A \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k, |N_q|\right)$ olması için gerek ve yeter şart (4.3) ile birlikte

$$\sup_m \sum_{v=0}^{m} \left| \theta_v^{-1/k^*} \sum_{r=v}^{m} a_{nr} G_{rv} \right|^{k^*} < \infty, \tag{4.14}$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_{nv} \right| \right)^{k^*} < \infty \tag{4.15}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat $A \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k, |N_q|\right)$ verilsin. Bu durumda eşdeğer olarak, $(a_{nj})_{j=0}^{\infty} \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\beta$ ve her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $A(x) \in |N_q|$ dur. Fakat Lemma 2.3.12 den her n için

$$(a_{nj})_{j=0}^{\infty} \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k\right)^\beta \Leftrightarrow (a_{nj})_{j=0}^{\infty} \in D_1 \cap D_3$$

bulunur. Bu ise (4.3) ve (4.14) şartlarına eşdeğerdir. Ayrıca (4.15) şartını elde etmek için (3.1) ve (3.2) göz önüne alınırsa

$$E^{(k)} o T^{(p)} : \left|N_p^\theta\right|_k \to \ell_k, \quad E^{(1)} o T^{(q)} : |N_q| \to \ell$$

dönüşümleri

$$\left(E^{(k)} o T^{(p)}\right)_n (x) = \theta_n^{1/k^*} \Delta T_n^{(p)}(x),$$

$$\left(E^{(1)} o T^{(q)}\right)_n (x) = \Delta T_n^{(q)}(x)$$

olur. Şimdi $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ verilsin. Eğer $T^{(p)}(x) = y$ ve $z = \left(E^{(k)} o T^{(p)}\right)(x)$ yani $n \geq 0$ için $z_n = \theta_n^{1/k^*} \Delta y_n$, $y_{-1} = 0$ dersek bu durumda $z \in \ell_k$ olur. Ayrıca $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayı ℓ_k uzayına izomorf olduğundan $x \in \left|N_p^\theta\right|_k \Leftrightarrow z \in \ell_k$ yazılabilir ve üstelik

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \theta_j^{-1/k^*} z_j$$

olur. Böylece Teorem 4.1 in ispatında olduğu gibi $F^{(n)} = \left(\overline{f}_{mj}^{(n)}\right)$ matrisi

$$\overline{f}_{mj}^{(n)} = \begin{cases} \theta_j^{-1/k^*} \sum_{r=j}^{m} a_{nr} G_{rj}, & 0 \leq j \leq m \\ 0, & j > m \end{cases}$$

olmak üzere (3.3) den

$$\sum_{v=0}^{m} a_{nv} x_v = \sum_{v=0}^{m} \overline{f}_{mv}^{(n)} z_v$$

yazılabilir. Diğer taraftan herhangi bir $R = (r_{nv})$ matrisi için eğer $R \in (\ell_k, c)$ ise, bu durumda Lemma 2.3.12 den $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv} x_v$ serisinin kalan terimi n ye göre düzgün olarak sıfıra gittiğinden $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv} x_v$ serisi n ye göre düzgün yakınsaktır. Gerçekten, $x \in \ell_k$ olduğundan Hölder eşitsizliği nedeniyle

$$\left| \sum_{v=m}^{\infty} r_{nv} x_v \right| \leq \sup_n \left(\sum_{v=0}^{\infty} |r_{nv}|^{k^*} \right)^{1/k^*} \left(\sum_{v=m}^{\infty} |x_\nu|^k \right)^{1/k} \to 0 \ (m \to \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_n R_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_n r_{nv} x_v \tag{4.16}$$

yazılabilir. Öte yandan (4.3) ve (4.14) şartlarından $F^{(n)} = \left(\overline{f}_{mj}^{(n)}\right) \in (\ell_k, c)$ olduğu açıktır ve böylece (4.16) göz önüne alınarak

$$A_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \theta_v^{-1/k^*} \overline{\ell}_{nv} z_v = \sum_{v=0}^{\infty} \overline{f}_{nv} z_v = \overline{F}_n(z), n \geq 1$$

elde edilir. Bu da gösterir ki her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için $A(x) \in |N_q|$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \ell_k$ için $\overline{F}(z) \in |N_q|$ olmasıdır, veya eşdeğer olarak $|N_q| = (\ell)_{E^{(1)}T^{(q)}}$ olduğundan $\left(E^{(1)}T^{(q)}\overline{F}\right)(z) \in \ell$ olmasıdır. Diğer bir ifadeyle $\widehat{F} = E^{(1)} o T^{(q)} o \overline{F}$ olmak üzere $\widehat{F} \in (\ell_k, \ell)$ olmasıdır. Şimdi $\widetilde{F} = T^{(q)} o \overline{F}$ dersek, $\widehat{F} = E^{(1)} o \widetilde{F}$ ile yazılabilir. Bu durumda gerekli işlemler yapılırsa $\widehat{F}$ matrisinin (4.13) ile aynı olduğu görülür. Şu halde $\widehat{F}$ matrisine Lemma 2.3.10 uygulanırsa, $\widehat{F} \in (\ell_k, \ell) \Leftrightarrow$ (4.15) önermesi elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.12 $1 < k < \infty$ ve her $n, v \geq 0$ için $A = (a_{nv})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Ayrıca $\widehat{F} = \left(\widehat{f}_{nv}\right)$ matrisini Teorem 4.11 de olduğu gibi tanımlayalım. Eğer $A \in \left(\left|N_p^\theta\right|_k, |N_q|\right)$ ise bu taktirde A matrisi sınırlı bir lineer operatöre karşılık gelir, ayrıca

$$\|A\|_{\left(\left|N_p^\theta\right|_k, |N_q|\right)} = \frac{1}{\xi} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \widehat{f}_{nv} \right| \right)^{k^*} \right\}^{1/k^*}$$

ve

$$\|A\|_\chi = \frac{1}{\xi} \lim_{r \to \infty} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \left| \widehat{f}_{nv} \right| \right)^{k^*} \right\}^{1/k^*}$$

olacak şekilde $1 \leq \xi \leq 4$ sayısı vardır.

