T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASTLANTISAL METRİK UZAYLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Ahmet ÖLMEZ

BURDUR, 2018

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASTLANTISAL METRİK UZAYLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Ahmet ÖLMEZ

Danışman: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

BURDUR, 2018

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Rastlantısal Metrik Uzaylar ve Bazı Özellikleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

19 / 10 / 2018

Ahmet ÖLMEZ

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof.Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ekim, 2018 **Ahmet ÖLMEZ**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a.s.$	: Hemen kesinlikle (almost surely)
$\bar{A}$	: Bir A kümesinin kapanışı
A^c	: Bir A kümesinin tümleyeni
$\mathcal{A}_\mu$	: Bir $\mathcal{A}$ koleksiyonunun μ −tamlanışı
$(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$	: Banach uzayı
$\mathcal{B}(\mathbf{T})$	: Bir $\mathbf{T}$ topolojik uzayı üzerindeki Borel σ −cebri
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
χ_A	: Bir A kümesinin karakteristik (belirteç) fonksiyonu
$\delta(A)$	: Bir A kümesinin doğal yoğunluğu
Δ	: $\mathbb{R}$ üzerinde soldan sürekli tüm dağılım fonksiyonlarının kümesi
Δ^+	: Uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesi
$ess\ inf$	: Esas infimum
$ess\ sup$	: Esas supremum
Ƒ	: Olasılıksal metrik
$F_{pq} = \mathcal{F}(p,q)$	: p ile q arasındaki olasılıksal uzaklık
$\mathcal{F}$	: Süzgeç (filtre)
$\mathcal{F}(I)$	: Bir I idealine ilişkin süzgeç (filtre)
I	: İdeal
I_δ	: Doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerin ideali
I_f	: $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümelerinin ideali
$I-\lim x_n$	: Bir topolojik uzayda ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık)
$I^*-\lim x_n$	: Bir metrik uzayda ideal* yakınsaklık (I^*-yakınsaklık)
$\mathbb{K}$	: Cisim
$L_0^+(\Omega)$	: Hemen kesinlikle ($a.s.$) negatif olmayan, reel değerli rasgele değişkenlerin kümesi
$L^+(\mu)$	: $\mu - a.e.$ negatif olmayan, reel değerli, μ −ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının kümesi
$(\mathbf{M}, d)$	: Metrik uzay
μ	: Ölçü
$\mu - a.e.$	: μ ölçüsüne göre hemen her yerde (μ −almost everywhere)

$(\mu)-\lim f_n$	: Ölçüye göre yakınsaklık
$(\mu)-\mathcal{I}-\lim f_n$	: Ölçüye göre $\mathcal{I}$–yakınsaklık
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}_p(\varepsilon,\lambda)$	: p' nin (ε,λ) −komşuluğu
$(\Omega,\ \mathcal{A})$	: Ölçülebilir uzay
$(\Omega,\ \mathcal{A},\mu)$	: Ölçü uzayı
$(\Omega,\ \mathcal{A}_\mu,\mu)$	: $(\Omega,\ \mathcal{A},\mu)$ ölçü uzayının tamlanışı
$(\Omega,\ \mathcal{A},P)$	: Olasılık uzayı
P	: Olasılık ölçüsü
$(P)-\lim \xi_n$	: Olasılık ölçüsüne göre yakınsaklık
$(P)-\mathcal{I}-\lim\ \xi_n$	: Olasılık ölçüsüne göre $\mathcal{I}$–yakınsaklık
$\mathcal{P}(\Omega)$	: Bir Ω kümesinin kuvvet (güç) kümesi
R	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
R^+	: Negatif olmayan, genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{R}(\varphi)$	: Bir φ fonksiyonunun görüntü kümesi
(RM)$-\mathcal{I}-\lim p_n$	: Bir RM uzayda $\mathcal{I}$–yakınsaklık
$(\mathbf{S},\digamma,T)$	: Menger uzayı
$(\mathbf{S},\digamma,\daleth)$	: Olasılıksal metrik (OM) uzay
$(\mathbf{S},\mathcal{X})$	: Rastlantısal metrik (RM) uzay ya da $\mathbf{E}-$rastlantısal metrik ($\mathbf{E}-$RM) uzay
$stat-\lim x_n$	: Bir topolojik uzayda istatistiksel yakınsaklık
$(\mathbf{T},\tau)$	: Topolojik uzay
T	: Üçgen norm (t −norm)
$\daleth$	: Üçgen fonksiyon
$\mathbf{\Theta}$	: $\mathbb{K}-$değerli, $\mu-a.e.$ sıfır değerini alan, μ −ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfı
$(\mathbf{V},\Vert\,.\,\Vert)$	: Normlu uzay
$\mathcal{X}$	: Rastlantısal metrik ya da $\mathbf{E}-$rastlantısal metrik
$X_{pq}=\mathcal{X}(p,q)$	: p ile q arasındaki rastlantısal uzaklık ya da $\mathbf{E}-$rastlantısal uzaklık

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Rastlantısal Metrik Uzaylar ve Bazı Özellikleri

Ahmet ÖLMEZ

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

Ekim, 2018

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, rastlantısal metrik (RM) uzay ve ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık) kavramlarının tarihsel gelişimine yer verilmiştir.
İkinci bölümde; ölçü kuramına, olasılık kuramına, olasılıksal metrik (OM) uzaylara ve RM uzaylara ilişkin bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde; doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, ideal, süzgeç (filtre), $I-$yakınsaklık kavramlarına ve bunlara ilişkin bazı sonuçlara yer verilmiştir.
Dördüncü bölüm tezin özgün bölümü olup, bu bölümde; üzerinde $(\varepsilon, \lambda)-$topolojisi tanımlanmış bir RM uzayda "$I-$yakınsak dizi", "$I-$Cauchy dizisi", "$I-$sınırlı dizi", "$I-$noktasal yakınsak fonksiyon dizisi" ve "$I-$düzgün yakınsak fonksiyon dizisi" kavramları tanımlanmış ve bu kavramlara ilişkin temel nitelikte bazı sonuçlar elde edilmiştir.
Beşinci bölüm tezin sonuç bölümü olup, bu bölümde tez çalışması özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: OM uzay, RM uzay, $(\varepsilon, \lambda)-$topolojisi, $I-$yakınsak dizi, $I-$Cauchy dizisi, $I-$sınırlı dizi, $I-$noktasal yakınsak fonksiyon dizisi, $I-$düzgün yakınsak fonksiyon dizisi

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Random Metric Spaces and Their Certain Properties

Ahmet ÖLMEZ

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

October, 2018

This thesis consists of five chapters.
In the first chapter, the historical developments of the concepts of random metric (RM) space and ideal convergence ($I-$convergence) are presented.
In the second chapter; some basic concepts and results related to measure theory, probability theory, probabilistic metric (PM) spaces and RM spaces are presented.
In the third chapter; the concepts of natural density, statistical convergence, ideal, filter, $I-$convergence and some results related to these concepts are presented.
The fourth chapter is the original part of the thesis, and in this chapter; the concepts of "$I-$convergent sequence", "$I-$Cauchy sequence", "$I-$bounded sequence", "$I-$pointwise convergent sequence of functions" and "$I-$uniformly convergent sequence of functions" are defined on an RM space endowed with the (ε, λ) $-$topology, and some basic results related to these concepts are obtained.
The fifth chapter is the conclusion part of the thesis; and in this chapter, the thesis is summarized.

Keywords: PM space, RM space, (ε, λ) $-$topology, $I-$convergent sequence, $I-$Cauchy sequence, $I-$ bounded sequence, $I-$ pointwise convergent sequence of functions, $I-$uniformly convergent sequence of functions

1. GİRİŞ

Deneysel (olgusal) çalışmaların ortaya koydukları bilimsel verileri her zaman için determinist (belirlenimci) modeller çerçevesinde ele almak olanaklı olmayabilir. Bazı olgular rastlantısal özellikler sergilerler ve bu tip olguların modellenmesi konusunda olasılık kuramından yararlanılır. Skorokhod (2005)'un da belirttiği gibi; kuantum mekaniğinin mikro dünyasına, moleküllerin ısıl devinimlerine, özdeğin diskret (kesikli) yapısına, kozmik ışımaya, vb. ilişkin yasalar rastlantısal olgular içerirler ve bu tip yasaların açıklanması için olasılıksal modellere gereksinim duyulur.

Bu tür durumlarda ortaya çıkan belirsizliklerden bazıları; uzaklık, uzunluk, konum, vb. kavramlara ilişkindir. Bu tür belirsizlikler çeşitli matematiksel araçlarla (örneğin, Brown devinimi gibi) modellenmeye çalışılır. Bu tip matematiksel araçlardan biri de; Menger (1942)'in, klasik anlamdaki metrik uzay kavramını genelleyerek elde ettiği "istatistiksel metrik uzay" adı verilen soyut uzaydır. Bu tip uzaylar temel olarak Wald (1943), Schweizer ve Sklar (1960), Thorp (1960) ve Šerstnev (1963) tarafından geliştirilmiş olup günümüzde, "olasılıksal metrik (OM) uzaylar" olarak adlandırılmaktadırlar.

Bir OM uzayın herhangi iki noktası arasındaki uzaklık, bir reel sayı yerine, bir olasılık dağılım fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Örneğin, bir OM uzayın p ve q gibi herhangi iki noktası arasındaki uzaklık, F_{pq} biçiminde bir olasılık dağılım fonksiyonu ile gösterildiğinde; negatif olmayan bir x reel sayısı için $F_{pq}(x)$ değeri, "p ile q arasındaki uzaklığın x'ten küçük olma olasılığı" biçiminde yorumlanır (Schweizer ve Sklar, 1983).

Klasik anlamdaki bir metrik uzayın üçgen eşitsizliği aksiyomu olasılıksal olarak ifade edildiğinde bir OM uzayın kendine özgü üçgen eşitsizliği elde edilir. Bu tip bir üçgen eşitsizliği, üçgen normlar ya da daha genel olarak, üçgen fonksiyonlar olarak adlandırılan birtakım ikili işlemler yardımıyla tanımlanır. Üçgen normlar (Klement vd., 2000; Alsina vd., 2006), koşaç (copula) kuramını doğurmuş (Nelsen, 2006); ayrıca, bulanık kümeler (Zadeh, 1965) gibi bazı kuramlarda uygulama alanları bulmuştur.

Öte yandan, OM uzayların bazı fiziksel uygulamalarından da (Menger, 1951; Erber vd., 1971) söz etmek mümkündür. Bunun yanı sıra; Rosen (1947)'in, Blokhintsev (1973)'in ve Roy (1998)'un çalışmalarında, olasılıksal bir geometrinin fizikteki bazı rollerinden söz edilmiştir.

OM uzaylarla ilgili, günümüze dek pek çok çalışma yayımlanmıştır. Konunun tarihsel ve detaylı incelemeleri; Schweizer ve Sklar (1983)'a, Constantin ve Istrătescu (1989)'ya, Hadžic ve Pap (2001)'a, Chang vd. (2001)'ne ve Lafuerza-Guillén ve Harikrishnan (2014)'a ait çalışmalarda bulunabilir.

Bu tez çalışmasının temel aldığı "rastlantısal metrik (RM) uzaylar" kuramı ise OM uzayların gelişimine paralel ve bu tip uzaylarla yakından ilişkili olarak ortaya çıkmıştır. RM uzay kavramı, OM uzay kavramına olasılık kuramının standart ölçü kuramına dayalı araçları (olasılık ölçüsü, rasgele değişken, vb.) yardımıyla yaklaşılmasından yola çıkılarak Špaček (1956, 1960) tarafından tanımlanmış ve sonrasında birçok araştırmacı (örneğin; Simboan ve Theodorescu (1962), Onicescu (1964), Stevens (1968), Calabrese (1968), Sherwood (1969), Brown (1972), Schweizer ve Sklar (1983), Guo (1999, 2001a, 2001b)) tarafından incelenmiştir.

Bir RM uzayın herhangi iki noktası arasındaki uzaklık, bir reel sayı ya da bir olasılık dağılım fonksiyonu yerine, bir rasgele değişken ile ifade edilmektedir. Örneğin, bir RM uzayın p ve q gibi herhangi iki noktası arasındaki uzaklık, X_{pq} biçiminde bir rasgele değişken ile gösterilir (Schweizer ve Sklar, 1983). RM uzaylar genellikle, OM uzayların özel birer sınıfı olan, metrikle doğurulmuş OM uzaylarla (Stevens, 1968) ve $\mathbf{E}-$uzaylarla (Sherwood, 1969) yakından ilgilidir. Öte yandan, günümüzün modern RM uzaylar kuramında bu tip bir rasgele değişken yerine daha genel bir ölçülebilir fonksiyon kullanılmakta ve bu tip uzaylar daha çok olasılık kuramını ve fonksiyonel analizi temel alan ve disiplinlerarası bir yaklaşım olan "rastlantısal fonksiyonel analiz" kuramının ışığı altında incelenmektedir.

RM uzayların, stokastik (rastlantısal) analizde yer bulan rasgele değişkenlere ve rasgele fonksiyonlara/operatörlere ilişkin uygulamaları ile ölçü kuramına ilişkin uygulamaları için Guo'nun çalışmaları (sırasıyla; Guo (1999) ve Guo (1996)) incelenebilir. Öte yandan, RM uzayların doğal gelişimi içerisinde, bu tip uzayların birer uzantısı olarak; rastlantısal normlu uzay (Schweizer ve Sklar, 1983; Guo, 1999), rastlantısal eşlenik uzay (Sultanbekov, 1979; You ve Zhu, 1996; Guo ve Ma, 2004), rastlantısal normlu modül (Guo, 1995), rastlantısal yerel konveks modül (Guo vd., 2009; Guo, 2010; Guo vd., 2015a; Guo vd., 2015b), rastlantısal iç çarpım uzayı (Lin ve Guo, 1990; Guo, 1999) ve rastlantısal iç çarpım modülü (Guo ve You, 1996; Guo, 1999) gibi kavramlar ortaya çıkmıştır. Örneğin, rastlantısal normlu modüllerin, yaklaşım kuramındaki uygulamaları için Guo ve

Li (2005)'nin çalışması, risk ölçülerindeki uygulamaları için ise Guo vd. (2014)'nin çalışması incelenebilir.

Bu tez çalışmasının bir diğer temel aracı ise "ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık)" kavramıdır. $I-$yakınsaklık, "istatistiksel yakınsaklık" kavramının doğal bir genellemesidir, dolayısıyla aynı zamanda klasik (sıradan) yakınsaklığın da bir genellemesi olmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından tanımlanmış olup, bu kavrama, Schoenberg (1959)'in çalışmasında "$\mathrm{D}-$ yakınsaklık" adı altında rastlanmaktadır. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklığın optimizasyon (eniyileme) kuramında (Mamedov ve Pehlivan, 2000) ve ergodik kuramda (Silva, 2008) bazı önemli uygulamaları bulunmaktadır. Silva (2008)'nın çalışmasında istatistiksel yakınsaklık, "yoğunluğa göre yakınsaklık" olarak adlandırılmaktadır.

İstatistiksel yakınsaklık, doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin doğal yoğunluklarına dayanırken; $I-$yakınsaklık ise daha genel olarak, doğal sayılar kümesinin bir I ideali kavramına dayanır. $I-$yakınsaklık Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmış olup daha sonra pek çok araştırmacı (örneğin; Sleziak (2003), Činčura vd. (2004), Dems (2004), Šalát vd. (2004), Balcerzak vd. (2007)) tarafından geliştirilmiştir. $I-$yakınsaklık, birbirine denk olmayan pek çok yakınsaklık tiplerini içerdiğinden ve matematiksel analizde bir tür "çatı yakınsaklık" işlevi gördüğünden oldukça önemlidir. Bu kavrama oldukça benzer olan bir diğer kavram ise "süzgeç (filtre) yakınsaklık" olup, bu yakınsaklık tipi temel olarak Katětov (1968) ile Nuray ve Ruckle (2000) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, "üzerinde $(\varepsilon,\lambda)-$topolojisi tanımlanmış bir RM uzay üzerinde $I-$yakınsaklık kavramını ve buna ilişkin bazı önemli kavramları tanımlayarak temel nitelikte birtakım sonuçlar elde etmek" olarak belirlenmiştir. Bir soyut uzayda yer alan herhangi bir dizinin yakınsaklığı o uzayın matematiksel analizi için temel nitelikte olduğundan; bir RM uzay üzerindeki $I-$yakınsaklık kavramının ve ilgili diğer kavramların, bu tip uzayların analizine bir ölçüde katkı sağlamakla birlikte, bu tip uzaylardaki dizileri daha geniş bir açıdan inceleme olanağı sağlayabileceği düşünülmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ölçü kuramına, olasılık kuramına, OM uzaylara ve RM uzaylara ilişkin bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilecektir.

