T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATROİD YAPILARI VE KABA KÜMELER

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

BURDUR, 2018

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATROİD YAPILARI VE KABA KÜMELER

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

Danışman: Doç. Dr. Sadık BAYHAN

BURDUR, 2018

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU tarafından Doç. Dr. Sadık BAYHAN yönetiminde hazırlanan **"Matroid Yapıları ve Kaba Kümeler"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 10/12/2018

Prof. Dr. Murat DİKER (Başkan)
Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı…..………………………………....(İmza)

Prof. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı……………..…....(İmza)

Doç. Dr. Sadık BAYHAN (Danışman)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı……………..…....(İmza)

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)

Doç Dr. Ayşe Gül MUTLU GÜLMEMİŞ

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Matroid Yapıları ve Kaba Kümeler”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

10 / 12 / 2018

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol göstererek destek olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Sayın Sadık BAYHAN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL'e,

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her alanda destek olan Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ülkü BAYHAN'a,

Çok değerli bilgi birikimi ve deneyimi ile destek olan Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Murat DİKER'e,

Çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen, eski Burdur Belediye Başkanı Çetin BOZCU'ya, İnanç YILMAZ'a, Özgür Emrah ŞAHİN'e, Nilay ULUÇAY'a, Elif ACAR'a, Ali Remzi BAYTAROĞLU'na,

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Farabi Kurum Koordinatörlüğü'ne ve koordinatörlük çalışanı Şebnem İNAL'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2018 **Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL DİZİNİ

ÇİZELGE DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$ - *DMK*	:$\mathcal{A}$ - Ayrışım tarafından indirgenen düzgün matroid
$apr = (U, R)$	:Yaklaşım uzayı
$\underline{apr}$	:Pawlak alt yaklaşım operatörü
$\overline{apr}$	:Pawlak üst yaklaşım operatörü
$\mathcal{A}$	:Ayrışım kümesi
$\mathcal{B}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$	:$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın tabanlar ailesi
$\mathcal{B}(M)$	:M matroidinin tabanlar ailesi
$\mathcal{B}\left(M_{\mathcal{U}(P)}\vert_X\right)$	:$M_{\mathcal{U}(P)}\vert_X$ in tabanlar ailesi
$\mathcal{B}\left(\mathbb{U}_{1,\vert T_i\vert}\right)$	:$\mathbb{U}_{1,\vert T_i\vert}$ düzgün matroidin tabanlar ailesi
$BN_R(X)$	:X kümesinin R bağıntısına göre sınır bölgesi
$boy(V)$	:V vektör uzayının boyutu
$\mathbb{C}$	:Karmaşık sayılar kümesi
cl	:Kapanış operatörü
cl_M	:M matroidine göre kapanış operatörü
cl_{M_P}	:$M_P[\mathcal{A}]$ nin kapanış operatörü
$cl_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$	:$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın kapanış operatörü
$cl_{\mathbb{U}_{1,\vert T_i\vert}}$	:Düzgün matroidin kapanış operatörü
$\mathcal{C}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$	:$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın devreler ailesi
$\mathcal{C}(M)$	:M matroidinin devreler kümesi
$\mathcal{C}\left(\mathbb{U}_{1,\vert T_i\vert}\right)$	: $\mathbb{U}_{1,\vert T_i\vert}$ düzgün matroidin devreler ailesi
$\mathcal{D}_R$	:R bağıntısına göre tanımlanabilir kümeler ailesi
$D(M)$	:M matroidinin bağımlı kümeler ailesi
$\mathcal{E}(G)$	:Bir G çizgesinin kenar noktaları
f_R	:Üst yaklaşım sayısal fonksiyonu
H_R	:Öncül üst yaklaşım operatörü
$\mathcal{I}(M)$	:Bağımsız kümeler ailesi
$\mathcal{I}(R)$	:Üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile oluşan matroidin bağımsız küme ailesi

$\mathcal{I}_{T_i}$	: T_i denklik sınıfının bağımsız altkümeler ailesi
$\mathcal{I}_X$	:$M_{\mathcal{U}(P)}\|_X$ in bağımsız ailesi
$\mathcal{L}_M$	:M matroidinin kapalı kümeler ailesi
L_R	:Ardıl alt yaklaşım operatörü
$\underline{M}$	:Matroid alt yaklaşım operatörü
$\overline{M}$	:Matroid üst yaklaşım operatörü
$M_P[\mathcal{A}]$	:Pawlak matroidi
$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$	:Ayrışım matroidi
$M = (U, \mathcal{I})$	:Matroid
$M(G)$	:G çizgesinden elde edilen döngü matroidi
$M(R)$	:Üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile oluşan matroid
$M[A]$	:Vektörel matroid
$M\|X$	:X kümesine göre kısıtlanmış matroid
$max(\mathcal{M})$	:$\mathcal{M}$ ailesinin maksimal elemanı
$min(\mathcal{M})$	:$\mathcal{M}$ ailesinin minimal elemanları
$\mathbb{N}^+$	:Sayma sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$NEG_R(X)$	:X kümesinin R bağıntısına göre negatif bölgesi
$opp(\mathcal{M})$	:$\mathcal{M}$ ailesine ait olmayan elemanlar kümesi
$P(U)$	:U evrensel kümesinin kuvvet (güç) kümesi
$POS_R(X)$	:X kümesinin R bağıntısına göre pozitif bölgesi
$\mathbb{Q}$	:Rasyonel sayılar kümesi
$rank(A)$	:A matrisinin rankı
r_{M_P}	:$M_P[\mathcal{A}]$ nin rank fonksiyonu
$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$	:$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın rank fonksiyonu
$r_{\mathbb{U}_{1,\|T_i\|}}$	:Düzgün matroidin rank fonksiyonu
r_M	:M matroidinin rank fonksiyonu
$r_{M(R)}$	:Üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile oluşan matroidin rank fonksiyonu
$\mathbb{R}$	:Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	:İki boyutlu gerçel vektör uzayı (Düzlem)
$\mathbb{R}^3$	:Üç boyutlu gerçel vektör uzayı (Uzay)
$\mathbb{R}^4$	:Dört boyutlu gerçel vektör uzayı

R_p	:Öncül komşuluk operatörü
R_s	:Ardıl komşuluk operatörü
$\mathcal{S}(M)$	:M matroidinin germe ailesi
$\mathcal{S}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$	:$M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın germe kümelerinin ailesi
$\mathcal{S}(\mathbb{U}_{1,\, \lvert T_i \rvert})$	: $\mathbb{U}_{1,\, \lvert T_i \rvert}$ düzgün matroidi germe ailesi
U/R	:Bölüm kümesi
$U \setminus X$	:U evrensel kümesine göre X kümesinin tümleyeni
$U(M)$	:Temel küme
$\mathbb{U}_{1,\, \lvert T_i \rvert}$	:Düzgün matroid
$\mathcal{U}(\mathcal{A})$	:Ayrışım tarafından indirgenen düzgün matroid kümesi
$\mathcal{V}(G)$	:Bir G çizgesinin köşe noktaları
$\vec{v}$	:Vektör
$V(m, F)$	:F cismi üzerinde m boyutlu vektör uzayı
xRy	:x öğesi y öğesiyle R bağıntısına göre ilişkilidir
$\vec{0}$	:Her bileşeni 0 olan vektör
$A \subset B$	:A kümesi B kümesinin öz altkümesidir
$A \not\subset B$	:A kümesi B kümesinin öz altkümesi değildir
$A \supset B$	:B kümesi A kümesinin öz altkümesidir
$A \subseteq B$	:A kümesi B kümesinin altkümesidir
$A \nsubseteq B$	:A kümesi B kümesinin altkümesi değildir
$A \cap B$	:A ve B kümesinin kesişimi
$A \cup B$	:A ve B kümesinin birleşimi
$\bigcup A$	:Küme ailesinin birleşimi
$A \times B$	:A ve B kümesinin kartezyen çarpımı
$[x]_R$	:x öğesinin R denklik bağıntısına göre denklik sınıfı
$\lvert A \rvert$	:A kümesinin eleman sayısı
$(F, +)$	:Toplamsal grup
$(F, +, \cdot)$	:Cisim
:	:Öyle ki
$\bigoplus$	:Direk toplam
$=$	:Eşit
$\neq$	:Eşit değil

$\forall$	:Her
$\exists$	:Vardır
$\emptyset$	:Boş küme
ε_i	:i inci adımdaki elementer satır işlemi
$\in$	:Elemanıdır
$\notin$	:Elemanı değildir
$\wedge$	:Ve
$\vee$	:Veya
$\approx$	:Eşdeğer
$\cong$	:Eş yapı
$<$	:Küçük
$>$	:Büyük
$\leq$	:Küçük ya da eşittir
$\geq$	:Büyük ya da eşittir
$\longrightarrow$	:Dönüşüm
$\longmapsto$	:Dönüşüm altında görüntü
$\Leftrightarrow$	:Gerek ve yeter koşul
$\Longrightarrow$	:Gerektirir
$\Longleftarrow$	:Yeter
$(a) :\Leftrightarrow (b)$	:Eşitliğin sol tarafındaki ifade (a), eşitliğin sağ tarafındaki ifade (b) ile tanımlanmıştır
$-$	:Çıkarma işlemi
$+$	:Toplama işlemi
$\cdot$	:Çarpma işlemi
Ψ	:Psi
$\square$	:Kanıtların sonu bu sembol ile belirtilecektir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Matroid Yapıları ve Kaba Kümeler

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sadık BAYHAN

Aralık, 2018

Matematik alanında matroid kavramı vektör uzaylarında doğrusal bağımsızlığı genelleştiren bir yapıdır. Kaba küme teorisi belirsizlik için bir matematiksel araçtır. Bu tez çalışmasında kaba küme teorisi ile matroid teorisinin temel kavramları verilmiştir. Her iki teori arasında var olan ilişkiler temel kavramlara dayalı olarak ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir. Bir bağıntıdan indirgenen matroidlerin özellikleri üzerinde durulmuştur. Kaba küme teorisinde denklik bağıntısına dayalı olarak verilen yaklaşımların matroid kavramı kullanılarak elde edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş kaba küme kavramlarının matroid yaklaşımları ile elde edilebileceği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matroid, kaba küme, yaklaşım uzayı, yaklaşım operatörleri, kapanış operatörü

SUMMARY

M. Sc. Thesis

The Structures of Matroid and Rough Sets

Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sadık BAYHAN

December, 2018

In mathematics, the concept of a matroid, is a structure that generalizes linear independence in vector spaces. Rough set theory is a mathematical tool for dealing with vagueness. In this thesis, the basic concepts of rough set theory and matroid theory are given. The relationship between the two theories is expressed in detail based on basic concepts. The properties of the matroids that are induced from a relation are discussed. It is shown that the approximations given in rough set theory based on equivalence relation can be obtained using the concept of matroid. In addition, it has been investigated that generalized rough set concepts can be obtained using matroid approaches.

Keywords: Matroid, rough set, approximation space, approximation operators, closure operator

1. GİRİŞ

Matroid Teorisi 1930'lu yılların başında ortaya atılmıştır. Matroid sözcüğünün ilk kullanımı 1935 yılında Whitney'in "Doğrusal Bağımlılığın Soyut Özelliği" adlı makalesinde yer almıştır. Matroid Teorisinin temeli doğrusal cebir, soyut cebir ve çizge teorisine dayanmaktadır. Whitney, matrisin soyut bir genellemesi olarak matroid kavramını oluşturmuştur. Matroid adı verilen yapı; doğrusal cebirin içinde yer alan doğrusal bağımlılık, doğrusal bağımsızlık, taban ve rank gibi temel kavramların bir genelleştirilmesidir (URL – 1, 2018).

Tekillik teorisinin kurucularından olan Amerikalı matematikçi Hassler Whitney manifoldlar, dallandırma, gömme teoremi, karakteristik sınıflandırma ve geometrik integrasyon teorisi üzerinde yapılan ilk çalışmaların yürütücüsüdür. Ayrıca çizge teorisi, kohomoloji teorisi, karakteristik sınıflandırma, tekil uzay teorisi, düz haritaların tekillikleri gibi konularda çalışmıştır. Matroid Teorisinin temellerini atan Whitney'in bu konuda yaptığı çalışmalar bir çok matematikçinin de ilgisini çekmiştir. Bu konuda katkı sağlayan diğer değerli matematikçilere yer verelim. Bunlar arasında Waerden ve Birkhoff, Whitney'in "Modern Cebir" makalesinden soyut bağımlılık kavramını kullandılar. Maclane (1936) ve Dilworth (1941 - 1944) matroid üzerine iki makale yayınlandılar. 1950 yılına kadar unutulan bu konu Tutte (1958 - 1959) ile tekrar canlandı. Rodo da 1957 yılında matroid ile ilgilenen bir diğer bilim insanıdır. Rodo'nun yaptığı çalışmalar sonucunda matroidler kombinatoryal optimizasyon alanında önemli uygulamalara katkı sağladı. Kung (1986), Whitney'in, Birkhoff'un ve Maclane'nin makalelerini düzenledi. Bu çalışmayı yaparken aynı zamanda matroid teorisinin matematik dizinindeki en kapsamlı araştırmalarını yaptı (Johnson, 2009).

Topoloji biliminin başlangıcı, ünlü Königsberg Köprüleri probleminin 1736'da çözülüşüne dayanır. 18. yüzyılda Prusya'nın Königsberg kasabası, Pregel Nehri ile iki bölgeye ayrılıyordu. Pregel Nehri'nin içinde bulunan iki ada ve bu adaları kasabaya bağlayan 7 köprü bulunmaktaydı. Dönemin ünlü İsviçreli Matematikçisi Leonhard Euler (1707–1783), şu soruya yanıt aradı: Tüm köprülerden sadece bir kere geçerek başlanılan noktaya geri dönmek mümkün müdür? Euler kendisini merak içerisinde bırakan bu soruya çözüm ararken matematiğin yeni bir uygulama alanı olan çizge teorisinin temellerini atmıştır. Çizge teorisi, çizgeleri inceleyen matematiğin bir dalıdır. Çizge teorisi, köşeler (düğümler) ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardan (yaylardan, bağıntılardan) oluşan bir tür ağ yapısıdır.

Whitney, matroid çalışmalarını hem doğrusal cebir hem de çizge teorisine dayandırarak yapmıştır. Bir matroidin bağımlı kümeleri çizgelerde döngülerin genelleştirilmesi olarak düşünülmektedir (Oxley, 2010).

Belirli bir amaca yönelik düzen verilmiş kayıt ve dosyaların tümüne veri tabanı denir. Veri tabanları, çağımızda bilgi yöntemleri için oldukça önemli yapılardan biridir. Veri tabanlarından bilgi edinmek için ID3 ailesi ve AQ ailesi gibi çeşitli öğrenme yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler, büyük veritabanları sayesinde doğru bilgiye ulaşmayı ve bu bilgilerin kullanışlı hale getirilmesini sağlamıştır (Tsumoto ve Tanaka, 1993; Tsumoto ve Tanaka, 1995).

1926 yılında Polonya'da dünyaya gelen bilgisayar bilimci Zdzisław Pawlak, ilk çalışmalarını çizge teorisi üzerine vererek 1980'lerin başında kaba küme teorisinin temellerini atmıştır. Bu teori eksik veya belirsiz verilerle, bu verilerin içinde saklı bulunan bilgileri yaklaşımlarda bulunarak ortaya çıkarma esasına dayanır. Kaba küme teorisi, yapay zeka, makine öğrenmesi, veri madenciliği, uzman sistemler, tıp, ekonomi, bankacılık, sosyal bilimler, doğal olaylar ve diğer birçok alanda kullanılmaktadır (Peters ve Skowron, 2007).

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konunun anlaşılmasına yönelik tarihsel süreç ve motivasyon verildikten sonra, ikinci bölümde doğrusal cebir ve soyut cebir temel bilgileri verilmiştir. Bölüm 3'te kaba küme teorisi ve Kuratowski kapanış operatörünün özellikleri bir araya getirilmiştir. Matroid yapılarında üst yaklaşım sayısal fonksiyonu, ayrışım tarafından indirgenen düzgün matroidler, düzgün matroid kümelerinin kombinasyonu ve serial bağıntı tarafından elde edilen matroid yapıları dördüncü bölümde yer almaktadır. Çalışmanın ana başlığı olan matroid ile kaba kümeler arasındaki ilişki Bölüm 5'te verilmiştir. Bu bölümde genelleştirilmiş kaba kümelerin matroid alt ve üst yaklaşımları, matroid üst yaklaşımı ile bağıntı üst yaklaşımı, genelleştirilmiş kaba kümelerin matroid yaklaşım özellikleri, kaba küme özellikleri ile matroid yapı özelliklerinin arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir. Bu çalışmanın son bölümünde, incelenen konuya ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1 U ve V boş olmayan iki küme olmak üzere $U \times V$ çarpım kümesinin herhangi bir R alt kümesine U dan V ye bir bağıntı denir. $V = U$ alınırsa, R ye U üzerinde bir bağıntı denir ve kısaca $R \subseteq U \times U$ ile gösterilir. $x, y \in U$ için $(x, y) \in R$ oluyorsa, x öğesi y öğesiyle R bağıntısına göre ilişkilidir denir ve bu durumu ifade etmek için xRy gösterimi kullanılır (Zhu, 2009).

Tanım 2.2 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısı sahip olduğu özelliklere göre aşağıdaki gibi adlandırılır (Zhu, 2009).

i. Her $x \in U$ için xRx ise R bağıntısı yansımalıdır.
ii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Longrightarrow yRx$ ise R bağıntısı simetriktir.
iii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Longrightarrow yRx$ olmuyor ise R bağıntısı ters simetriktir.
iv. Her $x, y, z \in U$ için xRy ve $yRz \Longrightarrow xRz$ ise R bağıntısı geçişlidir.
v. Her $x \in U$ için xRy olacak şekilde bir $y \in U$ var ise R bağıntısı serialdir.

Örnek 2. 1 $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi üzerinde tanımlanan çeşitli bağıntı türleri verilmiştir.

i. $R_1 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)\}$ bağıntısı yansımalıdır.
ii. $R_2 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_3)\}$ bağıntısı simetriktir.
iii. $R_3 = \{(x_2, x_3), (x_1, x_2), (x_3, x_1)\}$ bağıntısı ters simetriktir.
iv. $R_4 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)\}$ bağıntısı geçişlidir.
v. $R_5 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_3)\}$ bağıntısı serialdir.

Tanım 2.2'de verilen özelliklerden bazılarına sahip olan bağıntılar için özel adlar verilir. Bu bağıntılar arasında denklik ve kısmi sıralama bağıntıları sayılabilir. Bu çalışma boyunca denklik ve kısmi sıralama bağıntıları önemli rol oynadığı için aşağıda ilgili bağıntıların tanımlarına, temel özeliklerine ve örneklerine yer verilmiştir.

Tanım 2.3 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer R bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa R ye bir denklik bağıntısı adı verilir (Zhu, 2009).

Örnek 2.2 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesi üzerinde verilen $R = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_4)\}$ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

Bu çalışma boyunca U sonlu olan evrensel kümeyi, $P(U)$ gösterim ise U nun kuvvet kümesini temsil edecektir.

Tanım 2.4 Boş olmayan bir U kümesi verilsin. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $\mathcal{A} = \{T_i \subseteq U : i \in I\}$ ailesine U kümesinin bir ayrışımı denir (Özer vd., 2009).

i. $\mathcal{A} \subseteq P(U)$,

ii. $\emptyset \notin \mathcal{A}$,

iii. $(i, j \in I) \wedge (i \neq j) \Longrightarrow T_i \cap T_j = \emptyset$,

iv. $U = \bigcup \mathcal{A}$ (ya da $U = \bigcup_{i \in I} T_i$).

Örnek 2.3 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesi ile U nun $T_1 = \{x_1, x_3\}$, $T_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$, $T_3 = \{x_5\}$ altkümeleri verilsin. $U/R = \{T_1, T_2, T_3\}$ ailesi U nun bir ayrışımıdır.

Tanım 2.5 R, U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun (Akkaş vd., 1984).

i. x öğesinin R bağıntısına göre denklik sınıfı $[x]_R = \{y \in U : xRy\}$ ile tanımlanır.

ii. $\{[x]_R : x \in U\}$ kümesine U nun R bağıntısına göre bölüm kümesi denir ve U/R ile gösterilir.

Örnek 2.4 $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(x_1, x_1), (x_1, x_3), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_3)\}$ denklik bağıntısı verilsin. U kümesinden alınan her x öğesinin denklik sınıfları aşağıda verildiği gibidir:

$[x_1]_R = \{y \in U : x_1Ry\} = \{x_1, x_3\}$,

$[x_2]_R = \{y \in U : x_2Ry\} = \{x_2\}$,

$[x_3]_R = \{y \in U : x_3Ry\} = \{x_1, x_3\}$.

U nun R denklik bağıntısına göre bölüm kümesi $U/R = \{[x_1]_R, [x_2]_R, [x_3]_R\}$ dir.

Teorem 2.1 Bir denklik bağıntısının farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır (Özer vd., 2009).

Teorem 2.2 R, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bölüm kümesi olan U/R, U kümesinin bir ayrışımıdır (Özer vd., 2009).

Teorem 2.3 $\mathcal{A} = \{T_i\}_{i \in I}$ küme ailesi U nun bir ayrışımı ise T_i kümelerinden her biri birer denklik sınıfı olacak biçimde U üzerinde bir denklik bağıntısı vardır (Özer vd., 2009).

Örnek 2.5 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesinin bir ayrışımı $T_1 = \{x_2\}$, $T_2 = \{x_1, x_3\}$, $T_3 = \{x_4\}$ ve $T_4 = \{x_5\}$ olarak verilsin. Şimdi U üzerinde R denklik bağıntısını Teorem 2.3 gereğince tanımlayalım.

$R = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_5, x_5)\}$

Gerçekten R nin U üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca doğrulanır ve R nin denklik sınıflarından oluşan bölüm kümesi $U/R = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ dir.

Tanım 2.6 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer R bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa R ye bir kısmi sıralama bağıntısı denir (Zhu ve Wang, 2013).

Örnek 2.6 U kümesinin altkümelerinin ailesi $P(U)$ üzerinde, R bağıntısı olarak "$\subseteq$" altküme olma bağıntısı alınsın. Bu durumda R yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından $P(U)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve $(P(U), \subseteq)$ ikilisi kısmi sıralı kümedir (Özer vd., 2009).

Tanım 2.7 $(P(U), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi ve $\mathcal{M} \subseteq P(U)$ ailesi verilsin. Maksimal, minimal ve oppozit tanımları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir (Tang vd., 2013).

$$\max(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{M} : \forall Y \in \mathcal{M}, X \subseteq Y \Longrightarrow X = Y\} \tag{2.1}$$

$$min(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{M} : \forall Y \in \mathcal{M}, Y \subseteq X \Longrightarrow X = Y\} \tag{2.2}$$

$$opp(\mathcal{M}) = \{X \subseteq U : X \notin \mathcal{M}\} \tag{2.3}$$

Tanım 2.8 Bir F kümesi üzerinde $+: F \times F \longrightarrow F$ ve $\cdot : F \times F \longrightarrow F$ ikili işlemleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(F,\ +,\ \cdot)$ üçlüsüne bir cisim denir (Özer vd., 2009).

i. $(F,\ +)$ değişmeli bir gruptur.
ii. $(F\setminus\{0\}, \cdot)$ değişmeli bir gruptur. (Burada 0, $+$ işlemine göre birim öğedir.)
iii. $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır.

Tanım 2.9 V boş olmayan bir küme ve $(F,\ +,\ \cdot)$ üçlüsü bir cisim olsun. Aşağıda verilen aksiyomları sağlayan V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Bozkurt ve Türen, 2003).

i. Her $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$ için $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in V$,
ii. Her $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in V$ için $\overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_3}$,
iii. Her $\vec{v} \in V$ için $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ olacak şekilde bir tek $\vec{0} \in V$ vardır,
iv. Her $\vec{v} \in V$ için $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ olacak şekilde bir tek $-\vec{v} \in V$ vardır,
v. Her $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$ için $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \in V$ olur,
vi. Her $k \in F$ ve her $\vec{v} \in V$ için $k\vec{v} \in V$,
vii. Her $k_1, k_2 \in F$ ve her $\vec{v} \in V$ için $(k_1 + k_2)\vec{v} = k_1\vec{v} + k_2\vec{v} \in V$,
viii. Her $k \in F$ ve her $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$ için $k(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k\overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2} \in V$,
ix. Her $k_1, k_2 \in F$ ve her $\vec{v} \in V$ için $k_1(k_2\vec{v}) = (k_1k_2)\vec{v} \in V$,
x. Her $\vec{v} \in V$ için $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ olacak şekilde $1 \in F$ vardır. Böylece 1, F cisminin birim elemanıdır.

Örnek 2.7 $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot)$, $(\mathbb{Q},\ +,\ \cdot)$ ve $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ cisimleri kendi üzerinde birer vektör uzayıdır (Bozkurt ve Türen, 2003).

Tanım 2.10 V bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. Eğer W kümesi, V kümesindeki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı ise, W kümesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayı denir (Bozkurt ve Türen, 2003).

Örnek 2.8 $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı olsun. $W = \{(w_1, w_2, 0) : w_1, w_2 \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayıdır. W uzayı aslında $\mathbb{R}^2$ düzlemidir. Gerçekten $\vec{w} = (w_1, w_2, 0) \in W$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, 0) \in W$ ise;

i. $\vec{w} + \vec{v} = (w_1, w_2, 0) + (v_1, v_2, 0) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, 0 + 0) = (z_1, z_2, 0) \in W$
ii. $k \in \mathbb{R}$ ve $(w_1, w_2, 0) \in W$ için $k\,(w_1, w_2, 0) = (kw_1, kw_2, 0) = (w_3, w_4, 0) \in W$

olduğundan $\mathbb{R}^2$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu uzayının bir alt vektör uzayıdır (Bozkurt ve Türen, 2003).

Tanım 2.11 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve bu uzayın $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ vektörleri verilsin.

i. $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$ olmak üzere, skalerle çarpım ve vektör toplamı yardımıyla oluşturulan $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$ ifadesine $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ vektörlerinin doğrusal bileşimi veya doğrusal toplamı adı verilir.

ii. Eğer $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$ için $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0} \Longrightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ gerektirmesi sağlanıyorsa $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ vektörlerine doğrusal bağımsız, doğrusal bağımsız olmayan vektörlere ise doğrusal bağımlıdır denir (Kaya, 1985).

