T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KENDİNE EŞ OLMAYAN DIRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Murat ÇORUH

BURDUR, 2018

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KENDİNE EŞ OLMAYAN DIRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Murat ÇORUH

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2018

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Murat ÇORUH tarafından **Doç. Dr. Hüseyin TUNA** yönetiminde hazırlanan **"Kendine Eş Olmayan Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 25/12/2018

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU (Başkan)
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

....
Doç. Dr. Ayşe Gül Mutlu Gülmemiş

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Kendine Eş Olmayan Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

25 /12/ 2018

Murat ÇORUH

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Hüseyin TUNA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Aralık, 2018 **Murat ÇORUH**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{A^*}$	: *A* operatörünün eş (adjoint) operatörü
$\lVert \boldsymbol{A} \rVert$	: *A* sınırlı operatörünün normu
$\tilde{A}$	: *A* operatörünün genişlemesi
$\boldsymbol{A_h}$	: Maksimal dissipatif operatör
$\mathbb{C}$	**:** Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{D(A)}$	: *A* operatörünün tanım kümesi
$\overline{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})}$	: D(*A*)kümesinin kapanışı
$\boldsymbol{def\ L_0}$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
$\mathbf{dim}\boldsymbol{N_\lambda}$	: *A* operatörünün defekt uzayının boyutu
$\boldsymbol{H}$	: Hilbert uzayı
I	: Birim operatör
Imλ	: λ karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
$\boldsymbol{L}$	: Maksimal operatör
$\boldsymbol{L_0}$	: Minimal simetrik operatör
$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{y})$	: Diferansiyel ifade
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{N_\lambda}$	: *A* operatörünün defekt uzayı
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{R(A)}$	: *A* operatörünün değer kümesi
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	**:** $\mathbb{R}$ 'nin kendisiyle n kez kartezyen çarpımı
$\mathbf{R}_\lambda$	: (*A-λI*) operatörünün değer kümesi
$\bar{\boldsymbol{z}}$	**:** *z* karmaşık sayısının eşleniği
$\boldsymbol{W_n(U,V)}$	: *U* ile *V* çözümlerinin Wronskiyanı
$\lVert \boldsymbol{x} \rVert$	: *x* vektörünün normu
$\forall$	: Evrensel niceleyici

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Kendine Eş Olmayan Dirac Operatörlerinin Spektral Özellikleri

Murat ÇORUH

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Aralık, 2018

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Daha sonra, bir boyutlu Dirac operatörlerinin temel özellikleri verildi.

Son olarak singüler durumda dissipatif Dirac sisteminin spektral özellikleri araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Kendine eş olmayan Dirac operatörü, dissipatif operatör, singüler nokta, Green fonksiyonu.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Spectral Properties of Non-Self-Adjoint Dirac Operators

Murat ÇORUH

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin TUNA

December, 2018

In this work, firstly, the historical development of the topic is mentioned, and some definition sand main results used in the work are given.

Later, basic properties of one dimensonal Dirac operator are given.

Finally, spectral properties of dissipative Dirac systems in the singular case are investigated.

Keywords: Non-self-adjoint Dirac operator, dissipative operator, singular point, Green function.

1. GİRİŞ

Fizik tarihindeki önemli dönüm noktalarından birisi Dirac denklemidir. Temel fizikteki rölatif kuantum mekaniği Dirac denklemi kullanılarak formülleştirilir. Bu denklem bir elektronun yarım spinini gösterir. Bir karşıt parçacığın varlığını tahmin eder. Hidrojen atomunun açık spektrumunu üretebilir. Dirac denklemi ve uygulamaları hakkında daha fazla bilgi için Levitan ve Sargsjan'ın (1991), Weidmann'ın (1987) ve Thaller (1992)'in çalışmalarına bakılabilir.

Dissipatif operatörler kendine eş olmayan operatörlerin önemli bir sınıfıdır. Dissipatif sınır koşullu, homojen olmayan sicimin tamlık özelliği ile ilgili ilk genel sonuçlar Krein ve Nudelman (1989) tarafından elde edilmiştir.

Dissipatif Dirac operatörünün maksimal dissipatif akretif ve kendisine eş genişlemeleri Allahverdiev (2003) tarafından elde edilmiştir. Yine bu çalışmada genel sınır koşullarıyla dissipatif Dirac operatörünün özvektörler sisteminin tamlığı dilatasyon metodu ile ispatlanmıştır. Sonsuzda dissipatif Dirac operatörünün özvektörler sisteminin tamlığı Allahverdiev (2005) tarafından ispatlanmıştır.