2.1 Temel Ölçü Kuramı ve Olasılık Kuramı

Tanım 2.1.1 $\Omega \neq \emptyset$ olmak üzere Ω'nın alt kümelerinin bir koleksiyonu $\mathcal{A}$ olsun. Eğer

i. $\Omega \in \mathcal{A}$ dır,

ii. $A \in \mathcal{A}$ ise $A^c \in \mathcal{A}$ dır,

iii. $A, B \in \mathcal{A}$ ise $A \cup B \in \mathcal{A}$ dır

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ koleksiyonuna, Ω üzerinde bir *cebir* adı verilir. Eğer bir $\mathcal{A}$ koleksiyonu (i) ve (ii) koşullarına ek olarak,

iii'. $A_1,\ A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ise $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$ dır

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{A}$ koleksiyonuna, Ω üzerinde bir $\sigma -$*cebri* adı verilir (Billingsley, 1995).

Olasılık kuramında bu tip $\mathcal{A}$ koleksiyonları için genellikle "cebir" yerine "cisim", "$\sigma -$cebri" yerine ise "$\sigma -$cismi" terimi kullanılır (Aliprantis ve Border, 2006). Bu tezde, genellik bakımından, "*cebir*" ve "$\sigma -$*cebri*" terimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2 $\mathbf{T} \neq \emptyset$ ve $\mathbf{T}$ için bir topoloji τ olmak üzere bir $(\mathbf{T}, \tau)$ topolojik uzayı verilsin. Bu durumda τ'nun elemanlarının (açık kümelerin) koleksiyonunun doğurduğu $\sigma -$cebrine (bu açık kümeleri içeren en küçük $\sigma -$cebrine), $\mathbf{T}$ *üzerindeki Borel* $\sigma -$*cebri* denir ve $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbf{T})$'nin her bir elemanına, *Borel kümesi* denir (Athreya ve Lahiri, 2006).

Örneğin, $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde klasik topoloji tanımlanırsa bu topolojiye ilişkin Borel $\sigma -$cebri, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Athreya ve Lahiri, 2006).

Tanım 2.1.3 $\Omega \neq \emptyset$ olmak üzere Ω üzerinde bir $\sigma -$cebri $\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{A})$ ikilisine, bir *ölçülebilir uzay* adı verilir. $\mathcal{A}$'nın her bir elemanı, *ölçülebilir küme* olarak adlandırılır (Billingsley, 1995).

Tanım 2.1.4 $\Omega \neq \emptyset$ olmak üzere Ω üzerinde bir $\sigma -$cebri $\mathcal{A}$ olsun. $\mu: \mathcal{A} \rightarrow R^{+} = [0, \infty]$ olmak üzere

i. $\mu(\emptyset) = 0$
ii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ve $i \neq j$ iken $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere
$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ dir

koşulları sağlanıyorsa μ fonksiyonuna, bir *ölçü* adı verilir. $\mu(\Omega) < \infty$ ise μ ölçüsü *sonludur* denir. Eğer $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ biçiminde yazılabiliyor ve her bir $A_k \in \mathcal{A}$ için $\mu(A_k) < \infty$ oluyorsa μ ölçüsü $\sigma -$*sonludur* denir. $(\Omega, \mathcal{A})$ ikilisi bir ölçülebilir uzay olmak üzere $\mathcal{A}$ üzerinde bir μ ölçüsü tanımlanmışsa $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne, bir *ölçü uzayı* adı verilir (Billingsley, 1995).

Tanım 2.1.5 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olmak üzere $\mathcal{A}$ koleksiyonu ile $\mathcal{A}$ koleksiyonundaki sıfır ölçülü kümelerin (sıfır kümelerinin) tüm alt kümelerinin koleksiyonunun doğurduğu $\sigma -$cebrine, $\mathcal{A}$ koleksiyonunun $\mu -$*tamlanışı* denir ve $\mathcal{A}_\mu$ ile gösterilir (Hytönen vd., 2016). Böyle bir durumda $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ üçlüsüne, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayının *tamlanışı* adı verilir (Royden, 1988).

Tanım 2.1.6 $\Omega \neq \emptyset$ olmak üzere Ω üzerinde bir $\sigma -$cebri $\mathcal{A}$ olsun. $P : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ olmak üzere

i. $P(\emptyset) = 0$ ve $P(\Omega) = 1$ dir,
ii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ve $i \neq j$ iken $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere
$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ dir

koşulları sağlanıyorsa P fonksiyonuna, bir *olasılık ölçüsü* adı verilir (Billingsley, 1995).

Tanım 2.1.7 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve P bir olasılık ölçüsü olmak üzere

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsüne, bir *olasılık uzayı* adı verilir (Billingsley, 1995).

Örnek 2.1.8 (a) $\Omega = \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}$'nin Lebesgue ölçülebilir tüm alt kümelerinin koleksiyonu $\mathcal{M}$ ve $\mu = m$ (Lebesgue ölçüsü) olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$ bir $\sigma -$cebridir ve $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ üçlüsü bir ölçü uzayı olup m ölçüsü $\sigma -$ sonludur. Benzer biçimde,

$(\mathbb{R}, \ \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ üçlüsü de bir ölçü uzayı olup, bu ölçü uzayının tamlanışı ise $(\mathbb{R}, \ \mathcal{M}, m)$ uzayıdır (Royden, 1988).

(b) $\Omega = [0,1]$ olmak üzere Ω'nın Lebesgue ölçülebilir tüm alt kümelerinin koleksiyonu $\mathcal{A}$ ve $P = m$ (Lebesgue ölçüsü) olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ bir $\sigma-$cebridir ve $([0,1], \mathcal{A}, P)$ üçlüsü bir olasılık uzayıdır (Dorogovtsev vd., 1997).

Şimdi ise ölçülebilir fonksiyonlara ilişkin bazı temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.9 $(\Omega_1, \ \mathcal{A}_1)$ ve $(\Omega_2, \ \mathcal{A}_2)$ ikilileri birer ölçülebilir uzay olmak üzere $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu her bir $A \in \mathcal{A}_2$ için $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna, *$\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ $\sigma-$cebirlerine göre ölçülebilirdir* ya da *$(\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2)-$ölçülebilirdir* denir. Özel olarak; Ω_1 ve Ω_2 birer topolojik uzay, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\Omega_1)$ ve $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\Omega_2)$ olmak üzere $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ biçiminde verilen bir f fonksiyonunun $(\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2)-$ölçülebilir olması durumunda f fonksiyonuna, *Borel ölçülebilir fonksiyon* ya da *Borel fonksiyonu* adı verilir (Aliprantis ve Border, 2006).

Dikkat edilecek olursa, "*$(\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2)-$ölçülebilirlik*" kavramı tanımlanırken, *ölçülebilir uzaylar* temel alınmakta ve bir *μ ölçüsüne ihtiyaç duyulmamaktadır*.

Öte yandan, yukarıdaki tanımda geçen "f fonksiyonu *$(\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2)-$ölçülebilirdir*" ifadesi yerine bazen kısalık bakımından, "f fonksiyonu *ölçülebilirdir*" denir (Dudley, 2002). Ancak, ölçülebilir fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrıldıklarından ve bu işlem de, ölçülebilmenin ana araçları olan $\sigma-$cebirlerine atıfta bulunmayı gerektirdiğinden; bu tezde, çeşitli ölçülebilir fonksiyonlar tanımlanırken ilgili $\sigma-$ cebirleri özellikle vurgulanacaktır.

Örnek 2.1.10 $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}\}$ ve $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ birer $\sigma-$cebridir. Şimdi $f : \Omega \to \Omega$ olmak üzere $f(\omega) = a$ ve $g : \Omega \to \Omega$ olmak üzere

$$g(\omega) = \begin{cases} a, & \omega = a \text{ ya da } \omega = b \text{ ise} \\ c, & \omega = c \text{ ya da } \omega = d \text{ ise} \end{cases} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan f ve g fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda f fonksiyonu $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ −ölçülebilir ve g fonksiyonu ise $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)$ −ölçülebilirdir. Öte yandan,

$$g^{-1}(\{a\}) = \{a, b\} \notin \mathcal{A}_1 \tag{2.2}$$

olduğundan g fonksiyonu $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ −ölçülebilir değildir (Athreya ve Lahiri, 2006).

Tanım 2.1.11 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olmak üzere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu her bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega: \ f(\omega) \le a\} \in \mathcal{A} \tag{2.3}$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ − *ölçülebilirdir* ya da kısaca, $\mathcal{A}$−*ölçülebilirdir* denir (Athreya ve Lahiri, 2006).

Olasılık kuramı, ölçü kuramının ışığı altında incelendiğinde ölçülebilir fonksiyonlar aşağıda görüleceği gibi özel bir adla anılırlar.

Tanım 2.1.12 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $R = [-\infty, \infty]$ (genişletilmiş reel sayılar kümesi) olmak üzere $\xi : \Omega \to R$ biçiminde bir ξ fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $a \in R$ için

$$\xi^{-1}([-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega: \ \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{A} \tag{2.4}$$

oluyorsa ξ fonksiyonuna, P −*ölçülebilirdir* denir. Bu tip bir fonksiyon genellikle, *rasgele değişken* olarak adlandırılır. ξ bir rasgele değişken olmak üzere

$$P\{\omega \in \Omega: \ \xi(\omega) < 0\} = 0 \tag{2.5}$$

koşulu sağlanıyorsa ξ rasgele değişkeni *hemen hemen negatif değildir* ya da *hemen kesinlikle* (*almost surely*) *negatif değildir* denir (Schweizer ve Sklar, 1983). Böyle bir durumda "$\xi(\omega) \ge 0 \ a.s.$" yazılır. Öte yandan, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ biçimindeki tüm ξ rasgele değişkenlerinin kümesi $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ biçiminde ve bu rasgele değişkenlerden $\xi(\omega) \ge 0 \ a.s.$ koşulunu sağlayanlar da $L_0^+(\Omega)$ ile gösterilir (Guo, 2001a).

Uyarı 2.1.13 Tanım 2.1.12'de ifade edilen "*P −ölçülebilirlik*" kavramı; Tanım 2.1.11'de olduğu gibi, "*$\mathcal{A}$ − ölçülebilirlik*" olarak anlaşılmalıdır. Ayrıca, burada $\xi : \Omega \to R$ biçimindeki tüm ξ rasgele değişkenlerinin kümesi $L_0(\Omega, R)$ biçiminde gösterilecektir.

Örnek 2.1.14 Noktasal bir parçacık, $r > 0$ olmak üzere $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$ diski üzerine rasgele bir biçimde atılıyor. $\omega \in \Omega$ olmak üzere bu parçacığın konumlandığı koordinat, ω ile gösterilsin. Ω diskinin Lebesgue ölçülebilir tüm alt kümelerinin koleksiyonunu $\mathcal{A}$ ile gösterelim. $A \in \mathcal{A}$ ve m, düzlemdeki Lebesgue ölçüsü olmak üzere $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsü bir olasılık uzayı olup $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\xi(\omega) = |\omega| = \text{"}\omega'\text{nın orijine olan uzaklığı"} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan ξ fonksiyonu bir rasgele değişkendir (Dorogovtsev vd., 1997).

Tanım 2.1.15 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\mathcal{L} \subset L_0(\Omega, R)$ ve $\eta \in L_0(\Omega, R)$ olsun. Eğer her $\xi \in \mathcal{L}$ için $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ $a.s.$ oluyorsa η rasgele değişkenine, $\mathcal{L}$'nin bir *esas üst sınırı* denir. $\mathcal{L}$'nin tüm ζ esas üst sınırları için $\eta(\omega) \leq \zeta(\omega)$ $a.s.$ oluyorsa η rasgele değişkenine, $\mathcal{L}$'nin *esas supremum'u* denir ve $\vee\mathcal{L}$ ile gösterilir. Benzer biçimde, her $\xi \in \mathcal{L}$ için $\xi(\omega) \geq \eta(\omega)$ $a.s.$ oluyorsa η rasgele değişkenine, $\mathcal{L}$'nin bir *esas alt sınırı* denir. $\mathcal{L}$'nin tüm ζ esas alt sınırları için $\eta(\omega) \geq \zeta(\omega)$ $a.s.$ oluyorsa η rasgele değişkenine, $\mathcal{L}$'nin *esas infimum'u* denir ve $\wedge\mathcal{L}$ ile gösterilir (Guo, 2001a).

Herhangi bir $\mathcal{L} \subset L_0(\Omega, R)$ için $\vee\mathcal{L}$ ve $\wedge\mathcal{L}$ daima vardır (Guo, 2001a). Burada $\vee\mathcal{L}$ yerine $ess\ sup\ \mathcal{L}$ ve $\wedge\mathcal{L}$ yerine ise $ess\ inf\ \mathcal{L}$ yazılacaktır.

Teorem 2.1.16 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\mathcal{L} \subset L_0(\Omega, \mathbb{R})$ ve $\eta \in L_0(\Omega, \mathbb{R})$ olsun. Eğer her $\xi \in \mathcal{L}$ için $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ $a.s.$ (ya da $\xi(\omega) \geq \eta(\omega)$ $a.s.$) oluyorsa $ess\ sup\ \mathcal{L}$ ve $ess\ inf\ \mathcal{L}$ fonksiyonları $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ kümesinden seçilebilir. Böyle bir durumda $(ess\ sup\ \mathcal{L})(\omega) \leq \eta(\omega)$ $a.s.$ (ya da $(ess\ inf\ \mathcal{L})(\omega) \geq \eta(\omega)$ $a.s.$) yazılabilir (Guo, 2001a).

Tanım 2.1.17 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathbf{T}, \tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere τ topolojisinin doğurduğu Borel $\sigma -$cebri $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ olsun. Eğer $\xi : \Omega \to \mathbf{T}$ biçiminde verilen bir ξ fonksiyonu $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{T})) -$ölçülebilir ise yani her bir $A \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$ için $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ oluyorsa ξ fonksiyonuna, $\mathbf{T} -$ *değerli bir* $\mathcal{A} -$ *rasgele eleman* ya da $\mathbf{T} -$ *değerli bir genelleştirilmiş rasgele değişken* denir (Guo, 2001a).

Uyarı 2.1.18 Burada kısaca; $\mathbf{T}-$*değerli bir* $\mathcal{A}-$*rasgele eleman* yerine $\mathcal{A}-$*rasgele eleman* ifadesi, $\mathbf{T}-$*değerli bir genelleştirilmiş rasgele değişken* yerine ise *genelleştirilmiş rasgele değişken* ifadesi kullanılacaktır. Sadece, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\mathbb{K}$ bir cisim ($\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$) olmak üzere $\xi : \Omega \to \mathbb{K}$ biçiminde tanımlı bir ξ fonksiyonunun $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) -$ölçülebilir olması durumunda ξ fonksiyonu, $\mathbb{K} -$*değerli bir rasgele değişken* olarak adlandırılacaktır. Bu tip rasgele değişkenlerin oluşturduğu küme ise Guo (2001a)'da olduğu gibi, $L_0(\Omega, \mathbb{K})$ ile gösterilecektir. Genel olarak, $(\Omega, \mathcal{A})$ bir *ölçülebilir uzay* ve $(\mathbf{T}, \tau)$ bir *topolojik uzay* olmak üzere $f : \Omega \to \mathbf{T}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{T})) -$ *ölçülebilir* ise bu f fonksiyonu, Tanım 2.1.11'de olduğu gibi kısaca, $\mathcal{A}-$ *ölçülebilir* olarak adlandırılacaktır. Tersine, $(\Omega, \mathcal{A})$ bir *ölçülebilir uzay* ve $\mathbf{T}$ bir *topolojik uzay* ise $f : \Omega \to \mathbf{T}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonunun $\mathcal{A}-$*ölçülebilirliğinden* söz edildiğinde, $\mathbf{T}$ üzerinde doğal olarak $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ *Borel* $\sigma -$*cebrinin* tanımlı olduğu varsayılacaktır.

Şimdi ise genel bir ölçülebilir uzay ya da ölçü uzayı üzerinde tanımlı, özel nitelikte bazı ölçülebilir fonksiyon tipleri incelenecektir.