İspat Teorem 3.2 den $\left|N_q^\theta\right|$ ve $\left|N_p^\theta\right|_k$ uzayları birer BK-uzayları olduklarından teoremin ilk kısmı Wilansky (1984)[$p.57$] nin Teorem 4.2.8 den elde edilir. Şimdi A matrisinin normunu hesap etmek için (4.13) ile tanımlı $\widehat{F}$ matrisini ve Teorem 4.11 de tanımlanan

$$F_1 = E^{(k)} o T^{(p)} : \left|N_p^\theta\right|_k \to \ell_k, \quad F_2 = E^{(1)} o T^{(q)} : \left|N_q\right| \to \ell$$

operatörlerini göz önüne alalım. Böylece Teorem 4.11 den

$$x \in \left|N_p^\theta\right|_k \Leftrightarrow y = F_1(x) \in \ell_k$$

yani

$$\|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k} = \|y\|_{\ell_k}$$

yazılabilir. Ayrıca $A = F_2^{-1} o \widehat{F} o F_1$ bulunur. Buradan da Lemma 2.3.10 dan her $x \in \left|N_p^\theta\right|_k$ için

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\left(\left|N_p^\theta\right|_k, \left|N_q\right|\right)} &= \sup_{x \neq \theta} \frac{\left\|F_2^{-1} \widehat{F}\left(F_1(x)\right)\right\|_{\left|N_p\right|}}{\|x\|_{\left|N_p^\theta\right|_k}} \\
&= \sup_{y \neq \theta} \frac{\left\|\widehat{F}(y)\right\|_{\ell}}{\|y\|_{\ell_k}} \\
&= \left\|\widehat{F}\right\|_{(\ell_k, \ell)} = \frac{1}{\xi}\left\|\widehat{F}\right\|'_{(\ell_k, \ell)} \\
&= \frac{1}{\xi}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatın ilk kısmını tamamlar.

Teoremin son kısmının ispatı için $S = \left\{x \in \left|N_p^\theta\right|_k : \|x\| \leq 1\right\}$ kapalı birim yuvarını ele alalım. Bu durumda, $P_r : \ell \to \ell$ operatörü $P_r(y) = (y_0, y_1, ..., y_r, 0, ...)$ ve $\widehat{F}^{(r)} = \left(\tilde{f}_{n\nu}^{(r)}\right)$ matrisi

$$\tilde{f}_{n\nu}^{(r)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq r \\ \widehat{f}_{nv}, & n > r \end{cases}$$

olmak üzere Lemma 2.4.11-Lemma 2.4.13 ve Lemma 2.3.10 dan dolayı

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\chi} &= \chi\left(F_2 A S\right) = \chi\left(\widehat{F} F_1 S\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_{y\in F_1 S} \left\|\left(I - P_r\right)\widehat{F}(y)\right\|_{\ell} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\|\widehat{F}^{(r)}\right\|_{(\ell_k,\ell)} = \frac{1}{\xi}\lim_{r\to\infty}\left\|\widehat{F}^{(r)}\right\|'_{(\ell_k,\ell)} \\
&= \frac{1}{\xi}\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\xi \in [1,4]$ sayısı vardır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.12 göz önüne alınarak $\left(\left|N_p^{\theta}\right|_k, \left|N_q\right|\right)$ sınıfına ait kompakt operatörler aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

Sonuç 4.13 Teorem 4.12 in hipotezleri altında,

$$A \in \mathcal{K}\left(\left|N_p^{\theta}\right|_k, \left|N_q\right|\right) \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*} = 0.$$

Ayrıca Teorem 4.11 de özel olarak $n \geq 0$ ve $\alpha > -1$ için $P_n = A_n^{\alpha}$, $Q_n = A_n^{\delta}$,ve $\theta_n = n$ alınırsa $\left|N_p\right|_k = \left|C_\alpha\right|_k$, $\left|N_q^{\theta}\right| = \left|C_\delta\right|$ olur. Dolayısıyla Sarıgöl (2016) ün aşağıdaki sonucu elde edilir. Bu sonuç ise aynı zamanda $\alpha \geq 0$, $\delta = 1$, $k > 1$ ve $A = W$ için Mazhar (1971) ın sonucunu içerir.

Sonuç 4.14 $\alpha > -1, \delta > -1$, $1 < k < \infty$ ve $n, v \geq 0$ için $A = (a_{n\nu})$ kompleks terimli herhangi bir matris olsun. Ayrıca $\widehat{F} = \left(\widehat{f}_{nv}\right)$ matrisi

$$\widehat{f}_{nv} = \begin{cases} \frac{1}{nA_n^{\delta}}\sum_{j=1}^{n} jA_{n-j}^{\delta-1}a_{j0}, & n \geq 1, v = 0 \\ \frac{v^{1/k}A_v^{\alpha}}{nA_n^{\delta}}\sum_{j=1}^{n} jA_{n-j}^{\delta-1}\Delta^{\alpha}\left(\frac{a_{jv}}{v}\right), & n, v \geq 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu taktirde $A \in \left(\left|C_\alpha\right|_k, \left|C_\delta\right|\right)$ olması için gerek yeter şartlar

$$r \geq 1, v \geq 0 \text{ için } \Delta^{\alpha}\left(\frac{a_{vr}}{r}\right) \text{ mevcut,}$$

$$\sup_m \sum_{\nu=1}^{m}\left|v^{1/k}A_v^{\alpha}\sum_{r=v}^{m}A_{r-v}^{-\alpha-1}\frac{a_{jr}}{r}\right|^{k^*} < \infty, \ j \geq 0,$$

ve

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right\}^{k^*} < \infty$$

olmasıdır (Sarıgöl 2016). Üstelik, $A \in \left(\left|C_\alpha\right|_k, \left|C_\delta\right|\right)$ ise A matrisine sınırlı bir lineer operatör karşılık gelir ve

$$\|A\|_{\left(\left|C_\alpha\right|_k, \left|C_\delta\right|\right)} = \frac{1}{\xi}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right)^{k*}\right\}^{1/k^*}$$

olacak şekilde $1 \le \xi \le 4$ sayısı vardır.

Sonuç 4.15 $\alpha \ge 0,\ k > 1$ olsun.Bu durumda, $W \in \left(\left|C_\alpha\right|_k, \left|C_1\right|\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i)\quad \sum_{v=1}^{\infty} v^{(\alpha+1)k^*-1}\left|\Delta^\alpha\left(\frac{\varepsilon_v}{v}\right)\right|^{k^*} < \infty,$$

$$(ii)(a)\quad \sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\left|\epsilon_v\right|^{k^*} < \infty, \quad \alpha \le 1,$$

$$(ii)(b)\quad \sum_{v=1}^{\infty} v^{\alpha k^*-k^*-1}\left|\epsilon_v\right|^{k^*} < \infty, \quad \alpha > 1$$

olmasıdır (Mazhar 1971).

A matrisi yerine üçgensel matris alınırsa Teorem 4.11 Sarıgöl (2011) ve (Orhan ve Sarıgöl 1993) ün aşağıdaki sonucuna indirgenir.