Örnek 2.9 $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{v} = (2, -3, 4)$ vektörünü $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1)$ ve $\overrightarrow{v_3} = (0, -1, 1)$ vektörlerinin doğrusal toplamı olarak yazalım. O halde
$(2, -3, 4) = k_1(1, -1, 1) + k_2(1, 0, -1) + k_3(0, -1, 1)$
eşitliğinden $k_1 + k_2 = 2$, $-k_1 - k_3 = -3$ ve $k_1 - k_2 + k_3 = 4$ elde edilir. Denklemlerin çözümünden $k_1 = 3$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ sabitleri bulunur. Böylece $\vec{v}$ vektörü $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ve $\overrightarrow{v_3}$ vektörlerinin doğrusal toplamı olarak $\vec{v} = 3\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ ile ifade edilir (Bozkurt ve Türen, 2003).

Örnek 2.10 $\mathbb{R}^4$ uzayında verilen $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1, 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1, 2)$, $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1, 3)$ vektörlerinin doğrusal bağımsız olduklarını Tanım 2.11 - (ii)'yi kullanarak gösterelim. $k_1, k_2, k_3 \in F$ olmak üzere $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ olduğunu varsayalım. O halde $k_1(1, 0, 1, 2) + k_2(0, 1, 1, 2) + k_3(1, 1, 1, 3) = \vec{0}$ dır.
Yukarıdaki son eşitlikten $k_1 + k_3 = 0$, $k_2 + k_3 = 0$, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$ denklemleri çözüldüğünde $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ elde edilir. Böylece $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ve $\overrightarrow{v_3}$vektörlerinin doğrusal bağımsız olduğu görülür (Akkaş vd., 1984).

Örnek 2.11 $\mathbb{R}^3$ de verilen $\overrightarrow{v_1} = (1, -2, 3)$**,** $\overrightarrow{v_2} = (-2, 4, -6)$ vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğunu gösterelim. Örnek 2.10'da yaptığımız gibi benzer işlemleri uygulayalım. $k_1, k_2 \in F$ olmak üzere $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$ olsun. Bu durumda
$k_1(1, -2, 3) + k_2(-2, 4, -6) = \vec{0}$ yazılabilir.

$k_1 - 2k_2 = 0, -2k_1 + 4k_2 = 0$ ve $3k_1 - 6k_2 = 0$ denklemlerinin çözümünden $k_1 = 2k_2$ elde edilir. Böylece $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$ olur. Sonuç olarak $\overrightarrow{v_1}$ ve $\overrightarrow{v_2}$ vektörleri doğrusal bağımlıdır (Akkaş vd., 1984).

Tanım 2.12 Bir F cismi üzerinde tanımlanan W_1 ve W_2 vektör uzayları verilsin.
$V : W_1 \longrightarrow W_2$ dönüşümü,

i. Her $\vec{u}, \vec{v} \in W_1$ için $V(\vec{u} + \vec{v}) = V(\vec{u}) + V(\vec{v})$

ii. Her bir $\vec{u} \in W_1$ ve her $k \in F$ için $V(k\vec{u}) = kV(\vec{u})$

aksiyomlarını sağlanıyorsa V ye doğrusal dönüşüm adı verilir (Bozkurt ve Türen, 2003).

Örnek 2.12 $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ V(u, v, z) = 2u + 3v + z$ şeklinde tanımlanan dönüşümün doğrusal olduğunu gösterelim.

i. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri verilsin.

$$\begin{aligned}
V(\vec{u} + \vec{v}) &= V\big((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)\big) \\
&= V(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= 2(u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\
&= 2u_1 + 2v_1 + 3u_2 + 3v_2 + u_3 + v_3 \\
&= 2u_1 + 3u_2 + u_3 + 2v_1 + 3v_2 + v_3 \\
&= V(\vec{u}) + V(\vec{v})
\end{aligned}$$

olduğundan (i) aksiyomu sağlanır.

ii. $k \in \mathbb{R}$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$\begin{aligned}
V(k\vec{u}) &= V(ku_1, ku_2, ku_3) \\
&= 2ku_1 + 3ku_2 + ku_3 \\
&= k(2u_1 + 3u_2 + u_3) \\
&= kV(\vec{u}).
\end{aligned}$$

Böylece (ii) aksiyomu da sağlanır. O halde $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü doğrusaldır (Bozkurt ve Türen, 2003).

Tanım 2.13 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $A \subseteq V$ olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlayan A altkümesine, V nin bir tabanı veya bazı denir (Hacısalihoğlu, 1977).

i. A kümesinin elemanları doğrusal bağımsızdır.

ii. Her $\vec{v} \in V$ vektörü A kümesinin elemanlarının bir doğrusal bileşimidir.

Örnek 2.13 $V = \mathbb{R}^2$ olarak alalım. $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ vektörleri doğrusal bağımsızdır. Her $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ vektörü $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazılabilir. O halde $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanıdır ve bu iki vektör $\mathbb{R}^2$ nin doğal tabanı olarak da adlandırılır (Bozkurt ve Türen, 2003).

Tanım 2.14 V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayının tabanında yer alan doğrusal bağımsız vektörlerin sayısına, V vektör uzayının boyutu denir ve $boy(V)$ ile gösterilir (Bozkurt ve Türen, 2003).

Örnek 2.14 Örnek 2.13'te alınan $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ ve $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ nin tabanı olduğundan $boy(\mathbb{R}^2) = 2$ dir (Bozkurt ve Türen, 2003).

Tanım 2.15 n x n türünde bir kare matris A olsun. A matrisinin doğrusal bağımsız sütun vektörlerinin (veya satır vektörlerinin) maksimum sayısına A matrisinin rankı denir ve $rank(A)$ ile gösterilir (Yüce, 2015).

Örnek 2.15 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulalım.

A matrisine elementer satır işlemleri uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \left(\varepsilon_1 : \alpha_1 \to \frac{1}{3}\alpha_1\right)$$

$$\overset{\varepsilon_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} (\varepsilon_2 : \alpha_2 \to \alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \left(\varepsilon_3 : \alpha_2 \to \frac{1}{5}\alpha_2\right)$$

$$\overset{\varepsilon_4}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 3 & -2 & 3\end{bmatrix}(\varepsilon_4 : \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 4\alpha_1)$$

$$\overset{\varepsilon_5}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}(\varepsilon_5 : \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 - 3\alpha_2)$$

$$\overset{\varepsilon_6}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}(\varepsilon_6 : \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 - \alpha_3)$$

$$\overset{\varepsilon_7}{\approx}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}(\varepsilon_7 : \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 - \alpha_3)$$

Sonuç olarak *rank*(*A*) = 3 elde edilir (Hacısalihoğlu, 1996).

3. KABA KÜMELER

Tanım 3.1 R, U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (U, R) ikilisine bir yaklaşım uzayı ya da Pawlak yaklaşım uzayı denir. Pawlak yaklaşım uzayı $apr = (U, R)$ olarak da gösterilir (Tang vd., 2013; Liu ve Zhu, 2015; Li ve Liu, 2012; Pawlak, 1982).

Tanım 3.2 (U, R) bir yaklaşım uzayı olsun. U nun bir X altkümesinin Pawlak alt ve üst yaklaşımları sırasıyla, aşağıdaki eşitliklerle verilir (Tang vd., 2013; Liu ve Zhu, 2015; Li ve Liu, 2012; Pawlak, 1982):

$$\underline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \subseteq X\} \tag{3.1}$$

$$\overline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \cap X \neq \emptyset\} \tag{3.2}$$

Örnek 3.1 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ kümesi ve U nun bir ayrışımı $\mathcal{A} = \big\{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4, x_7\}, \{x_6\}\big\}$ olarak verilsin. $X = \{x_1, x_4, x_6\} \subseteq U$ altkümesi için Pawlak alt ve üst yaklaşımlarını Tanım 3.2 - (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden yararlanarak belirleyelim.
Her $T \in \mathcal{A}$ için $\{x_1\} \subseteq X$, $\{x_2, x_5\} \nsubseteq X$, $\{x_6\} \subseteq X$, $\{x_3, x_4, x_7\} \nsubseteq X$ olduğundan X kümesinin Pawlak alt yaklaşımı;
$\underline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \subseteq X\} = \bigcup\big\{\{x_1\}, \{x_6\}\big\} = \{x_1, x_6\}$ dir.
Her $T \in \mathcal{A}$ için $\{x_1\} \cap X \neq \emptyset$, $\{x_2, x_5\} \cap X = \emptyset$, $\{x_6\} \cap X \neq \emptyset$, $\{x_3, x_4, x_7\} \cap X \neq \emptyset$ elde edilir. O halde X kümesinin Pawlak üst yaklaşımı;
$\overline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup\big\{\{x_1\}, \{x_6\}, \{x_3, x_4, x_7\}\big\} = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$
kümesi olarak bulunur.

Tanım 3.3 U kümesi üzerinde bir $\mathcal{A}$ ayrışımı verilsin. U nun herhangi bir X altkümesinin Pawlak alt ve üst yaklaşımları eşit ise yani; $\underline{apr}(X) = \overline{apr}(X)$ eşitliği sağlanıyorsa X tanımlanabilir veya kesin kümedir denir. Pawlak alt ve üst yaklaşımlarının eşit olmaması durumunda, yani $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ ise X kümesine tanımlanabilir değildir veya kabadır denir (Li ve Liu, 2012; Tang vd., 2013; Pawlak, 1982).

U kümesinin bir $\mathcal{A}$ ayrışımına ait her kümenin tanımlanabilir olduğu (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden görülür. Gerçekten; Örnek 3.1'de verilen U kümesinin ayrışımına ait $\{x_1\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_3, x_4, x_7\}$ ve $\{x_6\}$ altkümeleri birer tanımlanabilir kümedir.

Örnek 3.2 Örnek 3.1'de verilen X kümesinin Pawlak alt yaklaşımı $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_6\}$ ve Pawlak üst yaklaşımı $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$ olarak bulunmuştu. $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ olduğundan X kümesi tanımlanabilir değildir yani kaba kümedir.

Örnek 3.3 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesi ve U nun bir ayrışımı $\mathcal{A} = \big\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\big\}$ verilsin. $X= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq U$ altkümesini alalım. X kümesinin Pawlak alt ve üst yaklaşımlarını Tanım 3.2 - (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden yararlanarak belirleyelim.
Her $T \in \mathcal{A}$ için $\{x_1\} \subseteq X$, $\{x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$, $\{x_5, x_6\} \nsubseteq X$ olmak üzere X kümesinin Pawlak alt yaklaşımı;
$\underline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \subseteq X\} = \bigcup\big\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}\big\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dir.
Her $T \in \mathcal{A}$ için $\{x_1\} \cap X \neq \emptyset$, $\{x_2, x_3, x_4\} \cap X \neq \emptyset$, $\{x_5, x_6\} \cap X = \emptyset$ olmak üzere X kümesinin Pawlak üst yaklaşımı;
$\overline{apr}(X) = \bigcup\{T : T \in \mathcal{A} \wedge T \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup\big\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}\big\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dir.
X kümesi için $\underline{apr}(X) = \overline{apr}(X)$ eşitliği sağlanır. Böylece X bir klasik kümedir veya tanımlanabilir kümedir. Gerçekten $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq U$ altkümesinin $\mathcal{A}$ ayrışımına ait $\{x_1\}$ ile $\{x_2, x_3, x_4\}$ kümelerinin birleşimi olarak yazılabildiği görülür.

Tanım 3.2'de verilen (3.1) ve (3.2) eşitlikleri gereğince $\underline{apr}(X)$, X kümesinin kapsadığı en büyük tanımlanabilir küme, $\overline{apr}(X)$ ise X kümesini kapsayan en küçük tanımlanabilir kümedir. Herhangi bir $X \subseteq U$ kümesinin pozitif, negatif ve sınır bölgesi, Pawlak alt ve üst yaklaşımları kullanılarak verilir (Pawlak, 1982).

Tanım 3.4 (U, R) bir Pawlak yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. X altkümesinin $POS_R(X)$ pozitif bölge, $NEG_R(X)$ negatif bölge ve $BN_R(X)$ sınır bölge tanımları sırasıyla aşağıda verilmiştir (Li ve Liu, 2012; Tang vd., 2013; Pei vd., 2011).

$$POS_R(X) = \underline{apr}(X) \tag{3.3}$$

$$NEG_R(X) = U \setminus \overline{apr}(X) \tag{3.4}$$

$$BN_R(X) = \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X) \tag{3.5}$$

Boş olmayan bir küme üzerinde birden fazla denklik bağıntısı tanımlanabilir. Karışıklığa meydan vermemek için R alt indisi kullanılır. Aksi takdirde R alt indisi yazılmaz. Tanım 3.4 ile ilgili aşağıda verilen örneği inceleyelim.

Örnek 3.4 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ kümesi ve $X = \{x_1, x_4, x_6\} \subseteq U$ altkümesi verilsin. U nun iki ayrışımı $\mathcal{A}_1 = \big\{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4, x_7\}, \{x_6\}\big\}$ ve $\mathcal{A}_2 = \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5, x_7\}, \{x_6\}\big\}$ olarak verilsin. X kümesinin (U, R_1) ve (U, R_2) Pawlak yaklaşım uzaylarında pozitif, negatif ve sınır bölgelerini Tanım 3.4 - (3.3), (3.4), (3.5) eşitliklerinden yararlanarak bulalım.

$POS_{R_1}(X) = \underline{apr}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$,

$NEG_{R_1}(X) = U \setminus \overline{apr}(X) = U \setminus \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\} = \{x_2, x_5\}$,

$BN_{R_1}(X) = \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\} \setminus \{x_1, x_6\} = \{x_3, x_4, x_7\}$,

$POS_{R_2}(X) = \underline{apr}(X) = \{x_1, x_4, x_6\}$,

$NEG_{R_2}(X) = U \setminus \overline{apr}(X) = U \setminus \{x_1, x_4, x_6\} = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$,

$BN_{R_2}(X) = \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X) = \{x_1, x_4, x_6\} \setminus \{x_6\} = \{x_1, x_4\}$ dir.

Sonuç 3.1 Bir (U, R) Pawlak yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ altkümesi verildiğinde aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

i. X kümesinin pozitif bölgesine ait her bir eleman kesinlikle X kümesine aittir.
ii. X kümesinin negatif bölgesine ait herhangi bir eleman X kümesine ait değildir.
iii. X kümesinin sınır bölgesine ait bir eleman için X kümesine ait olup olmadığı kesin olarak belirlenemez.

Kaba kümelerde Pawlak alt ve üst yaklaşımların sağladığı özellikler aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.1 (U, R) bir Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Pawlak alt ve üst yaklaşımlarının sağladığı özellikler aşağıda sıralanmıştır (Pawlak, 1982).

$(P1)$ $\underline{apr}(X) \subseteq X \subseteq \overline{apr}(X)$,

$(P2)$ $\underline{apr}(U) = U = \overline{apr}(U)$,

$(P3)$ $\underline{apr}(\emptyset) = \emptyset = \overline{apr}(\emptyset)$,

$(P4)$ $\underline{apr}(X \cap Y) = \underline{apr}(X) \cap \underline{apr}(Y)$,

$(P5)$ $\overline{apr}(X \cup Y) = \overline{apr}(X) \cup \overline{apr}(Y)$,

$(P6)$ $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$,

$(P7)$ $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$,

$(P8)$ $\underline{apr}(X) \cup \underline{apr}(Y) \subseteq \underline{apr}(X \cup Y)$,

$(P9)$ $\overline{apr}(X \cap Y) \subseteq \overline{apr}(X) \cap \overline{apr}(Y)$,

$(P10)$ $\underline{apr}(X) = U \setminus \overline{apr}(U \setminus X)$,

$(P11)$ $\overline{apr}(X) = U \setminus \underline{apr}(U \setminus X)$,

$(P12)$ $\underline{apr}\left(\underline{apr}(X)\right) = \overline{apr}\left(\underline{apr}(X)\right) = \underline{apr}(X)$,

$(P13)$ $\overline{apr}\left(\overline{apr}(X)\right) = \underline{apr}\left(\overline{apr}(X)\right) = \overline{apr}(X)$.

Tanım 3.5 U kümesinin herhangi iki altkümesi X ve Y olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne kapanış operatörü denir (Li ve Liu, 2012).

(CL1): $X \subseteq cl(X)$,

(CL2): $X \subseteq Y \Longrightarrow cl(X) \subseteq cl(Y)$,

(CL3): $cl\big(cl(X)\big) = X$.

Bazı çalışma alanlarında, kapanış operatörü aşağıda sıralanan ek özellikleri de sağlayan operatörler olarak alınmaktadır (Li ve Liu, 2012):

(CL4): $cl(\emptyset) = \emptyset$,

(CL5): $cl(X \cup Y) = cl(X) \cup cl(Y)$,

(CL6): $x \in U, y \in cl(X \cup \{x\}) \setminus cl(X) \Longrightarrow x \in cl(X \cup \{y\})$,

(CL7): $cl\big(U \setminus cl(X)\big) = U \setminus cl(X)$.

Örneğin, $cl \ : P(U) \longrightarrow P(U)$ operatörü (CL1), (CL3), (CL4) ve (CL5) özelliklerini sağlıyorsa, U üzerinde bir Kuratowski kapanış operatörü olarak adlandırılır. Kuratowski kapanış operatörü U kümesi üzerinde bir topoloji belirler. Kuratowski kapanış operatörü tek bir özellik altında aşağıda verilen eşitlikle de ifade edilebilir. Her X, $Y \subseteq U$ için

$$X \cup cl(X) \cup cl\big(cl(Y)\big) = cl(X \cup Y) \setminus cl(\emptyset) \tag{3.6}$$

dir. Önerme 3.1'de verilen özellikler ile Kuratowski kapanış operatörünün özellikleri karşılaştırıldığında (P1) - (CL1), (P13) - (CL3), (P3) - (CL4), (P5) - (CL5) eşleşmeleri kolayca görülmektedir. O halde kaba kümeler teorisinde Pawlak üst yaklaşım operatörü aslında bir Kuratowski kapanış operatörü olmaktadır (Li ve Liu, 2012).

4. MATROİD YAPILARI

Matematik dizininde matroid tanımına ilişkin farklı yaklaşımların olduğu ve bunların birbirlerine eş değerliği bilinmektedir. Bu çalışma boyunca John Oxley'in matroid tanımı esas alınarak matroid yapısına ilişkin temel özellikler verilecektir.

Tanım 4.1 U kümesinin altkümelerinin bir $\mathcal{I}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlasın (Oxley, 2010):

[M1]: $\emptyset \in \mathcal{I}$,

[M2]: Eğer $I \in \mathcal{I}$ ve $I^* \subseteq I$ ise $I^* \in \mathcal{I}$ dır,

[M3]: Eğer $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ve $|I_1| < |I_2|$ ise $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $e \in I_2 \setminus I_1$ vardır.

$(U, \mathcal{I})$ ikilisine bir matroid denir ve U kümesi üzerindeki matroid kısaca M ile gösterilir. Bu tanımda yer alan $|.|$ gösterimi ilgili kümenin eleman sayısını, \ gösterimi ise iki kümenin farkını ifade etmektedir (Oxley, 2010).

Yukarıda Tanım 4.1'de verilen matroid tanımında aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

[M1]: Bir vektör uzayında $\vec{0}$ vektörünün doğrusal bağımsız olmasının genel ifadesidir.

[M2]: Bir vektör uzayında doğrusal bağımsız vektörlerden oluşan kümenin her altkümesinin de doğrusal bağımsız olduğunun genelleştirilmiş halidir.

[M3]: Doğrusal cebirde iyi bilinen Steinitz–MacLane değişim yardımcı teoreminin genel ifadesi [M3] özelliği olarak matroid tanımında yerini almıştır (Kung, 1986).

Tanım 4.2 M bir matroid olsun (Oxley, 2010).

i. $\mathcal{I}$ ailesinin elemanlarına M matroidinin bağımsız kümeleri,
ii. U kümesine matroidin temel kümesi,
iii. U kümesine ait ancak $\mathcal{I}$ içinde yer almayan kümeye bağımlı küme adları verilir.

Bir karışıklığa neden olmamak için, M matroid yapısında $\mathcal{I}$ nın elemanları $\mathcal{I}(M)$, U nun kuvvet kümesi $P(U)$, temel küme $U(M)$ ve bağımlı kümeler ailesi ise $D(M)$ ile gösterilir. $D(M) = P(U) \setminus \mathcal{I}$ eşitliği yazılabilir. Bir matroidinin bağımlı kümeleri vektör uzayın bağımlı vektörlerinin, çizgelerde ise döngülerin genelleştirilmesidir (Oxley, 2010). Şimdi aşağıdaki matroid yapısına ilişkin bir örneği inceleyelim.

Örnek 4.1 $U = \{a, b, c\}$ bir küme ve U nun altkümelerinin bir $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesi verilsin. $\mathcal{I}$ ailesinin matroid tanımında verilen özellikleri sağladığını gösterelim (Zhu ve Wang, 2011).

[M1]: Boş küme her zaman bağımsız olduğundan $\emptyset \in \mathcal{I}$ dır.

[M2]: Her $I \in \mathcal{I}$ için I öğesinin her altkümesi $\mathcal{I}$ ailesinde olduğu açıkca görülür.

[M3]: $I_1 = \emptyset$ ve I_2 olarak $\mathcal{I}$ ailesinin diğer kümeleri alınırsa [M3] özelliğinin sağlandığı kolayca görülür. Şimdi $I_1 \neq \emptyset$ olmak üzere $|I_1| < |I_2|$ koşulunu sağlayan $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ küme çiftlerini belirleyelim:

$I_1 = \{a\}, I_2 = \{a, b\}$ ise $b \in I_2 \backslash I_1, I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$.

$I_1 = \{a\}, I_2 = \{b, c\}$ ise $I_2 \in I_2 \backslash I_1, b \in I_2, I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$.

$I_1 = \{b\}, I_2 = \{a, b\}$ ise $a \in I_2 \backslash I_1, I_1 \cup \{a\} \in \mathcal{I}$.

$I_1 = \{b\}, I_2 = \{b, c\}$ ise $c \in I_2 \backslash I_1, I_1 \cup \{c\} \in \mathcal{I}$.

$I_1 = \{c\}, I_2 = \{a, b\}$ ise $I_2 \in I_2 \backslash I_1, b \in I_2, I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$.

$I_1 = \{c\}, I_2 = \{b, c\}$ ise $b \in I_2 \backslash I_1, I_1 \cup \{b\} \in \mathcal{I}$.

O halde $\mathcal{I}$ ailesi [M1], [M2] ve [M3] özelliklerini sağladığından $(U, \mathcal{I})$ ikilisi bir matroid olur. Yukarıda verilen tanım gereğince $\mathcal{I}$ ailesinin her elemanı bağımsızdır. Bu bilgiler yardımıyla M matroidinin bağımlı kümeler ailesi $D(M) = \{\{a, c\}, U\}$ olur.

Çalışmamızın giriş bölümünde matroid yapılarının birçok temel matematik kavramlarıyla iç içe olduğunu belirtmiştik. Matroid teorisinin ilişkili olduğu bir diğer konu ise matrislerdir. Aralarındaki ilişkiyi vermesi bakımından aşağıdaki önerme oldukça önemlidir.

Gösterim. Bir F cismi üzerinde m - boyutlu vektör uzayı $V(m, F)$ ile gösterilir (Oxley, 2010).

Önerme 4.1 A bir F cismi üzerinde m x n türünde bir matris, A matrisinin etiketlenen sütunlarının kümesi U olsun. U nun $V(m, F)$ içinde bağımsız altkümelerinin ailesi $\mathcal{I}$ ise, $(U, \mathcal{I})$ ikilisi bir matroid belirler (Oxley, 2010).

Kanıt. $\mathcal{I}$ ailesinin matroid olma koşullarını sağladığı sırasıyla gösterelim.

[M1] ve [M2] özelliklerinin sağlandığı açıktır.

[M3]: $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ve $|I_1| < |I_2|$ olduğunu varsayalım. $I_1 \cup I_2$ ile gerilen $V(m, F)$ vektör uzayının altuzayı W olsun. W nin boyutu $boy(W)$ ile gösterilirse en azından $boy(W) = |I_2|$

olur. Şimdi her $e \in I_2 \backslash I_1$ için $I_1 \cup \{e\}$ kümesinin bağımlı olduğunu varsayalım. O halde I_1 tarafından gerilen uzay, W altuzayını kapsar. Böylece $|I_2| \leq boy(W) \leq |I_1| < |I_2|$ bulunur. Bu eşitsizlik varsayım ile çelişir, yani $e \in I_2 \backslash I_1$ elemanı $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ sağlanacak biçimde vardır. Sonuç olarak $(U, \mathcal{I})$ ikilisi bir matroid olur. □

Bir A matrisi ile elde edilen matroid $M[A]$ ile gösterilir ve vektörel matroid olarak adlandırılır.

Örnek 4.2 $\mathbb{R}$ cismi üzerine bir A matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Öncelikle A matrisinin sütunlarını 1, 2, 3, 4 ve 5 ile etiketleyelim.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Böylece etiketlerin $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesini oluşturalım. Şimdi U kümesinin bağımsız altkümelerinin ailesi,

$\mathcal{I}=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ olarak elde edilir. O halde $(U, \mathcal{I})$ ikilisi bir matroid ve $(U, \mathcal{I}) = M[A]$ dır. $M[A]$ vektörel matroidinin bağımlı kümeleri,

$D(M) = P(U) \backslash \mathcal{I} = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \cup \{X \subseteq U : |X| \geq 3\}$

ailesidir (Oxley, 2010).

Matroid yapılarının matematiğin diğer önemli bir çalışma alanı olan çizge teorisi ile de yakından ilişkili olduğu bilinmektedir. Bu gerçeği somutlaştıran bir örneği incelemekte yarar vardır. Örneğe geçmeden önce çizge teorisine ilişkin bazı temel kavramları verelim.

Tanım 4.3 Çizgeler, köşeler (düğümler) ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardan (yaylardan, bağıntılardan) oluşan bir tür ağ yapısıdır. Bu yapı kısaca G ile gösterilir. Bir G çizgesinin köşe noktaları $\mathcal{V}(G)$ ile kenar noktaları ise $\mathcal{E}(G)$ gösterimleriyle ifade edilir (Oxley, 2010).