Tanım 2.1.19 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $(\mathbf{V}, \|\,.\,\|)$ ikilisi bir normlu uzay olsun. $\varphi : \Omega \to \mathbf{V}$ biçiminde bir φ fonksiyonu verildiğinde; φ fonksiyonu sonlu sayıda değer alıyorsa, örneğin, $\mathcal{R}(\varphi) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbf{V}$ biçiminde ise ve her bir i için $A_i = \varphi^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{A}$ koşulunu sağlıyorsa φ fonksiyonuna, bir $\mathbf{V} -$*basit fonksiyon* denir. Ayrıca, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{A_i}$ eşitliğine, φ'nin *standart gösterimi* adı verilir (Aliprantis ve Border, 2006).

Uyarı 2.1.20 Yukarıdaki tanımda geçen "$\mathbf{V} -$*basit fonksiyon*" ifadesinin yerine kısaca, "*basit fonksiyon*" ifadesi kullanılacaktır. Dikkat edilecek olursa, "*basit fonksiyon*" kavramı tanımlanırken, bir *ölçülebilir uzay* temel alınmakta ve bir μ *ölçüsüne gerek* *duyulmamaktadır*. Öte yandan, bir $(\mathbf{V}, \|\,.\,\|)$ normlu uzayında, tek nokta kümeleri normun doğurduğu topolojiye göre kapalı oldukları için $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ koleksiyonunda yer alırlar ve böylelikle, ölçülebilirdirler (özel olarak, Borel kümeleridirler). Dolayısıyla, Aliprantis ve Border (2006)'a göre, *bu tip bir basit fonksiyon* aynı zamanda $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{V})) -$*ölçülebilirdir.* Böyle bir durumda, Uyarı 2.1.18'den yola çıkılarak kısaca, bu tip bir basit fonksiyon $\mathcal{A}-$*ölçülebilirdir* denebilir.

Tanım 2.1.21 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(\mathbf{V}, \|\,.\,\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\varphi : \Omega \to \mathbf{V}$ biçiminde verilen bir φ basit fonksiyonu için $\mathcal{R}(\varphi) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ve $A_i = \varphi^{-1}(\{y_i\})$ olmak üzere her bir i için $\mu(A_i) < \infty$ oluyorsa φ fonksiyonuna, bir $\mathbf{V} -$*basamak fonksiyonu* ya da bir $\mu -$*basit fonksiyon* denir (Aliprantis ve Border, 2006; Hytönen vd., 2016).

Dikkat edilecek olursa, "$\mu -$*basit fonksiyon*" kavramı tanımlanırken, bir *ölçü uzayı* temel alınmakta ve bir μ *ölçüsüne gerek duyulmaktadır*.

Tanım 2.1.22 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $(\mathbf{B}, \|\,.\,\|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu; her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n : \Omega \to \mathbf{B}$ biçimindeki basit fonksiyonların bir (φ_n) dizisinin noktasal limiti olarak yazılabiliyorsa, yani her bir $\omega \in \Omega$ için $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ oluyorsa f fonksiyonuna, *kuvvetli* $\mathcal{A}-$*ölçülebilir fonksiyon* denir (Guo ve You, 1998; Hytönen vd., 2016).

Dikkat edilecek olursa, "*kuvvetli* $\mathcal{A}-$*ölçülebilirlik*" tanımlanırken, *ölçülebilir bir uzay* temel alınmakta ve bir μ *ölçüsüne gerek duyulmamaktadır*.

Ayrıca, bir $f : \Omega \to \mathbf{B}$ fonksiyonu *kuvvetli* $\mathcal{A}-$*ölçülebilir* ise $\mathcal{A}-$*ölçülebilirdir* (Hytönen vd., 2016). Bununla birlikte, aşağıdaki teoremde de belirtildiği gibi, özel bir koşul altında bunun tersi de doğrudur.

Teorem 2.1.23 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $(\mathbf{B}, \|\,.\,\|)$ bir *ayrılabilir* Banach uzayı olsun. Bu durumda $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonunun *kuvvetli* $\mathcal{A}-$*ölçülebilir* olması için **gerek ve yeter koşul**, f fonksiyonunun $\mathcal{A}-$*ölçülebilir* olmasıdır (Hytönen vd., 2016).

Uyarı 2.1.24 Yukarıdaki teoremde sözü edilen "ayrılabilirlik" koşulu kaldırılamaz. Örneğin, $(\mathbf{B}, \|.\|)$ ikilisi, *ayrılabilir olmayan* bir Banach uzayı olsun. $\Omega = \mathbf{B}$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{B})$ olmak üzere $I: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ fonksiyonu, özdeşlik dönüşümünü belirtsin. Dikkat edilecek olursa; burada I fonksiyonunun hem tanım kümesi hem de değer kümesi üzerinde, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{B})$ biçiminde verilen Borel $\sigma -$cebri tanımlanmaktadır. Ayrıca, I fonksiyonu sürekli olup $\mathcal{A}-$ölçülebilirdir (özel olarak, Borel fonksiyonudur). Şimdi varsayalım ki I fonksiyonu kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir olsun. Bu durumda I fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ olacak biçimde, basit Borel fonksiyonlarının bir (φ_n) dizisinin noktasal limiti olarak yazılabilir. Yani her bir $y \in \mathbf{B}$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = I(y) = y$ dir. Ayrıca, (φ_n) dizisindeki fonksiyonların aldığı değerlerin oluşturduğu küme sayılabilirdir. Bu kümeyi C olarak adlandıralım. O halde her bir $y \in \mathbf{B}$ noktası, C kümesinde yer alan bir dizinin limitidir, yani $\bar{C} = \mathbf{B}$ dir. Bu ise **B**'nin ayrılabilir olması demektir ve böylelikle çelişki elde edilir. O halde I fonksiyonu kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir olamaz, yani "ayrılabilirlik" koşulu kaldırılınca teoremde ifade edilen denklik ortadan kalkar (Hytönen vd., 2016).

Tanım 2.1.25 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Ayrıca, $f: \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Eğer $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ olacak biçimde, **B**'nin kapalı ve ayrılabilir bir $\mathbf{B}_0$ alt uzayı bulunabiliyor ve her $\omega \in \Omega$ için $f(\omega) \in \mathbf{B}_0$ oluyorsa f fonksiyonu *ayrılabilir bir kümede değer alır* ya da kısaca, *ayrılabilir değerlidir* denir (Hytönen vd., 2016).

Teorem 2.1.26 $(\Omega, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu durumda $f: \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonunun *kuvvetli* $\mathcal{A}-$*ölçülebilir* olması için **gerek ve yeter koşul**, f fonksiyonunun $\mathcal{A}-$*ölçülebilir* ve *ayrılabilir değerli* olmasıdır (Guo ve You, 1998; Hytönen vd., 2016).

Tanım 2.1.27 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer $f: \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu; her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n: \Omega \to \mathbf{B}$ biçimindeki $\mu -$basit fonksiyonların bir (φ_n) dizisinin, μ ölçüsüne göre $a.e.$ (*almost everywhere*: hemen her yerde, yani ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında işlem yapıldığında) noktasal limiti olarak yazılabiliyorsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\| = 0 \qquad (\mu - a.e.) \tag{2.7}$$

oluyorsa f fonksiyonuna, *kuvvetli μ −ölçülebilir fonksiyon* denir (Hytönen vd., 2016).

Uyarı 2.1.28 Yukarıdaki tanımda sözü edilen f fonksiyonu Guo ve You (1998)'nun çalışmasında "*kuvvetli ölçülebilir fonksiyon*" olarak adlandırılmaktadır. Bu tezde de, RM uzaylarla ilgili bilimsel çalışmalarla uyumlu olması ve herhangi bir karmaşaya neden olmaması için "*kuvvetli μ −ölçülebilir fonksiyon*" ifadesinin yerine, "*kuvvetli ölçülebilir fonksiyon*" ifadesi kullanılacaktır. Ayrıca, dikkat edilecek olursa, "*kuvvetli ölçülebilirlik*" tanımlanırken, *bir ölçü uzayı* temel alınmakta ve bir *μ ölçüsüne gerek duyulmaktadır*.

Teorem 2.1.29 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Ayrıca, $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Bu durumda

i. f fonksiyonu *kuvvetli ölçülebilir* ise f fonksiyonu *kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir* bir fonksiyona *$\mu-$ denktir* (ya da kısaca, *denktir*); yani $g : \Omega \to \mathbf{B}$ ve $f = g \quad (\mu - a.e.)$ olacak biçimde, kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir bir g fonksiyonu vardır.
ii. μ ölçüsü *σ −sonlu* ve f fonksiyonu *kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir* bir fonksiyona *denk* ise f fonksiyonu *kuvvetli ölçülebilirdir*.

(Hytönen vd., 2016).

Öte yandan, Teorem 2.1.26'nın bir sonucu ise aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.1.30 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu *kuvvetli ölçülebilir*, $\tilde{f} : \Omega \to \mathbf{B}$ olmak üzere $\tilde{f}$ fonksiyonu *kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir* ve $f = \tilde{f} \ (\mu - a.e.)$ ise her bir $C \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$ için

$$\{\tilde{f} \in C\} = \{\omega \in \Omega: \ \tilde{f}(\omega) \in C\} \in \mathcal{A} \tag{2.8}$$

olur. Ayrıca, $\mu\{\tilde{f} \in C\}$ ifadesi $\tilde{f}$ fonksiyonunun özel seçiminden bağımsızdır. O halde

$$\mu\{\tilde{f} \in C\} = \mu\{f \in C\} \tag{2.9}$$

dir (Hytönen vd., 2016).

Not 2.1.31 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(\mathbf{B}, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. Ayrıca, $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Dunford ve Schwartz (1958)'ın çalışmasında, $\mu -$basit fonksiyonlardan yola çıkılarak, f fonksiyonunun "$\mu -$*ölçülebilir*" olması tanımlanmıştır. Öte yandan, Guo ve You (1998)'nun da belirttiği gibi, μ ölçüsünün $\sigma -$sonlu olması durumunda "*kuvvetli ölçülebilir fonksiyon*" kavramı ile "$\mu -$*ölçülebilir fonksiyon*" kavramı çakışır. Dolayısıyla, bu tezin kapsamı açısından değerlendirildiğinde, $\sigma -$*sonlu* bir ölçü uzayı üzerinde tanımlı, *kuvvetli ölçülebilir* bir $f : \Omega \to \mathbf{B}$ fonksiyonu, "$\mu -$*ölçülebilir*" olarak adlandırılabilir.

Öte yandan, Teorem 2.1.29'un doğrudan bir sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.1.32 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsü bir $\sigma -$*sonlu* ölçü uzayı ve $(\mathbf{B}, \| . \|)$ bir Banach uzayı olsun. Ayrıca, $f : \Omega \to \mathbf{B}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. f fonksiyonu $\mu -$ölçülebilirdir.
ii. f fonksiyonu, kuvvetli $\mathcal{A}-$ölçülebilir bir fonksiyona denktir.

(Guo ve You, 1998).

Şimdi ise ölçü kavramı kullanılarak elde edilen, ölçü kuramında önemli bir yeri olan ve ölçülebilir fonksiyonların dizileri için tanımlanmış olan özel bir yakınsaklık tipine yer verilecektir.

Tanım 2.1.33 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir sonlu ölçü uzayı ve $(\mathbf{M}, d)$ bir ayrılabilir metrik uzay olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \colon \Omega \to \mathbf{M}$ olacak biçimde, $\mathcal{A}-$ölçülebilir fonksiyonların bir (f_n) dizisi ve $f : \Omega \to \mathbf{M}$ biçiminde, $\mathcal{A}-$ölçülebilir bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{\omega \in \Omega \colon d(f_n(\omega), f(\omega)) > \varepsilon\} = 0 \qquad (2.10)$$

oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna, *ölçüye göre yakınsaktır* denir (Dudley, 2002). Böyle bir durumda, $(\mu) - \lim f_n = f$ yazılacaktır.

Yukarıdaki tanımın özel bir versiyonu, olasılık kuramında sık kullanılan, aşağıdaki yakınsaklık tipini verir.

Tanım 2.1.34 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathbf{M}, d)$ bir ayrılabilir metrik uzay olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n \colon \Omega \to \mathbf{M}$ olacak biçimde, $\mathcal{A}-$rasgele elemanların (genelleştirilmiş rasgele değişkenlerin) bir (ξ_n) dizisi ve $\xi : \Omega \to \mathbf{M}$ biçiminde bir genelleştirilmiş rasgele değişken verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega: \ d(\xi_n(\omega), \xi(\omega)) > \varepsilon\} = 0 \tag{2.11}$$

oluyorsa ya da buna denk olarak, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega: \ d(\xi_n(\omega), \xi(\omega)) < \varepsilon\} = 1 \tag{2.12}$$

oluyorsa (ξ_n) dizisi ξ fonksiyonuna, *olasılık ölçüsüne göre yakınsaktır* denir (Dudley, 2002; Billingsley, 1999). Böyle bir durumda, $(P) - \lim \xi_n = \xi$ yazılacaktır.

Örnek 2.1.35 Örnek 2.1.8 (b)'de verilen $([0,1], \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayını göz önüne alalım. $\nu, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $0 \le k < 2^\nu$ için $n = k + 2^\nu$ biçiminde tanımlansın. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için ξ_n: $[0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \frac{k}{2^\nu} \le \omega \le \frac{k+1}{2^\nu} \quad ise \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlanan (ξ_n) dizisini göz önüne alalım. Ayrıca, $\mathbf{\Theta}$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $\omega \in [0,1]$ için $\mathbf{\Theta}(\omega) = 0$ biçiminde tanımlı bir $\mathbf{\Theta}$ rasgele değişkeni verilsin. Bu durumda her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için

$$0 \le P\{\omega \in [0,1]: \ |\xi_n(\omega) - \mathbf{\Theta}(\omega)| > \varepsilon\} = P\{\omega \in [0,1]: \ \xi_n(\omega) > \varepsilon\} \le \frac{2}{n} \tag{2.14}$$

olup, buradan her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in [0,1]: \ |\xi_n(\omega) - \mathbf{\Theta}(\omega)| > \varepsilon\} = 0 \tag{2.15}$$

elde edilir. Yani $(P) - \lim \xi_n = \mathbf{\Theta}$ dır (Royden, 1988).

2.2 Olasılıksal Metrik (OM) Uzaylar

Bu kesimde öncelikle, OM uzayları tanımlayabilmek için gerekli olan; dağılım fonksiyonu, üçgen norm ve üçgen fonksiyon kavramları incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $R = [-\infty, \infty]$ üzerinde tanımlı, azalmayan, $F(-\infty) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ koşullarını sağlayan bir F fonksiyonuna, *dağılım fonksiyonu* denir. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ üzerinde soldan sürekli tüm dağılım fonksiyonlarının kümesi Δ ile gösterilir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Δ'nın elemanları,

$$F \preccurlyeq G \quad (\text{ya da } G \succcurlyeq F) \text{ dir} \Leftrightarrow \text{Her bir } x \in R \text{ için } F(x) \leq G(x) \text{ dir} \tag{2.16}$$

biçiminde verilen $\preccurlyeq$ bağıntısı yardımıyla, parçalı sıralanabilirdir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Gösterimlerde yalınlık bakımından, $F \preccurlyeq G$ yerine $F \leq G$ ve $G \succcurlyeq F$ yerine ise $G \geq F$ yazılacaktır.

Tanım 2.2.2 Herhangi bir $a \in R$ için *a noktasındaki birim basamak*,

$$\varepsilon_{\boldsymbol{a}}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x \leq a \text{ ise} \\ 1, & a < x \leq \infty \text{ ise} \end{cases} \quad (-\infty \leq a < \infty \text{ için}) \tag{2.17}$$

ve $a = \infty$ için

$$\varepsilon_{\infty}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x < \infty \text{ ise} \\ 1, & x = \infty \text{ ise} \end{cases} \tag{2.18}$$

biçiminde tanımlanan, Δ kümesinde yer alan bir fonksiyondur (Schweizer ve Sklar, 1983).