Sonuç 4.16 $1 < k < \infty$ ve $n, v \ge 0$ için $A = (a_{n\nu})$ kompleks terimli herhangi bir üçgensel matris olsun. Ayrıca $\widehat{F} = \left(\widehat{f}_{nv}\right)$ matrisi $\widehat{f}_{00} = a_{00}$,

$$\widehat{f}_{nv} = \begin{cases} \sum_{m=v}^{n} \dfrac{q_n\theta_v^{-1/k^*}Q_{m-1}}{Q_nQ_{n-1}p_v}\left(P_v a_{mv} - P_{v-1,}a_{m,v+1}\right), & 1 \le v \le n \\ 0, & v > n \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu taktirde $A \in \left(\left|\overline{N}_p^\theta\right|_k, \left|\overline{N}_q\right|\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\sum_{n=v}^{\infty}\left|\widehat{f}_{nv}\right|\right)^{k^*} < \infty$$

olmasıdır. Üstelik $A \in \left(\left|\overline{N}_p^\theta\right|_k, \left|\overline{N}_q\right|\right)$ ise A matrisine bir sınırlı lineer operatör karşılık gelir ve

$$\|A\|_{\left(\left|\overline{N}_p^\theta\right|_k, \left|\overline{N}_q\right|\right)} = \frac{1}{\xi}\left\|\widehat{F}\right\|'_{(\ell_k,\ell)}$$

olacak şekilde $1 \le \xi \le 4$ sayısı vardır.

5. MUTLAK CESÀRO $|C,-1|_k$ UZAYI VE MATRİS OPERATÖRLERİ

Bu kısımda Cesàro ortalamasının içermediği ve Thorpe (1986) tarafından tanımlanan $(C,-1)$ ortalaması uygulanarak $|C_{-1}|_k$ uzayı tanımlanmış ve topolojik yapısı incelendikten sonra bu uzay üzerinde tanımlı bazı matris operatörleri karakterize edilmiştir. Böylece aynı zamanda Sarıgöl (2016) ün sonuçları $\alpha \geq -1$ aralığına genişletilmiştir.

Hardy (1949) tarafından da belirtildiği gibi (C,α) Cesàro ortalaması genel olarak $\alpha \geq -1$ için incelenir. Fakat bu ortalama $\alpha = -1$ için tanımlı olmadığından Thorpe (1986) tarafından ayrı olarak $(C,-1)$ Cesàro ortalaması aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$T_0 = a_0, T_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + (n+1)\, a_n, n \geq 1. \tag{5.1}$$

Eğer (T_n) dizisi bir s sayısına yakınsak ise Σa_n serisi s ye $(C,-1)$ toplanabilirdir denir. Ayrıca bilinen yolla mutlak $|C,-1|_k$ toplanabilmeyi tanımlayabiliriz. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|T_n - T_{n-1}\right|^k < \infty$$

ise bu seriye mutlak $|C,-1|_k$ toplanabilirdir denir. Şimdi bu yeni metotla toplanabilen serilerin kümesini tanımlayalım ve bu kümeyi $|C_{-1}|_k$ ile gösterelim. Bu durumda (5.1) den dolayı

$$|C_{-1}|_k = \left\{ a = (a_v) : \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|\Delta T_n\right|^k < \infty \right\}$$

veya

$$|C_{-1}|_k = \left\{ a = (a_\nu) : \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|\Delta (n a_n) + a_n\right|^k < \infty \right\}$$

yazılabilir. Aynı zamanda $B^{(k)} = (b_{nv}^{(k)})$ matrisi $b_{00}^{(k)} = 1$ ve

$$b_{nv}^{(k)} = \begin{cases} -n^{1/k^*}(n-1), & v = n-1 \\ n^{1/k^*}(n+1), & v = n \\ 0, & v \neq n, n-1 \end{cases} \tag{5.2}$$

olmak üzere (2.2.1) e göre $|C_{-1}|_k = (\ell_k)_{B^{(k)}}$ olur. Ayrıca her üçgensel matrisin tersi mevcut olduğundan Wilansky (1984) [p. 9], $B^{(k)}$ matrisinin bir $G^{(k)}$ tersi vardır. Bu matrisi hesap etmek için (5.1) ifadesini göz önüne alalım. Eğer $y_0 = a_0$

ve $n \geq 1$ için $y_n = n^{1/k^*}\left[(n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}\right]$ dersek bu durumda $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{v=1}^{n} v^{1/k} y_\nu$ olduğu kolayca görülür. Buradan da $G^{(k)}$ matrisi $g_{00}^{(k)} = 1$,

$$g_{nv}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\nu^{1/k}}{n(n+1)}, 1 \leq v \leq n \\ 0, \qquad v > n \end{cases} \tag{5.3}$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu bölümle ilgili teoremlere geçmeden önce gerekli notasyonları verelim:

$$\Gamma_1 = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sum_{v=r}^{\infty} g_{vr}^{(1)}\varepsilon_v \text{ yakınsak}, r \geq 1\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_{m,r}\left|\sum_{v=r}^{m} g_{vr}^{(1)}\varepsilon_v\right| < \infty\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_{m}\sum_{r=1}^{m}\left|\sum_{v=r}^{m} g_{vr}^{(k)}\varepsilon_v\right|^{k^*} < \infty\right\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sup_{\nu}\sum_{n=\nu}^{\infty}\left|g_{nv}^{(1)}\varepsilon_n\right| < \infty\right\},$$

$$\Gamma_5 = \left\{\varepsilon = (\varepsilon_v) \in w : \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=\nu}^{\infty}\left|g_{nv}^{(k)}\varepsilon_n\right|\right\}^{k^*} < \infty\right\}.$$

Teorem 5.1 $1 \leq k < \infty$ olsun . Bu taktirde

a-) $|C_{-1}|_k$, $B^{(k)}$ matrisi (5.2) ile tanımlı olmak üzere $\|x\|_{|C_{-1}|_k} = \left\|B^{(k)}(x)\right\|_{\ell_k}$ normuna göre bir BK- uzayıdır ve ℓ_k uzayına izomorftur, yani $|C_{-1}|_k \cong \ell_k$ dır.

b-) $1 < k < \infty$ için $|C_{-1}|_k^{\beta} = \Gamma_1 \cap \Gamma_3$ ve $k = 1$ için $|C_{-1}|^{\beta} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

c-) $1 < k < \infty$ için $|C_{-1}|_k^{\gamma} = \Gamma_3$ ve $k = 1$ için $|C_{-1}|^{\gamma} = \Gamma_2$.

d-) $1 < k < \infty$ için $|C_{-1}|_k^{\alpha} = \Gamma_5$ ve $k = 1$ için $|C_{-1}|^{\alpha} = \Gamma_4$.

e-) Eğer $v, n \geq 0$ için $\tau_n^{(v)} = g_{nv}^{(k)}$ ise $\left(\tau^{(v)}\right)$ dizisi $|C_{-1}|_k$ uzayının bir Schauder bazıdır.