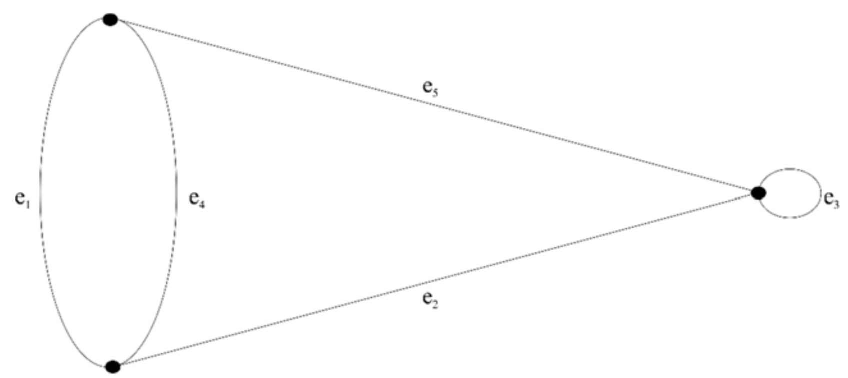
Tanım 4.4 Bir G çizgesinde bitim noktaları aynı olan kenarlara paralel kenar denir (Oxley, 2010).

Tanım 4.5 Bir G çizgesinde bir köşe noktasından başlayıp aynı köşe noktasında biten ağ yapısına ilmik adı verilir (Oxley, 2010).

Tanım 4.6 Bir G çizgesine ait $3 \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) için $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ köşeleri olsun. Eğer $\mathcal{V}_0$ köşesinden $\mathcal{V}_n$ köşesine çizilen kenar ile yine $\mathcal{V}_n$ köşesinden $\mathcal{V}_0$ köşesine çizilen kenar birbirinden farklı ise bu yola döngü denir (Oxley, 2010).

Tanım 4.7 G çizgesinden elde edilmiş bir matroide G nin döngü matroidi veya polinom matroidi denir ve $M(G)$ ile gösterilir (Oxley, 2010).

Örnek 4.3 Şekil 4.1'de verilen G çizgesini inceleyelim. Bu çizgeden elde edilen matroid $M = M(G)$ olsun. G çizgesinin kenarlarının kümesi $\mathcal{E}(M) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve döngünün kenar kümesi $\mathcal{C}(M) = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$ dir.
Örnek 4.2'de verilen $M[A]$ vektörel matroidi ile $M(G)$ döngü matroidini karşılaştıralım. $\Psi : U \longrightarrow \mathcal{E}(M)$, $\Psi(i) = e_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) olarak tanımlanan Ψ dönüşümü birebir ve örtendir. Bir X kümesinin $M[A]$ vektörel matroidinde bir devre olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(X)$ kümesinin $M(G)$ döngü matrodinde bir devre olmasıdır. Bu denkliği, bir Y kümesinin $M[A]$ da bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(Y)$ nin $M(G)$ de bağımsız olmasıdır biçiminde de ifade edebiliriz. Böylece $M[A]$ vektörel matroidi ile $M(G)$ döngü matroidi aynı yapıya sahip veya izomorf olurlar. Bu durumu ifade etmek için $M[A] \cong M(G)$ yazılır (Oxley. 2010).



Şekil 4.1. G çizgesi (Oxley, 2010)

Bir U kümesi verildiğinde $P(U)$ ailesinin boş olmayan her alt ailesi bir matroid olur mu? Bu sorunun yanıtı elbette olumsuzdur. $P(U)$ ailesinin boş olmayan alt ailesinin hangi durumda matroid olduğu aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 4.4 U kümesi için $\mathcal{I} \subseteq P(U)$ ve $\mathcal{I} \neq \emptyset$ olarak alalım. $(U, \mathcal{I})$ ikilisinin bir matroid olması için gerekli ve yeterli koşul her $X \subseteq U$ için, $\{I : I \in \mathcal{I} \text{ ve } I \subseteq X\}$ ailesinin bütün maksimal öğelerinin (kapsama anlamında) eşit sayıda öğesinin var olmasıdır (Oxley, 1991). $U = \{a, b, c\}$ kümesi ve U nun altkümelerinin $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ve $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ alt aileleri verilsin.

Tablo 4.1. $\mathcal{I}_1$ bağımsız ailesinin maksimal öğeleri

$P(U)$	$\{I : I \in \mathcal{I}_1 \text{ve } I \subseteq X\}$	$max(X)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{\emptyset, \{b\}\}$	$\emptyset$
$\{c\}$	$\{\emptyset, \{c\}\}$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{c\}\}$	$\emptyset$
U	$\emptyset$	$\emptyset$

Tablo 4.1'de verilen $\mathcal{I}_1$ bağımsız ailesine ait $\{a, b\}$ ve $\{a, c\}$ maksimal öğeleri eşit sayıda öğe içerir ve $(U, \mathcal{I}_1)$ ikilisi bir matroid belirler.

Tablo 4.2. $\mathcal{I}_2$ bağımsız ailesinin maksimal öğeleri

$P(U)$	$\{I : I \in \mathcal{I}_2 \text{ve } I \subseteq X\}$	$max(X)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{\emptyset, \{b\}\}$	$\emptyset$
$\{c\}$	$\{\emptyset, \{c\}\}$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$	$\emptyset$
$\{a, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$	$\emptyset$
$\{b, c\}$	$\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{b, c\}$
U	$\emptyset$	$\emptyset$

Tablo 4.2'de verilen $\mathcal{I}_2$ bağımsız ailesinin maksimal öğeleri $\{a\}$ ve $\{b, c\}$ dir. Bulunan maksimal öğelerin eleman sayısı eşit olmadığından $(U, \mathcal{I}_2)$ bir matroid değildir.

Tanım 4.8 *M* bir matroid olmak üzere, bütün bağımsız özalt kümeleri bağımlı olan kümelere minimal bağımlı küme adı verilir (Oxley, 1991).

Örnek 4.5 Örnek 4.2'de verilen $M[A]$ vektörel matroidi için minimal bağımlı kümelerin ailesi $min(\mathcal{I}) = \{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$ dir (Oxley, 2010).

Örnek 4.6 $\mathbb{R}$ cismi üzerine bir A matrisi

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak verilsin. A matrisinin sütunlarının etiketlerinin kümesi $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dir. U kümesinin bağımsız altkümeler ailesi;

$\mathcal{I} = P(U) \backslash \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{5, 6\}, \{7\}\} \cup \{X \subseteq U : \{5, 6\} \subseteq X\}$ dır. O halde $M[A]$ vektörel matroid olur (Oxley, 1991).

Tanım 4.9 $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid olsun. U kümesinin kapsama anlamında bir minimal bağımlı altkümesine M nin bir devresi denir. M matroidinin bütün devrelerinin kümesi $\mathcal{C}$ ya da $\mathcal{C}(M)$ ile gösterilir. Bir $\mathcal{C}$ devresinin n tane öğesi varsa bu devreye n - devre adı verilir. Aşağıda verilen eşitlik devre tanımının doğal bir ifadesidir (Oxley, 2010).

$$\mathcal{C}(M) = min\big(opp(\mathcal{I})\big) \tag{4.1}$$

Örnek 4.7 Örnek 4.2'de verilen $M[A]$ vektörel matroidinin devrelerinin kümesi $\mathcal{C}(M) = \big\{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\big\}$ ailesidir ve $\mathcal{C}(M)$ devresinin 4 öğesi olduğundan 4−devredir (Oxley, 2010).

Bir M matroidi verildiğinde bu matroide karşılık gelen $\mathcal{C}(M)$ devre kümesinin belirlenebildiği bir önceki örnekten bilinmektedir. Benzer şekilde $\mathcal{C}(M)$ devreler kümesinden başlayarak $\mathcal{I}(M)$ matroidi elde edilebilir. Bu şekilde oluşturulan $\mathcal{I}(M)$ matroidinin $\mathcal{C}(M)$ kümesinden öğeler içermediğini belirtmeliyiz. Sonuç olarak, bir matroid kendisinin devreler kümesi $\mathcal{C}$ ile tek türlü olarak belirlenir.

Yardımcı Teorem 4.1 M bir matroid olsun. M nin $\mathcal{C}(M)$ devreler kümesi aşağıda verilen özellikleri sağlar (Oxley, 2010).
[C1]: $\emptyset \notin \mathcal{C}$
[C2]: Eğer $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ve $C_1 \subseteq C_2$ ise $C_1 = C_2$ dir.

Yardımcı Teorem 4.2 Bir matroidin devrelerinin kümesi $\mathcal{C}$ aşağıdaki özelliğe sahiptir (Oxley, 2010).
[C3]: Eğer $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ve $e \in C_1 \cap C_2$ ise, $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ sağlanacak biçimde bir $C_3 \in \mathcal{C}$ öğesi vardır.

Kanıt. $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ kümesinin bir devre içermediğini yani $C_3 \nsubseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \in \mathcal{I}$ sağlanır. [C2] özelliğinden $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$ dir. O halde bir $f \in C_1 \setminus C_2$ öğesini alalım. Şimdi $(C_1 \cup C_2)$ kümesinden maksimal olan, aynı zamanda $C_2 \setminus f \in \mathcal{I}$ yı içeren ve bağımsız olma özelliklerine sahip bir I alt kümesini seçelim. $f \notin I$ olduğu açıktır. Ayrıca, C_1 bir devre olduğundan, C_1 in bir g elemanı I içinde değildir. $f \in C_1 \setminus C_2$ olduğundan f ve g elemanları farklı yani $f \neq g$ dir.

Böylece; $I \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|$ eşitsizliği elde edilir. Şimdi matroid tanımındaki [M3] özelliğini $I_1 = I$ ve $I_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ alarak uygulayalım. Elde edilen bağımsız küme I nın maksimal olmasıyla çelişir. Sonuç olarak başlangıçtaki varsayımımız yanlıştır; yani $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ olacak biçimde bir $C_3 \in \mathcal{C}$ öğesi vardır. □

Yardımcı Teorem 4.2'de verilen [C3] koşulu devre eleme aksiyomu ya da zayıf devre eleme aksiyomu olarak adlandırılır (Oxley, 2010). Şimdi [C1], [C2] ve [C3] koşullarını sağlayan kümeler ailesinin bir matroidi karakterize ettiğini ve bu ailenin matroidin devreler kümesi olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.1 Bir U kümesinin [C1], [C2] ve [C3] koşullarını sağlayan altkümelerinin bir ailesi $\mathcal{C}$ olsun. U nun altkümelerinin bir $\mathcal{I}$ ailesi $\mathcal{C}$ nin hiçbir öğesini bulundurmasın. O halde $(U, \mathcal{I})$ bir matroid ve bu matroidin devrelerinin ailesi $\mathcal{C}$ dir (Oxley, 2010).

Kanıt. $\mathcal{C}$ devreler ailesi olsun. $\mathcal{I}$ ailesinin matroid olma koşullarını sağladığı sırasıyla gösterelim.

[M1]: $\emptyset \notin \mathcal{C}$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{I}$ dır.

[M2]: $I \nsubseteq \mathcal{C}$ ve $I^* \subseteq I$ olsun. $I^* \nsubseteq \mathcal{C}$ olduğundan $I^* \in \mathcal{I}$ dır.

[M3]: $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ve $|I_1| < |I_2|$ olduğunu varsayalım. (I_1, I_2) ikilisinin [M3] koşulunu sağlamadığını varsayalım. $\mathcal{I}$ ailesinin elemanları $I_1 \cup I_2$ nin altkümelerinin elemanlarıdır ve bu küme I_1 den daha fazla eleman içerir. Bir I_3 altkümesi için $|I_1 \setminus I_3|$ minimal olsun. [M3] koşulunu sağlanmadığı için $I_1 \setminus I_3$ boştan farklıdır ve $I_1 \setminus I_3$ kümesinden bir e öğesini seçelim. $I_3 \setminus I_1$ in her f öğesi için $(I_3 \cup \{e\}) \setminus f$ olsun. Karışıklılığa engel olmak için $(I_3 \cup \{e\}) \setminus f$ ifadesini kısaca T_f ile gösterelim. O halde $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ ve $|I_1 \setminus T_f| < |I_1 \setminus I_3|$ dir. Böylece $T_f \notin \mathcal{I}$ dir ve T_f, $\mathcal{C}$ devreler ailesinin bir C_f elemanını içerir. Açık bir şekilde $f \notin C_f$ dir. Ayrıca $e \in C_f$ dir. Aksi halde $C_f \subseteq I_3$ olup bu varsayımla çelişir. Sonuç olarak; $I_3 \in \mathcal{I}$ dir. $I_3 \setminus I_1$ kümesine ait bir g öğesini alalım. Eğer $C_g \subseteq (I_3 \setminus I_1) = \emptyset$ ise $C_g \subseteq \big((I_1 \cap I_3) \cup \{e\}\big) \subseteq I_1$, bu bir çelişkidir. Böylece $C_g \cap (I_3 \setminus I_1)$ de bir h elemanı vardır. Şimdi $e \in C_g \cap C_h$ olduğundan, [C3] koşuluna göre $\mathcal{C}$ devresinin bir C elemanı olmasını gerektirir. Yani; $C \subseteq (C_g \cup C_h) \setminus \{e\}$ dir. Ancak hem C_g hem de C_h, $I_1 \cup \{e\}$ nin alt kümeleridir ve böylelikle $C \subseteq I_3$ olup bu $I_3 \in \mathcal{I}$ olmasıyla çelişir. O halde başlangıçtaki varsayımımız yanlış olup [M3] koşulunun geçerli olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak $(I, \mathcal{I})$ bir matroid ve bu matroidin devreler ailesi $\mathcal{C}$ dir.□

Sonuç 4.1 Bir M matroidinin devreler kümesi $\mathcal{C}(M)$ olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir (Oxley, 2010).

i. C, M nin bir devresidir,
ii. Her $x \in C$ için $C \notin \mathcal{I}(M)$ ve $C \setminus \{x\} \in \mathcal{I}(M)$ dir,
iii. $C^* \in \mathcal{C}$, $C \subseteq C^*$ ise $C^* \not\subset C$ dir,
iv. $C \in \mathcal{C}$.

Sonuç 4.2 $\mathcal{C}$ nin, U üzerinde bir matroidin devreler ailesi olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{C}$ nin aşağıda verilen özellikleri sağlamasıdır (Oxley, 2010).
[C1]: $\emptyset \notin \mathcal{C}$,
[C2]: Eğer $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ve $C_1 \subseteq C_2$ ise $C_1 = C_2$ dir,
[C3]: Eğer $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ve $e \in C_1 \cap C_2$ ise, $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ olacak biçimde bir $C_3 \in \mathcal{C}$ vardır.

Önerme 4.2 M bir matroid, M içinde bir bağımsız küme I ve $I \cup \{e\}$ bağımlı olacak şekilde M nin bir öğesi e olsun. Bu durumda M matroidi için $I \cup \{e\}$ tarafından kapsanan sadece bir tek devre vardır ve bu devre e öğesini bulundurur (Oxley, 2010).

Kanıt. Açık olarak $I \cup \{e\}$ bir C devresini içerir. Ayrıca $I \cup \{e\}$ tarafından kapsanan her devre e yi bulundurmak zorundadır. Eğer C^* böyle bir devre ve C den farklı ise, [C3] gereğince $(C \cup C^*) \setminus \{e\}$ bir devre bulundurur. $(C \cup C^*) \setminus \{e\} \subseteq I$ olduğundan bu varsayımla çelişir. O halde C devresi tektir ve e öğesini bulundurur. □

Tanım 4.10 M bir matroid olsun. M nin bir maksimal bağımsız kümeler ailesi var ise bu aileye M nin bir tabanı denir. M matroidinin tüm tabanlar ailesi $\mathcal{B}(M)$ ile gösterilir. M matroidinin tabanı kısaca aşağıdaki gibi verilebilir (Oxley, 2010; Tang vd., 2013).

$$\mathcal{B}(M) = max(\mathcal{I}) \tag{4.2}$$

Örnek 4.8 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin bağımsız ailesi $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ olsun. $M = (U, \mathcal{I})$ matroidinin tabanı $\mathcal{B}(M) = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ ailesidir (Oxley, 2010).

Yardımcı Teorem 4.3 Bir M matrodinin farklı iki tabanı B_1 ve B_2 ise $|B_1| = |B_2|$ dir (Oxley, 2010).

Kanıt. M nin farklı iki tabanı B_1 ve B_2 olsun. B_1 ve B_2 bağımsız kümeler olup $|B_1| < |B_2|$ olduğunu kabul edelim. [M3] koşulundan $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ olacak biçimde bir $e \in B_2 \setminus B_1$ öğesi vardır. Bu B_1 tabanının maksimal oluşuyla çelişir. O halde $|B_1| \geq |B_2|$ dir. Benzer şekilde $|B_2| \geq |B_1|$ olduğunu gösterilebilir. Sonuç olarak $|B_1| = |B_2|$ dir. □

Sonuç 4.3 M bir matroid ve M nin bir tabanlarının bir ailesi $\mathcal{B}$ ise $\mathcal{B}$ aşağıdaki koşulları sağlar (Oxley, 2010).

i. $\mathcal{B} \neq \emptyset$,
ii. Eğer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \setminus B_2$ ise $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ olacak biçimde bir $y \in B_2 \setminus B_1$ vardır.

Tanım 4.11 M bir matroid ve $X \subseteq U$ olsun. $\mathcal{I}_X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$ kümesini tanımlayalım. $(X, \mathcal{I}_X)$, ikilisine M nin X kümesine kısıtlanmış matroid denir ve $M|X$ ile gösterilir (Tang vd., 2013).

Örnek 4.9 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin bağımsız altkümelerinin ailesi, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$ olsun. $X = \{3, 5\} \subseteq U$ altkümesinin $\mathcal{I}_X = \{I \subseteq \{3, 5\} : I \in \mathcal{I}\} = \{\{5\}, \emptyset\}$ bağımsız altkümelerinin ailesi ile $M|X = (X, \mathcal{I}_X)$ bir kısıtlanmış matroid belirler.

Doğrusal cebirde bir vektör uzayının boyutu ile bir matrisin rankı oldukça önemli ve yaygın kullanılan kavramlardır. Bir matroidin rank fonksiyonu bu iki kavramın bir genelleştirilmesi olarak matematik dizininde yer almaktadır. Rank fonksiyonu eşdeğer iki tanımla verilmektedir. Bu çalışma boyunca her iki tanımda kullanılacaktır.

Tanım 4.12 $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid ve $X \subseteq U$ olsun.

i. $M|X$ kısıtlanmış matroidinin tabanının eleman sayısına, X kümesinin rankı denir ve r_M ile gösterilir (Oxley, 2010).

ii. $r_M : P(U) \longrightarrow \mathbb{N}$

$$X \longmapsto r_M(X) = max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{I}\} \tag{4.3}$$

$r_M(X)$; M matroidine göre X kümesinin rankı olarak ifade edilir (Tang vd., 2013; Zhu ve Wang, 2011). Karışıklığı önlemek için M alt indisi kullanılmayacaktır.

Örnek 4.10 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ bağımsız ailesi ile $M = (U, \mathcal{I})$ matroidi verilsin. M matroidi için her $X \subseteq U$ altkümesinin rankı Tablo 4.3'te gösterilmiştir (Zhu ve Wang, 2011).

Tablo 4.3. Her $X \subseteq U$ altkümesinin rankı

$P(U)$	$r(X)$
$\emptyset$	0
$\{a\}$	1
$\{b\}$	1
$\{c\}$	1
$\{a, b\}$	2
$\{a, c\}$	1
$\{b, c\}$	2
U	2

Önerme 4.3 $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid ve $X, Y \subseteq U$ olsun. M matroidinin rank fonksiyonu r aşağıdaki özellikleri sağlar (Oxley, 2010).

(Rn1): $0 \leq r(X) \leq |X|$,

(Rn2): $X \subseteq Y \subseteq U \Longrightarrow r(X) \leq r(Y)$,

(Rn3): $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Kanıt. (Rn1): $X = \emptyset$ için $r(\emptyset) = 0$ olduğu açıktır. Benzer şekilde; $X = X$ alındığında $r(X) \leq |X|$ eşitsizliği kolayca görülür.

(Rn2): $X \subseteq Y \subseteq U$ ve $r(X) = a$ olsun.

$a = r(X) \leq |X| \Rightarrow a = r(X) \leq |X| \leq |Y|$

$\Rightarrow a = r(X) \leq r(Y)$

(Rn3): $X \cap Y$ kümesinin tabanı $B_{X \cap Y}$ olsun. $B_{X \cap Y}$ aynı zamanda $M|X \cup Y$ kısıtlanmış matroidin bağımsız kümesidir. Böylelikle $M|X \cup Y$ kısıtlanmış matroidi bir $B_{X \cup Y}$ tabanını içerir. O halde $M|X$ ve $M|Y$ kısıtlanmış matroidlerin bağımsız kümeleri sırasıyla $B_{X \cup Y} \cap X$ ve $B_{X \cup Y} \cap Y$ dir. Böylece, $|B_{X \cup Y} \cap X| \leq r(X)$ ve $|B_{X \cup Y} \cap Y| \leq r(Y)$ dir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\
&= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\
&= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cup (X \cap Y)| \\
&= |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| \\
&= r(X \cup Y) + r(X \cap Y)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.□

NOT: Bir F cismi üzerinde V ve W vektör uzayları verilsin. Doğrusal cebirde iyi bilinen

$$boy(V + W) + boy(V \cap W) \leq boy(V) + boy(W) \tag{4.4}$$

eşitsizliğinin (Rn3) özelliği için esin kaynağı olduğunu belirtelim (Oxley, 2010).

Yardımcı Teorem 4.4 U bir küme ve r, $P(U)$ üzerinde (Rn2) ve (Rn3) koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $X, Y \subseteq U$ altkümeleri her $y \in Y \setminus X$ için $r(X \cup \{y\}) = r(X)$ eşitliğini sağlıyorsa $r(X \cup Y) = r(X)$ dir (Oxley, 2010).

Kanıt. $X, Y \subseteq U$ ve $Y \setminus X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ olsun. İstenilen eşitliği elde etmek için k üzerinden tümevarım yöntemini başlatalım:

$k = 1$ için $Y \setminus X = \{y_1\}$ olmak üzere $r(X \cup \{y_1\}) = r(X)$ ise $r(X \cup Y) = r(X)$ dir.

$k = n$ için doğru olduğunu varsayalım. O halde $Y \setminus X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ olmak üzere $r(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) = r(X)$ ise $r(X \cup Y) = r(X)$ eşitliği sağlanır.

$k = n + 1$ için $Y \setminus X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$ olsun. Varsayım ile (Rn3) özelliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
r(X) + r(X) &= r\big(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}\big) + r\big(X \cup \{y_{n+1}\}\big) \\
&\geq r\Big(\big(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}\big) \cup \big(X \cup \{y_{n+1}\}\big)\Big) \\
&\quad + r\Big(\big(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}\big) \cap \big(X \cup \{y_{n+1}\}\big)\Big) \\
&= r\big(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}\big) + r(X) \\
&\geq r(X) + r(X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $r\big(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}\big) = r(X)$ olur. Sonuç olarak istenilen eşitlik sağlanır. □

Teorem 4.2 Bir $r : P(U) \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu (Rn1), (Rn2), (Rn3) koşullarını sağlasın ve $\mathcal{I} = \{X \subseteq U : r(X) = |X|\}$ ailesi verilsin. O halde $(U, \mathcal{I})$ bir matroid ve bu matroidin rank fonksiyonu r dir (Oxley, 2010).

Kanıt. İlk olarak $(U, \mathcal{I})$ ikilisinin bir matroid olduğunu gösterelim.

[M1]: $0 = r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$ eşitsizliğinden $r(\emptyset) = |\emptyset|$ olur. Böylece $\emptyset \in \mathcal{I}$ dır. Dolayısıyla istenen sağlanır.

[M2]: $I_1 \in \mathcal{I}$ ve $I_2 \subseteq I_1$ olsun. $I_1 \in \mathcal{I}$ olduğundan $r(I_1) \leq |I_1|$ dır. Ayrıca Önerme 4.3 - (Rn2)'den $r(I_2) \leq |I_2|$ ve $r(I_1 \setminus I_2) \leq |I_1 \setminus I_2|$ eşitsizlikleri vardır. Buna ek olarak $|I_1| \leq r(I_1) + r(I_1 \setminus I_2)$ eşitsizliği kullanılarak $|I_1| \leq r(I_2) + r(I_1 \setminus I_2) \leq |I_2| + |I_1 \setminus I_2| = |I_1|$ elde edilir. Böylece $r(I_2) = |I_2|$ olur. Bu ise $I_2 \in \mathcal{I}$ olduğunu ifade eder.

[M3]: $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ve $|I_1| < |I_2|$ olsun. Her $c \in I_2 \setminus I_1$ için $I_1 \cup \{c\} \notin \mathcal{I}$ olduğunu kabul edelim. O halde her c öğesi için $r(I_1 \cup \{c\}) \neq |I_1 \cup \{c\}|$ dir. Önerme 4.3'te verilen (Rn1), (Rn2) koşullarından ve $I_1 \in \mathcal{I}$ olmasından dolayı her c öğesi için $|I_1| + 1 > r(I_1 \cup \{c\}) \geq r(I_1) = |I_1|$ olur. Böylece $r(I_1 \cup \{c\}) = |I_1|$ dir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.4'ten $r(I_2) = r(I_1 \cup I_2)$ eşitliği elde edilir. Ancak $|I_1| = r(I_1)$ ve $r(I_1 \cup I_2) \geq r(I_2) = |I_2|$ den $|I_1| \geq |I_2|$ olur. Bu ise $|I_1| < |I_2|$ olmasıyla çelişir. O halde varsayımımız yanlış yani, [M3] koşulu sağlanır. Sonuç olarak $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid olur.

Son olarak r fonksiyonunun, M matroidinin rank fonksiyonu r_M olduğunu gösterelim. $X \subseteq U$ olsun. Eğer $X \in \mathcal{I}$ ise $r(X) = |X|$ dir ve X kümesi, $M|X$ in bir tabanı olduğu için $r(X) = |X|$ olur. Böylece $X \in \mathcal{I}$ ise $r(X) = r_M(X)$ elde edilir. Şimdi $X \notin \mathcal{I}$ olsun ve B kümesinin, $M|X$ in bir tabanı olduğunu kabul edelim. O halde $r_M(X) = |B|$ dir. Ayrıca her $x \in X \setminus B$ için $B \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ dir. Böylece $|B| = r(B) \leq r(B \cup \{x\}) < |B \cup \{x\}|$ olur. Yardımcı Teorem 4.4'ten $r(B \cup X) = r(B)$ yani $r(X) = r(B) = |B|$ dir. Böylece $X \notin \mathcal{I}$ ise $r(X) = r_M(X)$ olur. Sonuç olarak $r = r_M$ dir. □

Örnek 4.11 $U = \{a, b, c\}$ kümesinin bağımsız altkümeler ailesi $\mathcal{I} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\big\}$ olmak üzere $M = (U, \mathcal{I})$ matroidi verilsin. $X = \{c\} \subseteq U$ altkümesini alalım. $r(\{c\}) = 1 = |\{c\}|$ olduğundan $\{c\} \in \mathcal{I}$ olur. Diğer taraftan $Y = \{a, c\} \subseteq U$ altkümesi için $r(\{a, c\}) = 1$ olmasına karşın $|\{a, c\}| = 2$ dir. $|\{a, c\}| \neq r(\{a, c\})$ olduğundan $\{a, c\} \notin \mathcal{I}$ olur (Zhu ve Wang, 2011).