Tanım 2.2.3 $R^+ = [0, \infty]$ üzerinde tanımlı, azalmayan, $F(0) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ koşullarını sağlayan, $(0, \infty)$ üzerinde soldan sürekli bir F fonksiyonuna, *uzaklık dağılım fonksiyonu* denir. Tüm uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesi Δ^+ ile gösterilir. Ayrıca, $F \in \Delta^+$ olmak üzere $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ koşulunu sağlayan tüm F fonksiyonlarının kümesi ise $\mathcal{D}^+$ ile gösterilir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Tanım 2.2.4 T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ olmak üzere bir T ikili işlemi,

i. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ dir,
ii. Her $x, y \in [0,1]$ için $T(x, y) = T(y, x)$ dir,
iii. $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ koşulunu sağlayan her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$ dir,
iv. Her $x \in [0,1]$ için $T(x, 1) = x$ dir

özelliklerini sağlıyorsa T işlemine, bir *üçgen norm* (t −*norm*) denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Sık kullanılan üçgen normlardan bazıları;

$$M(x,y) = \min\{x,y\}, \tag{2.19}$$

$$\Pi(x,y) = xy, \tag{2.20}$$

$$W(x,y) = \max\{x+y-1,\ 0\} \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanan ikili işlemlerdir (Schweizer ve Sklar, 1983). Öte yandan, üçgen normların özelliklerinden yola çıkılarak, aşağıdaki kavram tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.5 $\tau: \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ olmak üzere,

i. Her $F, G, H \in \Delta^+$ için $\tau(\tau(F,G),H) = \tau(F,\tau(G,H))$ dir,
ii. Her $F, G \in \Delta^+$ için $\tau(F,G) = \tau(G,F)$ dir,
iii. $F \leq H$ ve $G \leq K$ koşullarını sağlayan her $F, H, G, K \in \Delta^+$ için $\tau(F,G) \leq \tau(H,K)$ dir,
iv. Her $F \in \Delta^+$ için $\tau(F,\varepsilon_0) = F$ dir

özelliklerini sağlayan bir τ ikili işlemine, *üçgen fonksiyon* denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Şimdi ise OM uzayların çıkış noktasını oluşturan ve aslında OM uzayların özel bir sınıfı olan, "Menger uzayı" kavramına (ya da Menger (1942)'in deyimiyle, "istatistiksel metrik uzay" kavramına) yer verilecektir. Aşağıda görüleceği üzere; bir Menger uzayında (genel olarak da bir OM uzayda) herhangi iki nokta arasındaki uzaklık, bir reel sayı yerine, bir olasılık dağılım fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Örneğin, p ve q gibi herhangi iki nokta verildiğinde ve bu noktalar arasındaki uzaklık F_{pq} biçiminde bir olasılık dağılım fonksiyonu ile gösterildiğinde; negatif olmayan bir x reel sayısı için $F_{pq}(x)$ değeri, "p ile q arasındaki uzaklığın x'ten küçük olma olasılığı" biçiminde yorumlanır (Schweizer ve Sklar, 1983).

Tanım 2.2.6 $\mathbf{S} \neq \emptyset$, $\mathcal{F}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \Delta^+$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{F}(p,q) = F_{pq}$ biçiminde gösterilsin. T bir üçgen norm olmak üzere her $p, q, r \in \mathbf{S}$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için

i. $F_{pp} = \varepsilon_0$ dır,

ii. $p \neq q$ ise $F_{pq} \neq \varepsilon_0$ dır,

iii. $F_{pq} = F_{qp}$ dir,

iv. $F_{pr}(x+y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$ dir

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{F}, T)$ üçlüsüne bir *Menger uzayı* denir (Menger, 1942; Schweizer ve Sklar, 1983). Eğer (ii) koşulu sağlanmıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{F}, T)$ üçlüsüne, bir *Menger olasılıksal sözde metrik* (*Menger* OSM) *uzayı* denir (Guo, 2001a).

Yukarıda verilen (iv) aksiyomu şöyle yorumlanır: Bir üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu hakkındaki bilgimiz, diğer iki kenarın uzunlukları hakkındaki bildiklerimize simetrik bir biçimde bağlıdır; yani diğer iki kenarın uzunlukları hakkındaki bilgimiz arttıkça üçüncü kenarın uzunluğu hakkındaki bilgimiz de artar ya da en azından azalmaz. Öte yandan, bir kenarın uzunluğu hakkında bir "üst sınır" bilgimiz varsa ve ikinci kenarın uzunluğu hakkında da bir miktar bilgimiz varsa üçüncü kenarın uzunluğu hakkında da fikrimiz var demektir. Ayrıca, iki kenarın uzunlukları hakkında "üst sınır" bilgimiz varsa üçüncü kenarın uzunluğunun üst sınırı hakkında da bilgimiz vardır (Schweizer ve Sklar, 1983).

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında, genel bir OM uzay kavramı ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.7 $\mathbf{S} \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$: $\mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \Delta^+$ ve $\mathcal{T}$ bir üçgen fonksiyon olmak üzere her

$p, q, r \in \mathbf{S}$ için

i. $\mathcal{F}(p,p) = \varepsilon_0$ dır,

ii. $p \neq q$ ise $\mathcal{F}(p,q) \neq \varepsilon_0$ dır,

iii. $\mathcal{F}(p,q) = \mathcal{F}(q,p)$ dir,

iv. $\mathcal{F}(p,r) \geq \mathcal{T}(\mathcal{F}(p,q), \mathcal{F}(q,r))$ dir

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{F}, \mathcal{T})$ üçlüsüne, bir *olasılıksal metrik* (OM) *uzay* denir. Eğer (ii) koşulu sağlanmıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{F}, \mathcal{T})$ üçlüsüne, bir *olasılıksal sözde metrik* (OSM) *uzay* denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Tanım 2.2.8 $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $p\colon\ \Omega\ \rightarrow \mathbf{M}$ biçiminde tanımlı tüm p fonksiyonlarının kümesi **S** ile gösterilsin. Eğer her $p, q \in \mathbf{S}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

i. $\{\omega \in \Omega\colon\ d(p(\omega), q(\omega)) < x\} \in\ \mathcal{A}$ dır (yani $d(p,q)$ fonksiyonu P −ölçülebilirdir),

ii. $\digamma\colon\ \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \Delta^{+}$ ve $\digamma(p,q) = F_{pq}$ olmak üzere,

$$F_{pq}(x) = P\ \{\omega \in \Omega\colon\ \ d(p(\omega), q(\omega)) < x\}\ \text{dir}$$

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \digamma)$ ikilisine, tabanı $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ ve hedefi $(\mathbf{M}, d)$ olan bir $\mathbf{E}-$*uzay* denir (Sherwood, 1969; Schweizer ve Sklar, 1983).

Yukarıdaki tanımda ifade edilen P −*ölçülebilirlik* kavramı; Tanım 2.1.11'de olduğu gibi, $\mathcal{A}-$*ölçülebilirlik* olarak anlaşılmalıdır.

$(\mathbf{S}, \digamma)$ uzayında yer alan ve en fazla sıfır olasılıklı (sıfır ölçülü) bir küme üzerinde farklılık gösteren fonksiyonlar özdeş kabul edilir. Yani $p, q \in \mathbf{S}$ ve $p \neq q$ denildiğinde,

$$P\{\omega \in \Omega\colon\ \ p(\omega) \neq q(\omega)\} > 0 \tag{2.22}$$

eşitsizliği anlaşılır. Öte yandan, W işlemi, (2.21) ile tanımlanan üçgen norm olmak üzere $(\mathbf{S}, \digamma, W)$ üçlüsü bir Menger uzayıdır (Sherwood, 1969). Ayrıca, $(\mathbf{S}, \digamma)$ uzayının elemanlarının her biri aynı zamanda birer $\mathcal{A}-$rasgele eleman (genelleştirilmiş rasgele değişken) ise bu tip bir $\mathbf{E}$ − uzay, *genelleştirilmiş rasgele değişkenler tarafından doğurulmuştur* denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Örnek 2.2.9 **(a)** $\Omega = \{0,1\}$ ve $\mathcal{A}\ = \{\Omega, \emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ olmak üzere bir $P\colon\ \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$ ve $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ üçlüsü bir olasılık uzayıdır. Şimdi $\mathbf{S} = \{p, q\}$ olmak üzere $p(0) = 2$, $p(1) = 3$ ve $q(0) = q(1) = 2$ biçiminde tanımlanan p ve q fonksiyonları verilsin. Bir $\digamma$ fonksiyonu, $\digamma(p,p) = \digamma(q,q) = \varepsilon_0$ ve

$$F_{pq}(x) = P\ \{\omega \in \Omega\colon\ \ |p(\omega) - q(\omega)|) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0\ \ ise \\ \frac{1}{2}\,, & 0 < x \leq 1\ ise \\ 1, & x > 1\ ise \end{cases} \tag{2.23}$$

olmak üzere $\mathfrak{F}(q,p) = \mathfrak{F}(p,q) = F_{pq}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbf{S},\mathfrak{F})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ve hedefi $\mathbb{R}$ olan bir $\mathbf{E}-$uzaydır (Sherwood, 1969).

(b) Örnek 2.1.8 (b)'de verilen $([0,1], \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayını göz önüne alalım. $[0,1]$ üzerinde tanımlı, hemen kesinlikle sonlu ($a.s.$ reel değerli), Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathbf{L_1}([0,1])$ ile gösterilsin ve $a.s.$ eşit olan fonksiyonlar özdeş sayılsın. Eğer $p,q \in \mathbf{L_1}([0,1])$ olmak üzere ve $\mathfrak{F}(p,q) = F_{pq}$ biçiminde gösterilmek üzere $\mathbf{L_1}([0,1]) \times \mathbf{L_1}([0,1])$ üzerinde bir $\mathfrak{F}$ fonksiyonu,

$$F_{pq}(x) = P\,\{\omega \in [0,1]: \ |p(\omega) - q(\omega)|) < x\} \tag{2.24}$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathbf{L_1}([0,1]), \mathfrak{F})$ ikilisi, tabanı $([0,1], \mathcal{A}, P)$ ve hedefi $\mathbb{R}$ olan bir $\mathbf{E}-$uzay belirtir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Aslında Tanım 2.1.12 gereğince $\mathbf{L_1}([0,1])$ kümesinin elemanları birer rasgele değişken olup " $(\mathbf{L_1}([0,1]), \mathfrak{F})$ uzayı, rasgele değişkenler tarafından doğurulmuştur" denebilir. Özel olarak, sürekli fonksiyonlar Lebesgue ölçülebilir olduklarından, burada $\mathbf{L_1}([0,1])$ yerine; $[0,1]$ üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli fonksiyonların kümesi olan $\mathbf{C}[0,1]$ kümesi de alınabilir.

2.3 Rastlantısal Metrik (RM) Uzaylar

RM uzay kavramı, OM uzay kavramına olasılık kuramının standart ölçü kuramına dayalı araçları (olasılık ölçüsü, rasgele değişken, vb.) yardımıyla yaklaşılmasından yola çıkılarak Špaček (1956, 1960) tarafından tanımlanmış ve birçok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

Örneğin, Špaček (1956, 1960)'in çalışması geliştirilerek, hemen kesinlikle negatif olmayan rasgele değişkenler yardımıyla, bir RM uzay Schweizer ve Sklar (1983) tarafından, aşağıda verilen Tanım 2.3.1'deki biçimiyle tanımlanmıştır. Bu tanımda rasgele değişkenlerin denklik sınıfları göz önüne alınmamış olup, denklik sınıfları yardımıyla kurulan yeni bir RM uzay tipi Guo (1999) tarafından tanımlanmıştır ve aynı araştırmacının 2001 yılındaki çalışmasında (Guo, 2001a) bu yeni versiyon, Tanım 2.3.1'deki RM uzay tipinden ayırt edilebilmesi için özel olarak, $\mathbf{E}-$RM uzay adı altında incelenmiştir. Öte yandan, Guo (1999)'nun da belirttiği gibi, bu iki (eski ve yeni) versiyon birbirine denktir. Bu tezin araştırma bulguları ise Tanım 2.3.1 kullanılarak elde edilmiştir.

Tanım 2.3.1 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı, $\mathbf{S} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{X}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{X}(p,q) = X_{pq}$ biçiminde gösterilsin. Eğer her $p, q, r \in \mathbf{S}$ için

i. $p = q \ ise \ X_{pq}(\omega) = 0 \ \ a.s.$ dir,
ii. $X_{pq}(\omega) = 0 \ \ a.s. \ \ ise \ p = q$ dir,
iii. $X_{pq}(\omega) = X_{qp}(\omega) \ \ a.s.$ dir,
iv. $X_{pr}(\omega) \leq X_{pq}(\omega) + X_{qr}(\omega) \ a.s.$ dir

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisine, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir *rastlantısal metrik* (RM) *uzay* denir. X_{pq} rasgele değişkenine, p ile q arasındaki *rastlantısal uzaklık* adı verilir. (ii) koşulu sağlanmıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisine, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir *rastlantısal sözde metrik* (RSM) *uzay* adı verilir (Schweizer ve Sklar, 1983; Guo, 2001a).

Tanım 2.3.1'de sözü edilen $\mathcal{X}$ fonksiyonu, Brown (1972) tarafından, *kuvvetli stokastik metrik* olarak adlandırılmıştır. $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisini Guo (2001a), $\mathbf{F} -$ *rastlantısal metrik* ($\mathbf{F}-$RM) *uzay* olarak adlandırır. Benzer biçimde, (ii) koşulunun sağlanmaması durumunda $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisini $\mathbf{F}-$*rastlantısal sözde metrik* ($\mathbf{F}-$RSM) *uzay* olarak adlandırır. Bu tezde $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, Tanım 2.3.1'de olduğu gibi, *rastlantısal metrik* (RM) *uzay* olarak adlandırılacaktır. Ayrıca; $\mathcal{X}$ fonksiyonu, *rastlantısal metrik* (RM) olarak anılacak ve gerekli olmadığı sürece $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tabanından söz edilmeyecektir.

Öte yandan, $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $P(A) = 0$ ve her $\omega \in \Omega \backslash A = A^c$ için d_ω: $\mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $d_\omega(p,q) = X_{pq}(\omega)$ biçiminde tanımlanan d_ω fonksiyonu $\mathbf{S}$ üzerinde bir sözde metrik olacak biçimde bir tek A kümesi varsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisine, *düzgün− rastlantısal sözde metrik* ($\mathbf{D}-$RSM) *uzay* denir (Guo, 2001a).

Örnek 2.3.2 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere p: $\Omega \rightarrow \mathbf{M}$ biçiminde verilen tüm genelleştirilmiş rasgele değişkenlerin kümesi $L_0(\Omega, \mathbf{M})$ ile gösterilsin. Ayrıca, $\mathcal{X}$: $L_0(\Omega, \mathbf{M}) \times L_0(\Omega, \mathbf{M}) \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere; $d(p,q)$ fonksiyonu $\mathcal{A} -$ ölçülebilir ise $\mathcal{X}(p,q) = X_{pq} = d(p,q)$ biçiminde, karşıt durumda ise

$$\mathcal{X}(p,q) = X_{pq} = ess\ inf\{\eta \in L_0^+(\Omega): \quad d\big(p(\omega), q(\omega)\big) \leq \eta(\omega) \ a.s.\} \tag{2.25}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(L_0(\Omega, \mathbf{M}), \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RSM uzay olup bu uzay; *genelleştirilmiş rasgele değişkenlerin doğurduğu*, *tabanı* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ve hedefi* $(\mathbf{M}, d)$ *olan bir* RSM *uzay* olarak adlandırılır (Guo, 2001a).

Not 2.3.3 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RSM uzay olsun. Ayrıca, $\digamma: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathcal{D}^+$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\digamma(p, q) = F_{pq}$ ve $x \geq 0$ olmak üzere $F_{pq}(x) = P\{\omega \in \Omega: \ X_{pq}(\omega) < x\}$ biçiminde bir $\digamma$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda; W işlemi, (2.2.6) ile tanımlanan üçgen norm olmak üzere $(\mathbf{S}, \digamma, W)$ üçlüsü, $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ tarafından belirlenen bir Menger OSM uzayı belirtir (Guo, 2001a). Buradaki F_{pq} fonksiyonu, X_{pq} rasgele değişkenine ilişkin olasılık dağılım fonksiyonudur.

Şimdi ise bir RSM uzayın topolojik yapısına yer verilecektir.

Teorem 2.3.4 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RSM uzay olsun. $\varepsilon > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ için

$$U(\varepsilon, \lambda) = \left\{(p, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}: \quad P\{\omega \in \Omega \big| \quad X_{pq}(\omega) < \varepsilon\} > 1 - \lambda\right\} \tag{2.26}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{U}(\varepsilon, \lambda) = \{U(\varepsilon, \lambda): \quad \varepsilon > 0, \ \ 0 < \lambda < 1\}$ koleksiyonu $\mathbf{S}$ üzerinde *sözde metriklenebilir* bir *düzgünlük* (*uniformity*) için bir *alt taban* oluşturur. Bu düzgünlük, (ε, λ) $-$*topolojisi* olarak adlandırılan bir *sözde metriklenebilir topoloji* belirler (Guo, 2001a).