İspat a-) ℓ_k uzayı doğal normuna göre bir BK-uzayı ve $|C_{-1}|_k = (\ell_k)_{B^{(k)}}$ ve

$B^{(k)}$ matrisi bir üçgensel matris olduğundan Wilansky (1984) [p. 61] Teorem 4.3.2 den $|C_{-1}|_k$ uzayı bir BK-uzayıdır.

Teoremin ikinci kısmını ispat etmek için her $x \in |C_{-1}|_k$ için

$$B_n^{(k)}(x) = n^{1/k^*}\left[(n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}\right], \ n \geq 1 \tag{5.4}$$

ile tanımlı

$$B^{(k)} : |C_{-1}|_k \to \ell_k$$

operatörünü göz önüne alalım. Bu operatörün lineer birebir ve örten olduğu açıktır. Örneğin, örtenliği için $y = B^{(k)}(x) \in \ell_k$ alınırsa $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v^{1/k} y_\nu \in |C_{-1}|_k$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$\left\|B^{(k)}(x)\right\|_{\ell_k} = \|x\|_{|C_{-1}|_k}$$

olduğundan normu korur. Bu ise ispatı tamamlar.

b-) $1 < k < \infty$ olsun. β dualinin tanımdan dolayı, $\varepsilon \in |C_{-1}|_k^\beta \iff \forall x \in |C_{-1}|_k$ için $\Sigma\varepsilon_n x_n$ serisi yakınsaktır. $y = B^{(k)}(x)$ olsun. Bu durumda, $y \in \ell_k \Leftrightarrow x \in |C_{-1}|_k$. Burada $x_0 = y_0$ ve $n \geq 1$ için $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v^{1/k} y_\nu$ dür. Dolayısıyla $\mu_{m0} = \varepsilon_0$ ve

$$\mu_{mr} = \begin{cases} \sum_{v=r}^{m} g_{vr}^{(k)} \varepsilon_v, 1 \leq r \leq m \\ 0, \quad r > m \end{cases} \tag{5.5}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{m} \varepsilon_\nu x_\nu &= \varepsilon_0 y_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varepsilon_v}{\nu(\nu+1)} \sum_{r=1}^{\nu} r^{1/k} y_r \\
&= \varepsilon_0 y_0 + \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{v=r}^{m} g_{vr}^{(k)} \varepsilon_v \right) y_r \\
&= \sum_{r=0}^{m} \mu_{mr} y_r
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 2.3.12 den

$$\varepsilon \in |C_{-1}|_k^\beta \Leftrightarrow \mu \in (\ell_k, c)$$

veya eşdeğer olarak, $\varepsilon \in D_1 \cap D_3$ dür. Bu da ispatı tamamlar.

(c) ve (d) nin ispatı (b) deki ispata benzer olarak yapılır.

e-) Eğer $x \in |C_{-1}|_k = (\ell_k)_{B^{(k)}}$ ise a-) dan dolayı $y = B^{(k)}(x)$ olacak şekilde bir tek $y \in \ell_k$ vardır ve aynı zamanda $v \geq 0$ için $x_v = \left(B^{(k)}\right)_v^{-1}(y)$ dır. Ayrıca $e^{(v)} = \left(e_n^{(v)}\right)$ olmak üzere $\left(e^{(v)}\right)$ dizisi ℓ_k uzayının bir bazı olduğundan

$$\left\| x - \sum_{v=0}^{m} x_v \tau^{(v)} \right\|_{|C_{-1}|_k} = \left\| y - \sum_{v=0}^{m} y_v e^{(v)} \right\|_{\ell_k} \to 0 \ (m \to \infty),$$

veya $x = \sum_{v=0}^{\infty} x_v \tau^{(v)}$ yazılabilir. Bu gösterimin tek olduğu ise üçgen eşitsizliğinden açıktır. Şu halde $\left(\tau^{(v)}\right)$ dizisi $|C_{-1}|_k$ nin bir bazıdır.

Aşağıdaki teoremler ile $|C_{-1}|_k$ uzayı üzerindeki bazı matris ve kompakt operatörler karakterize edilerek norm ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri belirlenmiştir.

Teorem 5.2 $1 \leq k < \infty$ ve $A = (a_{nv})$ her $n, v \geq 0$ için kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. $L = (l_{nr})$ ve $H = (h_{nv})$ matrislerini sırasıyla

$$l_{nr} = r \sum_{v=r}^{\infty} \frac{a_{nv}}{\nu(\nu+1)},$$

$$h_{nv} = n^{1/k^*}\left[(n+1)\, l_{n\nu} - (n-1)\, l_{n-1,\nu}\right], \ n \geq 1, v \geq 1 \tag{5.6}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde $A \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ olması için gerek ve yeter şart

$$L \text{ matrisi tanımlıdır,} \tag{5.7}$$

$$\sup_{m,r} \left| r \sum_{v=r}^{m} \frac{a_{nv}}{\nu(\nu+1)} \right| < \infty \ ; \ n \geq 0 \tag{5.8}$$

$$\sup_{v} \sum_{n=1}^{\infty} |h_{nv}|^k < \infty \tag{5.9}$$

olmasıdır.

İspat $A \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ olması için gerek ve yeter şart her n için $(a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in (|C_{-1}|)^{\beta}$ ve her $x \in |C_{-1}|$ için $A(x) \in |C_{-1}|_k$ olmasıdır. Ayrıca Teorem 5.1 (b) den

$$(a_{nv})_{v=0}^{\infty} \in (|C_{-1}|)^{\beta} \Leftrightarrow (a_{n\nu})_{\nu=0}^{\infty} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

veya eşdeğer olarak her n için (5.7) ve (5.8) koşulları sağlanır. Şimdi (5.9) şartını elde etmek için $k = 1$ için (5.4) ifadesini kullanarak

$$B_n^{(1)}(x) = (n+1)\, x_n - (n-1)\, x_{n-1} \tag{5.10}$$

ile tanımlı $B^{(1)} : |C_{-1}| \to \ell_1$ operatörünü göz önüne alalım. Teorem 5.1 de olduğu gibi $B^{(1)}$ operatörü bijektif ve bu operatöre karşılık gelen matris üçgenseldir.