Yardımcı Teorem 4.5 Bir $M = (U, \mathcal{I})$ matroidinin rank fonksiyonu r olsun $X \subseteq U$ ve $x \in U$ ise $r(X) \leq r(X \cup \{x\}) \leq r(X) + 1$ dir (Oxley, 2010).

Kanıt. B_X, X in bir tabanı olsun. O halde B_X veya $B_X \cup \{x\}$, $X \cup \{x\}$ in bir tabanıdır. Böylece $r(X \cup \{x\}) = r(X)$ veya $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 1$ dir. □

Tanım 4.13 $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid ve M nin rank fonksiyonu r olsun.

$$cl_M : P(U) \longrightarrow P(U)$$
$$X \longmapsto cl_M(X) = \{x \in U : r(X) = r(X \cup \{x\})\}, \forall X \subseteq U \tag{4.5}$$

olarak tanımlanan cl_M ye M matroidinin kapanış operatörü ve $cl_M(X)$ kümesine de M matroidine göre X kümesinin kapanışı denir (Oxley, 2010; Zhu ve Wang, 2011).

$M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin kapanışı kendisine eşit oluyorsa, yani $cl_M(X) = X$ ise, X kümesine M matroidinin kapalı kümesi adı verilir. Başka bir ifadeyle, bir M matroidinin kapalı kümeleri cl_M operatörünün sabit noktalarıdır ve $\mathcal{L}_M$ ile gösterilir (Oxley, 2010; Zhu ve Wang, 2011).

Örnek 4.12 $U = \{a, b, c\}$ kümesinin bağımsız altkümeler ailesi $\mathcal{I} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\big\}$ olmak üzere $M = (U, \mathcal{I})$ matroidi verilsin. Her $X \subseteq U$ kümesinin kapanış Tablo 4.4'te verilmiştir (Zhu ve Wang, 2011).

Tablo 4.4. Her $X \subseteq U$ kümesinin matroid kapanışı

$P(U)$	$cl_M(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a, c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{a, c\}$
$\{a, b\}$	U
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	U
U	U

$M = (U, \mathcal{I})$ matroidinin kapanış operatörünün sabit noktalarının Tablo 4.4'ten yararlanarak $\emptyset$, $\{b\}$, $\{a, c\}$ ve U kümeleri olduğu kolayca görülür. O halde M nin kapalı kümeler ailesi $\mathcal{L}_M = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, U\}$ olur.

Önerme 4.4 $M = (U, \mathcal{I})$ matroidinin kapanış operatörü cl_M aşağıdaki koşulları sağlar (Oxley, 2010).

($Mcl1$): Her $X \subseteq U$ için $X \subseteq cl_M(X)$,

($Mcl2$): $X \subseteq Y \subseteq U$ ise $cl_M(X) \subseteq cl_M(Y)$,

($Mcl3$): Her $X \subseteq U$ için $cl_M\big(cl_M(X)\big) = cl_M(X)$,

($Mcl4$): Her $x, y \in U$ için $y \in cl_M(X \cup \{x\}) \setminus cl_M(X)$ ise $x \in cl_M(X \cup \{y\})$ dir.

Kanıt. ($Mcl1$): Tanım 4.13'ten açıktır.

($Mcl2$): (1. YOL) $X \subseteq Y$ ve $x \in cl_M(X)$ olsun.

$$\begin{aligned} x \in cl_M(X) &= \{x \in U : r(X) = r(X \cup \{x\})\} \\ &\subseteq \{x \in U : r(X \cup Y) = r(X \cup Y \cup \{x\})\} \\ &= \{x \in U : r(Y) = r(Y \cup \{x\})\} \\ &= cl_M(Y) \end{aligned}$$

(2. YOL): $X \subseteq Y$ ve $x \in cl_M(X) \setminus X$ olsun. O halde Yardımcı Teorem 4.4'ten $r(X \cup \{x\}) = r(X)$ dir. Eğer B_X, X kümesinin bir tabanı ise B_X, $X \cup \{x\}$ kümesinin de bir tabanı olur. Böylelikle $Y \cup \{x\}$ kümesi bir $B_{Y \cup \{x\}}$ tabanına sahiptir. Bu $B_{Y \cup \{x\}}$ tabanı, B_Y tabanını içerir ancak x öğesini içermez. $B_{Y \cup \{x\}}$ aynı zamanda Y nin bir tabanı olacağından

$r(Y \cup \{x\}) = |B_{Y\cup\{x\}}| = r(Y)$ olur. Böylece $x \in cl_M(Y)$ dir. O halde $cl_M(X) \subseteq cl_M(Y)$ sağlanır.

($Mcl3$): Her $X \subseteq U$ altkümesinin $cl_M(X) \subseteq cl_M(cl_M(X))$ ve $cl_M(cl_M(X)) \subseteq cl_M(X)$ kapsamlarını sağladığını ayrı ayrı gösterelim. $cl_M(X) \subseteq cl_M(cl_M(X))$ olduğu (Mcl1) koşulundan açıktır. Diğer taraftan bir $x \in cl_M(cl_M(X))$ alalım. O halde Tanım 4.13'ten $r(cl_M(X) \cup \{x\}) = r(cl_M(X))$ dir. Ancak $y \in cl_M(X) \setminus X$ için $r(X \cup \{y\}) = r(X)$ olur. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 4.4'ten $r(X) = r(X \cup (cl_M(X) \setminus X)) = r(cl_M(X))$ elde edilir. Buradan $r(cl_M(X) \setminus X) = r(X)$ dir. Ancak (Rn2) koşulundan $r(cl_M(X) \cup X) \geq r(X \cup \{y\}) \geq r(X)$ olur ve $x \in cl_M(X)$ dir. Böylece $cl_M(cl_M(X)) \subseteq cl_M(X)$ olur. Sonuç olarak her iki kapsamadan istenilen eşitlik sağlanır.

($Mcl4$): $y \in cl_M(X \cup \{x\}) \setminus cl_M(X)$ olsun. O halde $y \in cl_M(X \cup \{x\})$ ve $y \notin cl_M(X)$ olması nedeniyle $r(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = r(X \cup \{x\})$ ve $r(X \cup \{y\}) \neq r(X)$ bulunur. $r(X \cup \{y\}) \neq r(X)$ ve Yardımcı Teorem 4.5 gereğince $r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1$ eşitliği elde edilir. Böylece $r(X) + 1 = r(X \cup \{y\}) \leq r(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = r(X \cup \{x\}) \leq r(X) + 1$ dir. Sonuç olarak $r(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\})$ eşitliğinden $x \in cl_M(X \cup \{y\})$ bulunur. □

Yardımcı Teorem 4.6 $X \subseteq U$ ve $x \in U$ olsun. Eğer $X \in \mathcal{I}$ ve $X \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ ise $x \in cl_M(\{x\})$ dir (Oxley, 2010).

Kanıt. $X \subseteq U$ ve $x \in U$ olsun. $X \in \mathcal{I}$ ve $X \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ olduğu varsayalım. $y \in cl_M(X \cup \{x\} \cup \{y\})$ olacak şekilde bir $y \in X \cup \{x\}$ vardır. Eğer $x = y$ ise istenilen elde edilir. Eğer $x \neq y$ ise $(X \cup \{x\}) \setminus \{y\} = (X \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ ve $y \in cl_M((X \setminus \{y\}) \cup \{x\}) \setminus cl_M((X \setminus \{y\}))$ dir. Böylece ($Mcl4$) özelliği gereğince $x \in cl_M((X \setminus \{y\}) \cup \{y\}) = cl_M(X)$ dir ve sonuç olarak $x \in cl_M(X)$ bulunur. □

Önerme 4.5 $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ bir operatör olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir. (Oxley, 2010; Zhu ve Wang, 2011).

i. $cl = cl_M$ olacak biçimde U üzerinde bir $M = (U, \mathcal{I})$ matroidi vardır.
ii. cl operatörü Önerme 4.4'te verilen ($Mcl1$), ($Mcl2$), ($Mcl3$) ve ($Mcl4$) özellikleri sağlar.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Kanıtın bu yönü Önerme 4.4'te gösterildi.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): cl, ($Mcl1$), ($Mcl2$), ($Mcl3$) ve ($Mcl4$) özelliklerini sağlasın. U kümesi üzerinde bir $\mathcal{I} = \{X \subseteq U : x \notin cl_M(X \setminus \{x\}), \forall\, x \in X\}$ ailesini tanımlayalım. Kanıt iki adımda gerçekleştirilecektir. Birinci adımda $\mathcal{I}$ ailesinin bir matroid olduğunu, ikinci adımda cl nin matroidin kapanış operatörü olduğu yani $cl = cl_M$ eşitliği gösterilecektir.

1. Adım: $\mathcal{I}$ ailesi bir matroid belirler.

[M1]: $cl(\emptyset \setminus \{x\}) \Longrightarrow r(\emptyset \setminus \{x\}) = r\big((\emptyset \setminus \{x\}) \cup \{e\}\big)$ eşitliği gereğince $\emptyset \in \mathcal{I}$ dir.

[M2]: $I_1 \in \mathcal{I}$ ve $I_2 \subseteq I_1$ olsun. Eğer $x \in I_2$ ise $x \in I_1$ olur. $\mathcal{I}$ ailesinin tanımı gereğince $x \notin cl_M(I_1 \setminus \{x\})$ dir. ($Mcl2$) den $cl(I_2 \setminus \{x\}) \subseteq cl(I_1 \setminus \{x\})$ kapsaması sağlanır. O halde $x \notin cl(I_2 \setminus \{x\})$ ve $I_2 \in \mathcal{I}$ dır. Böylece $\mathcal{I}$ ailesinin [M2] yi sağladığı gösterilmiş olur.

[M3]: $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ve $|I_1| < |I_2|$ olsun. Tersine (M3) koşulu sağlanmayacak şekilde (I_1, I_2) ikilisini alalım. Tüm (I_1, I_2) ikilileri arasında $|I_1 \cap I_2|$ maksimal öğe olsun. $y \in I_2 \setminus I_1$ öğesini alalım. $I_1 \subseteq cl(I_2 \setminus \{y\})$ olduğunu kabul edelim. O halde ($Mcl2$)–($Mcl3$) özellikleri gereğince $cl(I_1) \subseteq cl(I_2 \setminus \{y\})$ olur. Böylece $y \notin cl(I_2 \setminus \{y\})$ olduğunda $y \in cl(I_1)$ dir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 4.6 yardımıyla $I_1 \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ ve (I_1, I_2) ikilisi için (M3) koşulu sağlanır. Bu durum $|I_1 \cap I_2|$ nin maksimal öğe olması ile çelişir. $I_1 \nsubseteq cl(I_2 \setminus \{y\})$ ve herhangi bir $t \in I_1$ öğesi için $t \notin cl_M(I_2 \setminus \{y\})$ olsun. Böylece $t \in I_1 \setminus I_2$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.6'dan $(I_2 \setminus \{y\}) \cup \{t\} \in \mathcal{I}$ dır. $|I_1 \cap (I_2 \setminus \{y\}) \cup \{t\}| > |I_1 \cap I_2|$ olduğundan $(I_1, (I_2 \setminus \{y\}) \cup \{t\})$ ikilisi için (M3) koşulu sağlanır. Bu ikili bir $x \in \big((I_2 \setminus \{y\}) \cup \{t\}\big) \setminus I_1$ öğesi için $I_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ sağlanır. Ancak $x \in I_2 \setminus I_1$ dir ve (I_1, I_2) ikilisi için (M3) koşulu sağlanır. Dolayısıyla bu varsayım ile çelişir ve $M = (U, \mathcal{I})$ bir matroid olur.

2. Adım: $cl_M = cl$ eşitliğini doğrulamak için $X \subseteq U$ olmak üzere $cl_M(X) \subseteq cl(X)$ ve $cl(X) \subseteq cl_M(X)$ kapsamalarını gösterelim. $x \in cl_M(X) \setminus X$ olsun. O halde $r(X \cup \{x\}) = r(X)$ dır. B, X kümesinin bir tabanı olsun. Bu durumda $B \in \mathcal{I}$ ve $B \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ olur. Yardımcı Teorem 4.6'dan $x \in cl(B)$ elde edilir. Ayrıca ($Mcl2$) özelliği $cl(B) \subseteq cl(X)$ kapsamasını verir ve $x \in cl(X)$ dir. O halde $cl_M(X) \subseteq cl(X)$ sağlanır. Şimdi diğer kapsamayı gösterelim. $x \in cl(X) \setminus X$ alalım. B, X kümesi için bir taban olsun. Bu durumda her $y \in X \setminus B$ için $B \cup \{y\} \notin \mathcal{I}$ sağlanır. Yardımcı Teorem 4.6 yardımıyla $X \subseteq cl(B)$ sağlandığı görülür. O halde $cl(X) \subseteq cl(B)$ dir. $x \in cl(X)$ olduğundan $x \in cl(B)$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $B \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ dir ve B, $X \cup \{x\}$ için bir tabandır. Bu bilgilerden $r(X \cup \{x\}) = |B| = r(X)$ eşitliğine ulaşılır ve $x \in cl_M(X)$ elde edilir. Böylece $cl(X) \subseteq cl_M(X)$ kapsamasıda

gösterilerek $cl_M = cl$ eşitliğine ulaşılır. Her iki adımda istenenler gösterilerek kanıt tamamlanır. □

Önerme 4.6 M bir matroid, $Y \subseteq U$ ve $\mathcal{L}_M = \{X \subseteq U : cl_M(X) = X\}$ olsun. O halde $cl_M(Y) = \bigcap\{X \in \mathcal{L}_M : Y \subseteq X\}$ eşitliği sağlanır (Liu ve Zhu, 2015).

Kanıt. $\mathcal{L}_M$ ve cl_M tanımlarından kolayca görülür.

Önerme 4.7 Bir $M = (U, \mathcal{I})$ matroidinin tüm kapalı kümelerinin ailesinin $\mathcal{L}_M$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen koşulların sağlanmasıdır (Liu ve Zhu, 2015).

(L1): $U \in \mathcal{L}_M$,

(L2): $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_M \Longrightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_M$,

(L3): $L \in \mathcal{L}_M$ ve $\mathcal{L}_M$ nin minimal öğelerin $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ ailesi L yi kapsayan $L_1 \setminus L$, $L_2 \setminus L$, …, $L_m \setminus L$ kümeleri $U \setminus L$ nin bir ayrışımıdır.

Matroidlerin çok geniş bir teori olduğu çalışmanın başında söylenmişti. Matroidler özelliklerine göre özel isimlerle adlandırılırlar. Şimdi bu özel matroidlerin tanımlarını ve örneklerini inceleyelim.

Tanım 4.14 M bir matroid ve $S \subseteq U$ olsun. $B \subseteq S$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}(M)$ varsa S, M nin bir bir germe altkümesidir denir. M nin tüm germe altkümelerinin ailesi $\mathcal{S}(M)$ ile gösterilir (Liu ve Zhu, 2015; Oxley, 2010).

Örnek 4.13 Daha önce incelediğimiz Örnek 4.8'de verilen matroidin tabanı $\mathcal{B}(M) = \big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\big\}$ ailesi olarak elde edilmişti. Bu örnek yardımıyla M matroidinin germe ailesini belirleyelim.

$\mathcal{S}(M) = \big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\},$
$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\big\}$ dir (Oxley, 2010).

Tanım 4.15 U kümesinin bir ayrışımı $\{T_i : i \in \mathrm{I}\}$ olsun. O halde U nun bağımsız altkümelerinin ailesi,

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq U : \forall i \in \mathrm{I}, |X \cap T_i| \leq 1\} \tag{4.6}$$

olarak tanımlanır ve ayrışım matroidi olarak adlandırılır (Tang vd., 2013).

Örnek 4.14 $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin bir ayrışımı $\{T_1, T_2, T_3\} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ olsun. Ayrışım matroidini oluşturalım.
$T_1 = \{a\}$ için $\mathcal{I}_1 = \{X \subseteq U : \forall i \in \mathrm{I}, |I \cap \{a\}| \leq 1\} = \{\emptyset, \{a\}\}$,
$T_2 = \{b, c\}$ için $\mathcal{I}_2 = \{X \subseteq U : \forall i \in \mathrm{I}, |I \cap \{b, c\}| \leq 1\} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}\}$ ve
$T_3 = \{d, e\}$ için $\mathcal{I}_3 = \{X \subseteq U : \forall i \in \mathrm{I}, |I \cap \{d, e\}| \leq 1\} = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}\}$ dir. Böylece ayrışım matroidinin bağımsız kümeleri $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$ ailesidir.

Kısıtlanmış matroid tanımı, verilen bir matroid yardımıyla yeni bir matroid elde edilmesi yolunu açmıştır. Matroid elde etmenin diğer bir yolu aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.16 U kümesinin bir ayrışımı $\{T_1, T_2\}$ olmak üzere $M_1 = (T_1, \mathcal{I}_1)$ ile $M_2 = (T_2, \mathcal{I}_2)$ matroidleri verilsin. $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir $M = (U, \mathcal{I})$ matroidi belirler. M ye M_1 ve M_2 matroidlerinin direkt toplamı denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ olarak gösterilir (Tang vd., 2013).

Örnek 4.15 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin bir ayrışımı $\{T_1, T_2\} = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}\}$ olmak üzere $M_1 = (T_1, \mathcal{I}_1)$ ile $M_2 = (T_2, \mathcal{I}_2)$ matroidleri olsun. M_1 ve M_2 nin bağımsız aileleri $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ ve $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}\}$ olarak verilsin. Sonuç olarak $M = M_1 \oplus M_2$ matroidinin bağımsız ailesi $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$ dir.

4.1. Matroid Üst Yaklaşım Sayıları

Bu kesimde bir matroidin rank fonksiyonundan esinlenerek üst yaklaşım sayısı kavramı; bir bağıntıdan matroid elde etmek için verilecektir. İlk olarak bir bağıntı için herhangi bir öğenin ardıl ve öncül komşuluk tanımlarını verelim:

Tanım 4.1.1 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Herhangi bir $x \in U$ için

i. $R_s : U \longrightarrow P(U)$, $R_s(x) = \{y \in U : xRy\}$ olarak tanımlanan R_s ye ardıl komşuluk operatörü, $R_s(x)$ kümesine x öğesinin ardıl komşuluğu,

ii. $R_p : U \longrightarrow P(U)$, $R_p(x) = \{y \in U : yRx\}$ olarak tanımlanan R_p ye öncül komşuluk operatörü, $R_p(x)$ kümesine de x öğesinin öncül komşuluğu

adları verilir (Zhu ve Wang, 2011).

Örnek 4.1.1 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}$ bağıntısı verilsin. Her $x \in U$ öğesinin ardıl ve öncül komşulukları Tablo 4.5'te verilmiştir (Zhu ve Wang, 2011).

Tablo 4.5. $x \in U$ öğesinin ardıl ve öncül komşulukları

$x \in U$	a	b	c	d
$R_s(x)$	$\{b, d\}$	$\{c\}$	$\{a, d\}$	$\{c\}$
$R_p(x)$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b, d\}$	$\{a, c\}$

Tanım 4.1.2 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. $L_R : P(U) \longrightarrow P(U)$ ve $H_R : P(U) \longrightarrow P(U)$ operatörleri ardıl komşuluklar türünden aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhu ve Wang, 2011; Zhu 2009).

$$L_R(X) = \{y : xRy \Longrightarrow y \in U\} = \{x \in U : R_s(x) \subseteq X\} \tag{4.7}$$

$$H_R(X) = \{x : \exists y \in X, xRy\} = \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\} \tag{4.8}$$

L_R ye ardıl alt yaklaşım operatörü ve $L_R(X)$ kümesine, X in ardıl alt yaklaşımı; H_R ye ardıl üst yaklaşım operatörü, $H_R(X)$ kümesine de X in ardıl üst yaklaşımı adları verilir.

Örnek 4.1.2 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ bağıntısı verilsin. Her $X \subseteq U$ altkümesi için ardıl alt ve üst yaklaşımlarını inceleyelim.

Ardıl alt yaklaşım tanımından dolayı öncelikle her $x \in U$ öğesinin ardıl komşuluklarını Tanım 4.1.1'den yararlanarak bulalım. Her $x \in U$ için ardıl komşuluklar $R_s(a) = \{a\}$, $R_s(b) = \{b, c\}$ ve $R_s(c) = U$ olur. Her $X \subseteq U$ altkümesi için ardıl alt ve üst yaklaşımlar Tablo 4.6'da ayrıntılı olarak verildi.

Tablo 4.6. Her $X \subseteq U$ için ardıl alt ve üst yaklaşımlar

X	$L_R(X)$	$H_R(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$
$\{a, b\}$	$\{a\}$	U
$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$	U
$\{b, c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$
U	U	U

Önerme 4.1.1 $R \subseteq U \times U$ bir bağıntısı olsun. L_R ardıl alt yaklaşım ve H_R ardıl üst yaklaşım operatörleri her $X, Y \subseteq U$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir (Zhu ve Wang, 2011; Zu, 2007).

(L1): $L_R(U) = U$,

(L2): $X \subseteq Y \Longrightarrow L_R(X) \subseteq L_R(Y)$,

(L3): $L_R(X \cap Y) = L_R(X) \cap L_R(Y)$,

(H1): $H_R(\emptyset) = \emptyset$,

(H2): $X \subseteq Y \Longrightarrow H_R(X) \subseteq H_R(Y)$,

(H3): $H_R(X \cup Y) = H_R(X) \cup H_R(Y)$,

(HL1): $L_R(U \setminus X) = U \setminus H_R(X)$.

Kanıt. (L1): $L_R(U) = \{x : R_s(x) \subseteq U\} = U$

(L2): $X \subseteq Y \subseteq U$ ve $a \in L_R(X)$ olsun.

$$\begin{aligned} a \in L_R(X) &\Longrightarrow a \in R_s(x) \subseteq X \\ &\Longrightarrow a \in R_s(x) \subseteq X \subseteq Y \\ &\Longrightarrow a \in R_s(x) \subseteq Y \\ &\Longrightarrow a \in L_R(Y) \end{aligned}$$

Yukarıda gösterilen gerektirmelerden $L_R(X) \subseteq L_R(Y)$ elde edilir.

(L3): $$\begin{aligned} x \in L_R(X \cap Y) &\Longleftrightarrow x \in R_s(x) \subseteq X \cap Y \\ &\Longleftrightarrow x \in R_s(x) \subseteq X \wedge x \in R_s(x) \subseteq Y \\ &\Longleftrightarrow x \in L_R(X) \wedge x \in L_R(Y) \\ &\Longleftrightarrow x \in L_R(X) \cap L_R(Y) \end{aligned}$$

Denkliklerden $L_R(X \cap Y) = L_R(X) \cap L_R(Y)$ eşitliği bulunur.

(H1): $H_R(\emptyset) = \{x : R_s(x) \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$

(H2): $X \subseteq Y \subseteq U$ ve $a \in H_R(X)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
a \in H_R(X) &\Longrightarrow a \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow a \in R_s(x) \cap X \\
&\Longrightarrow a \in R_s(x) \wedge a \in X \\
&\Longrightarrow a \in R_s(x) \wedge a \in X \subseteq Y \\
&\Longrightarrow a \in R_s(x) \wedge a \in Y \\
&\Longrightarrow a \in (R_s(x) \cap Y) \\
&\Longrightarrow a \in R_s(x) \cap Y \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow a \in H_R(Y)
\end{aligned}
$$

O halde $H_R(X) \subseteq H_R(Y)$ dir.

(H3):
$$
\begin{aligned}
x \in H_R(X \cup Y) &\Leftrightarrow x \in R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in \big((R_s(x) \cap X) \cup (R_s(x) \cap Y)\big) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow (x \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset) \vee (x \in R_s(x) \cap Y \neq \emptyset) \\
&\Leftrightarrow (x \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset) \cup (x \in R_s(x) \cap Y \neq \emptyset) \\
&\Leftrightarrow H(X) \cup H(Y)
\end{aligned}
$$

Yukarıda sıralanan denkliklerden $H_R(X \cup Y) = H(X) \cup H(Y)$ eşitliği çıkar.

(LH1):
$$
\begin{aligned}
x \in L_R &\Leftrightarrow a \in R_s(x) \subseteq U \setminus X \\
&\Leftrightarrow a \in R_s(x) \wedge a \in U \setminus X \\
&\Leftrightarrow a \in R_s(x) \wedge a \notin X \\
&\Leftrightarrow R_s(x) \cap X = \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \notin H_R(X) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in U \setminus H_R(X)
\end{aligned}
$$

Denklikleri istenen eşitliği verir ve kanıt tamamlanır. □

Tanım 4.1.3 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı ve $x_1, x_2, \ldots, x_m \in U$ olmak üzere R bağıntısının farklı tüm ardıl komşulukları sırasıyla $R_s(x_1), R_s(x_2), \ldots, R_s(x_m)$ olsun. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayısı f_R üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile aşağıdaki gibi tanımlanır (Zhu ve Wang, 2011).

$f_R : P(U) \longrightarrow \mathbb{N}$

$$X \longmapsto f_R(X) = |\{x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} : R_s(x_i) \cap X \neq \emptyset\}| \quad (4.9)$$

Karışıklığı önlemek için R alt indisi yazılmayacaktır. Aslında bir bağıntıda ardıl komşuluklarının ailesi, evrensel kümenin bazı alt kümelerinin ailesi olarak görülür. Başka bir deyişle; $\{R_s(x) : x \in U\} = \{R_s(x_1), R_s(x_2), \ldots, R_s(x_m)\} \subseteq P(U)$ dir. Ayrıca alt yaklaşım sayısı benzer şekilde tanımlanabilir.