Genel birinci mertebeden *nxn* adi diferansiyel denklem sistemleri için tamlık ve spektral sentez problemi Roos ve Songren (1960, 1961, 1963) tarafından ele alınmıştır. 2x2 Dirac operatörünün özfonksiyonlarının Riesz bazı oluşturması problemi Baskokov, Debushev ve Scherbakov (2011), Djakov ve Mityagin (2013) tarafından ele alınmıştır.

Tam olmayan *2x2* dissipatif Dirac operatörüne bir örnek Malamud ve Oridoroga (2012) tarafından verilmiştir. Keyfî tam dissipatif Dirac operatörünün resolventinin spektral senteze izin verdiği, Lunyov ve Malamud (2014) tarafından ifade edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, bir H Hilbert uzayında, singüler durumda Dirac operatörü ele alındı. Bu operatörün dissipatifliği sınır koşulları yardımıyla elde edildi. Öz değerlerinin reel olmadığı ve üst yarı kompleks düzlemde olduğu gösterildi.

Green fonksiyonu kuruldu. Green fonksiyonu yardımıyla resolvent operatörünün kompaktlığı gösterildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Tanımlar

Tanım 2.1.1. $V \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa *V*' ye $\mathbb{K}$ üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

a) (*V*,+) Cebirsel yapısı değişmeli gruptur. Yani,

1. $\forall u,v \epsilon\, V,\ u+v \epsilon\, V'$dir.
2. $\forall u,v,k \epsilon\, V\ ,\ u+(v+k)=(u+v)+k'$ dir.
3. $\forall u \epsilon\, V,\ u+0=0+u= u\ \epsilon\ V$olacak şekilde bir tek $0\ \epsilon\ V$vardır.
4. $\forall u,v \epsilon\, V,\ u+(-u)=(-u)+u=0$ olacak şekilde bir tek $-u\ \epsilon\ V$vardır.
5. $\forall u,v \epsilon\, V,\ u+v=v+u'$ dır.

b) $u,v,\epsilon\ V$ve $\theta, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\theta u \in K$'dir
2. $\theta(u+v) = \theta u + \theta v$'dir.
3. $(\theta + \beta)u = \theta u + \beta u$'dir
4. $(\theta\beta)u = \theta(\beta u)$' dir.
5. $\forall u \in V,\ 1V=V$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır. Burada 1, $\mathbb{K}$ cisminin birim elemanıdır.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ olması halinde V'ye reel lineer uzay $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması halinde V' ye kompleks lineer uzay denir (Bozkurt ve Türen, 2000).

Tanım 2.1.2. Lineer uzaylarda tanımlı olan dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.3. *U*, bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u,v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (*u*,*v*) ile gösterilen kompleks sayısına *u* ve *v* elemanlarının *iç çarpımı* ve *U* lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

1. $(u,u) \geq 0; (u,u) = 0 \ \Leftrightarrow u\ = 0$
2. $(u,v) = \overline{(v,u)}$
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u,v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u,v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.4. $(U,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. *u* vektörünün normu,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} = \left(\sum_{j=i}^{\infty} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(U,(.,.))$iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.5. Bir $(U,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \tag{2.2}$$

normuna göre tam ise, yani $(U,(.,.))$içindeki her Cauchy dizisi *U'* nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.6. Bir *U* iç çarpım uzayı

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} \tag{2.3}$$

ifadesi bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur.

Sayılabilir, tam ortonormal sistem içeren bir iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve genellikle *H* ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. K , H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı $(K \subseteq H)$olsun.

$$T: K \subseteq H \to H \tag{2.4}$$

dönüşümü, her $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{C}$ ve her $u, v \epsilon K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv \tag{2.5}$$

eşitliğini sağlanıyorsa, T dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.8. H Hilbert uzayının bir alt kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir L lineer operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise L , H üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. Tüm H uzayında tanımlanıp aşağıdaki koşulları sağlayan L fonksiyoneline *sınırlı lineer fonksiyonel* denir.