Ayrıca $x \in |C_{-1}|$ verilsin. Bu durumda $n \geq 0$ için $y = B^{(1)}(x)$ olmak üzere $y \in \ell$ dir, ve böylece $x_0 = y_0$ ve $n \geq 1$ için $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{v=1}^{n} v y_\nu$, $(x_{-1} = 0)$ bulunur. Dolayısıyla $L^{(n)} = \left(l_{mr}^{(n)}\right)$ matrisi

$$l_{mr}^{(n)} = \begin{cases} r \sum_{v=r}^{m} \dfrac{a_{n\nu}}{\nu(\nu+1)}, 1 \leq \nu \leq m \\ \quad 0, \qquad \nu > m \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sum_{v=1}^{m} a_{nv} x_v = \sum_{r=1}^{m} \left(r \sum_{v=r}^{m} \frac{a_{n\nu}}{\nu(\nu+1)} \right) y_r = \sum_{r=1}^{m} l_{mr}^{(n)} y_r$$

yazılabilir. Öte yandan, herhangi bir $R = (r_{nv})$ matrisi için $R = (r_{nv}) \in (\ell, c)$ ise $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv} x_v$ serisi n ye göre düzgün yakınsaktır, çünkü Lemma 2.3.12 den dolayı serinin kalan terimi n ye göre düzgün olarak sıfıra gider yani

$$\left| \sum_{v=m}^{\infty} r_{nv} x_v \right| \leq \sup_{n,v} |r_{nv}| \sum_{v=m}^{\infty} |x_v| \to 0 \ \ (m \to \infty)$$

olur ve dolayısıyla

$$\lim_n R_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_n r_{nv} x_v \tag{5.11}$$

yazılabilir. Böylece (5.7) ve (5.8) sağlandığına göre $L^{(n)} = \left(l_{mr}^{(n)}\right) \in (\ell, c)$ olup (5.11) nedeniyle

$$A_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\lim_m l_{mr}^{(n)} \right) y_r = \sum_{r=0}^{\infty} l_{nr} y_r = L_n(y)$$

elde ederiz. Bu demektir ki her $x \in |C_{-1}|$ için $A(x) \in |C_{-1}|_k$ olması için gerek ve yeter şart her $y \in \ell$ için $L(y) \in |C_{-1}|_k$ olmasıdır ya da eşdeğer olarak $|C_{-1}|_k = (\ell_k)_{B^{(k)}}$ olduğundan

$$H = B^{(k)} L$$

olmak üzere $H(y) \in \ell_k$ olmasıdır. Böylece, $A \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k) \Leftrightarrow (5.7), (5.8)$ sağlanır ve $H \in (\ell, \ell_k)$ dir. Gerekli işlemler yapılırsa $H = (h_{nv})$ matrisi

$$h_{nv} = \sum_{r=1}^{n} b_{nr}^{(k)} l_{r\nu} = n^{1/k^*} \left[(n+1) l_{n\nu} - (n-1) l_{n-1,\nu} \right], \quad v, n \geq 1$$

olarak elde edilir. Böylece Lemma 2.3.11 den $H \in (\ell, \ell_k) \Leftrightarrow (5.9)$ sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3 $1 \leq k < \infty$ ve $A = (a_{nv})$ her $n, v \geq 0$ için kompleks terimli sonsuz bir matris olsun.Ayrıca $H = (h_{nv})$ matrisi (5.6) ile tanımlansın. Eğer

$A \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ ise bu taktirde A matrisi bir sınırlı lineer operatöre karşılık gelir ve üstelik

$$\|A\|_{(|C_{-1}|,|C_{-1}|_k)} = \sup_v \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |h_{nv}|^k \right\}^{1/k}$$

$$\|A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \sup_v \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} |h_{nv}|^k \right\}^{1/k}$$

dır.

İspat Teorem 5.1 den $|C_{-1}|$ ve $|C_{-1}|_k$ uzayları BK-uzayları olduklarından teoremin ilk kısmı Wilansky (1984)(p.57) nin Teorem 4.2.8 den elde edilir.

Şimdi A nın normunu hesap edelim. Bunun için H matrisini (5.6) ve

$$B^{(1)} : |C_{-1}| \to \ell, B^{(k)} : |C_{-1}|_k \to \ell_k$$

izomorfizimlerini sırasıyla (5.10) ve (5.4) ile tanımlayalım. Bu durumda $A = \left(B^{(k)}\right)^{-1} \circ H \circ B^{(1)}$ elde edilir. Ayrıca

$$x \in |C_{-1}| \Leftrightarrow y = B^{(1)}(x) \in \ell$$

dir. Şu halde Lemma 2.3.11 den dolayı

$$\begin{aligned}
\|A\|_{(|C_{-1}|,|C_{-1}|_k)} &= \sup_{x\neq\theta} \frac{\left\|G^{(k)}(H(B^{(1)}(x)))\right\|_{|C_{-1}|_k}}{\|x\|_{|C_{-1}|}} \\
&= \sup_{y\neq\theta} \frac{\|(H(y))\|_{\ell_k}}{\|y\|_\ell} \\
&= \|H\|_{(\ell,\ell_k)} \\
&= \sup_v \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |h_{nv}|^k \right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teoremin son kısmının ispatı için $S = \{x \in |C_{-1}| : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını ele alalım. Bu durumda Lemma 2.4.11- Lemma 2.4.13 göz önüne alınırsa $P_r : \ell_k \to \ell_k$ operatörü $P_r(y) = (y_0, y_1, ..., y_r, 0, ...)$ ve $H^{(r)} = \left(\bar{h}^{(r)}_{n\nu}\right)$ matrisi

$$\bar{h}^{(r)}_{n\nu} = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq r \\ h_{nv}, & n > r \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|A\|_\chi &= \chi(AS) = \chi\left(B^{(k)}AS\right) = \chi\left(HB^{(1)}S\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_{y\in B^{(1)}S} \|(I - P_r) H(y)\|_{\ell_k} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\|H^{(r)}\right\|_{(\ell,\ell_k)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_v \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} |h_{nv}|^k \right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Lemma 2.3.11 den istenen elde edilir.

Teorem 5.3 ve Lemma 2.4.12 göz önüne alınarak $(|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ sınıfındaki kompakt operatörler aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Sonuç 5.4 Teorem 5.3 nin hipotezleri altında,

$$A \in \mathcal{K}(|C_{-1}|, |C_{-1}|_k) \Leftrightarrow \|A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \sup_v \left\{ \sum_{n=r+1}^{\infty} |h_{nv}|^k \right\}^{1/k} = 0.$$

Eğer A matrisini özel olarak W veya I matrisi olarak seçersek bu durumda $W \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ olması Σx_v serisi $|C, -1|$ toplanabilir olduğunda $\Sigma\varepsilon_v x_v$ serisinin $|C, -1|_k$ toplanabilir olması veya $I \in (|C_{-1}|, |C_{-1}|_k)$ ise bu metotların karşılaştırılması anlamına gelir yani $|C_{-1}| \subset |C_{-1}|_k$ olur. Öte yandan eğer Teorem 5.2 de $A = I$ alınırsa $L = (l_{nr})$ ve $H = (h_{nv})$ matrisleri

$$l_{nr} = \begin{cases} \dfrac{r}{n(n+1)}, & 1 \le r \le n \\ 0, & n < r \end{cases}$$

ve

$$h_{nv} = \begin{cases} n^{1/k^*}\left[(n+1)\, l_{n\nu} - (n-1)\, l_{n-1,\nu}\right], & 1 \le v \le n \\ 0, & v > n, \end{cases}$$

olarak elde edilir. Böylece $(5.7), (5.8)$ ve (5.9) koşulları sağlanacağından Teorem 5.2 den aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 5.5 Eğer $1 \le k < \infty$ ise $|C_{-1}| \subset |C_{-1}|_k$.