Örnek 4.1.3 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, b)\}$ bağıntısı verilsin. Her $X \subseteq U$ altkümesi için üst yaklaşım sayılarını belirleyelim.
$x \in U$ öğelerinin ardıl komşulukları $R_s(a) = \{a, c\}$, $R_s(b) = \{a\}$, $R_s(c) = \{b\}$ olmak üzere ardıl komşuluklar ailesi $\{R_s(x) : x \in U\} = \{R_s(a), R_s(b), R_s(c)\}$ dir. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayıları Tablo 4.7'de verilmiştir.

Tablo 4.7. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayıları

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	U
$f(X)$	0	2	1	1	3	2	2	3

Önerme 4.1.2'de üst yaklaşım sayısal fonksiyonunun özellikleri sıralandı. Bu özellikler, bir bağıntı yardımıyla matroidin kurulması için önemlidir.

Önerme 4.1.2 $R \subseteq U \times U$ bir bağıntı ve R bağıntısına göre üst yaklaşım sayısal fonksiyonu f olsun. Her $X, Y \subseteq U$ için f aşağıdaki özellikleri sağlar (Zhu ve Wang, 2011).

i. $f(\emptyset) = 0$,
ii. $X \subseteq Y \Longrightarrow f(X) \leq f(Y)$,
iii. $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y)$.

Kanıt. (i): $f(\emptyset) = 0$ olduğu açıktır.
(ii): $X \subseteq Y$ olsun.

$$\begin{aligned} f(X) &= |\{x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} : R_s(x_i) \cap X \neq \emptyset\}| \\ &\leq |\{x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} : R_s(x_i) \cap Y \neq \emptyset\}| = f(Y) \end{aligned}$$

(iii): $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y)$ eşitsizliği göstermek için Tanım 4.1.3'ten

$|\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\}| + |\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cap Y) \neq \emptyset\}| \leq |\{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\}| + |\{x \in U : R_s(x) \cap Y \neq \emptyset\}|$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $|\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\}| \neq 0$ olsun. $1 \leq k \leq m$ olmak üzere her $x_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ için

$$
\begin{aligned}
x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\} &\Longrightarrow R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x_k \in (R_s(x) \cap X) \cup (R_s(x) \cap Y) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x_k \in (R_s(x) \cap X \neq \emptyset) \cup (R_s(x) \cap Y \neq \emptyset) \\
&\Longrightarrow x_k \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset \vee R_s(x) \cap Y \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\} \text{ veya} \\
&\qquad x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap Y \neq \emptyset\} \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $|\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cap Y) \neq \emptyset\}| \neq 0$ olsun. Her $x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap (X \cap Y) \neq \emptyset\}$ için

$$
\begin{aligned}
R_s(x) \cap (X \cap Y) \neq \emptyset &\Longrightarrow (R_s(x) \cap X) \cap (R_s(x) \cap Y) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow (R_s(x) \cap X \neq \emptyset) \wedge (R_s(x) \cap Y \neq \emptyset) \\
&\Longrightarrow x_k \in R_s(x) \cap X \neq \emptyset \wedge R_s(x) \cap Y \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\} \text{ ve} \\
&\qquad x_k \in \{x \in U : R_s(x) \cap Y \neq \emptyset\} \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Böylece

$$
\begin{aligned}
f(X \cup Y) + f(X \cap Y) &= |\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\}| \\
&\quad + |\{x \in U : R_s(x) \cap (X \cap Y) \neq \emptyset\}| \\
&\leq |\{x \in U : (R_s(x) \cap X \neq \emptyset)\} \vee (R_s(x) \cap Y \neq \emptyset)| \\
&\quad + |\{x \in U : (R_s(x) \cap X \neq \emptyset)\} \wedge (R_s(x) \cap Y \neq \emptyset)| \\
&\leq |\{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\}| + |\{x \in U : R_s(x) \cap Y \neq \emptyset\}| \\
&= f(X) + f(Y)
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak istenilen eşitsizlik elde edilerek kanıt tamamlanır. □

Bir bağıntı ve bu bağıntıya karşılık gelen üst sayısal fonksiyonu verildiğinde bir matroid elde edilebileceğine ilişkin örneği verelim.

Önerme 4.1.3 $R \subseteq U \times U$ bir bağıntı ve R bağıntısına göre üst yaklaşım sayısal fonksiyonu f olsun. $\mathcal{I}(R) = \{X \subseteq U : \forall Y \subseteq X \text{ için } f(Y) \geq |Y|\}$ ailesi ile $M(R) = (U, \mathcal{I}(R))$ ikilisi bir matroid belirler (Zhu ve Wang, 2011).

Kanıt. [M1]: $f(\emptyset) = 0$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{I}(R)$ dir.

[M2]: Eğer $X \in \mathcal{I}(R)$ ve $Y \subseteq X$ ise her $X^* \subseteq X$ için $f\left(X^*\right) \geq \left|X^*\right|$ olur. Her $Y^* \subseteq Y \subseteq X$ için $f\left(Y^*\right) \geq \left|Y^*\right|$ olduğu açıktır. O halde $Y \in \mathcal{I}(R)$ dir.

[M3]: $X, Y \in \mathcal{I}(R)$ ve $|X| < |Y|$ ise $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}(R)$ olacak biçimde bir $e \in Y \setminus X$ öğesinin varlığını gösterelim. Tersine her $e \in Y \setminus X$ için $X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}(R)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $|X| \leq f(X) \leq f(X \cup \{e\}) < |X \cup \{e\}| \leq |X| + 1 \leq f(X) + 1$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $f(X) = f(X \cup \{e\}) = |X|$ olur. Her $e, c \in Y \setminus X$ ve $e \neq c$ için $f(X \cup \{e, c\}) + f(X) \leq f(X \cup \{e\}) + f(X \cup \{c\}) = 2f(X)$ sağlanır. O halde $f(X \cup \{e, c\}) \leq f(X) = |X|$ dır. $f(X) \leq f(X \cup \{e, c\})$ eşitsizliği daima sağlandığı için $f(X \cup \{e, c\}) = f(X)$ eşitliğine ulaşılır. Genel olarak; $f(Y) = f\left(X \cup \left(\bigcup_{e \in Y \setminus X} \{e\}\right)\right) = f(X)$ sağlandığı için $|X| = f(X) = f(Y) \geq |Y|$ olur. Bu ise $|X| \leq |Y|$ varsayımı ile çelişir. O halde $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}(R)$ olacak biçimde bir $e \in Y \setminus X$ öğesi vardır ve [M3] sağlanır. O halde $\left(U, \mathcal{I}(R)\right)$ ikilisi bir matroid olur. □

Önerme 4.1.3 yardımıyla herhangi bir bağıntıdan bir matroid elde edilebileceği gerçeğine ulaşılır. Bu matroid bağıntı tarafından indirgenen matroid olarak adlandırılır. Şimdi bu gerçeği somut bir örnekle destekleyelim.

Örnek 4.1.4 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (d, b)\}$ bağıntısı verilsin. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayıları Tablo 4.8'de gösterilmiştir. Her $x \in U$ için ardıl komşuluklar $R_s(a) = \{a, c\}$, $R_s(b) = \{a, b, c\}$, $R_s(c) = \emptyset$, $R_s(d) = \{b\}$ dir.

Tablo 4.8. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayıları

X	f
$\emptyset$	$f(\emptyset) = 0$
$\{a\}$	$f(\{a\}) = 2$
$\{b\}$	$f(\{b\}) = 2$
$\{c\}$	$f(\{c\}) = 2$
$\{d\}$	$f(\{d\}) = 0$
$\{a, b\}$	$f(\{a, b\}) = 3$
$\{a, c\}$	$f(\{a, c\}) = 2$
$\{a, d\}$	$f(\{a, d\}) = 2$
$\{b, c\}$	$f(\{b, c\}) = 3$
$\{b, d\}$	$f(\{b, d\}) = 2$
$\{c, d\}$	$f(\{c, d\}) = 2$
$\{a, b, c\}$	$f(\{a, b, c\}) = 3$
$\{a, b, d\}$	$f(\{a, b, d\}) = 3$
$\{a, c, d\}$	$f(\{a, c, d\}) = 2$
$\{b, c, d\}$	$f(\{b, c, d\}) = 3$
U	$f(U) = 3$

$\mathcal{I}(R) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\big\}$ ailesi ile $M(R) = \big(U, \mathcal{I}(R)\big)$ ikilisi bir matroid oluşturur.

Önerme 4.1.4 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olmak üzere R ye göre üst yaklaşım sayısal fonksiyonu f olsun. R bağıntısına göre indirgenen $M(R) = \big(U, \mathcal{I}(R)\big)$ matroidinin rank fonksiyonu $r_{M(R)}$ ile gösterilir ve her $X \subseteq U$ için

$$r_{M(R)} : P(U) \longrightarrow \mathbb{N},$$
$$X \longmapsto r_{M(R)}(X) = \min_{Y \subseteq X}\{f(Y) + |X \setminus Y|\} \qquad (4.10)$$

dir (Zhu ve Wang, 2011).

Kanıt. $X \in \mathcal{I}(R) \Leftrightarrow \forall Y \subseteq X, f(Y) \geq |Y|$

$$\Leftrightarrow \forall Y \subseteq X, f(Y) \geq |X| - |X \setminus Y|$$

$$\Leftrightarrow \forall Y \subseteq X, f(Y) + |X \setminus Y| \geq |X|$$
$$\Leftrightarrow \min_{Y \subseteq X}\{f(Y) + |X \setminus Y|\} = |X|$$
$$\Leftrightarrow r_{M(R)}(X) = \min_{Y \subseteq X}\{f(Y) + |X \setminus Y|\} \square$$

Örnek 4.1.5 $U = \{a, b, c, d\}$ üzerinde Örnek 4.1.4'te verilen bağıntıyı tekrar ele alalım. U nun $X_1 = \{a, c\}$ ve $X_2 = \{d\}$ altkümelerinin ranklarını bulalım. X_1 kümesinin rankı,

$$r_{M(R)}(X_1) = \min_{Y \subseteq X_1}\{f(Y) + |X_1 - Y|\}$$
$$= \min_{Y \subseteq X_1}\{\{f(\emptyset) + |\{a, c\} \setminus \emptyset|\}, \{f(\{a\}) + |\{a, c\} \setminus \{a\}|\}, \{f(\{c\}) + |\{a, c\} \setminus \{c\}|\},$$
$$\{f(\{a, c\}) + |\{a, c\} \setminus \{a, c\}|\}\} = 2$$

dir. X_2 kümesinin rankı aşağıda verilmiştir.

$$r_{M(R)}(X_2) = \min_{Y \subseteq X_2}\{f(Y) + |X_2 \setminus Y|\}$$
$$= \min_{Y \subseteq X_2}\{\{f(\emptyset) + |\{d\} \setminus \emptyset|\}, \{f(\{d\}) + |\{d\} \setminus \{d\}|\}\} = 0.$$

4.2. Bir Ayrışım Tarafından İndirgenen Düzgün Matroidler Kümesi

Çalışmanın bu bölümünde denklik bağıntısı ve düzgün matroid arasındaki ilişki incelendi. Ayrışıma ait her bir denklik sınıfının bir düzgün matroide dönüştüğü gösterildi ve düzgün matroidinin özellikleri incelendi. Bir denklik sınıfının herhangi iki farklı öğesinin ayırtedilemez olduğu bilinmektedir. Bu durumda, eğer bu iki öğeyi bulunduran küme bir bağımlı küme ve aynı zamanda öğelerin her biri bir bağımsız küme ise, bir denklik sınıfı rankı 1 olan düzgün matroide dönüştürülebilir. Böylece evrensel küme üzerinde herhangi bir ayrışım için düzgün matroidlerin kümesi belirlenebilir (Tang vd., 2013).

Tanım 4.2.1 U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ olsun. $\mathcal{A}$ tarafından indirgenen düzgün matroid $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{\mathbb{U}_{1,|T_i|} : T_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ kümesi ile tanımlanır ve kısaca $\mathcal{A}$ - *DMK* ile gösterilir (Tang vd., 2013).

NOT. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ kümesi içerisinde bulunan $|T_i|$ gösterimi T_i öğesinin eleman sayısını, $\mathbb{U}_{1,|T_i|} = (T_i, \mathcal{I}_{T_i})$ düzgün matroidini ve $\mathcal{I}_{T_i} = \{K \subseteq T_i : |K| \leq 1\}$, T_i denklik sınıfının bağımsız altkümeler ailesini ifade eder (Tang vd., 2013).

Örnek 4.2.1 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2\} = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}$ olsun. $\mathcal{A}$ - *DMK* kümesini belirleyelim. $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{\mathbb{U}_{1,\,|T_i|} : T_i \in \mathcal{A}\} = \{\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}, \mathbb{U}_{1,\,|T_2|}\}$ dir.
$\mathbb{U}_{1,\,|T_1|} = (T_1, \mathcal{I}_{T_1})$ düzgün matroidinin T_1 denklik sınıfı üzerindeki bağımsız altkümeler ailesi $\mathcal{I}_{T_1} = \{K \subseteq T_1 : |K| \leq 1\} = \{\emptyset, \{b\}\}$ dir. $\mathbb{U}_{1,\,|T_2|} = (T_2, \mathcal{I}_{T_2})$ düzgün matroidinin T_2 denklik sınıfı üzerindeki bağımsız altkümeler ailesi $\mathcal{I}_{T_2} = \{K \subseteq T_2 : |K| \leq 1\} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}\}$ dir. O halde $\mathcal{A}$ ayrışımının indirgendiği düzgün matroid $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}, \mathbb{U}_{1,\,|T_2|}\} = \{\mathbb{U}_{1,\,1}, \mathbb{U}_{1,\,2}\}$ dir.

Örnek 4.2.2 $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, T_3\} = \{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}, \{g\}\}$ olsun. $\mathcal{A}$ - *DMK* yi bulalım (Tang vd., 2013).
$T_1 = \{a, b\}$ için $\mathbb{U}_{1,\,|T_1|} = (T_1, \mathcal{I}_{T_1})$ düzgün matroidinin bağımsız altkümeler ailesi
$\mathcal{I}_{T_1} = \{K \subseteq T_1 : |K| \leq 1\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ dir.
$T_2 = \{c, d, e, f\}$ için $\mathbb{U}_{1,\,|T_2|} = (T_2, \mathcal{I}_{T_2})$ düzgün matroidinin bağımsız altkümeler ailesi
$\mathcal{I}_{T_2} = \{K \subseteq T_2 : |K| \leq 1\} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$ elde edilir.
$T_3 = \{g\}$ için $\mathbb{U}_{1,\,|T_3|} = (T_3, \mathcal{I}_{T_3})$ düzgün matroidinin bağımsız altkümeler ailesi
$\mathcal{I}_{T_3} = \{K \subseteq T_3 : |K| \leq 1\} = \{\emptyset, \{g\}\}$ dir.
$\mathcal{A}$ - *DMK*, $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}, \mathbb{U}_{1,\,|T_2|}, \mathbb{U}_{1,\,|T_3|}\} = \{\mathbb{U}_{1,\,2}, \mathbb{U}_{1,\,4}, \mathbb{U}_{1,\,1}\}$ dir (Tang vd., 2013).

Genel anlamda matroid tanımı için devre, rank foksiyonu, taban, kapanış, germe kümesi gibi özellikler daha önce gösterildi. Ayrıca bir düzgün matroid için bu kavramlar Wilson tarafından verildi. Şimdi bu özellikleri $\mathcal{A}$ - *DMK* için ifade edelim.

Tanım 4.2.2 *U* kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{A}$ ve $X \subseteq T$ olsun. *T* nin bir *X* altkümesi için *T* üzerinde $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ düzgün matroidi verilsin. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ düzgün matroidine ilişkin temel tanımlar aşağıda verilmiştir (Tang vd., 2013).

i. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin tüm devrelerinin ailesi;

$$\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,\,|T|}) = \{K \subseteq T : |K| = 2\} \tag{4.11}$$

dir.

ii. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin tüm tabanlarının ailesi;

$$\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,\,|T|}) = \mathcal{I}_T \setminus \{\emptyset\} \tag{4.12}$$

dir.

iii. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ e göre X kümesinin rankı;

$$r_{\mathbb{U}_{1,\,|T|}}(X) = \begin{cases} 0, X = \emptyset \\ 1, X \neq \emptyset \end{cases} \tag{4.13}$$

dır.

iv. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ e göre X kümesinin kapanışı;

$$cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T|}}(X) = \begin{cases} \emptyset, X = \emptyset \\ T, X \neq \emptyset \end{cases} \tag{4.14}$$

dır.

v. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin germe kümelerinin ailesi;

$$\mathcal{S}(\mathbb{U}_{1,\,|T|}) = P(T) \setminus \{\emptyset\} \tag{4.15}$$

dır.

Bir X denklik sınıfının herhangi iki farklı elemanı için (4.11) - (4.15) eşitlikleri, $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ düzgün matroidin bir devresini oluştururlar. Özellikle T denklik sınıfı sadece bir öğe bulunduruyorsa, yani $|T| = 1$ ise $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ düzgün matroidinde herhangi bir devrenin öğe sayısı sıfır, diğer bir ifadeyle $|\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,\,|T|})| = 0$ dır. Bir $\mathcal{A}$ - DMK da $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin herhangi bir düzgün matroidi için T nin her öğesi sadece bağımsız kümeyi değil aynı zamanda $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin tabanını oluşturur. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin rankı ve kapanışı; eğer X boştan farklı bir küme ise X in rankının 1 ve kapanışının T ye eşit olduğunu gösterir. Aksi taktirde X in rankı 0 ve kapanışı $\emptyset$ ye eşittir. T nin herhangi boş olmayan bir alt kümesinin $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ nin germe kümesi olduğu (4.15) eşitliği ile gösterildi (Tang vd., 2013).

Rankı 1 olan düzgün matroidlerin yukarıda sıralanan özelliklerinin basit biçimlendirilmeleri, matroid teorisinde yer alan farklı kavramların sadece anlaşılmasını kolaylaştırmaz aynı zamanda araştırmalar için uygun zeminin oluşmasına yardımcı olur (Tang vd., 2013).

Örnek 4.2.3 Örnek 4.2.1'i tekrar ele alalım. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin tüm devre ailesi (4.11) eşitliği kullanılarak;

i. $\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) = \{K \subseteq \{b\} : |K| = 2\} = \emptyset$,

$\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) = \{K \subseteq \{a, c, d\} : |K| = 2\} = \{\emptyset, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$ bulunur.

ii. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin tüm tabanlarının ailesi (4.12) eşitliğinden;

$\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) = \mathcal{I}_{T_1} \setminus \{\emptyset\} = \{\{b\}\}$, $\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) = \mathcal{I}_{T_2} \setminus \{\emptyset\} = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$ elde edilir.

iii. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ e göre $X = \{b, c\}$ in rankını (4.13) eşitliğinden yararlanarak;

$r_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}}(X) = 1$ ve $r_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}}(X) = 1$ dir.

iv. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ e göre $X = \{b, c\}$ in kapanışını (4.14) eşitliğinden bulalım.

$cl_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}}(X) = T_1$ ve $cl_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}}(X) = T_2$ olur.

v. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin germe kümesini (4.15) özelliğini kullanarak;

$\mathcal{S}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) = \{\{b\}\}$ ve $\mathcal{S}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) = \{\{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ bulunur.

Örnek 4.2.4 Bir kez daha Örnek 4.2.2'yi inceleyelim (Tang vd., 2013).

i. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin tüm devre ailesi (4.11) eşitliğinden;

$\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) = \{a, b\}$, $\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) = \{\{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$ ve $\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_3|}) = \emptyset$ bulunur.

ii. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ nin tüm tabanlarının ailesi (4.12) eşitliğinden;

$\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) = \{\{a\}, \{b\}\}$, $\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) = \{\{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$ ve $\mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,|T_3|}) = \{\{g\}\}$ elde edilir.

iii. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ matroidine göre $X = \{a, c, d\}$ kümesinin rankını (4.13) eşitliğinden bulalım.

$r_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}}(X) = 1$, $r_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}}(X) = 1$ ve $r_{\mathbb{U}_{1,|T_3|}}(X) = 1$ dir.

iv. $\mathbb{U}_{1,|T|}$ matroidi için $X = \{a, c, d\}$ kümesinin kapanışını (4.14) eşitliğinden bulalım.

$cl_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}}(X) = T_1$, $cl_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}}(X) = T_2$ ve $cl_{\mathbb{U}_{1,|T_3|}}(X) = T_3$ dir.

v. $\mathbb{U}_{1,\,|T|}$ matroidinin germe kümesini (4.15) eşitliğinden bulalım.

$S(\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,

$S(\mathbb{U}_{1,\,|T_2|}) =$

$\{\{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}\}$

ve $S(\mathbb{U}_{1,\,|T_3|}) = \{\{g\}\}$ bulunur.

4.3. Bir Ayrışım Tarafından İndirgenen Düzgün Matroidler Kümesinin Kombinasyonu

Bölüm 4.2'de bir kümenin ayrışımı yardımıyla düzgün matroidin nasıl elde edildiği ve özellikleri incelendi. Matroid yaklaşımı için ayrışımının her bir denklik sınıfı ile çalışmak oldukça uygundur. Bir küme üzerinde dağınık durumdaki bu düzgün matroidleri tüm uzaya yaymak için direk toplam operatörü aracılığıyla yeni bir matroid oluşturulur.

Tanım 4.3.1 U kümesi üzerinde bir $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ ayrışımı verilsin. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$, bir $\mathcal{A}$ - *DMK* olsun. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{U}_{1,\,|T_i|}$ ye $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ ailesinin kombinasyonu adı verilir (Tang vd., 2013).

Tanım 4.16'ya göre, iki matroidin direkt toplamından yine bir matroid elde edilir. Böylece $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ birleşimi de bir matroid olur. Özellikle Tanım 4.15'e göre $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nin bir ayrışım matroidi olduğu açıktır. O halde $\mathcal{A}$ - *DMK* nin kombinasyonunun özel ayrışım matroidi olduğunu söylenebilir. Bu $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nin yapısını sadeleştirir ve matroid yaklaşımı ile veri madenciliği problemlerinin çözümünde kolaylık sağlar (Tang vd., 2013).

Örnek 4.3.1 Örnek 4.2.1'de verilen $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = (U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}, \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ matroidini ele alalım. $U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = T_1 \cup T_2 = \{a, b, c, d\}$ olup $U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$, kümesinin altkümelerinin bir $\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ ailesi

$\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$

$= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$

olur.

Örnek 4.3.2 Daha önce verdiğimiz Örnek 4.2.2'yi tekrar ele alalım. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = (U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}, \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ bir matroid olsun. $U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olup $U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ kümesinin altkümelerinin bir $\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ ailesi

$$\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = \{I_1 \cup I_2 \cup I_3 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2, I_3 \in \mathcal{I}_3\}$$
$$= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, g\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{f, g\}, \{a, c, g\}, \{a, d, g\}, \{a, e, g\}, \{a, f, g\}, \{b, e, g\}, \{b, c, g\}, \{b, d, g\}, \{b, f, g\}\}$$

dir (Tang vd., 2013).

Tanım 4.3.2 U kümesi üzerinde bir $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ ayrışımı verilsin ve $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = (U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}, \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ bir matroid olsun. $\mathcal{A}$ - *DMK* de tüm düzgün matroidlerin rankları toplamı, $\mathcal{A}$ - *DMK* nin kombinasyonunun rankına eşittir ve aşağıda verilen eşitlikle ifade edilir (Tang vd., 2013).

$$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{A}|} r_{\mathbb{U}_{1,|T_i|}}. \tag{4.16}$$

Örnek 4.3.3 Örnek 4.2.1'i inceleyelim (Zhu ve Wang, 2011; Zhu, 2007).
$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} = \sum_{i=1}^{2} r_{\mathbb{U}_{1,|T_i|}} = r_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}} + r_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}} = 1 + 1 = 2$ dir.

Örnek 4.3.4 Daha önce incelediğimiz Örnek 4.4.2'den (Tang vd., 2013)
$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} = \sum_{i=1}^{3} r_{\mathbb{U}_{1,|T_i|}} = r_{\mathbb{U}_{1,|T_1|}} + r_{\mathbb{U}_{1,|T_2|}} + r_{\mathbb{U}_{1,|T_3|}} = 1 + 1 + 1 = 3$ tür.

Direk toplam operatörü ile iki matroid tarafından birleştirilen matroidin özellikleri Liu ve Chen tarafından verildi (Liu ve Chen, 1995). Bir sonraki tanım da $\mathcal{A}$ - *DMK* nin kombinasyonunun taban, devre, rank, kapanış ve germe küme özellikleri ifade edilecektir.

Tanım 4.3.3 U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ ve $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})} = (U_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}, \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ bir matroid olsun. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine ait temel özelikleri sıralayalım (Tang vd., 2013).

i. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm devrelerinin ailesi;

$$\mathcal{C}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} = \cup\{\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T|}) : \mathbb{U}_{1,|T|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\} \tag{4.17}$$

ii. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm tabanlarının ailesi;

$$\mathcal{B}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \mathcal{B}\left(\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}\right) \wedge \mathbb{U}_{1,\,|T_i|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \right\} \tag{4.18}$$

iii. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine göre X kümesinin rankı;

$$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X) = \sum_{i=1}^{n} r_{\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}}(X \cap T_i) \tag{4.19}$$

iv. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine göre X kümesinin kapanışı;

$$cl_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}}(X \cap T_i),\ \mathbb{U}_{1,\,|T_i|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \tag{4.20}$$

v. $M_{\mathcal{U}(P)}$ matroidinin germe kümelerinin ailesi;

$$S\left(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\right) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} S_i : S_i \in S\left(\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}\right) \wedge \mathbb{U}_{1,\,|T_i|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \right\} \tag{4.21}$$

dır.

(4.17) - (4.21) arasındaki eşitliklerinden, $\mathcal{A}$ tarafından indirgenen düzgün matroidlerin devrelerinin tek birleşimi $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm devrelerinin ailesi olarak bulunabilir. Böylece (4.11) eşitliğine göre $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin her devresinin eleman sayısı 2 ye eşittir. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ ye göre tüm tabanlar ailesi $\mathcal{A}$ tarafından indirgenen düzgün matroidin tüm tabanlarının birleşimidir. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nin her bir tabanının eleman sayısı $\mathcal{A}$ nın denklik sınıflarının sayısına eşittir. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine göre X kümesinin rankı denklik sınıfların sayısını ifade eder. Bu denklik sınıflarının, X ile arakesiti boştan farklıdır. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nin X kümesinin kapanışı denklik sınıfların birleşimidir ki X ile arakesiti boştan farklıdır. Yani; $\mathcal{A}$ tarafından indirgenen X in matroid üst yaklaşımıdır. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin germe kümelerinin kümesi bir aile olarak yorumlanabilir. Bu ailenin her bir elemanının kapanışı U kümesine eşittir.