Öte yandan, kısalık bakımından, $P\{\omega \in \Omega \big| \quad X_{pq}(\omega) < \varepsilon\}$ yerine $P(X_{pq} < \varepsilon)$ yazılması durumunda,

$$\mathcal{N}_p(\varepsilon, \lambda) = \{q \in \mathbf{S}: \ P(X_{pq} < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \tag{2.27}$$

biçiminde tanımlanan kümeye, p' nin (ε, λ) $-$*komşuluğu* denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Aşağıda, yukarıdakilerden farklı olarak, *rasgele değişkenler* yerine; σ $-$*sonlu* bir $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ölçü uzayı* üzerinde tanımlı ve μ $-$*ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfları* yardımıyla tanımlanan bir RM uzay tipi incelenecektir. Bunun için öncelikle, aşağıdaki gösterimlere gereksinim duyulacaktır:

i. $L_0(\mu, R)$: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel sayı değerli ve μ −ölçülebilir tüm fonksiyonların kümesidir.

ii. $L_0(\mu, \mathbb{K})$: $\mathbb{K}$ bir cisim ($\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$) olmak üzere $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde tanımlı, $\mathbb{K} -$ değerli ve $\mu -$ ölçülebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu; bilinen toplam, çarpım ve skalerle çarpım işlemleri altındaki cebirdir.

iii. $L_0^+(\mu)$: $\xi \in L_0(\mu, \mathbb{R})$ olmak üzere $\xi(\omega) \geq 0$ $(\mu - a.e.)$ koşulunu sağlayan tüm ξ fonksiyonlarının kümesidir.

iv. $L(\mu, R)$: $L_0(\mu, R)$ kümesinde yer alan ve hemen her yerde $(\mu - a.e.)$ eşit olan fonksiyonların $\mu -$ denklik sınıflarının (ya da kısaca, denklik sınıflarının) kümesi, bir diğer deyişle, $L_0(\mu, R)$ kümesinin bölüm kümesidir.

v. $L(\mu, \mathbb{K})$: $L_0(\mu, \mathbb{K})$ kümesinde yer alan ve hemen her yerde $(\mu - a.e.)$ eşit olan fonksiyonların denklik sınıflarının kümesi, yani $L_0(\mu, \mathbb{K})$ kümesinin bölüm kümesidir. Özel olarak, $L_0(\mu, \mathbb{K})$ cebrinin bölüm cebridir.

vi. $L^+(\mu)$: $L_0^+(\mu)$ kümesinde yer alan ve hemen her yerde $(\mu - a.e.)$ eşit olan fonksiyonların denklik sınıflarının kümesi, yani $L_0^+(\mu)$ kümesinin bölüm kümesidir.

vii. **Θ:** $L(\mu, \mathbb{K})$ cebrinin sıfır (etkisiz) elemanıdır.

(Guo, 2001a)

Teorem 2.3.5 $\xi, \eta \in L(\mu, R)$ olmak üzere ξ denklik sınıfının herhangi bir temsilcisi ξ_0 ve η denklik sınıfının herhangi bir temsilcisi η_0 olmak üzere,

$$\xi \preccurlyeq \eta \iff \xi_0(\omega) \leq \eta_0(\omega) \quad \mu - a.e. \tag{2.28}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(L(\mu, R), \preccurlyeq)$ ikilisi bir *tam kafestir* (*tam örgüdür*), yani $L(\mu, R)$'nin *herhangi bir alt kümesinin*, yine $L(\mu, R)$ *kümesinde yer alacak biçimde* bir *supremumu* ve bir *infimumu* vardır (Guo, 2001a).

Matematiksel olarak, bir denklik sınıfı ile bu denklik sınıfının herhangi bir temsilci elemanı aynı şey olmasa da; ölçü kuramında, kısalık bakımından, bu iki kavram aynı sembolle gösterilir. Yani herhangi bir *fonksiyonun denklik sınıfı* da bir *fonksiyon gibi* düşünülebilir (Dunford ve Schwartz, 1958).

Örneğin, yukarıdaki teoremde sözü edilen ξ denklik sınıfının herhangi bir temsilcisi ξ_0 olmak üzere ξ denklik sınıfı bir fonksiyon gibi ele alınırsa ξ ile ξ_0 ifadeleri ortak bir matematiksel varlığı (bir tane fonksiyonu) temsil ederler. Yani ξ_0 yerine ξ yazılabilir. Bu durumda, yalınlık bakımından, $\xi \preccurlyeq \eta$ ifadesi $\xi \leq \eta$ biçiminde gösterilmek üzere,

$$\xi \leq \eta \iff \xi(\omega) \leq \eta(\omega) \quad \mu - a.e. \tag{2.29}$$

yazılabilir (Guo, 1999).

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla yeni bir RM uzay tipi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.6 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\sigma -$sonlu, pozitif ölçü uzayı olsun. $\mathbf{S} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{X}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to L^{+}(\mu)$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{X}(p, q) = X_{pq}$ biçiminde gösterilsin. Eğer her $p, q, r \in \mathbf{S}$ için

i. $X_{pq} = \mathbf{\Theta} \iff p = q$ dir,
ii. $X_{pq} = X_{qp}$ dir,
iii. $X_{pr} \leq X_{pq} + X_{qr}$ dir

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisine, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ olan bir $\mathbf{E}-$*rastlantısal metrik* ($\mathbf{E}-$RM) *uzay* denir. X_{pq} ifadesine, p ile q arasındaki $\mathbf{E}-$*rastlantısal uzaklık* adı verilir. Eğer (i) aksiyomu, "$p = q \Rightarrow X_{pq} = \mathbf{\Theta}$ dır" biçiminde zayıflatılırsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisine, bir $\mathbf{E}-$*rastlantısal sözde metrik* ($\mathbf{E}-$RSM) *uzay* denir (Guo 1999; Guo, 2001a).

Bu tez kapsamında; Tanım 2.1.4 gereğince, bir μ ölçüsü negatif olmayan değerler alacak biçimde tanımlandığından, Tanım 2.3.6'da yer alan "pozitif" sözcüğü kaldırılabilir. Öte yandan, Sonuç 2.1.32 gereğince, Guo (1999)'nun da belirttiği gibi, Tanım 2.3.1 ve Tanım 2.3.6 denktir.

Örnek 2.3.7 Bu örnekte, Guo (2001a)'nun çalışmasındaki Örnek 4.1 altında incelenen $\mathbf{E}-$norm uzay yerine genel bir $\mathbf{E}-$uzay alınarak bir $\mathbf{E}-$RM uzay elde edilecektir. Bunun için, bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı ve bir $(\mathbf{M}, d)$ metrik uzayı verilsin. Ayrıca; $(\mathbf{S}, \mathfrak{F})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ve hedefi $(\mathbf{M}, d)$ olan bir $\mathbf{E}-$uzay belirtsin. Şimdi $\mathcal{X}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to L^{+}(P)$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{X}(p, q) = X_{pq}$ biçiminde gösterilsin ve herhangi bir

$\omega \in \Omega$ için $X_{pq}(\omega) = d\big(p(\omega), q(\omega)\big)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir $\mathbf{E}-$RM uzaydır (Guo, 2001a).

Tanım 2.3.8 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir $\mathbf{E}-$RM uzay olmak üzere $p \in \mathbf{S}$ ve $D \subset \mathbf{S}$ olsun. Bu durumda

$$X_{pD} = \inf \{X_{pq}:\ q \in D\} \tag{2.30}$$

biçiminde tanımlanan X_{pD} fonksiyonuna, *p ile D arasındaki* $\mathbf{E}-$*rastlantısal uzaklık* adı verilir. Ayrıca, $p \in \mathbf{S}$ ve $p_0 \in D$ olmak üzere

$$X_{pp_0} = \inf \{X_{pq}:\ q \in D\} \tag{2.31}$$

oluyorsa p_0 noktası, *p noktasına* RM−*en iyi yaklaşım* olarak adlandırılır (Guo, 1999).

Teorem 2.3.9 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ olan bir $\mathbf{E}-$RM uzay olsun. Ayrıca,

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A}:\ 0 < \mu(A) < \infty\} \tag{2.32}$$

biçiminde tanımlanmak üzere herhangi bir $A \in \mathbf{F}(\mathcal{A})$, $\varepsilon > 0$ ve $0 < \lambda < \mu(A)$ için,

$$U_A(\varepsilon, \lambda) = \{(p, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}:\ \ \mu\{\omega \in A |\ \ X_{pq}(\omega) < \varepsilon\} > \mu(A) - \lambda\} \tag{2.33}$$

$$= \{(p, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}:\ \ \mu_A\left(X_{pq} < \varepsilon\right) > \mu(A) - \lambda\} \tag{2.34}$$

biçiminde tanımlanan bir $U_A(\varepsilon, \lambda)$ kümesi verilsin. Bu durumda

$$\mathcal{U}(\mathcal{X}) = \{U_A(\varepsilon, \lambda):\ A \in \mathbf{F}(\mathcal{A}), \varepsilon > 0,\ 0 < \lambda < \mu(A)\} \tag{2.35}$$

koleksiyonu, **S** üzerindeki bir *Hausdorff düzgünlüğü* (*Hausdorff uniformity*) için bir *taban* oluşturur (Guo, 1999).

Yukarıdaki teoremde sözü edilen *Hausdorff düzgünlüğünün doğurduğu topolojiye*, rastlantısal metrik olan $\mathcal{X}$'in belirlediği (ε, λ) −*topolojisi* denir. Ayrıca, $\mathcal{U}(\mathcal{X})$ tabanının belirlediği Hausdorff düzgünlüğü yapısına göre bir düzgün uzay olan **S** uzayı *tam* ise $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayına, *tam* $\mathbf{E}-$RM *uzay* denir. Öte yandan, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı σ−sonlu olduğundan, $\mathcal{U}(\mathcal{X})$ tabanının belirlediği Hausdorff düzgünlüğü *metriklenebilirdir* (Guo, 1999)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bir sonraki bölümde ortaya konulacak olan araştırma bulgularına temel oluşturan ve bu tezin konusuna ilişkin bilimsel çalışmalarda yer alan bazı tanımlara ve sonuçlara yer verilecektir. Öncelikle, RM uzaylara ilişkin bazı kullanışlı temel kavramlar ve sonuçlar incelenecektir.

Tezin bundan sonraki tüm aşamalarında, bir RM uzaydan söz edildiğinde bu tip bir uzay, *Tanım 2.3.1'de sözü edilen uzay* olacaktır. Ayrıca, herhangi bir RM uzay verildiğinde bu uzayın üzerinde, Teorem 2.3.4'de ifade edilen $(\varepsilon,\lambda)-$ *topolojisi* tanımlandığı varsayılacaktır.

Tanım 3.1 $(\mathbf{S},\mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere $p,q,p',q' \in \mathbf{S}$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde, bir $\varepsilon' > 0$ ve bir $\lambda' \in (0,1)$ bulunabiliyor öyle ki $P(X_{pp'} < \varepsilon') > 1-\lambda'$ ve $P(X_{qq'} < \varepsilon') > 1-\lambda'$ iken

$$P\left(\left|X_{pq} - X_{p'q'}\right| < \varepsilon\right) > 1-\lambda \tag{3.1}$$

oluyorsa $\mathcal{X}$ fonksiyonu *düzgün süreklidir* denir (Brown, 1972).

Brown (1972)'a göre, yukarıdaki tanımda $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ olacak biçimde seçilirse, bu tezde sıkça yararlanılacak olan aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2 $(\mathbf{S},\mathcal{X})$ bir RM uzay ise rastlantısal metrik olarak ifade edilen $\mathcal{X}$ fonksiyonu düzgün süreklidir (Brown, 1972).

Sonuç 3.3 $\mathcal{X}$ fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan, Tanım 3.1'in özel bir durumu ve Yardımcı Teorem 3.2'nin bir sonucu olarak şu söylenebilir: $(\mathbf{S},\mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere $p,q,r \in \mathbf{S}$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde, $P(X_{pq} < \frac{\varepsilon}{2}) > 1-\frac{\lambda}{2}$ ve $P(X_{qr} < \frac{\varepsilon}{2}) > 1-\frac{\lambda}{2}$ iken $P(X_{pr} < \varepsilon) > 1-\lambda$ olur.

Bundan sonraki aşamada, "ideal yakınsaklık ($I -$ yakınsaklık)" kavramı incelenecektir. Ancak, öncelikle, $I-$yakınsaklığın çıkış noktasını oluşturan "doğal yoğunluk", "istatistiksel yakınsaklık", "ideal" ve "süzgeç (filtre)" kavramlarına yer verilecektir.

Tanım 3.4 $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,|\{k \in A : k \leq n\}|$ biçiminde verilen limit varsa bu limitin değerine, A'nın *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Burada $|\{k \in A : k \leq n\}|$ ifadesi, "A'nın, n'yi geçmeyen elemanlarının sayısı" anlamındadır (Niven vd., 1991).

Örneğin, $\mathbb{N}$'nin her sonlu A alt kümesi için $\delta(A) = 0$ dır ve $\delta\{n \in \mathbb{N} : \ n \ \ tam\,kare\,değildir\} = 1$ dir. $\delta(A)$ varsa $A^c = \mathbb{N}\backslash A$ olmak üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır (Niven vd., 1991).

"Doğal yoğunluk" kavramı, aşağıdaki yakınsaklık tipinin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Tanım 3.5 (x_n) bir reel dizi olmak üzere bir $x \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{n \in \mathbb{N} : \ |x_n - x| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad (3.2)$$

oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve bu durum, $stat - \lim\ x_n\ = x$ biçiminde gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Dikkat edilecek olursa, klasik (sıradan) anlamda (yani Cauchy anlamında) yakınsak bir (x_n) dizisine göre her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \ |x_n - x| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olduğundan (3.2) eşitliği her bir $\varepsilon > 0$ için sağlanır. Dolayısıyla, *yakınsak bir dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır fakat bunun tersi doğru olmayabilir* (Fridy, 1985). Sonuç olarak, istatistiksel yakınsaklık, sıradan anlamda yakınsaklığın doğrudan bir genellemesi olmaktadır.

Şimdi ise ideal ve süzgeç (filtre) kavramları anımsatılacaktır.

Tanım 3.6 $Y \neq \emptyset$ ve $I \subset \mathcal{P}(Y)$ olsun. Eğer

i. Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$ dır,

ii. Herhangi bir $A \in I$ ve her bir $B \subset A$ için $B \in I$ dır

koşulları sağlanıyorsa I koleksiyonuna, bir *ideal* denir. $I \neq \{\emptyset\}$ ve $Y \notin I$ ise I bir *basit olmayan idealdir* denir. Basit olmayan bir I ideali, $I \supset \{\{y\} : \ y \in Y\}$ koşulunu sağlıyorsa bu ideale, *uygun ideal* adı verilir (Kostyrko vd, 2000).

Tanım 3.7 $Y \neq \emptyset$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ olsun. Eğer

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir,

ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir,

iii. Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ ve her bir $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$ dir

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ koleksiyonuna, bir *süzgeç* (*filtre*) denir (Kostyrko vd, 2000).

$I \subset \mathcal{P}(Y)$ olmak üzere I idealinin basit olmayan bir ideal olması için **gerek ve yeter koşul**, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I) = \{Y \backslash A:\ A \in I\}$ koleksiyonunun bir süzgeç olmasıdır (Kostyrko vd, 2000). Buradaki $\mathcal{F}(I)$ süzgeci, "*I idealine ilişkin süzgeç*" olarak adlandırılır (Šalát vd., 2004).

Örneğin, $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümelerinin koleksiyonu, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir uygun ideal olup I_f ile gösterilir. Benzer biçimde; $\mathbb{N}$'nin, doğal yoğunluğu sıfır olan tüm alt kümelerinin oluşturduğu koleksiyon da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir uygun idealdir (Kostyrko vd, 2000). Bu ideal, bu tezde I_δ ile gösterilecektir. Öte yandan, doğal yoğunluğu 1 olan pozitif tamsayı kümelerinin oluşturduğu koleksiyon ise bir süzgeçtir. Bu süzgeç, $\mathcal{F}(I_\delta)$ ile gösterilecektir.