Teorem 5.6 $1 < k < \infty$ ve $A = (a_{nv})$ her $n, v \ge 0$ için kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. $L = (l_{n\nu})$ matrisini Teorem 5.2 de olduğu gibi ve $\hat{H} = \left(\hat{h}_{n\nu}\right)$ matrisi

$$\hat{h}_{n\nu} = \nu^{-1/k^*}\left[l_{n\nu} + \Delta_n(n l_{n\nu})\right], \ \nu \ge 1, n \ge 1, \tag{5.12}$$

ile tanımlayalım. Bu taktirde $A \in (|C_{-1}|_k, |C_{-1}|)$ olması için gerek ve yeter şart (5.7) ile birlikte

$$\sup_m \sum_{r=1}^{m} \left| r^{1/k} \sum_{v=r}^{m} \frac{a_{n\nu}}{\nu(\nu+1)} \right|^{k^*} < \infty, \tag{5.13}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \hat{h}_{n\nu} \right| \right)^{k^*} < \infty \tag{5.14}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat $A \in (|C_{-1}|_k, |C_{-1}|) \Leftrightarrow$ Her bir n için $(a_{n\nu})_{\nu=0}^{\infty} \in (|C_{-1}|_k)^{\beta}$ ve her $x \in |C_{-1}|_k$ için $A(x) \in |C_{-1}|$ dir. Dikkat edilirse Teorem 5.1(b) den, her n için $(a_{n\nu})_{\nu=0}^{\infty} \in (|C_{-1}|_k)^{\beta} \Leftrightarrow (a_{n\nu})_{\nu=0}^{\infty} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$. Buradan da, $(a_{n\nu})_{\nu=0}^{\infty} \in (|C_{-1}|_k)^{\beta} \Leftrightarrow$ (5.7) ve (5.13) koşulları sağlanır. Ayrıca (5.14) koşulunu elde etmek için $B^{(k)} : |C_{-1}|_k \to \ell_k$ operatörünü (5.4) ile tanımlayalım. Bu durumda, $B^{(k)}(x) = y$ olmak üzere $|C_{-1}|_k$ uzayı ℓ_k uzayına izomorf olduğundan

$$x \in |C_{-1}|_k \Leftrightarrow y \in \ell_k$$

olur. Aynı zamanda $y_0 = x_0$ ve $n \geq 1$ için

$$y_n = B_n^{(k)}(x) = n^{1/k^*}\left[(n+1)x_n - (n-1)x_{n-1}\right], x_{-1} = 0$$

yazılabilir. Böylece $L^{(n)} = \left(l_{mr}^{(n)}\right)$ Teorem 5.2 de verilen matris ve $F^{(n)} = \left(\overline{f}_{mr}^{(n)}\right)$

$$\overline{f}_{mr}^{(n)} = \begin{cases} r^{-1/k^*} l_{mr}^{(n)}, 1 \leq r \leq m \\ 0, \qquad r > m \end{cases}$$

matrisi olmak üzere Teorem 5.2 nin ispatında olduğu gibi (5.3) den

$$\sum_{v=1}^{m} a_{nv}x_v = \sum_{r=1}^{m} r^{-1/k^*} l_{mr}^{(n)} y_r = \sum_{r=1}^{m} \overline{f}_{mr}^{(n)} y_r$$

elde ederiz. Diğer taraftan herhangi bir $R = (r_{nv})$ matrisi için $R \in (\ell_k, c)$ ise Lemma 2.3.12 den $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv}x_v$ serisinin kalan terimi n ye göre düzgün olarak sıfıra gittiğinden $R_n(x) = \Sigma_v r_{nv}x_v$ serisi n ye göre düzgün yakınsaktır. Gerçekten, $x \in \ell_k$ olduğuna göre Hölder eşitsizliği nedeniyle

$$\left|\sum_{v=m}^{\infty} r_{nv}x_v\right| \leq \sup_n \left(\sum_{v=0}^{\infty} |r_{nv}|^{k^*}\right)^{1/k^*} \left(\sum_{v=m}^{\infty} |x_\nu|^k\right)^{1/k} \to 0 \ (m \to \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_n R_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_n r_{nv}x_v \tag{5.15}$$

yazılabilir. Öte yandan (5.7) ve (5.13) şartlarından $F^{(n)} = \left(\overline{f}_{mr}^{(n)}\right) \in (\ell_k, c)$ olduğu açıktır ve böylece $\overline{F}_n = \left(\overline{f}_{nr}\right)$ matrisi $\overline{f}_{nr} = \lim_m \overline{f}_{mr}^{(n)}$ ile tanımlı olmak üzere (5.15) den

$$A_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\lim_m \overline{f}_{mr}^{(n)}\right) y_r = \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1/k^*} l_{nr} y_r = \sum_{r=1}^{\infty} \overline{f}_{nr} y_r = \overline{F}_n(y), \ n \geq 1$$

elde edilir. Bu demektir ki her $x \in |C_{-1}|_k$ için $A(x) \in |C_{-1}|$ olması için gerek ve yeter şart her $y \in \ell_k$ için $\overline{F}(y) \in |C_{-1}|$ olmasıdır, veya (2.2.1) den $|C_{-1}| = (\ell)_{B^{(1)}}$

olduğundan eşdeğer olarak $\left(B^{(1)}\overline{F}\right)(y) \in \ell$ olmasıdır. Dolayısıyla $\hat{H} = B^{(1)}\overline{F}$ olmak üzere $\hat{H} \in (\ell_k, \ell)$ bulunur. Şu halde $A \in (|C_{-1}|_k, |C_{-1}|) \Leftrightarrow (5.7), (5.13)$ şartları sağlanır ve $\hat{H} \in (\ell_k, \ell)$ dir. Öte yandan Lemma 2.3.10 dan dolayı $\hat{H} \in (\ell_k, \ell)$ şartı (5.14) şartına denktir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.7 $1 < k < \infty$ ve $A = (a_{nv})$ her $n, v \geq 0$ için kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Ayrıca $\hat{H} = \left(\hat{h}_{n\nu}\right)$, (5.12) ile tanımlı matris olsun. Eğer $A \in (|C_{-1}|_k, |C_{-1}|)$ ise bu taktirde A matrisi bir sınırlı lineer operatöre karşılık gelir ve

$$\|A\|_{\left(|C_{-1}|_k, |C_{-1}|\right)} = \frac{1}{\xi}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{h}_{n\nu}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}$$

ve

$$\|A\|_{\chi} = \frac{1}{\xi}\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\hat{h}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}$$

olacak şekilde $\xi \in [1, 4]$ sayısı vardır.