U nun alt kümelerinin rankı Tanım 4.12'ye göre altkümede içerilen bağımsız kümelerin en büyük eleman sayısıdır. Ayrıca matroidin her bir bağımsız kümesi matroidin bazı tabanlarının altkümesi olduğu için Tanım 4.12 ile Tanım 4.3.1'e göre ve (4.18) - (4.21) eşitliklerinden aşağıdaki önerme verilir. Önermeye geçmeden önce aşağıdaki örneği inceleyelim (Tang vd., 2013).

Örnek 4.3.5 Örnek 4.2.2'den (Tang vd., 2013)

i. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm devre ailesi (4.17) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} &= \cup\{\mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T|}) : \mathbb{U}_{1,|T|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}\\ &= \mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_1|}) \cup \mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_2|}) \cup \mathcal{C}(\mathbb{U}_{1,|T_3|})\\ &= T_1 \cup T_2 \cup T_3,\end{aligned}$$

ii. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm tabanlarının ailesi (4.18) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}} &= \{\cup_{i=1}^{3} B_i : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}) \wedge \mathbb{U}_{1,\,|T_i|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}\\ &= \{B_1\} \cup \{B_2\} \cup \{B_3\}\\ &= \{\{\{a\},\{b\}\} \cup \{\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\} \cup \{g\}\}\\ &= \{\{a,c,g\},\{b,c,g\},\{a,d,g\},\{b,d,g\},\{a,e,g\},\{b,e,g\},\{a,f,g\},\{b,f,g\}\},\end{aligned}$$

iii. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine göre $X = \{a, c, d\}$ kümesinin rankı (4.19) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(\{a,c,d\}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} r_{\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}}(X \cap T_i)\\ &= r_{\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}}(X \cap T_1) + r_{\mathbb{U}_{1,\,|T_2|}}(X \cap T_2) + r_{\mathbb{U}_{1,\,|T_3|}}(X \cap T_3)\\ &= r_{\mathbb{U}_{1,\,2}}(\{a\}) + r_{\mathbb{U}_{1,\,4}}(\{c,d\}) + r_{\mathbb{U}_{1,\,1}}(\emptyset)\\ &= 1 + 1 + 0 = 2,\end{aligned}$$

iv. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidine göre $X = \{a, c, d\}$ kümesinin kapanışı (4.20) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}cl_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(\{a,c,d\}) &= \cup_{i=1}^{3} cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}}(X \cap T_i)\\ &= cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T_1|}}(X \cap T_1) \cup cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T_2|}}(X \cap T_2) \cup cl_{\mathbb{U}_{1,\,|T_3|}}(X \cap T_3)\\ &= cl_{\mathbb{U}_{1,\,2}}(\{a\}) \cup cl_{\mathbb{U}_{1,\,4}}(\{c,d\}) \cup cl_{\mathbb{U}_{1,\,1}}(\emptyset)\\ &= T_1 \cup T_2,\end{aligned}$$

v. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin germe kümelerinin ailesi (4.21) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}S(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) &= \{\cup_{i=1}^{3} S_i : S_i \in S(\mathbb{U}_{1,\,|T_i|}) \wedge \mathbb{U}_{1,\,|T_i|} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}\\ &= S_1 \in S(\mathbb{U}_{1,\,2}) \cup S_2 \in S(\mathbb{U}_{1,\,4}) \cup S_3 \in S(\mathbb{U}_{1,\,1})\end{aligned}$$

$= \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \cup \{\{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\},$
$\{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{c, d, e, f\}\} \cup \{\{g\}\}$
bulunur.

Önerme 4.3.1 U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ bir düzgün matroid ve $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ nin kombinasyonu olan $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin rankı her $X \subseteq U$ altkümesi için aşağıdaki eşitlikle verilir (Tang vd., 2013):

$$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X) = max\left\{|B \cap X| : B \in \mathcal{B}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}\right\} \tag{4.22}$$

Yukarıda verilen önermede; X kümesinin rankının $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tabanlarına bağlı olarak ifade edildiği görülmektedir.

Örnek 4.3.6 Daha önce incelenen Örnek 4.2.3'ü tekrar ele alalım. $X = \{a, c, d\}$ altkümesi için
$r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(\{a, c, d\}) = max\left\{|B \cap \{a, c, d\}| : B \in \mathcal{B}_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}\right\} = 3$ tür.

4.4. Bir Serial Bağıntıdan İndirgenen Matroidler

Bu alt bölümde serial bağıntı ile matroid arasındaki ilişki incelendi. Bu ilişkiyi ortaya koyabilmek için ilk olarak, bir $R \subseteq U \times U$ bağıntısı verildiğinde herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesinin tanımlanabilir olma kavramını tanımlayalım.

R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısına göre tanımlanabilir olan kümelerin ailesi

$$\mathcal{D}_R = \{X \subseteq U : L_R(X) = H_R(X)\} \tag{4.23}$$

dir (Liu ve Zhu, 2015).

Önerme 4.4.1 R, U kümesi üzerinde bir serial bağıntı olsun. L_R alt yaklaşım ve H_R üst yaklaşım operatörleri her $X \subseteq U$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir (Liu ve Zhu, 2015):

i. $L_R(\emptyset) = \emptyset$,
ii. $H_R(U) = U$,

iii. $L_R(X) \subseteq H_R(X)$.

Kanıt. (i): $L_R(\emptyset) = \emptyset$ eşitliği Tanım 4.1.2'den kolayca görülür.

(ii): Her $x \in U$ için $R_s(x) \neq \emptyset$ olduğundan $H_R(U) = \{x \in U : R_s(x) \cap U \neq \emptyset\} = U$ dir.

(iii) $X \subseteq U$ ve $y \in L_R(X)$ olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
y \in L_R(X) &\Rightarrow y \in \{x \in U : R_s(x) \subseteq X\} \\
&\Rightarrow y \in R_s(x) \subseteq X \\
&\Rightarrow y \in R_s(x) \cap X \\
&\Rightarrow y \in \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\} \\
&\Rightarrow y \in H_R(X)
\end{aligned}
$$

Böylece istenilen elde edilir. □

Önerme 4.4.2 $R \subseteq U \times U$ bir serial bağıntı olsun. Her $X, Y \in \mathcal{D}_R$ için aşağıda verilen özellikler sağlanır (Liu ve Zhu, 2015).

i. $U \setminus X \in \mathcal{D}_R$,

ii. $X \cap Y \in \mathcal{D}_R$,

iii. $X \cup Y \in \mathcal{D}_R$.

Kanıt. (i): $X \subseteq U$ olsun. Önerme 3.1 - (P9) özelliğine göre herhangi bir X için $L_R(U \setminus X) = U \setminus H_R(X)$ ve $H_R(U \setminus X) = U \setminus L_R(X)$ dir. Bir $X \in \mathcal{D}_R$ için $L_R(U \setminus X) = U \setminus H_R(X) = U \setminus L_R(X) = H_R(U \setminus X)$ olduğundan $L_R(U \setminus X) = H_R(U \setminus X)$ eşitliği sağlanır. Böylece $U \setminus X \in \mathcal{D}_R$ dir.

(ii): Önerme 4.4.1 - (iii) gereğince $L_R(X \cap Y) \subseteq H_R(X \cap Y)$ sağlandığı bilinmektedir. Diğer taraftan; $H_R(X \cap Y) \subseteq H_R(X) \cap H_R(Y) = L_R(X) \cap L_R(Y) = L_R(X \cap Y)$ olduğundan $H_R(X \cap Y) \subseteq L_R(X \cap Y)$ dir. O halde $L_R(X \cap Y) = H_R(X \cap Y)$ dir ve $X \cap Y \in \mathcal{D}_R$ elde edilir.

(iii): $L_R(X \cup Y) = H_R(X \cup Y)$ eşitliği için $L_R(X \cup Y) \subseteq H_R(X \cup Y)$ ve $H_R(X \cup Y) \subseteq L_R(X \cup Y)$ olduğunu gösterelim. $H_R(X \cup Y) \subseteq H_R(X) \cup H_R(Y) = L_R(X) \cup L_R(Y) \subseteq L_R(X \cup Y)$ olduğundan $H_R(X \cap Y) \subseteq L_R(X \cap Y)$ dir. Diğer taraftan ikinci kapsama için $L_R(X \cup Y) \subseteq H_R(X \cup Y)$ olduğu Önerme 4.4.1 - (iii)'den açıktır. Böylece istenilen eşitlik sağlanır. □

Aşağıda verilen önermede bir serial bağıntının tüm tanımlanabilir kümelerin, bazı matroidlerin kapanış kümeler ailesi olduğu ifade edilmektedir.

Teorem 4.4.1 R, U kümesi üzerinde bir serial bağıntı olsun. O halde $\mathcal{D}_R$ ailesi Önerme 4.7'de verilen (L1), (L2) ve (L3) özellikleri sağlanır (Liu ve Zhu, 2015).

Kanıt. (L1): Önerme 3.1 – $(P2)$'den $H_R(U) = U = L_R(U)$ sağlanır ve $U \in \mathcal{D}_R$ elde edilir.
(L2): Önerme 4.4.2 - (ii) gereğince $X, Y \in \mathcal{D}_R$ için $X \cap Y \in \mathcal{D}_R$ dir.
(L3): $L \in \mathcal{D}_R$ ve L yi kesin içeren $\mathcal{D}_R$ nin minimal öğeler kümesi $\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ olsun. $L_1 \setminus L, L_2 \setminus L, \dots, L_m \setminus L$ kümelerinin $U \setminus L$ nin bir ayrışımı olmadığını kabul edelim. Bu durumu ikiye ayırarak inceleyelim. Birinci durumda $(L_i \setminus L) \cap \left(L_j \setminus L\right) \neq \emptyset$ olacak şekilde en az iki $L_i, L_j \in \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ $(1 \leq i, j \leq m)$ öğeleri vardır. $N = (L_i \setminus L) \cap \left(L_j \setminus L\right)$ olsun. O halde $N \cup L = \left(L_i \cap L_j\right)$ olur. $L_i, L_j \in \mathcal{D}_R$ olduğundan (L2) ye göre $L_i \cap L_j \in \mathcal{D}_R$ bulunur. Bu ise L yi kesin içeren L_i ve L_j nin $\mathcal{D}_R$ nin minimal öğeleri olmasıyla çelişir. O halde her $L_i, L_j \in \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ için $(L_i \setminus L) \cap \left(L_j \setminus L\right) = \emptyset$ dir.
İkinci durum için $(L_1 \setminus L) \cup (L_2 \setminus L) \cup \dots \cup (L_m \setminus L) \neq U \setminus L$ olduğunu kabul edelim. O halde $Y = U \setminus (L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m)$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq Y \subseteq U$ kümesi vardır. Önerme 4.4.2–(iii)'e göre $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m \in \mathcal{D}_R$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Önerme 4.4.2 – (i)'e göre $Y \in \mathcal{D}_R$ olmaktadır. $L \in \mathcal{D}_R$ olduğu için $Y \cup U \in \mathcal{D}_R$ elde edilir. Ayrıca her $L_i \in \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ için $L_i \nsubseteq Y \cup U$ olduğundan, bu durum L yi kesin içeren $L_1, L_2, \dots, L_m$ lerin $\mathcal{D}_R$ nin minimal öğeler kümesi olmasıyla çelişir. Böylece $(L_1 \setminus L) \cup (L_2 \setminus L) \cup \dots \cup (L_m \setminus L) = U \setminus L$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{D}_R$ ailesi Önerme 4.7'nin tüm koşullarını sağlar. □

Örnek 4.4.1 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a)\}$ serial bağıntısı verilsin. Her $x \in X$ için ardıl komşuluklar $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{a, b\}$, $R_s(c) = \{a\}$ dir. Her X kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını Tablo 4.9'da verildi.

Tablo 4.9. Her $X \subseteq U$ için alt ve üst yaklaşımlar

$P(U)$	$L_R(X)$	$H_R(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{c\}$	U
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	U	U
$\{a, c\}$	$\{c\}$	U
$\{b, c\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
U	U	U

Böylece; $\mathcal{D}_R = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, U\}$ elde edilir.

Teorem 4.4.1'e göre herhangi bir R serial bağıntısından bir matroid oluşturulabilir. Elde edilen matroidin kapalı kümeleri ile R serial bağıntısının tanımlanabilir kümeleri çakışır. Bu matroide, R serial bağıntısı tarafından indirgenen matroid denir ve $M(S)$ ile gösterilir.

Önerme 4.4.3 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir (Liu ve Zhu, 2015).

i. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$,
ii. R bağıntısı serialdir.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ ve $x \in U$ olsun. O halde $L_R(X) = H_R(X)$ olacak biçimde bir $X \subseteq U$ altkümesi vardır. Tanım 4.1.2'den $R_s(x) \cap X \neq \emptyset$ dir. Bu durumda xRy olan bir $y \in U$ öğesi vardır ve R bağıntısı serialdir.

(ii) $\Longleftarrow$ (i): R bağıntısı serial olsun. $L_R(U) = U = H_R(U)$ olduğundan $U \in \mathcal{D}_R$ dir ve $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ sağlanır. □

5. MATROİD YAPILARI VE KABA KÜMELER ARASINDAKİ İLİŞKİ

5.1. Genelleştirilmiş Kaba Kümelerin Matroid Yaklaşım Operatörleri

Herhangi bir bağıntıya karşılık matroid yapısının elde edildiği bilinmektedir. Bağıntıya dayanan genelleştirilmiş kaba kümeler üzerinde var olan çalışmalar matroid yapıları için de yapılmıştır. Ayrıca bir bağıntıdan indirgenen matroidin rank fonksiyonu kullanılarak bir yaklaşım operatör çiftinin özellikleri incelenmiştir (Zhu ve Wang, 2011).

Tanım 5.1.1 U kümesi üzerinde bir R bağıntısından indirgenen matroid $M(R)$ olsun. Her $X \subseteq U$ altkümesi için

i. $\overline{M} : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne matroid üst yaklaşım operatörü, $\overline{M}(X) = \{y \in U : r_{M(R)}(X \cup \{y\}) = r_{M(R)}(X)\}$ kümesine de X in matroid üst yaklaşımı,

ii. $\underline{M} : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne matroid alt yaklaşım operatörü, $\underline{M}(X) = U \setminus \overline{M}(U \setminus X)$ kümesine de X in matroid alt yaklaşımı

adları verilir (Zhu ve Wang, 2011).

R bağıntısından elde edilen $M(R)$ matroidinin rank fonksiyonu için $r_{M(R)}$ gösterimi kullanıldı. Matroid alt yaklaşım operatörü ile matroid üst yaklaşım operatörünün dual kavramlar olduğu yukarıda verilen tanımın doğal bir sonucudur. Bu nedenle bu çalışmada sadece matroid üst yaklaşım operatörünün özellikleri verildi.

Örnek 5.1.1 Örnek 4.10'u tekrar ele alalım. $U = \{a, b, c\}$ olsun. Her $X \subseteq U$ altkümesinin matroid üst ve alt yaklaşımlarını inceleyelim. Her X altkümesi için rank fonksiyonları Örnek 4.10'da bulunmuştu. Şimdi tanım yardımıyla matroid yaklaşımları Tablo 5.1'de verilmiştir (Zhu ve Wang, 2011).

Tablo 5.1. Her $X \subseteq U$ için matroid alt ve üst yaklaşımları

X	$\underline{M}(X)$	$\overline{M}(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$
$\{a, b\}$	$\{b\}$	U
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$	U
U	U	U

Önerme 5.1.1 $R \subseteq U \times U$ bir bağıntı olsun. Her $X, Y \subseteq U$ için matroid üst yaklaşım operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar (Zhu ve Wang, 2011).

i. $\overline{M}(\emptyset) = \emptyset, \overline{M}(U) = U,$

ii. $X \subseteq \overline{M}(X),$

iii. $X \subseteq Y \Longrightarrow \overline{M}(X) \subseteq \overline{M}(Y),$

iv. $\overline{M}\left(\overline{M}(X)\right) = \overline{M}(X),$

v. Her $y, z \in U$ için $z \in \overline{M}(X \cup \{y\}) \setminus \overline{M}(X) \Longrightarrow y \in \overline{M}(X \cup \{z\})$ dir.

Kanıt. (i): Matroid üst yaklaşım tanımından yararlanarak (i) özelliğini gösterelim.

$\overline{M}(\emptyset) = \{y \in U \,:\, r_{M(R)}(\emptyset \cup \{y\}) = r_{M(R)}(\emptyset)\} = \emptyset,$

$\overline{M}(U) = \{y \in U \,:\, r_{M(R)}(U \cup \{y\}) = r_{M(R)}(U)\} = U.$

(ii): $x \in U$ alalım. $r_{M(R)}(U \cup \{y\}) = r_{M(R)}(U)$ olacak şekilde bir $y \in U$ vardır. Eğer $x = y$ ise $x \in \overline{M}(X)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $X \subseteq \overline{M}(X)$ olur. Eğer $x \neq y$ ise $\{x\} \cup \{y\} \supseteq \{x\}$ olması nedeniyle Önerme 4.1.4'ten $r_{M(R)}(\{x\} \cup \{y\}) = r_{M(R)}(\{x\})$ olur. Yardımcı Teorem 4.4'ten $r_{M(R)}(\{x\} \cup \{y\}) = r_{M(R)}(X) \leq |X|$ eşitsizliğinin varlığı bilinmektedir. Böylece $X \cup \{y\} \subseteq X$ ifadesi yazılamaz. Sonuç olarak $X \subseteq \overline{M}(X)$ elde edilir.

(iii): $X \subseteq Y$ ve $x \in \overline{M}(X)$ olsun. Bu durumda $r_{M(R)}(X \cup \{y\}) = r_{M(R)}(X) \leq |X| \leq |Y|$ sağlanır. (ii) özelliği gereğince $Y \subseteq \overline{M}(Y)$ olduğundan $r_{M(R)}(Y \cup \{y\}) = r_{M(R)}(Y)$ eşitliği elde edilir. Böylece $y \in \overline{M}(Y)$ olur. Sonuç olarak $\overline{M}(X) \subseteq \overline{M}(Y)$ dir.

(iv): $X \subseteq U$ olsun. $\overline{M}(X) \subseteq \overline{M}\left(\overline{M}(X)\right)$ olduğu (ii) den açıktır. Sadece $\overline{M}\left(\overline{M}(X)\right) \subseteq \overline{M}(X)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece $x \in \overline{M}\left(\overline{M}(X)\right)$ ise $r_{M(R)}\left(\overline{M}(X) \cup \{y\}\right) = r_{M(R)}\left(\overline{M}(X)\right)$ olacak şekilde bir $x \in U$ vardır. O halde $X \subseteq \overline{M}(X)$ ve matroidin rank fonksiyon tanımından $r_{M(R)}(X \cup \{y\}) = r_{M(R)}(X)$ eşitliğine ulaşılır. Buradan $x \in \overline{M}(X)$ elde edilir.

(v): $y, z \in U$ ve $z \in \left(\overline{M}(X) \cup \{y\}\right) \setminus \overline{M}(X)$ olsun. O halde $z \in \left(\overline{M}(X) \cup \{y\}\right)$ ve $z \notin \overline{M}(X)$ dir. Buradan $r_{M(R)}\left((X \cup \{y\}) \cup \{z\}\right) = r_{M(R)}(X \cup \{y\})$ ve $r_{M(R)}(X \cup \{z\}) \neq r_{M(R)}(X)$ olur. $r_{M(R)}(X \cup \{z\}) \leq |X \cup \{z\}| \leq |X \cup \{y\} \cup \{z\}|$ eşitsizliği gereğince $r_{M(R)}(X \cup \{y\}) = r_{M(R)}(X \cup \{y\} \cup \{z\})$ dir. Sonuç olarak $y \in \overline{M}(X \cup \{z\})$ elde edilir.□

Matroid üst yaklaşım operatörüne ilişkin özellikler Önerme 5.1.1'de sunuldu. Bu önermeye dikkat edildiğinde (v). özelliğin ilk defa yer aldığı görülür. Bu yeni özellik, matroid üst yaklaşımına özgü olup matroid alt yaklaşımında bulunmamaktadır.

5.2. Matroid Üst Yaklaşımı ile Bağıntı Üst Yaklaşımı

Yansımalı bir bağıntı verildiğinde matroid üst yaklaşım operatörü ile bağıntı üst yaklaşım operatörü arasındaki ilişkiyi vermesi bakımından aşağıdaki önerme önemlidir.

Önerme 5.2.1 $R \subseteq U \times U$ bağıntısı yansımalı ise, her $X \subseteq U$ için $\overline{M}(X) \subseteq H_R(X)$ dir (Zhu ve Wang, 2011).

Kanıt. Her $y \notin H_R(X)$ için $y \notin \overline{M}(X)$ yani, $r_{M(R)}(X) \neq r_{M(R)}(X \cup \{y\})$ olduğunu gösterelim.

$$r_{M(R)}(X \cup \{y\}) = \min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |(X \cup \{y\}) \setminus Y|\}$$

$$= \min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |(X \cup \{y\}) \setminus Y| : Y \subseteq X \cup \{y\}, y \in Y\},$$

$$\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |(X \cup \{y\}) \setminus Y| : Y \subseteq X \cup \{y\}, y \notin Y\}\}$$

$$= \min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |(X \cup \{y\}) \setminus Y| : Y \setminus \{y\} \subseteq X, y \in Y\},$$

$$\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |X \setminus Y| + 1 : Y \subseteq X, y \notin Y\}\}$$

$$= \min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y^* \cup \{y\}) + |X \setminus Y^*| : Y^* \subseteq X, y \in Y\},$$

$$\min_{Y \subseteq X \cup \{y\}} \{f(Y) + |X \setminus Y| + 1 : Y \subseteq X, y \notin Y\}\}$$

$$\geq \min_{Y \subseteq X} \{f(Y) + |(X \setminus Y) + 1|\}$$
$$= r_{M(R)}(X) + 1$$

olur. Çünkü her $Y^* \subseteq X$ için $f\ (Y^* \cup \{y\}) \geq f(Y^*) + 1$ dir. Aslında $y \notin H(X)$ olması $R_s(y) = \{z \in U : yRz\}$ olmak üzere $R_s(y) \cap X = \emptyset$ eşitliğini gerektirir. R yansımalı olduğu için $y \in R_s(y)$ dir. $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq U$ olmak üzere $\{R_s(x)\}_{x \in U} = \{R_s(x_1), R_s(x_2), \dots, R_s(x_m)\}$ ile gösterelim. $y \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ise $Y^* \cap R_s(y) = \emptyset$ ve $(Y^* \cup \{y\}) \cap R_s(y) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Böylece $f\ (Y^* \cup \{y\}) \geq f(Y^*) + 1$ dir. Eğer $y \notin \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ise $R_s(y) = R_s(x_i)$ olacak şekilde $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ vardır. Benzer şekilde $Y^* \cap R_s(x_i) = \emptyset$ ve $(Y^* \cup \{y\}) \cap R_s(x_i) \neq \emptyset$ bulunur. Bu ise $f\ (Y^* \cup \{y\}) \geq f(Y^*) + 1$ olmasını ifade eder. Böylece $r_{M(R)}(X \cup \{y\}) \geq r_{M(R)}(X) + 1$ dir. Buradan $r_{M(R)}(X \cup \{y\}) \neq r_{M(R)}(X)$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{M}(X) \subseteq H_R(X)$ olduğu gösterilerek kanıt tamamlanır. □

Bağıntının yansımalı olması durumunda Önerme 5.2.1 matroid üst yaklaşımının, bağıntı üst yaklaşımından daha küçük ya da dar olduğunu ifade etmektedir.

Örnek 5.2.1 $U = \{a, b, c\}$ üzerinde yansımalı bir $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ bağıntısı verilsin. Her $X \subseteq U$ için $\overline{M}(X) \subseteq H(X)$ olduğunu gösterelim.

Her X altkümesi için Önerme 4.1.4'te verilen rank fonksiyonundan yararlanarak öncelikle her $x \in U$ için ardıl komşuluklar $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{b, c\}$, $R_s(c) = \{c\}$ olarak belirlenir. Şimdi her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayısını bularak aşağıda verilen Tablo 5.2'ye yerleştirelim.

Tablo 5.2. Her $X \subseteq U$ için üst yaklaşım sayısı

$f(\emptyset)$	$f(\{a\})$	$f(\{b\})$	$f(\{c\})$	$f(\{a, b\})$	$f(\{a, c\})$	$f(\{b, c\})$	$f(U)$
0	1	2	2	2	3	3	3

Son olarak her $X \subseteq U$ için rank fonksiyonlarını Tablo 5.3'e yerleştirelim.

Tablo 5.3. Her $X \subseteq U$ kümesinin rankı

$r_{M(R)}(\emptyset)$	$r_{M(R)}(\{a\})$	$r_{M(R)}(\{b\})$	$r_{M(R)}(\{c\})$	$r_{M(R)}(\{a, b\})$	$r_{M(R)}(\{a, c\})$	$r_{M(R)}(\{b, c\})$	$r_{M(R)}(U)$
0	1	1	1	2	2	2	3

Şimdi her $X \subseteq U$ altkümesi için matroid üst yaklaşımlarını inceleyelim.

Tablo 5.4. Her $X \subseteq U$ için matroid üst yaklaşımları

$\overline{M}(\emptyset)$	$\overline{M}(\{a\})$	$\overline{M}(\{b\})$	$\overline{M}(\{c\})$	$\overline{M}(\{a,b\})$	$\overline{M}(\{a,c\})$	$\overline{M}(\{b,c\})$	$\overline{M}(U)$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	U

Böylece her $X \subseteq U$ için bağıntı üst yaklaşımlarını belirleyebiliriz.

Tablo 5.5. Her $X \subseteq U$ için bağıntı üst yaklaşımları

$H_R(\emptyset)$	$H_R(\{a\})$	$H_R(\{b\})$	$H_R(\{c\})$	$H_R(\{a,b\})$	$H_R(\{a,c\})$	$H_R(\{b,c\})$	$H_R(U)$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	U	U	U

Her X altkümesi için Tablo 5.4'te verilen matroid üst yaklaşımı ile Tablo 5.5'te verilen bağıntı üst yaklaşımı karşılaştırıldığında $\overline{M}(X) \subseteq H_R(X)$ olduğu görülür.