Son olarak, dikkat edilecek olursa burada $A \notin I$ olması $A \in \mathcal{F}$ olması anlamına gelmemektedir. Örneğin, tek doğal sayıların oluşturduğu kümeye A diyelim. Bu durumda $\delta(A) = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan $A \notin I_\delta$ dır fakat aynı zamanda $\delta(A) \neq 1$ olduğundan $A \notin \mathcal{F}(I_\delta)$ dir (Öztürk, 2014).

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında, bir metrik uzayda $I-$yakınsaklık kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.8 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere **M** uzayında bir (x_n) dizisi ve bir $x \in \mathbf{M}$ verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir ideal, I olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} :\ d(x_n, x) \geq \varepsilon\} \in I \tag{3.3}$$

oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına *ideal yakınsaktır* (*$I-$yakınsaktır*) denir ve bu durum,

$I-\lim\ x_n = x$ ile gösterilir (Kostyrko vd, 2000).

Yukarıdaki tanımda $I = I_{\mathrm{f}}$ biçiminde seçilirse (x_n) dizisi x noktasına *sıradan anlamda yakınsak* olur (Kostyrko vd, 2000). Böyle bir durumda

$$I_{\mathrm{f}} - \lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{3.4}$$

yazılabilir. $I = I_{\delta}$ biçiminde seçilmesi durumunda ise (x_n) dizisi x noktasına *istatistiksel yakınsak* olur (Kostyrko vd, 2000). Böyle bir durumda

$$I_{\delta} - \lim x_n = stat - \lim\ x_n = x \tag{3.5}$$

yazılabilir.

Yani $I -$ yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığın ve dolayısıyla da sıradan yakınsaklığın doğrudan bir genellemesidir. I_{f} ve I_{δ} yerine başka idealler seçilirse daha başka yakınsaklık tipleri elde edilir. Bu tip yakınsaklıklar Kostyrko vd. (2000)'nin çalışmasında incelenmiştir.

Öte yandan, yine bir I ideali yardımıyla tanımlanıp, $I-$yakınsaklık ile yakından ilişkili olan bir başka yakınsaklık tipi ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.9 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere **M** uzayında bir (x_n) dizisi ve bir $x \in \mathbf{M}$ verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir ideal, I olsun. Eğer

$$B = \{n_k:\ n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(I) \tag{3.6}$$

(yani $\mathbb{N} \setminus B \in I$) olacak biçimde bir B kümesi bulunabiliyor ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına *I^*-yakınsaktır* denir. Böyle bir durumda $I^* - \lim\ \ x_n = x$ yazılır (Kostyrko vd., 2000).

Yardımcı Teorem 3.10 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere **M** uzayında bir (x_n) dizisi ve bir $x \in \mathbf{M}$ verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir *uygun ideal*, I olsun. Eğer (x_n) dizisi x noktasına *I^*-yakınsak* ise aynı zamanda bu noktaya *$I-$yakınsaktır* (Kostyrko vd., 2000).

Tüm bunların yanı sıra, genel bir topolojik uzayda $I-$yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.11 $(\mathbf{T}, \tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere **T** uzayında bir (x_n) dizisi ve bir $x \in$ **T** verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de basit olmayan bir ideal, $\mathcal{I}$ olsun. Eğer x noktasını içeren her bir $V \in \tau$ için, yani x noktasını içeren her bir V açık kümesi için

$$A(V) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\} \in \mathcal{I} \tag{3.7}$$

oluyorsa (x_n) dizisi x noktasına $\mathcal{I}-$*yakınsaktır* denir ve bu durum,

$\mathcal{I}-\lim x_n = x$ ile gösterilir (Sleziak, 2003; Lahiri ve Das, 2005).

Yukarıdaki tanımda, özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ alınması durumunda, Di Maio ve Kočinac (2008)'ın çalışmasında incelenen, "genel bir topolojik uzayda istatistiksel yakınsaklık" kavramı elde edilir.

Şimdi ise Fridy (1985)'nin tanımladığı "reel istatistiksel Cauchy dizisi" kavramının genelleştirilmesiyle elde edilen, bir metrik uzayda "$\mathcal{I}-$Cauchy dizisi" kavramına yer verilecektir.

Tanım 3.12 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere **M** uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir uygun ideal, $\mathcal{I}$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I} \tag{3.8}$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine, bir $\mathcal{I}-$*Cauchy dizisi* denir (Dems, 2004).

Dizilerin matematiksel analizinde temel nitelikte olan kavramlardan birinin de "sınırlılık" olduğu söylenebilir. Bu bağlamda, reel dizilerin klasik anlamdaki sınırlılığının bir genellemesi olarak, Fridy ve Orhan (1997) ile Tripathy (1997) "istatistiksel sınırlılık" kavramını tanımlamışlardır. Aşağıda, bu kavramı da kapsayan, "$\mathcal{I}-$sınırlılık" kavramı göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.13 (x_n) bir reel dizi olmak üzere $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir uygun ideal, $\mathcal{I}$ olsun. Eğer $c > 0$ ve

$$A(c) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > c\} \in \mathcal{I} \tag{3.9}$$

olacak biçimde bir c reel sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine, $I-$*sınırlıdır* denir (Šalát vd., 2004).

Son olarak, fonksiyon dizilerinin bazı $I-$yakınsaklık tipleri incelenecektir.

Tanım 3.14 $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ve $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : \mathcal{X} \to \mathbf{M}$ olacak biçimde bir (f_n) fonksiyon dizisi ve bir $f: \mathcal{X} \to \mathbf{M}$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de basit olmayan bir ideal, I olsun. Eğer her bir $x \in \mathcal{X}$ için $I-\lim f_n(x) = f(x)$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$*noktasal yakınsaktır* denir. Bir başka deyişle, her bir $x \in \mathcal{X}$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için bir $A = A(x, \varepsilon) \in I$ bulunabiliyor öyle ki $n \notin A$ iken $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$ *noktasal yakınsaktır* denir. Benzer biçimde, eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir $A = A(\varepsilon) \in I$ bulunabiliyor öyle ki $n \notin A$ ve $x \in \mathcal{X}$ iken $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$*düzgün yakınsaktır* denir (Balcerzak vd., 2007).

Tanım 3.15 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsü bir sonlu ölçü uzayı olmak üzere Ω'nın hemen her noktasında $(a.e.)$ tanımlı, reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{L}^0$ ile gösterilsin. Buna göre, $\mathcal{L}^0$ uzayında bir dizi (f_n) ve $f \in \mathcal{L}^0$ olmak üzere her bir $\varepsilon > 0$ için

$$I-\lim \mu\{\omega \in \Omega: |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0 \tag{3.10}$$

koşulu sağlanıyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna, *ölçüye göre I–yakınsaktır* denir (Balcerzak vd., 2007). Böyle bir durumda $(\mu)-I-\lim f_n = f$ yazılacaktır.

Tanım 3.15'de sözü edilen *ölçülebilir fonksiyon* kavramı; Tanım 2.1.11'de olduğu gibi, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$*ölçülebilir fonksiyon* ya da kısaca, $\mathcal{A}-$*ölçülebilir fonksiyon* olarak anlaşılmalıdır. Ayrıca, Tanım 3.15'de göz önüne alınan yakınsaklık tipinin özel bir versiyonu, Fast (1951)'ın çalışmasında, "asimptotik istatistiksel yakınsaklık" adı altında incelenmiştir (yani $I = I_\delta$ koşulu altında çalışılmıştır). Öte yandan, Tanım 3.15'de özel olarak, $I = I_f$ alınırsa ölçü kuramındaki "ölçüye göre yakınsaklık" tanımı elde edilir. Sonuç olarak; "ölçüye göre $I-$ yakınsaklık" kavramı, "ölçüye göre yakınsaklık" kavramının doğal bir genellemesidir.

Bunların yanı sıra; bilindiği üzere, ölçü kuramında "ölçüye göre yakınsaklık" kavramı tanımlanırken genel bir ölçü uzayı özel olarak bir olasılık uzayı olacak biçimde seçilirse bu kavram, "olasılık ölçüsüne göre yakınsaklık" olarak adlandırılmaktadır. Buna göre, Tanım 3.15'deki ölçü uzayı özel olarak bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olacak biçimde seçilirse "ölçüye göre $\mathcal{I}-$yakınsaklık" kavramı, "*olasılık ölçüsüne göre* $\mathcal{I}-$*yakınsaklık*" olarak adlandırılabilir. Bu durumda, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir rasgele değişken olmak üzere bir (ξ_n) dizisi ve bir $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeni verildiğinde, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{I}-\lim P\{\omega \in \Omega \colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad (3.11)$$

oluyorsa; ya da buna *denk olarak*, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{I}-\lim P\{\omega \in \Omega \colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} = 1 \qquad (3.12)$$

oluyorsa (ξ_n) dizisi, ξ rasgele değişkenine *olasılık ölçüsüne göre* $\mathcal{I}-$*yakınsaktır* denebilir. Böyle bir durumda $(P)-\mathcal{I}-\lim \xi_n = \xi$ yazılacaktır.

Şimdi kısalık bakımından, (3.11) yerine

$$\mathcal{I}-\lim P(\,|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0 \qquad (3.13)$$

ve (3.12) yerine de

$$\mathcal{I}-\lim P\{\,|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1 \qquad (3.14)$$

yazalım. Bu durumda (3.13) ve (3.14) eşitlikleri aşağıdaki ifadelere denktir:

i. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \{n \in \mathbb{N} \colon P(\,|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \geq \lambda\} \in \mathcal{I}$ (3.15)

ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \{n \in \mathbb{N} \colon P(\,|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \leq 1 - \lambda\} \;\; \mathcal{I}$ (3.16)

iii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \{n \in \mathbb{N} \colon P(\,|\xi_n - \xi| < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$. (3.17)

Son olarak, "olasılık ölçüsüne göre $\mathcal{I}-$yakınsaklık" kavramı ile ilgili bazı sonuçlar Hazarika ve Mohiuddine (2013)'in ve Ghosal (2014)'ın çalışmalarında bulunabilir. Ayrıca, özel olarak, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$ alınırsa "olasılık ölçüsüne göre istatistiksel yakınsaklık" tan söz edilebilir. Bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar da Rahmat ve Lafuerza-Guillén (2009)'in, Ghosal (2013)'ın ve Şençimen (2013)'in çalışmalarında bulunabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Tezin bu bölümünden, "Şençimen, C., Ölmez, A., 2018. A study on sequences in a random metric space via the concept of an ideal. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6 (1), 241-252" künyeli çalışma üretilmiştir.

Bu bölümde, bir $\mathcal{I}$ idealinden söz edildiğinde bunun, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir *uygun ideal* olduğu varsayılacaktır.

Öncelikle; Kostyrko vd. (2000)'nin, Sleziak (2003)'ın ve Lahiri ve Das (2005)'ın çalışmalarından esinlenilerek, "bir RM uzayda ideal yakınsak ($\mathcal{I}-$yakınsak) dizi" kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmış ve ardından bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.1 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir (p_n) dizisi ve bir $p \in \mathbf{S}$ verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\{n \in \mathbb{N}:\ p_n \notin \mathcal{N}_p(\varepsilon, \lambda)\} = \{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p} < \varepsilon) \leq 1 - \lambda\} \in \mathcal{I} \tag{4.1}$$

oluyorsa (p_n) dizisi p noktasına $(\varepsilon, \lambda)-$ *topolojisine göre ideal yakınsaktır* ya da, *rastlantısal metrik olan $\mathcal{X}$'e göre ideal yakınsaktır* veya kısaca, (p_n) dizisi $\mathcal{I}-$*yakınsaktır* denir. Ayrıca, p noktasına, (p_n) dizisinin (RM)$-\mathcal{I}-$*limiti* adı verilir. Böyle bir durumda, (RM)$-\mathcal{I}-\lim p_n = p$ yazılır.

Dikkat edilecek olursa; (RM)$-\mathcal{I}-\lim p_n = p$ olması için **gerek ve yeter koşul**, her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p} < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \tag{4.2}$$

olmasıdır.

Öte yandan, burada göz önüne alınan $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayının tabanı bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olduğu için şu söylenebilir: **S** uzayında bir (p_n) dizisi ve bir $p \in \mathbf{S}$ verildiğinde, (4.2)'de yer alan $\lambda \in (0,1)$ olacak biçimdeki λ sayısı isteksel olarak yeterince küçük seçilebileceğinden, (3.14) ve (3.17) yardımıyla; (RM)$-\mathcal{I}-\lim p_n = p$ olması için **gerek ve yeter koşul**, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{I}-\lim\ P(X_{p_n p} < \varepsilon) = \mathcal{I}-\lim\ P\{\omega \in \Omega: |X_{p_n p}(\omega)| < \varepsilon\} = 1 \tag{4.3}$$

olmasıdır. Ayrıca, (4.3) eşitliğine göre, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\omega) = 0 \;\; a.s.$ biçiminde tanımlanan bir $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ rasgele değişkeni verildiğinde; (RM)$-I-\lim p_n = p$ olması için **gerek ve yeter koşul**, $(X_{p_n p})$ biçiminde verilen rasgele değişken dizisinin, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$'ya olasılık ölçüsüne göre $I-$yakınsak olmasıdır. Yani

$$\text{(RM)}-I-\lim p_n = p \;\Leftrightarrow\; (P)-\; I-\lim \quad X_{p_n p} = \widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.4}$$

denebilir.

Not 4.2 Karakuş (2007)'un çalışmasında; üzerinde (ε, λ) $-$topolojisi tanımlı ve olasılıksal uzaklığın, olasılık dağılım fonksiyonları yardımıyla tanımlandığı, Šerstnev tipi bir olasılıksal normlu uzayda (Šerstnev, 1963) $I-$yakınsaklığın özel bir durumu olarak "istatistiksel yakınsaklık" kavramı incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, Şençimen ve Pehlivan (2009), üzerinde kuvvetli topoloji tanımlı ve olasılıksal uzaklığın, Tanım 2.2.7'de olduğu gibi, olasılık dağılım fonksiyonları yardımıyla tanımlandığı genel bir OM uzayda "kuvvetli $I-$yakınsaklık" kavramını tanımlamışlardır. Ancak, bu tezin ilk bölümünde de belirtildiği gibi, OM uzaylar ve RM uzaylar temel yapıları gereğince birbirlerinden farklıdırlar. Bu nedenle, bu bölümde yer alan, istatistiksel yakınsaklığa ve $I-$yakınsaklığa ilişkin tanımlar, Karakuş (2007) ile Şençimen ve Pehlivan (2009)'ın çalışmalarındaki tanımlardan farklı bir biçimde formüle edilmiştir çünkü bu tezde, "uzaklık niceliği" olarak, *rasgele değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonları yerine, rasgele değişkenlerin bizzat kendileri kullanılmaktadır.*

Aşağıda, bir $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayında $I-$ yakınsaklığa ilişkin bir örnek verilmiştir. Anımsanacağı üzere I_{f} koleksiyonu, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'de bir uygun idealdir. Dolayısıyla, $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayında bir (p_n) dizisinin, $(\varepsilon, \lambda)-$topolojisine göre $I_{\mathrm{f}}-$*yakınsak olması* demek, bu dizinin aynı topolojiye göre *klasik* (*sıradan*) *anlamda yakınsak olması* demektir. Ancak, aşağıdaki örnekten de görüleceği üzere, I_{f} yerine başka bir ideal seçildiğinde bu denklik sağlanmayabilir.