İspat Teorem 5.1 den $|C_{-1}|$ ve $|C_{-1}|_k$ uzayları BK-uzayları olduklarından teoremin ilk kısmı Wilansky (1984)(p.57) nin Teorem 4.2.8 den elde edilir.

Şimdi A nın normunu hesap etmek için (5.12) ile tanımlı $\hat{H} = \left(\hat{h}_{n\nu}\right)$ matrisini ve (5.4) ve (5.10) ile tanımlı

$$B^{(k)} : |C_{-1}|_k \to \ell_k, B^{(1)} : |C_{-1}| \to \ell$$

izomorfizmlerini göz önüne alalım. Bu durumda $A = G^{(1)} o \hat{H} o B^{(k)}$ elde edilir. Aynı zamanda $x \in |C_{-1}|_k \Leftrightarrow y = B^{(k)}(x) \in \ell_k$ dir. Dolayısıyla Lemma 2.3.10 dan

$$\begin{aligned}\|A\|_{\left(|C_{-1}|_k, |C_{-1}|\right)} &= \left\|\hat{H}\right\|_{(\ell_k, \ell)} = \frac{1}{\xi}\left\|\hat{H}\right\|'_{(\ell_k, \ell)} \\ &= \frac{1}{\xi}\left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{h}_{n\nu}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}\end{aligned}$$

olacak şekilde $1 \leq \xi \leq 4$ vardır.

Teoremin son kısmının ispatı için $S = \{x \in |C_{-1}|_k : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını ele alalım. Bu durumda Lemma 2.4.11-Lemma 2.4.13 ve Lemma 2.3.10

u göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\chi} &= \chi\left(B^{(1)}AS\right) = \chi\left(\hat{H}B^{(k)}S\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \sup_{y\in B^{(k)}S} \left\|\left(I-P_r\right)\hat{H}(y)\right\|_{\ell} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\|\tilde{H}^{(r)}\right\|_{(\ell_k,\ell)} \\
&= \frac{1}{\xi}\lim_{r\to\infty} \left\|\tilde{H}^{(r)}\right\|'_{(\ell_k,\ell)} \\
&= \frac{1}{\xi}\lim_{r\to\infty} \left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\hat{h}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*}
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\xi \in [1,4]$ sayısı vardır. Burada $P_r(y) = (y_0, y_1, ..., y_r, 0, ...)$ ile $P_r : \ell \to \ell$ operatörünü ve $\tilde{H}^{(r)} = \left(\tilde{h}_{n\nu}^{(r)}\right)$ ile

$$\tilde{h}_{n\nu}^{(r)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq r \\ \hat{h}_{n\nu}, & n > r \end{cases}$$

ile tanımlı matrisi göstermektedir. Bu ise Lemma 2.3.10 dan teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.7 göz önüne alınarak $(|C_{-1}|_k, |C_{-1}|)$ sınıfına ait kompakt operatörler aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

Sonuç 5.8 Teorem 5.7 nin hipotezleri altında,

$$A \in \mathcal{K}\left(|C_{-1}|_k, |C_{-1}|\right) \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \left\{\sum_{v=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\hat{h}_{nv}\right|\right)^{k^*}\right\}^{1/k^*} = 0 \, .$$

6. KAYNAKLAR

Başar, F., *Summability Theory and Its Applications*, Bentham Science Publishers, İstanbul, (2011).

Bor, H., "On the relative strength of two absolute summability methods", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113, 1009-1012, (1991).

Bor, H., "On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability factors of infinite series", *Tamkang J., Math.*, 16, 13-20, (1985).

Bor, H. and Thorpe, B., "On some absolute summability methods", *Analysis 7 (2)*,145-152, (1987).

Borwein, D. and Cass, F.P., "Strong Nörlund summability", *Math. Zeitschr.* 103, 94– 111, (1968).

Boss, J. and Peter, C., *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, (2000).

Bosanquet, L.S., "Note on convergence and summability factors I", *J. London Math. Soc.,* 20, 39-48, (1945).

Bosanquet, L.S. and Chow, H. C., "Some remarks on convergence and summability factors", *J. London Math. Soc.,* 32,73-82, (1957).

Bosanquet, L.S. and Das,G., "Absolute Summability Factors for Nörlund Means", *Proc. London Math. Soc.*, (3) 38, no.1, 1-52, (1979).

Chow, H. C., "Note on convergence and summability factors", *J. London Math. Soc.,* 29, 459-476, (1954).

Darbo, G., "Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto", *Rend. Sem. Math.Univ. Padova,* 24, 84–92, (1955).

Das, G., "A Tauberian theorem for absolute summability", *Proc. Cambridge Philos.,* 67, 321-326, (1970).

Fekete, M., "Zur Theorie der divergenten Reihen", *Math. ès Termesz Èrtesitö* (Budapest), 29, 719-726, (1911).

Hardy, G. H., *Divergent Series*, Oxford University Press, London (1949).

Kogbetliantz, E., "Sur lesseries absolument sommables par la methods des moyannes arithmetiques", *Bull. des Sci. Math.,* 49, 234-256, (1925).

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, (1978).

Kuttner, B., "Some remarks on summability factors", *Indian J. Pure Appl. Math.,* 16 (9), 1017-1027, (1985).

Maddox, I. J., *Elements of functinal analysis,* Cambridge University Press, London, New York, (1970).

Malkowsky, E., "Compact matrix operators between some BK spaces", in: M. Mursaleen (Ed.), *Modern Methods of Analysis and its Applications*, Anamaya Publ., New Delhi, 86-120, (2010)

Malkowsky, E. and Rakočević, V., "On matrix domain of triangles", *Appl. Math. Comp.* 189(2), 1146-1163, (2007).

Malkowsky E., Rakočević V. and Živković, S., Matrix transformations between the sequence spaces $w_0^p(\Lambda)$, $v_0^p(\Lambda)$, $c_0^p(\Lambda)$ $(1 < p < \infty)$ and certain BK spaces, *Appl. Math. Comput.*, 147 (2), 377-396, (2004).

Malkowsky E., Rakočević V. and Živković, S., "Matrix Transformations Between the Sequence Space BV^P and Certain BK spaces", *Bulletin T.CXXIII de l' Academie Serbe des Science et des Arts*, No. 27, 34-46, (2002).

Malkowsky, E. and Rakočević, V., "An introduction into the theory of sequence space and measures of noncompactness", *Zb. Rad. (Beogr)* 9, (17), 143-234, (2000).

Mazhar, S. M., "On the absolute summability factors of infinite series", *Tohoku*

*Math. J.,*23, 433-451, (1971).