Önerme 5.2.1'de yansımalı bir bağıntı alındığında matroid üst yaklaşımının, bağıntı üst yaklaşımı tarafından kapsandığı ifade edilmişti. Ancak bir denklik bağıntısı verildiğinde matroid üst yaklaşımı, bağıntı üst yaklaşımına eşit olur. Başka bir deyişle; matroid üst yaklaşımı kaba küme teorisinde üst yaklaşımının bir genellemesidir.

Matroid alt yaklaşım operatörü ile bağıntı alt yaklaşım operatörü ve matroid üst yaklaşım operatörü ile bağıntı üst yaklaşım operatörü arasında olan ilişki aynı özelliklerle ifade edilir. Bu çalışmada sadece matroid üst yaklaşım operatörü ile bağıntı üst yaklaşım operatörü arasındaki ilişkiler incelendi.

5.3. Genelleştirilmiş Kaba Kümelerin Matroid Yaklaşım Özellikleri

Çalışmanın bu bölümünde bir matroidin kapanış operatörünün, bağıntıya dayalı genelleştirilmiş kaba kümelerin karakterizasyonu için ne şekilde kullanıldığı üzerinde durulacaktır.

Önerme 5.3.1 $R \subseteq U \times U$ bağıntısının simetrik olması için gerek ve yeter koşul her $X \subseteq U$ ve $y \in H_R(X \cup \{x\}) \setminus H_R(X)$ için $x \in H_R(X \cup \{y\})$ olmasıdır (Zhu ve Wang, 2011).

Kanıt. ($\Longrightarrow$): R simetrik bir bağıntı, $X \subseteq U$ ve $y \in H_R(X \cup \{x\}) \setminus H_R(X)$ olsun. Bu durumda $y \in H_R(X \cup \{x\})$ ve $y \notin H_R(X)$ dir. O halde $R_s(y) \cap (X \cup \{x\}) \neq \emptyset$ ve $R_s(y) \cap X = \emptyset$ olur. Böylece $R_s(y) \cap \{x\} \neq \emptyset$ dir. Başka bir deyişle $x \in R_s(y)$ dir. R simetrik olduğu için $y \in R_s(x)$ dir. Diğer taraftan $y \in R_s(x) \cap \{y\} \subseteq R_s(x) \cap (X \cup \{y\})$ yazılabilir. Bu kapsamadan $R_s(x) \cap (X \cup \{y\}) \neq \emptyset$ bulunur. O halde $x \in H_R(X \cup \{y\})$ dir.
($\Longleftarrow$): Her $X \subseteq U$ ve $y \in H_R(X \cup \{x\}) \setminus H_R(X)$ için $x \in H_R(X \cup \{x\})$ olsun. Her $x, y \in U$ için $x \in R_s(y)$ ise ardıl komşuluk tanımı gereğince $R_s(y) \cap \{x\} \neq \emptyset$ dir. Başka bir ifadeyle $y \in H_R(\{x\}) = H_R(\{x\} \cup \emptyset) \setminus H_R(\emptyset)$ olur. Böylece $x \in H_R(\{y\} \cup \emptyset) = H_R(\{y\})$ dir. $x \in H_R(\{y\})$ olduğundan $R_s(x) \cap \{y\} \neq \emptyset$ ve $y \in R_s(x)$ elde edilir. Bu ise R nin simetrik olduğunu ifade eder ve kanıt tamamlanır. □

Önerme 5.3.2 $R \subseteq U \times U$ bir bağıntı olsun. R nin denklik bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul R nin üst yaklaşım operatörü H_R nin bağıntıdan indirgenen matroidin kapanış operatörü cl_M ye eşit olmasıdır (Zhu ve Wang, 2011; Zhu, 2007).

Kanıt. R bir denklik bağıntısı olsun. R nin yansımalı olması için gerek ve yeter koşul her $X \subseteq U$ için $X \subseteq H_R(X)$ olmasıdır. Bu eşdeğerlik ($Mcl1$) koşulunun sağlandığı gösterir. R yansımalı olduğunda aynı zamanda bir serial bağıntıdır. Dolayısıyla R nin serial bağıntı olması için gerek ve yeter koşul her $X \subseteq U$ için $H_R(X) \subseteq H_R(Y)$ olmasıdır. Bu eşdeğerlik ($Mcl2$) koşulunun sağlanması demektir. Şimdi $H_R\big(H_R(X)\big) = H_R(X)$ eşitliği için $H_R\big(H_R(X)\big) \subseteq H_R(X)$ ve $H_R(X) \subseteq H_R\big(H_R(X)\big)$ kapsamalarını gösterilmesi yeterlidir. R nin geçişli olması için gerek ve yeter koşul $H_R\big(H_R(X)\big) \subseteq H_R(X)$ olmasıdır. $H_R(X) \subseteq H_R\big(H_R(X)\big)$ ise ($Mcl3$) koşulundan açıktır. Önerme 5.3.1'den R nin simetrik olması için gerek ve yeter koşul her $X \subseteq U$ ve $y \in H_R(X \cup \{x\}) \setminus H_R(X)$ için $x \in H_R(X \cup \{y\})$ olmasıdır. Böylece ($Mcl4$) koşulunun sağlandığı gösterilerek $cl_M = H_R$ sonucuna ulaşılır. □

5.4. Kaba Küme Kavramlarının Matroid Yaklaşımı ile Elde Edilmesi

Kaba kümelerin bazı önemli kavramları, matroid yaklaşımları ile ifade edilir. İlk olarak X altkümesi üzerinde kısıtlanmış matroid elde edilerek X altkümesinin yaklaşımları, matroid yaklaşımıyla bulunacaktır. İkinci olarak herhangi X ve Y altkümeleri için alt (üst) yaklaşımlar arasındaki ilişkiler incelenecektir. Son olarak, bir altkümenin sınırının ve negatif bölgesinin matroid yaklaşımıyla doğrudan belirlenebileceği gösterilecektir. Buna ek olarak bir X altkümesinin alt ve üst yaklaşımlarının sınır bölgesi yardımıyla elde edilebileceği üzerinde durulacaktır (Tang vd., 2013).

Çalışmanın bu alt bölümünde R bir denklik bağıntısı olarak kabul edildi. Bir U evrensel kümesinin herhangi bir X altkümesine alt ve üst yaklaşımlar Pawlak kaba küme modeli kullanılarak elde edilebilir. Herhangi bir kümeye matroid yaklaşımı kullanılarak nasıl yaklaşımda bulunacağı incelenecektir.

Önerme 5.4.1 $X \subseteq U$ olsun. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X$ kısıtlanmış matroidinin tabanı $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) \wedge |B \cap U| = r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X)\}$ ailesidir (Tang vd., 2013).

Kanıt. $M_{\mathcal{U}(P)}$ matroidinin bağımsız kümelerinin ailesi $\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ ve $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X = (X, \mathcal{I}_X)$ matroidinin bağımsız kümelerinin ailesi de $\mathcal{I}_X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\}$ olsun. Tanım 4.10 gereğince $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) = max(\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ alalım. Her $I_B \subseteq B$, $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin bağımsız kümesi olduğundan aynı zamanda $I_B \in \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ dir. Eğer $I_B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ ise $I_B \subseteq X$ olur. Bir $I_{B^*} \in \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ için $I_{B^*} \subseteq X$ ve $|I_{B^*}| \geq |I_B|$ olsun. $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ ailesinin tanımından $I_B \notin \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ dir. Gerçekten $I_B \in \mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ dir. Böylece $I_B \in max(\mathcal{I}_X)$ olur. O halde $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) \subseteq max(\mathcal{I}_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ dir. Diğer taraftan $I \in max(\mathcal{I}_X)$ olsun. Tanım 4.12'ye göre $|I| = r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X)$ dir. Dolayısıyla $I \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ yani $max(I_X) \subseteq \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ olur. Sonuç olarak her iki kapsamadan istenilen $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})|X}) = max(\mathcal{I}_X)$ eşitliği gösterilmiş olur. Ayrıca $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) \wedge |B \cap U| = r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X)\}$ elde edilerek kanıt tamamlanır. □

Örnek 5.4.1 U kümesi ve $\mathcal{A}$ ayrışımı Örnek 4.2.2'de verildiği gibi olsun. $X = \{a, c, d\}$ ve $Y = \{a, c, d, e\}$ altkümeleri için kısıtlanmış matroidin tabanları

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_{\{a,\, c,\, d\}}) &= \{B \cap \{a, c, d\} : B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) \wedge |B \cap U| = r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(\{a, c, d\})\} \\ &= \{\{a, c, d\}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_{\{a,\, c,\, d,\, e\}}) &= \{B \cap \{a, c, d, e\} : B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) \wedge |B \cap U| = r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(\{a, c, d, e\})\} \\ &= \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}\}\end{aligned}$$

aileleri olarak bulunur (Tang vd., 2013).

Önerme 5.4.2 $X \subseteq U$ ve $cl_M = cl_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$ olsun. Aşağıda verilen ifadeler sağlanır (Tang vd., 2013).

i. Her $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ için $\overline{apr}(X) = cl_M(B)$,

ii. Her $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_{U \setminus X})$ için $\underline{apr}(X) = U \setminus cl_M(B)$,

iii. $\overline{apr}(X) = \bigcup\{cl_M(\{x\}) : x \in X\}$,

iv. $\underline{apr}(X) = U \setminus \bigcup\{cl_M(\{x\}) : x \in U \setminus X\}$,

v. $\overline{apr}(X) = cl_M(X)$,

vi. $\underline{apr}(X) = U \setminus cl_M(U \setminus X)$.

Kanıt. (i): Her $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$ ve her $T \in \mathcal{A}$ için $B \cap X \neq \emptyset$ ise $X \cap T \neq \emptyset$ dir. Tanım 4.2.2'de verilen (4.13) ve (4.14) eşitliklerinden $cl_M(B) = \bigcup\{T \in \mathcal{A} : T \cap B \neq \emptyset\}$ yazılabilir. Böylece $cl_M(B) = \overline{apr}(X)$ eşitliği elde edilir.

(ii): (i) eşitliğinde X yerine $U \setminus X$ alınırsa $\overline{apr}(U \setminus X) = cl_M(B)$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafının U ya göre tümleyeni alınırsa, $U \setminus \overline{apr}(U \setminus X) = U \setminus cl_M(B)$ elde edilir. Alt ve üst yaklaşımlar birbirinin duali olduğundan istenen $\underline{apr}(X) = U \setminus cl_M(B)$ eşitliğine ulaşılır.

(iii): Her $T \in \mathcal{A}$ için $x \in T$ ise $cl_M(\{x\}) = T$ olduğu Tanım 4.2.2. - (4.14)'ten görülür. Ayrıca $\overline{apr}(X)$ in tanımından istenilen eşitlik elde edilir.

(iv): $\underline{apr}(X)$ ve $\overline{apr}(X)$ arasındaki dualite ve (iii) den yararlanarak istenen sağlanır.

(v): $X = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\overline{apr}(\emptyset) = \emptyset = cl(\emptyset)$ sağlanır. $X \neq \emptyset$ alalım. $cl_M(X) = T$ dir. Tanım 4.2.2 - (4.14) ve Tanım 4.3.3 - (4.20)'de verilen eşitlikler ile alt ve üst yaklaşım eşitliklerden kolayca görülür.

(vi): (v) den yararlanarak benzer şekilde gösterilir. □

Örnek 5.4.2 U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, T_3\} = \{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}, \{g\}\}$ olmak üzere Örnek 4.3.2'yi ele alalım. $X = \{a, b, c, f\}$ altkümesinin Önerme 5.4.2'de verilen özellikleri sağladığını ayrıntılı olarak gösterelim (Tang vd., 2013).

Öncelikle $X = \{a, b, c, f\}$ için Tanım 4.2'de verilen Pawlak alt yaklaşımının $\underline{apr}(X) = \{a, b\}$ ve Pawlak üst yaklaşımının $\overline{apr}(X) = \{a, b, c, d, e, f\}$ olduklarını not edelim.

i. $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) = \{\{a, c\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, f\}\}$ ve her $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X)$ için kapanış operatörü $cl_M(\{a, c\}) = cl_M(\{a, f\}) = cl_M(\{b, c\}) = cl_M(\{b, f\}) = \{a, b, c, d, e, f\}$ olduğundan $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_X) = cl_M(B)$ eşitliği sağlanır.

ii. $U \setminus X = \{d, e, g\}$ kümesinin taban ailesi $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_{U \setminus X}) = \{\{d, g\}, \{e, g\}\}$ olsun. Her $B \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|_{U \setminus X})$ için kapanış operatörleri $cl_M(\{d, g\}) = cl_M(\{e, g\}) = \{c, d, e, f, g\}$ olup $U \setminus cl_M(\{d, g\}) = U \setminus cl_M(\{e, g\}) = U \setminus \{c, d, e, f, g\} = \{a, b\}$ dir. Böylelikle $\underline{apr}(X) = U \setminus cl_M(B)$ eşitliği sağlanır.

iii. $x \in X$ elemanlarının kapanışı $cl_M(\{a\}) = cl_M(\{b\}) = \{a, b\}$ ve $cl_M(\{c\}) = cl_M(\{f\}) = \{c, d, e, f\}$ dir. $\bigcup\{cl_M(\{x\}) : x \in X\} = cl_M(\{a\}) \cup cl_M(\{b\}) \cup cl_M(\{c\}) \cup cl_M(\{f\}) = \{a, b, c, d, e, f\}$ olduğundan (iii) eşitliği sağlanır.

iv. $U \setminus X = \{d, e, g\}$ kümesinin elemanlarının kapanışı $cl_M(\{d\}) = cl_M(\{e\}) = \{c, d, e, f\}$ ve $cl_M(\{g\}) = \{g\}$ dir. $\bigcup\{cl_M(\{x\}) : x \in X\} = cl_M(\{d\}) \cup cl_M(\{e\}) \cup cl_M(\{g\}) = \{c, d, e, f, g\}$ elde edilir. $U \setminus X = \{a, b\}$ olması nedeniyle (iv) eşitliği sağlanır.

v. $\overline{apr}(X) = \{a, b, c, d, e, f\} = cl_M(X)$ eşitliği kolayca görülür.

vi. $U \setminus cl_M(U \setminus X) = \{a, b\} = \overline{apr}(U \setminus X)$ eşitliği elde edilir

Pawlak kaba küme teorisinde $X \subseteq Y \subseteq U$ ise X altkümesinin alt ve üst yaklaşımları, Y altkümesinin alt ve üst yaklaşımları tarafından kapsandığı başka bir ifadeyle $\underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ ve $\overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$ oldukları Önerme 3.1 - (P6) ve (P7)'de verilmişti. U nun X ve Y altkümeleri verildiğinde bu kümelerin alt (üst) yaklaşımı matroid yaklaşımı kullanılarak verilebilir (Tang, 2013).

Önerme 5.4.3 $X, Y \subseteq U$ olsun. Her $x \in X$ için $cl_M(\{x\}) = cl_M(\{y\})$ olacak biçimde bir $y \in Y$ varsa $\underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ ve $\overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$ kapsamaları vardır (Tang vd., 2013).

Kanıt. Tanım 4.2.2 - (4.14) eşitliği ile $\underline{apr}(X)$ ve $\overline{apr}(X)$ tanımlarından istenen kolayca görülür. □

Not. Yukarıda verilen önerme, Önerme 3.1–($P6$) ve ($P7$) özelliklerinin genel ifadesidir. $X \nsubseteq Y$ olsa bile Önerme 5.4.3 sağlanır (Tang vd., 2013).

Örnek 5.4.2 Daha önce incelenen Örnek 4.3.2 için $X = \{d, e, f, g\}$ ve $Y = \{a, c, g\}$ altkümelerini ele alalım. $X \nsubseteq Y$ olmasına rağmen $\underline{apr}(X) = \{g\} \subseteq \underline{apr}(Y)$ ve $\overline{apr}(X) = \{c, d, e, f, g\} \subseteq \overline{apr}(Y) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dir (Tang vd., 2013).

Önerme 5.4.4 $X, Y \subseteq U$ ve $cl_M = cl_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}$ olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir (Tang vd., 2013).

i. Her $x \in X$ için $cl_M(\{x\}) \subseteq X$ ise $cl_M(\{x\}) = cl_M(\{y\}) \subseteq Y$ olacak şekilde bir $y \in Y$ öğesi vardır.

ii. $\underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ dir.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Tanım 4.2.2'de verilen (4.14) eşitliğine göre, her $T \in \mathcal{A}$ için $x \in T$ ise $cl_M(\{x\}) = T$ olmaktadır. Her $x \in X$ ve $cl_M(\{x\}) \subseteq X$ için $cl_M(\{x\}) = cl_M(\{y\})$ olduğundan $x \in \underline{apr}(X)$ ve $x \in \underline{apr}(Y)$ dır. O halde $\underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ sağlanır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $\underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$ olsun. O halde her $x \in \underline{apr}(X)$ için $x \in \underline{apr}(Y)$ dir. Böylece $x \in T$, $T \subseteq X$ ve $T \subseteq Y$ olacak biçimde bir $T \in \mathcal{A}$ vardır. Bu durum $y \in T$ olacak şekilde bir $y \in Y$ öğesinin varlığını zorunlu kılar. Ayrıca (2.21) eşitliğine göre $cl_M(\{x\}) = cl_M(\{y\}) = T \subseteq Y$ dir. □

Önerme 5.4.5 $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Tang vd., 2013).

i. $\forall B_X \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$, $\forall B_Y \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y)$ ve $\forall T \in \mathcal{A}$ için
$T \cap B_X \neq \emptyset \Longrightarrow T \cap B_Y \neq \emptyset$,

ii. $\overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Önerme 5.4.2 – (i) özelliğinden istenen elde edilir.

(ii) $\Longleftarrow$ (i): $\overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$ olsun. Her $T \in \mathcal{A}$ ayrışımı için $T \subseteq \overline{apr}(X)$ ise $T \subseteq \overline{apr}(Y)$ dir. Matroidin tabanı, kısıtlanmış matroid tanımları ve Tanım 4.3.3 - (4.18)'de verilen eşitlik kullanılarak her $B_X \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$, her $B_Y \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y)$ için $x \in B_X$ ve $y \in B_Y$ olacak şekilde $x, y \in T$ vardır. Böylece $T \cap B_X \neq \emptyset$ ve $T \cap B_Y \neq \emptyset$ dir. □

Örnek 5.4.3 $X = \{b, c, e, f\} \subseteq U$ altkümesine göre kısıtlanmış matroidin taban ailesi $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X) = \{\{b, c\}, \{b, e\}, \{b, f\}\}$ ve $Y = \{a, d, g\} \subseteq U$ altkümesine göre kısıtlanmış matroidinin taban ailesi $\mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y) = \{a, d, g\}$ olmak üzere Örnek 4.3.2'yi ele alalım. Her $B_X \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$ için

$B_1 = \{b, c\} \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$ için $\{b, c\} \cap T_1 = \{b\}$, $\{b, c\} \cap T_2 = \{c\}$,

$B_2 = \{b, e\} \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$ için $\{b, e\} \cap T_1 = \{b\}$, $\{b, e\} \cap T_2 = \{e\}$,

$B_3 = \{b, f\} \in \mathcal{B}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X)$ için $\{b, f\} \cap T_1 = \{b\}$, $\{b, f\} \cap T_2 = \{f\}$ dir.

Her $B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y\big)$ için $\{a, d, g\} \cap T_1 = \{a\}, \{a, d, g\} \cap T_2 = \{d\}$ elde edilir.
$\overline{apr}(X) = \{a, b, c, d, e, f\} \subseteq \overline{apr}(Y) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olur. Böylece $X \cap Y = \emptyset$ ve $|X| > |Y|$ olmasına rağmen $\overline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(Y)$ nin sağlandığı gösterilmiş olur.

Sonuç 5.4.1 Her $T \in \mathcal{A}$ için $T \cap B_X \neq \emptyset$ olması ile $T \cap B_Y \neq \emptyset$ olması eşdeğer ise $X, Y \subseteq U$ için $\overline{apr}(X) = \overline{apr}(Y)$ dir (Tang vd., 2013).

Önerme 5.4.6 $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir (Tang vd., 2013).

i. Her $B_X \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X\big)$, her $B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y\big)$ için $\overline{apr}(X) = \overline{apr}(Y)$ dir
ii. $B_X, B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|\bigcup A\big)$ olacak şekilde bir $A \subseteq \mathcal{A}$ vardır.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $B_X \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|X\big), B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|Y\big)$ ve $\overline{apr}(X) = \overline{apr}(Y)$ olsun. Tanım 4.2.2 - (4.14) eşitliği ve Önerme 5.4.2 - (i) özelliğine göre $cl_M(B_X) = cl_M(B_Y)$ dir. Böylece $\overline{apr}(X) = \overline{apr}(Y) = \bigcup A$ olacak şekilde bir $A \subseteq \mathcal{A}$ vardır. $X \subseteq \overline{apr}(X)$, $X \subseteq \bigcup A$ ve $Y \subseteq \overline{apr}(Y)$, $Y \subseteq \bigcup A$ olur. Ayrıca her $T \in A$ için $X \cap T \neq \emptyset$ ve $Y \cap T \neq \emptyset$ dır. Böylece Tanım 4.2.2 - (4.12) ve Tanım 4.3.3 - (4.18) eşitliklerinden $B_X, B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|\bigcup A\big)$ elde edilir.
(ii) $\Longleftarrow$ (i): $B_X, B_Y \in \mathcal{B}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}|\bigcup A\big)$ olacak şekilde bir $A \subseteq \mathcal{A}$ var olsun. Tanım 4.2.2 - (4.12) ve Tanım 4.3.3'te verilen (4.18) eşitliklerinden istenilen elde edilir. □

Pawlak kaba küme teorisinde, bir $X \subseteq U$ altkümesinin sınır bölgesi X kümesini belirlemek için yeterlidir. Eğer X altkümesinin sınır bölgesi boş küme ise X kümesine kesin küme aksi durumda kaba küme adı verilir. Genel olarak sınır bölge ve negatif bölge, alt ve üst yaklaşımlar yardımıyla Tanım 3.4 - (3.4) ve (3.5)'te verilen eşitlikler kullanılarak bulunabilir. Bir X kümesinin sınır ve negatif bölgeleri direk olarak aşağıda verilen eşitliklerle de bulunabilir (Tang vd., 2013).

$$BN_R(X) = \bigcup\{T \in U/R : T \cap X \neq \emptyset \wedge T \nsubseteq X\} \tag{5.1}$$

$$NEG_R(X) = \bigcup\{T \in U/R : T \cap X = \emptyset\} \tag{5.2}$$

Örnek 5.4.4 $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, T_3\} = \big\{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}, \{g\}\big\}$ olsun. $X = \{a, c, d\}$ kümesinin sınır ve negatif bölgelerini (5.1) ve (5.2) de verilen eşitlikler yardımıyla bulalım (Tang vd., 2013):
$BN_R(X) = \bigcup\{T \in U/R : T \cap X \neq \emptyset \wedge T \nsubseteq X\} = \bigcup\big\{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}\big\} = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve
$NEG_R(X) = \bigcup\{T \in U/R : T \cap X = \emptyset\} = \{g\}$ dir.

Önerme 5.4.7 $X \subseteq U$ ve $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nin bütün devrelerinin ailesi $\mathcal{C}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\big)$ olsun. R denklik bağıntısına göre X in sınır bölgesi $BN_R(X) = \bigcup\big\{C \in \mathcal{C}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\big) : |C \cap X| = 1\big\}$ dir (Tang vd., 2013).

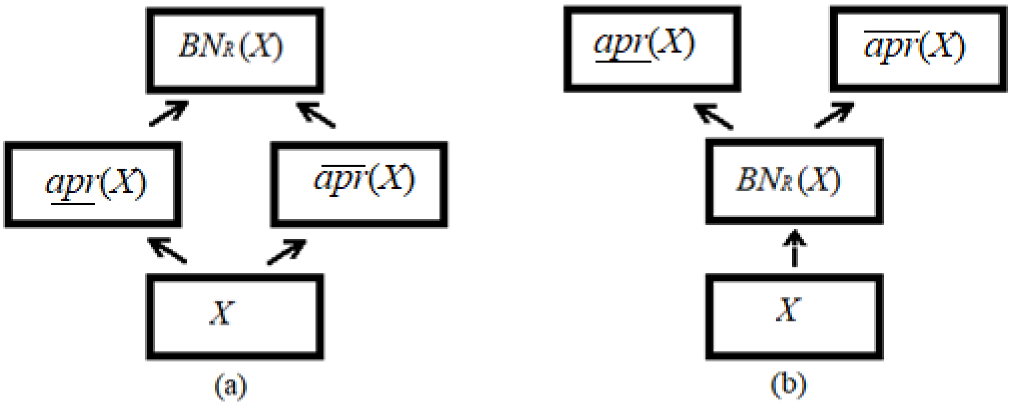
Kanıt. U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A}$ ve $T \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $T \subseteq \underline{apr}(X)$ ise her $C \in \mathcal{C}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\big)$ ve $C \subseteq T$ için Tanım 4.2.2'de verilen (4.11) eşitliğinden $|C \cap X| = 2$ dir. $T \subseteq \overline{apr}(X)$ ve $T \nsubseteq \underline{apr}(X)$ ise $x \in T$ ve $x \notin X$ olacak biçimde bir $x \in T$ öğesi vardır. Ayrıca Tanım 4.2.2'de verilen (4.11) ve (4.17) eşitliklerine göre her $C \in K$, $|C \cap X| = 1$ ve $\bigcup K = T$ olacak şekilde bir $K \subseteq \mathcal{C}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\big)$ vardır. $BN_R(X) = \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X)$ olduğundan istenilen eşitlik kanıtlanmış olur. □

Herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesinin sınır bölgesi yardımıyla X in alt ve üst yaklaşımları $BN_R(X) = \bigcup\big\{C \in \mathcal{C}\big(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}\big) : |C \cap X| = 1\big\}$ olmak üzere aşağıda verilen eşitliklerle tanımlanabilir.

$$\underline{apr}(X) = X \setminus BN_R(X) \tag{5.3}$$

$$\overline{apr}(X) = X \cup BN_R(X) \tag{5.4}$$

Her $X \subseteq U$ kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını belirlemek en az iki yöntemle mümkün olmaktadır. Şekil 5.1'de bu yöntemlerin özeti basit olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.1. (a) X kümesinin yaklaşımları yardımıyla sınır bölgesinin bulunması (b) Sınır bölgesi yardımıyla X kümesinin yaklaşımlarının bulunması (Tang vd., 2013)

Şekil 5. 1 - (a)'da bir $X \subseteq U$ kümesinin sınır bölgesi, Pawlak alt ve üst yaklaşımları yardımıyla geleneksel olarak elde edilmektedir. Şekil 5. 1 - (b)'de ise önce X kümesinin sınır bölgesi bulunur daha sonra X in Pawlak alt ve üst yaklaşımları sınır bölgesi yardımıyla hesaplanır. X ve $BN_R(X)$ arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Önerme 5.4.8 $X \subseteq U$ ve $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ nın tüm devrelerinin ailesi $\mathcal{C}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})})$ olmak üzere X kümesinin sınır bölgesi $BN_R(X) = \bigcup\{C \in \mathcal{C}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) : |C \cap X| = 1\}$ olsun.Eğer $X \subseteq BN_R(X)$ ise $\underline{apr}(X) = \emptyset$ ve $\overline{apr}(X) = BN_R(X)$ dir (Tang vd., 2013).