Örnek 4.3 $\mathbf{S} = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $p = (a_1, a_2)$, $q = (b_1, b_2) \in \mathbf{S}$ verilsin. Ayrıca, $\mathbf{S}$ üzerinde bir d metriği, $d(p,q) = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{\frac{1}{2}}$ biçiminde tanımlansın, yani d, Öklid metriği olsun. Bunun yanı sıra, $\Omega = [0,1]$ olmak üzere, Örnek 2.1.8 (b)'de verilen

$(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayını göz önüne alalım. Şimdi $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\xi(\omega) = \omega$ biçiminde bir ξ rasgele değişkeni verilsin ve $\mathcal{X}\colon \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to L_0^+(\Omega)$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $X_{pq}(\omega) = d(p, q)\ \xi(\omega)$ biçiminde bir $\mathcal{X}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu koşullar altında $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzaydır. Bu tip bir RM uzayın kurulumu, Schweizer ve Sklar (1983)'ın çalışmasında ele alınmıştır. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayında bir (p_n) dizisi,

$$p_n = \begin{cases} (1,1), & n \text{ tam kare ise} \\ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), & \text{diğer} \end{cases} \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca, $\theta = (0,0) \in \mathbf{S}$ olmak üzere

$$X_{p_n\theta}(\omega) = d(p_n, \theta)\ \xi(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2}\omega, & n \quad \text{tam kare ise} \\ \frac{\sqrt{2}\omega}{n}, & \text{diğer} \end{cases} \tag{4.6}$$

biçiminde tanımlanan, rasgele değişkenlerin $(X_{p_n\theta})$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda, n tam kare ise

$$P\left(X_{p_n\theta} < \varepsilon\right) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, & 0 < \varepsilon < \sqrt{2} \ \text{ ise} \\ 1, & \varepsilon \geq \sqrt{2} \quad \text{ise} \end{cases} \tag{4.7}$$

ve n tam kare değilse

$$P\left(X_{p_n\theta} < \varepsilon\right) = \begin{cases} \frac{n\varepsilon}{\sqrt{2}}, & 0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ ise} \\ 1, & \varepsilon \geq \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ ise} \end{cases} \tag{4.8}$$

yazılabilir. Öte yandan, $A = \{n_k\colon k \in \mathbb{N} \ ve\ n_k \ tam\ kare\ değildir\}$ olmak üzere, $\delta(A) = 1$ ve dolayısıyla $A \in \mathcal{F}(I_\delta)$ yazılabilir. Bu durumda her bir $\varepsilon > 0$ için, $\lim_{k\to\infty} P\left(X_{p_{n_k}\theta} < \varepsilon\right) = 1$ olur. O halde Tanım 3.9 gereğince, her bir $\varepsilon > 0$ için $I_\delta^* - \lim \ P\left(X_{p_n\theta} < \varepsilon\right) = 1$ olup Yardımcı Teorem 3.10 gereğince, her bir $\varepsilon > 0$ için $I_\delta - \lim \ P\left(X_{p_n\theta} < \varepsilon\right) = 1$ elde edilir. Böylelikle, (RM)$-I_\delta-\lim p_n = \theta$ dır. Bu ise aynı zamanda; (p_n) dizisinin, $(\varepsilon, \lambda) -$topolojisine göre, θ noktasına "istatistiksel yakınsak" olduğu anlamına gelir. Dikkat edilecek olursa (p_n) dizisi (ε, λ) $-$topolojisine göre sıradan anlamda yakınsak değildir. Ayrıca, $p = (1,1) \in \mathbf{S}$ olmak üzere (p_n) dizisinin, $(p_n)_{n\in A^c}$

biçiminde tanımlanan alt dizisi, p noktasına $(\varepsilon, \lambda)-$topolojisine göre $I_\delta-$yakınsaktır. O halde bir RM uzayda $\mathcal{I}-$yakınsak bir (p_n) dizisinin herhangi bir alt dizisi, (p_n) dizisinin (RM)$-\mathcal{I}-$limitine $\mathcal{I}-$yakınsak olmak zorunda değildir.

Teorem 4.4 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olsun. $p, q \in \mathbf{S}$ olmak üzere $\mathbf{S}$ uzayında (p_n) ve (q_n) dizileri verilsin. Eğer (RM) $-\ \mathcal{I}\ -\lim p_n = p$ ve (RM) $-\ \mathcal{I}\ -\lim q_n = q$ ise $(P)\ -\mathcal{I}-\lim\ \ X_{p_n q_n} = X_{pq}$ dir.

Kanıt: Öncelikle, $\mathcal{X}$'in düzgün sürekli olduğunu biliyoruz. Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verilsin. Bu durumda, Sonuç 3.3 gereğince, $P(X_{p_n p} < \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \frac{\lambda}{2}$ ve $P(X_{q_n q} < \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \frac{\lambda}{2}$ iken $P(|X_{p_n q_n} - X_{pq}| < \varepsilon) > 1 - \lambda$ olur. Şimdi ise

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}:\ P(|X_{p_n q_n} - X_{pq}| < \varepsilon) \le 1 - \lambda\} \tag{4.9}$$

$$A_2 = \left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p} < \tfrac{\varepsilon}{2}) \le 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} \tag{4.10}$$

$$A_3 = \left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{q_n q} < \tfrac{\varepsilon}{2}) \le 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} \tag{4.11}$$

biçiminde tanımlanan A_1 , A_2 ve A_3 kümelerini göz önüne alalım. Bu durumda $A_1 \subset (A_2 \cup A_3)$ yazılabilir. Ayrıca, (RM) $-\ \mathcal{I}\ -\lim p_n = p$ ve (RM)$-\mathcal{I}-\lim q_n = q$ olduğundan, Tanım 4.1 gereğince $A_2, A_3 \in \mathcal{I}$ dır. Dolayısıyla $A_1 \in \mathcal{I}$ olup $A_1^c \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ yazılabilir. Buna göre,

$$\{n \in \mathbb{N}:\ P(|X_{p_n q_n} - X_{pq}| < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \tag{4.12}$$

olup λ sayısı isteksel olarak yeterince küçük seçilebileceğinden, (3.14) ve (3.17) yardımıyla

$$\mathcal{I}-\lim\ \ P(|X_{p_n q_n} - X_{pq}| < \varepsilon) = 1 \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu ise $(P)\ -\mathcal{I}-\lim\ \ X_{p_n q_n} = X_{pq}$ demektir. ■

Not 4.5 Kostyrko vd (2000)'nin çalışmasında, bir metrik uzayda "$\mathcal{I}-$yakınsaklığı koruyan fonksiyon" kavramı şöyle tanımlanmıştır: $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun ve $g\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ biçiminde bir g fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $x \in \mathbf{M}$ ve

$I-\lim x_n = x$ olacak biçimde, **M** uzayında yer alan her bir (x_n) dizisi için $I-\lim g(x_n) = g(x)$ oluyorsa g fonksiyonuna, $I-$ *yakınsaklığı korur* denir. Dolayısıyla, benzer bir mantıkla, **S** üzerindeki $(\varepsilon, \lambda)-$topolojisi göz önüne alınarak ve Teorem 4.4'ün bir sonucu olarak, $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğinin $I-$*yakınsaklığı koruyan, iki değişkenli bir fonksiyon* olduğu söylenebilir.

Aşağıda, Dems (2004)'in ve Šalát vd. (2004)'nin çalışmalarından esinlenilerek, bir RM uzayda "$I-$Cauchy dizisi" kavramı tanımlanmış ve buna ilişkin bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Öte yandan, $I-$ Cauchy dizisi kavramına ilişkin bilimsel çalışmalar incelendiğinde; Lahiri ve Das (2007)'ın çalışmasında, oldukça genel bir durum olarak, "bir topolojik uzaydaki ağların $I-$ yakınsaklığı" kavramının tanımlandığı, ayrıca, Das ve Ghosal (2010)'ın çalışmasında ise "düzgün (uniform) bir topolojik uzayda $I-$Cauchy ağı" kavramının tanımlanarak bu kavramın bazı temel özelliklerinin incelendiği görülmektedir. Bu tezde göz önüne alınan $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ uzayı da bir düzgün uzay olduğundan ve diziler de ağların özel biçimleri oldukları için, aşağıda *Teorem 4.7*, *Teorem 4.8* ve *Sonuç 4.9* olarak ifade edilecek olan bulgular, Das ve Ghosal (2010)'ın çalışmasında yer alan, $I-$Cauchy ağı kavramına ilişkin sonuçların özel durumları olarak düşünülebilir. Bununla birlikte; bu tezin konusu olan RM uzayların topolojik yapısının özel olarak rasgele değişkenlerin ölçü kuramına dayalı özelliklerine ilişkin olması, Das ve Ghosal (2010)'ın çalışmasında incelenen genel bir düzgün topolojik uzayda ise ölçü kuramının araçlarının söz konusu olmadığı göz önüne alındığında; detaylarda ölçü kuramı ile olasılık kuramı açısından ne tür matematiksel işlemlerin gerçekleştiği Teorem 4.7, Teorem 4.8 ve Sonuç 4.9 olarak ifade edilecek olan bulgularda görülecektir. Bu bulgular ise doğal olarak, RM uzayların araçları kullanılarak kanıtlanmıştır.

Tanım 4.6 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir (p_n) dizisi verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde

$$\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_N} < \varepsilon) \leq 1 - \lambda\} \in\ I \tag{4.14}$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (p_n) dizisine, bir $I-$*Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.7 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir dizi $I-$yakınsak ise bu dizi aynı zamanda bir $I-$Cauchy dizisidir.

Kanıt: **S** uzayında $(\mathrm{RM}) - I - \lim p_n = p$ olacak biçimde bir (p_n) dizisi ve bir $p \in \mathbf{S}$ verilsin. Ayrıca, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ alalım. Bu durumda

$$\left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p} < \tfrac{\varepsilon}{2}) > 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} \in \mathcal{F}(I) \tag{4.15}$$

yazılabilir. Şimdi $\left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p} < \tfrac{\varepsilon}{2}) > 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} = C(\varepsilon, \lambda)$ diyelim ve bir $N \in C(\varepsilon, \lambda)$ seçelim. Bu durumda $P(X_{p p_N} < \tfrac{\varepsilon}{2}) > 1 - \tfrac{\lambda}{2}$ dir. O halde Sonuç 3.3 yardımıyla, $n \in C(\varepsilon, \lambda)$ olduğunda $P(X_{p_n p_N} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ yazılabilir. Yani

$$\left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_N} < \varepsilon) > 1 - \lambda\right\} \in \mathcal{F}(I) \tag{4.16}$$

olup (p_n) dizisi bir $I-$Cauchy dizisidir. ■

Teorem 4.8 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir (p_n) dizisi verilsin. Eğer (p_n) bir $I-$Cauchy dizisi ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde; $m, n \notin A$ iken $P(X_{p_m p_n} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak biçimde bir $A = A(\varepsilon, \lambda) \in I$ vardır.

Kanıt: (p_n) dizisi, **S** uzayında bir $I-$Cauchy dizisi olsun. Ayrıca, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verilmiş olsun. Bu durumda $\left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_N} < \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} \in I$ olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi

$$A = A(\varepsilon, \lambda) = \left\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_N} < \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq 1 - \tfrac{\lambda}{2}\right\} \tag{4.17}$$

yazalım. Bu durumda $m, n \notin A$ olmak üzere $P(X_{p_m p_N} < \tfrac{\varepsilon}{2}) > 1 - \tfrac{\lambda}{2}$ ve $P(X_{p_n p_N} < \tfrac{\varepsilon}{2}) > 1 - \tfrac{\lambda}{2}$ yazılabilir. O halde Sonuç 3.3 gereğince, $m, n \notin A$ iken $P(X_{p_m p_n} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ olur. ■

Sonuç 4.9 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir (p_n) dizisi verilsin. Eğer (p_n) bir $I-$Cauchy dizisi ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde; $m, n \in B$ iken $P(X_{p_m p_n} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak biçimde bir $B = B(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{F}(I)$ vardır.

Teorem 4.10 $(\mathbf{S},\mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında birer $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi olan (p_n) ve (q_n) dizileri verilsin. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde; $m,n \in D$ iken $P(|X_{p_m q_m} - X_{p_n q_n}| < \varepsilon) > 1-\lambda$ olacak biçimde bir $D = D(\varepsilon,\lambda) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır.

Kanıt: (p_n) ve (q_n) dizileri, **S** uzayında birer $\mathcal{I}-$Cauchy dizisi olsun. Ayrıca, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verilmiş olsun. Bu durumda Sonuç 4.9 gereğince, herhangi $i,j \in B$ için $P\left(X_{p_i p_j} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1-\frac{\lambda}{2}$ ve herhangi $k,l \in C$ için $P\left(X_{q_k q_l} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1-\frac{\lambda}{2}$ olacak biçimde bir $B = B(\varepsilon,\lambda) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve bir $C = C(\varepsilon,\lambda) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. Şimdi $B \cap C = D$ diyelim. Bu durumda $D = D(\varepsilon,\lambda) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olup $m,n \in D$ iken $P\left(X_{p_m p_n} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1-\frac{\lambda}{2}$ ve $P\left(X_{q_m q_n} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1-\frac{\lambda}{2}$ yazılabilir. O halde Sonuç 3.3 gereğince, herhangi $m,n \in D$ için $P\left(|X_{p_m q_m} - X_{p_n q_n}| < \varepsilon\right) > 1-\lambda$ elde edilir. ■

Aşağıda, Tanım 3.13'den esinlenilerek, bir RM uzayda "$\mathcal{I}-$sınırlı dizi" kavramı tanımlanmıştır. Öncelikle belirtmek gerekir ki, Schweizer ve Sklar (1983)'ın ve Guo (1999)'nun çalışmalarında da görüleceği üzere OM uzaylar ve RM uzaylar kuramlarında, sınırlı kümelerin farklı türleri bulunmaktadır. Ancak burada göz önüne alınacak olan sınırlılık kavramı Di Maio ve Kočinac (2008)'ın çalışmasında sözü edilen, "bir düzgün topolojik uzayda yer alan bir kümenin sınırlılığı" kavramına dayanmaktadır.

Tanım 4.11 $(\mathbf{S},\mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere **S** uzayında bir (p_n) dizisi verilsin. Eğer

$$\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_0} < \varepsilon_0) \leq 1-\lambda_0\} \in \mathcal{I} \tag{4.18}$$

ya da buna denk olarak,

$$\{n \in \mathbb{N}:\ P(X_{p_n p_0} < \varepsilon_0) > 1-\lambda_0\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \tag{4.19}$$

olacak biçimde bir $p_0 \in \mathbf{S}$, bir $\varepsilon_0 > 0$ ve bir $\lambda_0 \in (0,1)$ bulunabiliyorsa (p_n) dizisine, $\mathcal{I}-$*sınırlıdır* denir.

Bu durumda Tanım 4.1'in, Tanım 4.6'nın ve Tanım 4.11'in doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.12 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay olmak üzere bu uzayda yer alan her $I-$Cauchy dizisi (dolayısıyla, her $I-$yakınsak dizi) aynı zamanda $I-$sınırlıdır.

Son olarak, RM uzaylar arasında tanımlanan fonksiyonların bir dizisi için bazı özelliklerden söz edilecektir. Bu bağlamda, Duman ve Orhan (2004) ile Balcerzak vd. (2007)'nin çalışmalarındaki tanımlardan ve sonuçlardan esinlenilmiştir. Duman ve Orhan (2004), μ −istatistiksel yakınsak, reel fonksiyon dizilerini incelemişlerdir. Balcerzak vd. (2007) ise metrik uzay değerli fonksiyonların bir dizisinin $I-$ yakınsaklığı üzerine çalışmışlardır. Aşağıda ise bir RM uzay üzerinde çalışılacaktır.

Öncelikle, Tanım 3.14'den esinlenilerek aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 4.13 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ve $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathcal{X}})$ birer RM uzay olmak üzere her biri $\mathbf{S}$ uzayından $\tilde{\mathbf{S}}$ uzayına tanımlanan fonksiyonların bir dizisi, (f_n) olsun. Ayrıca, $f\colon \mathbf{S} \to \tilde{\mathbf{S}}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $p \in \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bir $A = A(p, \varepsilon, \lambda) \in I$ bulunabiliyor ve $n \notin A$ iken $f_n(p) \in \mathcal{N}_{f(p)}(\varepsilon, \lambda)$, yani $P(\tilde{X}_{f_n(p)f(p)} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$ *noktasal yakınsaktır* denir. Benzer biçimde; herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bir $A = A(\varepsilon, \lambda) \in I$ bulunabiliyor ve herhangi bir $p \in \mathbf{S}$ ile herhangi bir $n \notin A$ için $f_n(p) \in \mathcal{N}_{f(p)}(\varepsilon, \lambda)$, yani $P(\tilde{X}_{f_n(p)f(p)} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$ *düzgün yakınsaktır* denir.

Yukarıdaki tanımda verilen kavramlara ilişkin bir teorem ifade edilmeden önce, bu teoremin kanıtı için gerekli olan bir yardımcı teorem aşağıda kanıtlanmıştır. Bu yardımcı teorem, Sonuç 3.3'ün genişletilmiş bir versiyonu olarak düşünülebilir.

Yardımcı Teorem 4.14 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olan bir RM uzay olmak üzere $p, q, r, s \in \mathbf{S}$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde, $P(X_{pq} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3}$, $P(X_{qr} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3}$ ve $P(X_{rs} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3}$ iken $P(X_{ps} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ olur.