Mears, M. F., "Absolute Regularity and the Nörlund Mean", *Annals of Math.,* 38 (3), 594-601, (1937).

Mehdi, M. R., "Summability factors for generalized absolute summability I", *Proc. London Math. Soc.,* (3) 10, 180-199, (1960).

McFadden, L., "Absolute Nörlund summability", *Duke Math. J., 9,* 168-207, (1942).

Mohapatra, R. N. and Das, G., "Summability factors of lower-semi matrix transformations", *Monatshefte für Mathematika,* 79, 307-3015, (1975).

Mursaleen, M., Karakaya, V., Polat, H. and Şimşek, N., "Measure of noncompactness of matrix operators on some difference sequence spaces of weighted means" *Comput. Math. Appl.*, 62 (2), 814-820, (2011).

Mursaleen, M., *Elements of Metric Spaces*, Anamaya Publishers, New Delhi, (2011).

Okuyama, Y., *Absolute Summability of Fourier Series and Orthogonal Series*, Springer-Verlag, Berlin, 1-118, (1984).

Orhan, C. and Sarıgöl, M. A., "On absolute weighted mean summability", *Rocky Moun. J. Math.,* 23 (3), 1091-1097, (1993).

Rakočević, V., "Measures of noncompactness and some applications", *Filomat*, 12, 87-120, (1998).

Sarıgöl, M. A., "Spaces of Series Summable by Absolute Cesàro and matrix operators", *Comm. Math Appl.*, 7(1), 11-22, (2016*).*

Sarıgöl, M. A., "Extension of Mazhar's theorem on summability factors", *Kuwait Journal of Sciences*, 42(2), 28-35, (2015).

Sarıgöl, M. A., "Matrix operators on A_k", *Math. Comp. Model.*, 55, 1763-1769, (2012).

Sarıgöl, M. A., "On local properties of factored Fourier series", *App. Math. Comput.*, 216, 3386-3390, (2010).

Sarıgöl, M. A., "Matrix transformatins on fields of absolute weighted mean summability", *Studia Sci. Math. Hungar.,* 48 (3), 331-341, (2011).

Sarıgöl, M. A. and Bor, H., "Characterization of absolute summability factors", *J. Math. Anal. Appl.,* 195, 537-545, (1995).

Sarıgöl, M. A., "On two absolute Riesz summability factors of infinite series", *Proc. Amer. Math. Soc.,* 118, 485-488, (1993).

Sarıgöl, M. A., "A note on summability", *Studia Sci. Math. Hungar.,* 28, 395-400, (1993).

Sarıgöl, M. A., "On the absolute Riesz summability factors of infinite series", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 23, 881-886 (1992).

Sarıgöl, M. A., "On absolute weighted mean summability methods", *Proc. Amer. Math. Soc.,* 115 (1), 157-160, (1992).

Sarıgöl, M. A., "Necessary and sufficient conditions for the equivalence of the summability methods $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ and $|C,1|_k$", *Indian J. Pure Appl. Math.,* 22(6), 483-489, (1991).

Peyerimhoff, A., "Summierbarkeitafaktoren für absolut Cesàro-summiarbare Reiben", *Math. Z.*, 59, 417-424, (1954).

Stieglitz, M. and Tietz, H., "Matrixtransformationen von Folgenraumen Eine Ergebnisüberischt", *Math Z.,* 154, 1-16, (1977).

Sulaiman, W.T., "On summability factors of infinite series", *Proc. Amer. Math. Soc.,* 115, 313-317, (1992).

Sunouchi, G., "Notes on Fourier analysis, XVIII, Absolute summability of a series with constant terms", *Tôhoku, Math. Jour.*, 1(2), 57-65, (1949).

Şuhubi, E.S., *Fonsiyonel Analiz*, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı No:38, s638, (2001).

Thorpe, B., "Matrix Transformations of Cesàro Summable Series", *Acta Math. Hung.*, 48(3-4), 255-265, (1986).

Umar, S. and Khan, H. H., "On $|N_p, \gamma, \alpha|_k$ summability of infinite series", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 8, 752-757, (1977).

Wilansky, A., *Functional Analysis*, Blaisdell Publishing Company, New York, s291, (1964).

Wilansky, A., *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematical Studies, vol. 85, Elsevier Science Publisher*, (1984).*

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Güllü Canan HAZAR GÜLEÇ

Lisans Üniversite : İstanbul Üniversitesi

Y. Lisans (Tezsiz) : Marmara Üniversitesi

Y. Lisans (Tezli) : Pamukkale Üniversitesi

Elektronik Posta : gchazar@pau.edu.tr

İletişim Adresi : Pamukkale Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Kat:2, Denizli

Yayın Listesi :

·Hazar, G. C. and Sarıgöl M. A., "On absolute Nörlund spaces and matrix operators", Acta Mathematica Sinica, English Series (accepted).(SCI-expanded)

·Hazar, G. C. and Sarıgöl M. A., "Compact and Matrix Operators on the Space $|C,-1|_k$", Journal of Computational Analysis and Applications, 25(6), 1014-1024, (2018).(SCI-expanded)

· Hazar, G. C. and Gökçe, F., "On summability methods $|A_f|_k$and $|C,0|_s$ ", Bulletin of Mathematical Analysis and Application, 8 (1), 22-26, (2016).(ESCI)

· Hazar, G. C. and Gökçe, F., Characterizations of Matrix Transformations on the Series Spaces Derived by Absolute Factorable Summability, 411-426, (2016)

Bildiriler :

·Hazar Güleç, G.C. and Sarıgöl, M. A., "Summability Factor Relations Between Absolute Weighted and Nörlund ", 15th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017), 2017, Selanik.

·Hazar Güleç, G.C. and Sarıgöl, M. A., "Compactness of matrix operators on absolute Nörlund summability spaces", 3. International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications (SDEA3), 2017, İstanbul.

·Hazar Güleç, G.C. and Sarıgöl M. A., "Hausdorff measure of noncompactness of matrix mappings on Cesàro spaces", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2017), 2017, İstanbul.

·Hazar Güleç, G.C. and Sarıgöl, M. A., "Compact Operators in Generalized Absolute Cesàro Summability Spaces", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), 2017, İstanbul.

·Hazar, G.C. and Sarıgöl, M. A., "Generalized absolute Cesàro Summability Spaces and Matrix Operators", 2. International Conference on Analysis and its Applications (ICAA 2016), 2016, Kırşehir.

· Hazar, G.C. and Sarıgöl, M.A., “Absolute Cesàro Series Spaces and Matrix Operators”, 3. International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016), 2016, Bodrum.

·Sarıgöl, M. A. and Hazar, G.C., "On Summability Field of Normal Matrix Methods", 28. Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS 2015), 2015, Antalya.