Örnek 5.4.5 $U = \{a, b, c, d\}$ olsun. $M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ matroidinin tüm devreler kümesi $\mathcal{C}(M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}) = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$ dir. $X = \{b, d\}$ altkümesinin sınır bölgesi $BN_R(X) = \{a, c, d\}$ bulunur. $Y = \{c, d\}$ altkümesi alındığında $BN_R(Y) = \{a, c, d\}$ olur. $Y \subseteq BN_R(Y)$ olduğundan $\underline{apr}(Y) = \emptyset$ ve $\overline{apr}(Y) = BN_R(Y)$ eşitlikleri elde edilir.

Önerme 5.4.8'e göre eğer $BN_R(X) \subseteq X$ ise $BN_R(X) = \emptyset$ dir. Bu durumda X altkümesi, U üzerindeki R denklik bağıntısına göre bir tanımlanabilir küme olur ve $\underline{apr}(X) = \overline{apr}(X)$ eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki önerme ile negatif bölge, matroid yaklaşımları ile doğrudan elde edilebilir.

Önerme 5.4.9 $X \subseteq U$ ve $r = r_{M_{\mathcal{U}(P)}}$ olsun. R denklik bağıntısına göre X in negatif bölgesi

$$NEG_R(X) = \left\{x \in U : r(X \cup \{x\}) \neq r_{M_{\mathcal{U}(\mathcal{A})}}(X)\right\} \tag{5.5}$$

dir (Tang vd., 2013).

Örnek 5.4.6 $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bağımsız kümeler ailesi Örnek 4.3.2'de ve $X = \{a, c, d\}$ altkümesinin rankı Örnek 4.3.5'te verilmişti. X kümesinin negatif gölgesi Önerme 5.4.9'da verilen (5.5) eşitliği gereğince $NEG_R(X) = \{g\}$ dir. Gerçekten Tanım 3.4'te verilen (3.4) eşitliği kullanıldığında da aynı sonuç elde edilmektedir.

5.5. Pawlak Kaba Matroid

Tanım 5.5.1 $R \subseteq U \times U$ bir denklik bağıntısının bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ olsun. U üzerinde $\mathcal{I} = \{X \in P(U) : |X \cap T_i| \leq 1, \forall i$ için $1 \leq i \leq n\}$ ailesinin belirlediği $(U, \mathcal{I})$ ikilisine Pawlak matroidi denir ve kısaca $M_P[\mathcal{A}]$ ile gösterilir (Li ve Liu, 2012).

Örnek 5.5.1 $U = \{a, b, c\}$ kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2\} = \{\{c\}, \{a, b\}\}$ ailesi olsun. $(U, \mathcal{I})$ ikilisinin bir Pawlak matroid olduğunu gösterelim. Öncelikle Tanım 5.5.1'de verilen $\mathcal{I} = \left\{X \in P(U) : |X \cap T_i| \leq 1, \forall\, i \in \{1, 2\}\right\}$ ailesinin öğelerini yani bağımsız kümelerini belirleyelim.

Tablo 5.6. Pawlak matroidinin bağımsız ailesinin öğeleri

$P(U)$	$X \cap T_1$	$X \cap T_2$	$\mathcal{I}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	✓
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	✓
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	✓
$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$	×
$\{a, c\}$	$\{c\}$	$\{a\}$	✓
$\{b, c\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	✓
U	$\{c\}$	$\{a, b\}$	×

Sonuç olarak Tablo 5.6'dan $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ailesi elde edilir ve $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidi olur.

Önerme 5.5.1 U kümesinin bir $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ ayrışımı ve bu ayrışımın belirlediği Pawlak matroidi $M_P[\mathcal{A}]$ olsun. $X \subseteq U$ olmak üzere $M_P[\mathcal{A}]$ aşağıdaki özelliklere sahiptir (Li ve Liu, 2012).

i. $r_{M_P}(X) = |\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset, i = 1, 2, \ldots, n\}|$ dir.

ii. $M_P[\mathcal{A}]$ matroidinin bir tabanı X dir $\Leftrightarrow$ Her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $|X \cap T_i| = 1$ ve $M_P[\mathcal{A}]$ nin tabanları $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dir.

iii. $M_P[\mathcal{A}]$ matroidinin bir devresi X dir $\Leftrightarrow$ $X \subseteq T_i$ ve $|X| = 2$ olacak şekilde bir $T_i \in \mathcal{A}$ vardır.

iv. $M_P[\mathcal{A}]$ matroidinin bağımlı kümesi X dir $\Leftrightarrow$ $|X \cap T_i| > 1$ olacak şekilde bir $T_i \in \mathcal{A}$ vardır.

Teorem 5.5.1 $R \subseteq U \times U$ bir denklik bağıntısı ve $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidinin kapanış operatörü cl_{M_P} olsun. Her $X \subseteq U$ için $cl_{M_P}(X) = \overline{apr}(X)$ dir (Li ve Liu, 2012).

Kanıt. Her $X \subseteq U$ için $r_{M_P}(X) = k$ olsun. Önerme 5.5.1 - (i) özelliği gereğince $k = |\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}|$ olur. Eğer $x \in \bigcup\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}$ ise $k \leq r_{M_P}(X \cup \{x\}) \leq r_{M_P}(\bigcup\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}) = k$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $r_{M_P}(X) = r_{M_P}(X \cup \{x\})$ olduğundan $x \in cl_{M_P}(X)$ elde edilir. Eğer $x \notin \bigcup\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}$ ise $r_{M_P}(X \cup \{x\}) = k + 1$ olduğu açıktır. Yani $x \notin cl_{M[\mathcal{A}]}$ dir. $cl_{M_P}(X) = \bigcup\{T_i \in \mathcal{A}, T_i \cap X \neq \emptyset\} = \overline{apr}(X)$ sağlandığından istenilen eşitlik elde edilir. □

$M_P[\mathcal{A}]$ bir Pawlak matroidi ve bu matroidin tüm kapalı kümelerinin ailesi K_R olsun. K_R ailesinin bütün tanımlanabilir kümeler ailesi olduğu Teorem 5.5.1'den görülür. K_R ailesinin U kümesi üzerinde bir topoloji belirlediği ve bu topolojiye göre her açık küme aynı zamanda kapalı olduğu için (U, K_R) bir Pawlak uzayıdır (Lin, 1992). Aynı zamanda (U, K_R) nin tüm her kapalı (açık) kümelerinin ailesi Pawlak matroidi $M_P[\mathcal{A}]$ nin de kapalı (açık) kümeler ailesidir.

Önerme 5.5.2 R, U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $cl_{M_P} : P(U) \longrightarrow P(U)$, $M_P[\mathcal{A}]$ nın kapanış operatörü olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen özelliklerin sağlanmasıdır (Li ve Liu, 2012).

$(cl1)$ $X \subseteq cl_{M_P}(X)$,

$(cl3)$ $cl_{M_P}\left(cl_{M_P}(X)\right) = cl_{M_P}(X)$,

$(cl4)$ $cl_{M_P}(\emptyset) = \emptyset$,

$(cl5)$ $cl_{M_P}(X \cup Y) = cl_{M_P}(X) \cup cl_{M_P}(Y)$,

$(Mcl4)$ $X \subseteq U, x \in U$ ve $y \in cl_{M_P}(X \cup \{x\}) \backslash cl_{M_P}(X) \Longrightarrow x \in cl_{M_P}(X \cup \{y\})$.

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: Pawlak matroidi $M_P[\mathcal{A}]$ nın bir kapanış operatörü cl_{M_P} olsun. Önerme 5.5.2'de verilen $(cl1)$, $(cl3)$ ve $(Mcl4)$ Pawlak matroidinin kapanış operatörü için temel özelliklerdir. Pawlak üst yaklaşım özelliklerinden $(cl4)$ ve $(cl5)$ bu önerme için oldukça önemlidir ve bu özellikler Teorem 5.5.1'de verilen $cl_{M_P} = \overline{apr}(X)$ eşitliğinden kolayca görülür.

$(\Longleftarrow)$: cl_{M_P} operatörü teoremde verilen $(cl1)$, $(cl3)$, $(cl4)$, $(cl5)$ ve $(Mcl4)$ özelliklerini sağlasın. U kümesi üzerinde bir R bağıntısı; $xRy \ :\Longleftrightarrow cl_{M_P}(\{x\}) = cl_{M_P}(\{y\})$ olarak tanımlansın. R nin bir denklik bağıntısı olduğu açıkça görülür. Şimdi her $x \in U$ için $cl_{M_P}(\{x\}) = [x]$ olduğunu gösterelim. İlk olarak $y \in cl_{M_P}(\{x\})$ olduğunu varsayalım. O halde $(M\text{cl}4)$ den $y \in cl_{M_P}(\{x\} \cup \emptyset)\backslash\, cl_{M_P}(\emptyset)$ ve $x \in cl_{M_P}(\{y\})$ bulunur. Böylece $cl_{M_P}(\{x\}) \subseteq [x]$ kapsaması elde edilir. Şimdi $[x] \subseteq cl_{M_P}(\{x\})$ olduğunu gösterelim. $z \in U \setminus cl_{M_P}(\{x\})$ alalım. O halde $z \notin cl_{M_P}(\{x\})$ dir. $(cl1)$ gereğince $z \in cl_{M_P}(\{z\})$ olur. Buradan $cl_{M_P}(\{x\}) \neq cl_{M_P}(\{z\})$ dir. O halde $z \notin [x]$ bulunur. Böylece $[x] = cl_{M_P}(\{x\})$ eşitliği gösterilmiş olur.

Her $X \subseteq U$ için $(cl5)$ den $cl_{M_P}(X) = \bigcup_{x \in X} cl_{M_P}(\{x\}) = \bigcup_{x \in X}[x]$ dir. Ayrıca $\bigcup_{x \in X}[x] = \bigcup\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\} = \overline{apr}(X)$ eşitliği kolayca görülür. Teorem 5.5.1'den $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidin bir kapanış operatörü yani $cl_{M_P} = \overline{apr}$ olur. □

Önerme 5.5.3 $r : P(U) \longrightarrow \mathbb{N}$ nin $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidinin rank fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \subseteq U$ olmak üzere r nin aşağıda verilen koşulları sağlamasıdır (Li ve Liu, 2012).

(Rn1) $r(X) = 0 \Longleftrightarrow X = \emptyset$,

(Rn2) $X \subseteq Y \Longrightarrow r(X) \leq r(Y)$,

(Rn3) Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $r(\{x, y\}) = 2$ olduğunda $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$): $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidinin rank fonksiyonu r ve U kümesinin bir ayrışımı $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ olsun. Önerme 5.5.1 - (i) özelliğinden yararlanarak (Rn1), (Rn2), (Rn3) koşullarının sağlandığını gösterelim.

(Rn1): $X \subseteq U$ altkümesi için $r(X) = 0$ olsun. O halde her $T_i \in \mathcal{A}$ için $T_i \cap X = \emptyset$ olduğundan $X = \emptyset$ dir. Diğer taraftan $X = \emptyset$ olsun. O halde $r(\emptyset) = |\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}| = |\emptyset| = 0$ eşitliğinden $r(\emptyset) = 0$ olur. Böylece (Rn1) sağlanır.

(Rn2): $X \subseteq Y \subseteq U$ olsun. O halde $r(X) = |\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap X \neq \emptyset\}| \leq |\{T_i \in \mathcal{A} : T_i \cap Y \neq \emptyset\}| \leq r(Y)$ olur.

(Rn3): $x \in X$ ve $y \in Y$ için $r(\{x, y\}) = 2$ olsun. Önerme 4.3'te verilen matroid rank fonksiyonunun sağladığı $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ eşitsizliğini ele alalım. O halde $r(X \cup Y) = r(X) + r(Y)$ ve $r(X \cap Y) = 0$ dir ve istenen eşitsizlik sağlanır.

($\Longleftarrow$): r fonksiyonu (Rn1), (Rn2) ve (Rn3) özelliklerini sağlasın. U kümesi üzerinde bir R bağıntısı $xRy :\Leftrightarrow r(\{x\} \cup \{y\}) = 1$ olarak tanımlansın. Her $x \in U$ için $r(\{x\} \cup \{x\}) = 1$ olduğundan xRx yani R yansımalıdır. $x, y \in U$ için xRy olsun. O halde $r(\{x\} \cup \{y\}) = 1$ dir. Bu eşitlik $r(\{y\} \cup \{x\}) = 1$ olarak yazılabildiği için yRx ve R bağıntısı simetriktir. xRy ve yRz olsun. O halde sırasıyla $r(\{x\} \cup \{y\}) = 1$ ve $r(\{y\} \cup \{z\}) = 1$ dir. (Rn3) de verilen eşitsizliği kullanılarak $r(\{x\} \cup \{z\}) = 1$ elde edilir. Böylece xRz dir ve R bağıntısı geçişlidir. Sonuç olarak R bir denklik bağıntısıdır. $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ailesi U nun bir ayrışımı olsun. Eğer $[x] \neq [y]$ ise $r(\{x, y\}) = |\{[x], [y]\}| = 2$ dir. Her $X \subseteq U$ için $r(\bigcup_{x \in X}[x]) = |\{[x] : x \in X\}|$ elde edilir. $|X \cap T_i| = 1$ olan bir $X^* \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer $X \cap T_i \neq \emptyset$ $(i \in 1, 2 \dots, n)$ ise $r(X^*) = |X^*|$ olur. (Rn2) den $|X^*| = r(X^*) \leq r(X) \leq r(\bigcup_{x \in X}[x]) = |\{[x] : x \in X\}|$ eşitsizliğine ulaşılır. $|X^*| = |\{[x] : x \in X\}|$ olduğu göz önüne alındığında, $r(X) = r(X^*) = |\{[x] : x \in X\}| = |\{[x] : [x] \cap X\} \neq \emptyset|$ bulunur. Önerme 5.5.1 gereğince r, $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidinin rank fonksiyonudur. □

Önerme 5.5.4 $r : P(U) \longrightarrow \mathbb{N}$ bir operatör olsun. $cl(X) = \{x \in U : r(\{x\} \cup X) = r(X)\}$ ise cl_{M_P} nin $M_P[\mathcal{A}]$ Pawlak matroidinin bir kapanış operatör olması için gerek ve yeter koşul r nin aşağıda verilen koşulları sağlanmasıdır (Li ve Liu, 2012).

$(R1)$ Her $X \subseteq U$ için $r(X) = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$

$(R2)$ $X \subseteq Y \subseteq U \Longrightarrow r(X) \leq r(Y)$

$(R3)$ $X, Y \subseteq U \Longrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y$ için $r(\{x, y\}) = 2$ olduğunda $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ dir.

Önerme 5.5.5 $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ bir operatör olsun. O halde aşağıda verilen ifadeler denktir.

i. $cl(X) = \overline{apr}(X)$ olacak şekilde U üzerinde bir R denklik bağıntısı vardır.

ii. Her $X, Y \subseteq U$ için

$$X \cup cl(X) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(Y))\big) = cl(X \cup Y) \setminus cl(\emptyset) \tag{5.6}$$

dir (Li ve Liu, 2012).

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): (5.6) eşitliği Pawlak üst yaklaşım operatörü $\overline{apr}$ nin temel özellikleri ile ($cl1$), ($cl5$) ve ($Mcl4$) den kolayca görülür.

(ii) $\Longleftarrow$ (i): cl operatörünün (5.6) eşitliğini sağladığını kabul edelim. $X = Y = \emptyset$ olduğunda (5.6) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}\emptyset \cup cl(\emptyset) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(\emptyset))\big) &= cl(\emptyset) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(\emptyset))\big)\\ &= cl(\emptyset) \setminus cl(\emptyset)\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$cl(\emptyset) = \emptyset$ elde edilir. $X \neq \emptyset$ ve $Y = \emptyset$ olsun. (5.6) ve $cl(\emptyset) = \emptyset$ eşitliklerinden;

$$\begin{aligned}X \cup cl(X) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(\emptyset))\big) &= cl(X \cup \emptyset) \setminus cl(\emptyset)\\ &= X \cup cl(X)\\ &= cl(X)\end{aligned}$$

eşitliğinden $X \subseteq cl(X)$ olur. $cl(\emptyset) = \emptyset$ ve $X \subseteq cl(X)$ olduğuna göre her $X, Y \subseteq U$ için

$$cl(X) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(Y))\big) = cl(X \cup Y) \tag{5.7}$$

dir. $X = \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ olsun. (5.7) den

$$\begin{aligned}cl(\emptyset) \cup \big(U \setminus cl(U \setminus cl(Y))\big) &= \big(U \setminus cl(U \setminus cl(Y))\big)\\ &= cl(\emptyset \cup Y)\\ &= cl(Y)\end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7) ve (5.8) eşitliklerinden $cl(X) \cup cl(Y) = cl(X \cup Y)$ çıkar. Her $Z \subseteq U$ için $Y = U \setminus cl(Z)$ olsun. O halde (5.8) eşitliğinde $Y = U \setminus cl(Z)$ alınarak, $cl\big(cl(Z)\big) = cl(Z)$ bulunur.

U üzerinde bir R bağıntısı her $x, y \in U$ öğe çifti için $xRy :\Leftrightarrow cl(\{x\}) = cl(\{y\})$ olarak tanımlansın. R nin bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Şimdi her $X \subseteq U$ için $cl(X) = \overline{apr}(X)$ eşitliğini gösterelim. $x \in \overline{apr}(X)$ olsun. X in Pawlak üst yaklaşımı tanımı gereğince $[x] \cap X \neq \emptyset$ dir. Eğer $x \in X$ ise $x \in cl(X)$ olur. Eğer $x \notin X$ ise $x \neq y$ olacak biçimde bir $y \in [x] \cap X$ öğesi vardır. O halde $x \in cl(\{x\}) = cl(\{y\}) \subseteq cl(X)$ olduğundan $\overline{apr}(X) \subseteq cl(X)$ olur.

Şimdi $cl(X) \subseteq \overline{apr}(X)$ olduğunu gösterelim. $x \in cl(X)$ olsun. O halde $[x] \cap X \neq \emptyset$ olduğunu gösterilirse $x \in \overline{apr}(X)$ sağlanır. İlk olarak $cl([x]) = [x]$ eşitliğini gösterelim. cl nin tanımından $[x] \subseteq cl([x])$ olduğu açıktır. Kapsamanın diğer yönünü göstermek için $y \in cl([x])$ ancak $y \notin [x]$ olduğunu varsayalım. $y \in [y] \subseteq cl([y])$ olduğundan $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ dir. Bu varsayım ile çelişir. O halde $y \in [x]$ olmalıdır. Böylece $cl([x]) \subseteq [x]$ dir. Sonuç olarak istenilen $cl([x]) = [x]$ eşitliği gösterilmiş olur. Önerme 5.5.2'nin kanıtında verilen; $[x] = cl([x]) = \bigcup_{z\in[x]} cl(\{z\}) = cl(\{x\})$ eşitliğini tekrar hatırlayalım. Benzer şekilde $[y] = cl([y]) = \bigcup_{z\in[y]} cl(\{z\}) = cl(\{y\})$ dir. Böylece $[y] \subseteq cl([y]) = cl(\{y\}) \subset cl(\{x\})$ olur. Bu $cl(\{x\})$ in bazı denklik sınıflarının birleşimi olarak yazılabileceğini gösterir. Aynı zamanda bu ifade $cl(cl(\{x\}) \setminus [x])$ için de gerçeklenir. $Y = cl(\{x\}) \setminus [x]$ olsun. O halde $Y \subseteq cl(Y) = cl(cl(\{x\}) \setminus [x]) \subset cl(\{x\})$ dir. $cl(Y)$, bazı denklik sınıflarının birleşimine eşittir. Böylece $cl(Y) = Y$ dir. Dolayısıyla (5.8) den $cl(U \setminus Y) = U \setminus Y$ elde edilir. $[x] \subseteq U \setminus Y$ olduğundan $[x] \subseteq cl([x]) \subseteq cl(U \setminus Y) = U \setminus Y$ dir. Böylece $U \setminus Y = (U \setminus Y) \cup cl([x]) = U$; $Y = cl(\{x\}) \setminus [x]$ oluşuyla çelişir. Ayrıca $cl([x]) = [x]$ dir. Eğer $[x] \cap X = \emptyset$ ise $X \subseteq U \setminus [x]$ olur. $cl(U \setminus [x]) = \bigcup_{y\in U \setminus [x]} cl([y]) = \bigcup_{y\in U \setminus [x]} [y] = U \setminus [x]$ eşitliklerinden $cl(X) \subseteq cl(U \setminus [x]) = U \setminus [x]$ olup $x \notin U \setminus [x]$ olmasıyla çelişir ve $x \in cl(X)$ olur. O halde $[x] \cap X \neq \emptyset$ dır ve $x \in \overline{apr}(X)$ bulunur. O halde $cl(X) \subseteq \overline{apr}(X)$ gösterilmiş olur. Sonuç olarak istenilen $cl(X) = \overline{apr}(X)$ eşitliği elde edilerek kanıt tamamlanır. □

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Pawlak kaba küme teorisi ile Whitney'in temellerini attığı matroid yapılarının ortak noktaları üzerinde duruldu. Pawlak alt ve üst yaklaşımları ile matroid teorisinde yer alan rank, kapanış, devre ve taban kavramları arasındaki ilişkiler verildi.

Bu çalışmayla bir R bağıntısı yansımalı olduğunda matroid üst yaklaşımının, bağıntı üst yaklaşımı tarafından kapsandığı görüldü. R bir denklik bağıntısı olduğunda ise üst yaklaşım operatörünün bağıntı tarafından indirgenen matroidin kapanış operatörüne eşitliği gösterildi.

Bu tez çalışmasının matroid teorisi konusunda Türkçe kaynak eksikliğini bir ölçüde gidereceği ve gelecekte yapılacak çalışmalar için temel bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Akkaş, S., Hacısalihoğlu H.H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1984. *Soyut Matematik*. Gazi Üniversitesi, Yayın No: 43.

Bozkurt, D., Türen, B., 2003. *Lineer Cebir*, İkinci Baskı. Selçuk Üniversitesi, Konya.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hacısalihoğlu H.H., Balcı, M., 1996. *Temel ve Genel Matematik*, Dördüncü Baskı. Ankara Üniversitesi, Ankara.

Johnson, W., 2009. *Matroids*. 1 - 26.

Kaya, R., 1985. *Analitik Geometri*. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Kung, J.P.S, 1986. *A Source Book in Matroid Theory*. Springer Science + Business Media, LLC, New York.

Li, X., Liu, S., 2012. Matroidal approaches to rough sets via closure operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 53, 513 - 527.

Liu, G.Z., Chen, Q.H., 1995. *Matroid*. National University of Defense Technology Press, Changsha, Hunan.

Liu, Y., Zhu, W., 2015. On the matroidal structure of generalized rough set based on relation via definable sets. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 7(1), 135 - 144.

Oxley, J., 1991. What is a Matroid?. *Mathematics Subject Classification*, 05B35, 1 - 45.

Oxley, J., 2010. *Matroid Theory*. Oxford University Press, New York.

Özer, O., Çoker, D., Taş, K. , 2009. *Soyut Matematik*. Bilim Yayınevi.

Pawlak, Z., 1982. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences,* 11(5), 341 - 356.

Pei, Z., Pei, D., Zheng, L., 2011. Topology vs generalized rough sets. *Information Sciences*, 52, 231 - 239.

Peters, J.F., Skowron, A., 2007. Zdzislaw Pawlak life and work (1926 - 2006). *Information Sciences*, 177, 1 - 2.

Tang, J., She, K., Min, F., Zhu, W., 2013. A matroidal approach to rough set theory. *Theoretical Computer Science*, 471, 1 - 11.

Tsumoto, S., Tanaka, H., 1993. *Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovey*. Springer - Verlag London, 290 - 297.

Tsumoto, S., Tanaka, H., 1995. *Lecture notes in computer science* 958. Integratig Symbolic Mathematical Compulation and Artificial Intelligence, 224 - 243.

URL - 1, 2018. *Hassler Whitney*. http://www.en.wikipedia.org/wiki/Hassler_Whitney (Erişim Tarihi: 25.11.2018)

Yüce, S., 2015. *Lineer Cebir*. Pegem Akademi.

Zhu W., 2007. Generalized rough sets based on relations. *Information Sciences*, 177, 4997-5011.

Zhu, W., 2009. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering. *Information Sciences*, 179, 210 - 225.

Zhu, W., Wang, S., 2011. Matroidal approaches to generalized rough sets based on relations. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2, 273 - 279.

Zhu, W., Wang, S., 2013. Rough matroids based on relations. *Information Sciences*, 232, 241 - 252.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU

Doğum Yeri ve Yılı :BURDUR – 1992

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	:Burdur Cumhuriyet Lisesi	2010
Lisans	:Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi	2014

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Burdur Şeker Ortaokulu – Matematik Öğretmeni	2014
2- Burdur Gazi Ortaokulu – Matematik Öğretmeni	2014
3- Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi - Kısmi Zamanlı Öğrenci	2015 - 2017
4- Eskişehir ESALBA Metal Sanayi – AR - GE Personeli	2017 - 2018

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

1- Bayhan, S., Baytaroğlu, N. , 2018. Üst Yaklaşım Sayılarının Öncül Komşuluklarla Elde Edilmesi, Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9 (2), 151 - 156.

2- Bayhan, S., Baytaroğlu, N. , 2017. Bazı Temel Kaba Küme Kavramlarının Matroid Yaklaşımlarıyla Karakterizasyonu Üzerine, 1st International Turkish World Engineering and Science Congress in Antalya, December 7 - 10, 2017.