Kanıt: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verilsin. Ayrıca,

$$A = \left\{\omega \in \Omega\colon\ X_{pq}(\omega) < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \tag{4.20}$$

$$B = \left\{\omega \in \Omega:\ X_{qr}(\omega) < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \tag{4.21}$$

$$C = \left\{\omega \in \Omega:\ X_{pr}(\omega) < \frac{2\varepsilon}{3}\right\} \tag{4.22}$$

biçiminde tanımlanan A, B ve C kümelerini göz önüne alalım. Tanım 2.3.1'de yer alan (iv) aksiyomu yardımıyla,

$$P(C) \geq P(A \cap B) > 1 - \frac{\lambda}{3} + 1 - \frac{\lambda}{3} - 1 = 1 - \frac{2\lambda}{3} \tag{4.23}$$

yazılabilir. Şimdi $D = \{\omega \in \Omega:\ X_{ps}(\omega) < \varepsilon\}$ ve $E = \left\{\omega \in \Omega:\ X_{rs}(\omega) < \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ biçiminde tanımlanan D ve E kümeleri verilsin. Bu durumda (4.23) ifadesine benzer biçimde,

$$P(D) \geq P(C \cap E) > 1 - \frac{2\lambda}{3} + 1 - \frac{\lambda}{3} - 1 = 1 - \lambda \tag{4.24}$$

yazılabilir. Bu da kanıtı tamamlar. ■

Bu bölümün son bulgusu olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmıştır.

Teorem 4.15 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ve $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathcal{X}})$ birer RM uzay olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için f_n: $\mathbf{S} \to \tilde{\mathbf{S}}$ biçiminde ve her biri sürekli olan fonksiyonların bir dizisi, (f_n) olsun. Ayrıca, f: $\mathbf{S} \to \tilde{\mathbf{S}}$ biçiminde bir f fonksiyonu verilsin. Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna $I-$düzgün yakınsak ise f fonksiyonu $\mathbf{S}$ üzerinde süreklidir.

Kanıt: Kabul gereği, herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde bir $A = A(\varepsilon, \lambda) \in I$ bulunabilir öyle ki her $p \in \mathbf{S}$ ve her $n \in A^c$ için $P(\tilde{X}_{f_n(p)f(p)} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3}$ dir. Şimdi bir $N \in A^c$ seçelim. O halde her $p \in \mathbf{S}$ için

$$P(\tilde{X}_{f_N(p)f(p)} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3} \tag{4.25}$$

yazılabilir. Şimdi $p_0 \in \mathbf{S}$ olsun. O halde

$$P(\tilde{X}_{f_N(p_0)f(p_0)} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3} \tag{4.26}$$

yazılabilir. Öte yandan, f_N fonksiyonu p_0 noktasında sürekli olduğundan bir $\gamma > 0$ ve bir $h \in (0,1)$ bulunabilir öyle ki $P(X_{p_0 p} < \gamma) > 1 - h$ iken

$$P(\tilde{X}_{f_N(p)f_N(p_0)} < \frac{\varepsilon}{3}) > 1 - \frac{\lambda}{3} \tag{4.27}$$

olur. Şimdi ise $P(X_{p_0p} < \gamma) > 1 - h$ koşulunu sağlayan herhangi bir $p \in$ **S** verildiğinde ve (4.25)$-$(4.27) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde, Yardımcı Teorem 4.14 yardımıyla, $P(\tilde{X}_{f(p)f(p_0)} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ elde edilir. p_0 noktası isteksel olduğundan f fonksiyonu **S** üzerinde süreklidir. ■

5. SONUÇ

RM uzaylar kuramı, genel olarak, olasılık kuramını ve fonksiyonel analizi temel alan ve disiplinlerarası bir yaklaşım olan “rastlantısal fonksiyonel analiz” kuramının ışığı altında incelenmektedir. Bunun yanı sıra, RM uzayların; stokastik (rastlantısal) analizde, ölçü kuramında, yaklaşım kuramında ve risk ölçülerinde çeşitli uygulamaları olduğu bilinmektedir.

Öte yandan, matematiksel analizde bir tür “çatı yakınsaklık” işlevi gören $I-$yakınsaklık kavramı, birbirine denk olmayan pek çok yakınsaklık tiplerini içerdiğinden oldukça kullanışlı bir araçtır.

Bu tez çalışmasına başlamadan önce, bir soyut uzaydaki herhangi bir dizinin yakınsaklığının o uzayın matematiksel analizi için temel nitelikte olduğu göz önünde bulundurularak, yukarıda sözü edilen konulara ilişkin uluslararası bilimsel çalışmalar taranmış ve bir RM uzay üzerinde $I-$ yakınsaklığın henüz tanımlanmamış olduğu saptanmıştır. Bu bağlamda, RM uzayların ve $I-$yakınsaklığın matematiksel analizdeki öneminden yola çıkılarak, bir RM uzay üzerinde $I-$yakınsaklık ve buna ilişkin bazı temel kavramları tanımlayarak temel nitelikte birtakım sonuçlar elde etmenin, RM uzaylardaki dizileri daha geniş bir açıdan inceleme olanağı sağlayacağı ve RM uzayların analizine bir ölçüde katkıda bulunabileceği öngörülmüştür.

Sonuç olarak, bu tez çalışması kapsamında, 4. Bölüm’de de görüldüğü üzere ilgili kaynaklardan esinlenilerek; üzerinde $(\varepsilon, \lambda) -$ topolojisi tanımlanmış bir RM uzayda “$I-$yakınsak dizi”, “$I-$Cauchy dizisi”, “$I-$sınırlı dizi”, “$I-$noktasal yakınsak fonksiyon dizisi” ve “$I-$düzgün yakınsak fonksiyon dizisi” kavramları tanımlanmış ve bu kavramlara ilişkin temel nitelikte sayılabilecek bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bir RM uzayda rasgele sapmalar gösteren ve klasik (sıradan) anlamda yakınsak olmasa da $I-$yakınsak olabilen bir dizinin durumu ve buna ilişkin temel özellikler, bu tip bir dizinin sıradan yakınsaklık yardımıyla modellenemeyen davranışını daha genel bir matematiksel çerçeve içerisinde modelleme/analiz etme olanağı sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C.D., Border, K.C., 2006. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Third Edition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 703 s.

Alsina, C., Frank, M.J., Schweizer, B., 2006. *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*. World Scientific, New Jersey, 237 s.

Athreya, K.B., Lahiri, S.N., 2006. *Measure Theory and Probability Theory*. Springer, New York, 618 s.

Balcerzak, M., Dems, K. Komisarski, A., 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328, 715-729.

Billingsley, P., 1995. *Probability and Measure*. John Wiley&Sons, USA, 593 s.

Billingsley, P., 1999. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley&Sons, USA, 277 s.

Blokhintsev, D.I., 1973. *Space and Time in the Microworld*. D. Reidel, Dordrecht, 330 s.

Brown, J.B., 1972. Stochastic metrics. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 24, 49-62.

Calabrese, P., 1968. Triangle Inequalities in Statistical Metric Spaces, PhD Dissertation. Illinois Institute of Technology, USA.

Chang, S.-S., Cho, Y.-J., Kang, S.-M., 2001. *Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces.* Nova Science Publishers, New York, 338 s.

Činčura, J., Šalát, T., Sleziak, M., Toma, V., 2004. Sets of statistical cluster points and $I-$cluster points. *Real Analysis Exchange*, 30, 565-580.

Constantin, G., Istrăţescu, I., 1989. *Elements of Probabilistic Analysis with Applications*. Editura Academiei, Bucharest, 476 s.

Das, P., Ghosal, S.K., 2010. On $I-$Cauchy nets and completeness. *Topology and Its Applications*, 157, 1152-1156.

Dems, K., 2004. On $I-$Cauchy sequences. *Real Analysis Exchange,* 30, 123-128.

Di Maio, G., Kočinac, Lj. D.R., 2008. Statistical convergence in topology. Topology and Its Applications, 156, 28-45.

Dorogovtsev, A.Y., Silvestrov, D.S., Skorokhod, A.V., Yadrenko, M.I., 1997. *Probability Theory: Collection of Problems*. AMS, USA, 347 s.

Dudley, R.M., 2002. *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press, Cambridge, 555 s.

Duman, O., Orhan, C., 2004. $\mu-$ Statistically convergent function sequences. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, 413-422.

Dunford, N., Schwartz, J.T., 1958. *Linear Operators* (*Part* I): *General Theory*. Interscience, New York, 2592 s.

Erber, T., Schweizer, B., Sklar, A., 1971. Probabilistic metric spaces and hysteresis systems. *Communications in Mathematical Physics*, 20, 205-219.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5, 301-313.

Fridy, J.A., Orhan, C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125, 3625-3631.

Ghosal, S., 2013. Statistical convergence of a sequence of random variables and limit theorems. *Applications of Mathematics*, 58 (4), 423-437.

Ghosal, S., 2014. $I-$statistical convergence of a sequence of random variables in probability. *Afrika Matematika,* 25, 681-692.

Guo, T.-X., 1995. Extension theorems of continuous random linear operators on random domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193, 15-27.

Guo, T.-X., 1996. Radon-Nikodým property of conjugate Banach spaces and w^*-equivalence theorems of $w^*-\mu-$measurable functions. *Science in China* (*Series A*), 39 (10), 1034-1041.

Guo, T.-X., You, Z.-Y., 1996. Riesz representation theorems in complete random inner product modules. *Chinese Annals of Mathematics* (*Series A*), 17 (3), 361-364.

Guo, T.-X., You, Z.-Y., 1998. A note on pointwise best approximation. *Journal of Approximation Theory*, 93 (2), 344-347.

Guo, T.-X., 1999. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 1 (2), 160-184.

Guo, T.-X., 2001a. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China I. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 3 (2), 129-158.

Guo, T.-X., 2001b. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China II. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 3 (3), 208-230.

Guo, T.-X., Ma, R.-P., 2004. Some reviews on various definitions of a random conjugate space together with various kinds of boundedness of a random linear functional. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 6 (1), 16-38.

Guo, T.-X., Li, S.B., 2005. The James theorem in complete random normed modules, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308 (1), 257-265.

Guo, T.-X., Xiao, H.-X., Chen, X.-X., 2009. A basic strict separation theorem in random locally convex modules. *Nonlinear Analysis*, 71 (9), 3794-3804.

Guo, T.-X., 2010. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. *Journal of Functional Analysis*, 258, 3024-3047.

Guo, T.-X., Zhao, S.-E., Zeng, X.-L., 2014. The relations among the three kinds of conditional risk measures. *Science China: Mathematics*, 57, 1753-1764.

Guo, T.-X., Zhao, S.-E., Zeng, X.-L., 2015a. Random convex analysis (I): Separation and Fenchel-Moreau duality in random locally convex modules. *Scientia Sinica Mathematica,* 45, 1961-1980.

Guo, T.-X., Zhao, S.-E., Zeng, X.-L., 2015b. Random convex analysis (II): Continuity and subdifferentiability theorems in L^0 −pre-barreled random locally convex modules. *Scientia Sinica Mathematica*, 45, 647-662.

Hadžić, O., Pap, E., 2001. *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 273 s.

Hazarika, B., Mohiuddine, S.A., 2013. Ideal convergence of random variables. *Journal of Function Spaces and Applications*, Article ID 148249, 1-7.

Hytönen, T., Neerven, J.V., Veraar, M., Weis, L., 2016. *Analysis in Banach Spaces* (*Volume I*)*: Martingales and Littlewood-Paley Theory.* Springer, Cham, 614 s.

Karakuş, S., 2007. Statistical convergence on probabilistic normed spaces. *Mathematical Communications*, 12, 11-23.

Katětov, M., 1968. Products of filters. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 9, 173-189.

Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E., 2000. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 385 s.

Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}-$convergence. *Real Analysis Exchange*, 26, 669-685.

Lafuerza-Guillén, B., Harikrishnan, P., 2014. *Probabilistic Normed Spaces.* Imperial College Press, Singapore, 232 s.

Lahiri, B.K., Das, P., 2005. $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*-$convergence in topological spaces. *Mathematica Bohemica*, 130, 153-160.

Lahiri, B.K., Das, P., 2007. I and I^*-convergence of nets. *Real Analysis Exchange*, 33, 431-442.

Lin, X., Guo, T.-X., 1990. Random inner product spaces. *Chinese Science Bulletin*, 35 (22), 1707-1709.

Mamedov, M. A., Pehlivan, S., 2000. Statistical convergence of optimal paths. *Mathematica Japonica*, 52 (1), 51-55.

Menger, K., 1942. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 28, 535-537.

Menger, K., 1951. Probabilistic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 37, 226-229.

Nelsen, R.B., 2006. *An Introduction to Copulas*, Second Edition. Springer, New York, 269 s.

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition. John Wiley&Sons, New York, 529 s.

Nuray, F., Ruckle, W.H., 2000. Generalized statistical convergence and convergence free spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245, 513-527.

Onicescu, O., 1964. *Nombres et Systèmes Aléatoires.* Éditions de l'Académie de la R.P. Roumaine, Bucharest, 280 s.

Öztürk, F., 2014. Olasılıksal Metrik Uzaylarda Yeni Bir Yakınsaklık, Yüksek Lisans Tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, Türkiye.

Rahmat, M.R.S., Lafuerza-Guillén, B., 2009. Probabilistic norms and statistical convergence of random variables. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 4, 65-75.

Rosen, N., 1947. Statistical geometry and fundamental particles. *Physical Review*, 72, 298-303.

Roy, S., 1998. *Statistical Geometry and Applications to Microphysics and Cosmology*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 251 s.

Royden, H.L., 1988. *Real Analysis*, Third Edition. Prentice-Hall, USA, 444 s.

Šalát, T., Tripathy, B.C., Ziman, M., 2004. On some properties of $I-$convergence. *Tatra Mountains Mathematical Publications,* 28, 279-286.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, 66, 361-375.

Schweizer, B., Sklar, A., 1960. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 10, 313-334.

Schweizer, B., Sklar, A., 1983. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 275 s. (*Yeni baskı*: Schweizer, B., Sklar, A., 2005. *Probabilistic Metric Spaces.* Dover Publications, New York, 313 s.)

Šerstnev, A.N., 1963. On the notion of a random normed space. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 149, 280-283.

Sherwood, H., 1969. On $\mathbf{E}-$spaces and their relation to other classes of probabilistic metric spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 44, 441-448.

Silva, C.E., 2008. *Invitation to Ergodic Theory*. AMS, USA, 262 s.

Simboan, G., Theodorescu, R., 1962. Statistical spaces. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*. 7, 699-703.

Skorokhod, A.V., 2005. *Basic Principles and Applications of Probability Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 282 s.

Sleziak, M., 2003. $I-$continuity in topological spaces. *Acta Mathematica Faculty of Natural Sciences Constantine the Philosopher University Nitra,* 6, 115-122.

Špaček, A., 1956. Note on K. Menger's probabilistic geometry. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 6, 72-74.

Špaček, A., 1960. Random metric spaces, *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, Prague, 627-638.

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.

Stevens, R., 1968. Metrically generated probabilistic metric spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 61, 259-269.

Sultanbekov, F.F., 1979. On random functionals in spaces of strongly measurable functions. *Issledovaniya po Prikladnoĭ Matematike*, 6, 74-82.

Şençimen, C., Pehlivan, S., 2009. Strong ideal convergence in probabilistic metric spaces. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences,* 119, 401-410.

Şençimen, C., 2013. Statistical convergence in probability for a sequence of random functions. *Journal of Theoretical Probability*, 26, 94-106.

Şençimen, C., Ölmez, A., 2018. A study on sequences in a random metric space via the concept of an ideal. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6 (1), 241-252.

Thorp, E., 1960. Best possible triangle inequalities for statistical metric spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11, 734-740.

Tripathy, B.C., 1997. On statistically convergent and statistically bounded sequences. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Society* (*Second Series*)*,* 20, 31-33.

Wald, A., 1943. On a statistical generalization of metric spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 29, 196-197.

You, Z.-Y., Zhu, L.-H., 1996. Random conjugate spaces and random duals. *Gongcheng Shuxue Xuebao,* 13 (5), 77-89.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 (3), 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ahmet ÖLMEZ

Doğum Yeri ve Yılı : Burdur, 1992

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	: Burdur Cumhuriyet Lisesi	2010
Lisans	: Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	2015

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Yediiklim Akademi (Öğretmen)	2017-

Yayınları

1- Şençimen, C., Ölmez, A., 2018. A study on sequences in a random metric space via the concept of an ideal. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6 (1), 241-252