1. $u, v \in H \; ve \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için
$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \; dir. \tag{2.6}$$
2. Her $u \in H$ ve bir k sabiti için
$$|L(u)| \leq k\|u\| \; dir. \tag{2.7}$$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.9. H Hilbert uzayı üzerinnde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin. Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\| \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.
T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \tag{2.9}$$

eşitliği ile de hesaplanabilir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.10. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \tag{2.10}$$

eşitliğini saplayan T^* operatörüne T' nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in$ H vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i. $(T^*)^* = T$
ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$
iv. $(T)^* = L^* T^*$

v. $\|T^*\| = \|T\|$ $(T\ sınırlı\ iken)$
(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.11. $T^* = T$ ise, T' ye *kendine eş operatör* adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.12. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\mathrm{Im}(Th, h) \geq 0 \tag{2.11}$$

ise, T lineer operatörüne *dissipatif (dissipative) operatör* denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.13. $T,\ \mathcal{D}(T)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Tv = \lambda v \tag{2.12}$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ vektörü mevcut ise, λ sayısına A operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise A operatörünün özvektörü denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.14. Bir U vektör uzayındaki, $u_1, u_2, \ldots, u_n$vektörlerinden oluşan bir N kümesini ele alalım. $n_1, n_2, \ldots, n_n$ skalerler olmak üzere,

$$n_1u_1 + n_2u_2 + \cdots + n_nu_n = 0 \tag{2.13}$$

eşitliği, ancak ve ancak $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektörleri, diğer bir deyimle, N kümesi, lineer bağımsız; aksi halde, lineer bağımlıdır denir (Çakar, 2007).

U' nun keyfi bir N alt kümesini göz önüne alalım. Eğer N'nin, boş-olmayan her sonlu alt kümesi lineer bağımsız ise, N'ye lineer bağımsızdır denir (Çakar, 2007).

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, $N = \{u_1, \ldots, u_n\}$ kümesinin lineer bağımlı olması halinde, N'nin vektörlerinden en az bir tanesi diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Örneğin, (2.13) eşitliği, $n_n \neq 0$ olmak üzere gerçekleniyorsa, N kümesi lineer bağımlı olup u_n'i (2.13) eşitliğinden faydalanarak çözebiliriz:

$$u_n = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{n-1} u_{n-1} \tag{2.14}$$

(Çakar, 2007)

Tanım 2.1.15. $g: [m, n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı varsa ki,

$$\sum_{l=1}^{n} |h_l| < \delta \tag{2.15}$$

şartını sağlayan her sonlu sayıda $[u_l, u_l + h_l]$ aralıkları için

$$\sum_{l=1}^{n} |g(u_l + h_l) - g(u_l)| < \varepsilon \tag{2.16}$$

oluyorsa f fonksiyonu $[m, n]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir

(Balcı, 2010).

3. BİR BOYUTLU DİRAC SİSTEMİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Bir Boyutlu Dirac Sisteminin Kanonik Biçime İndirgenmesi

$p_{ik}: [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\ (i,k = 1,2)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere; aşağıdaki matris denklemini ele alalım:

$$B\frac{dy}{dx} + p(x)y = \lambda y, \qquad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

olmak üzere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad p(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x)\ \ p_{ik}(x), \qquad i,k = 1,2,$$

gerçek değerli fonksiyon olarak tanımlansın ve bu fonksiyonlar $[0,\pi]$ aralığında sürekli olsun ve λ bir parametre olsun. Bu denklem (3.1) iki uygun birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemine eşit olur:

$$\begin{aligned} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$, $p_{11}(x) = V(x) + m$, $p_{22}(x) = V(x) - m$ durumunda (3.2) denklem sistemi, göreli kuantum teorisinde ‘Bir Boyutlu Durağan Dirac Sistemi’ olarak bilinir. Burada V(x) potansiyel fonksiyonu ve m parçacığın kütlesidir.

H = H(x) ile $\mathbb{R}^2$ ‘deki bir düzgün ve ortogonal dönüşümü gösterelim. İki boyutlu uzayın herhangi bir ortogonal dönüşümünün, sabit, ortogonal ve normal şartlar altında aşağıdaki gibi bir matris formunda olduğu bilinmektedir:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

Kolayca görülüyor ki B ve H matrisleri değişme özelliğe sahiptir: *BH = HB.*

y = Hz değişikliğini (3.1)’de yerine koyarsak ve eşitliğin her iki tarafını H^{-1} ile çarparsak, şu denklemi elde ederiz:

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}PHz = H^{-1}\lambda Hz,$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}\mathrm{H}+H^{-1}PH\right)\mathrm{z}=\lambda z \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$Q(x)\equiv H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH$$

matrisini hesaplamak için, elimizde şu eşitlikler vardır:

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H\equiv\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0\\ 0 & \varphi'(x)\end{pmatrix}$$

ve

$$H^{-1}PH=\begin{pmatrix}p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

Bu nedenle, Q matrisinin

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{12}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi'+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\,sin2\,\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

formunda olduğu elde edilir. $\varphi(x)$ fonksiyonunu öyle seçeriz ki, $q_{12}(x)\equiv 0$ olsun.
O halde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x)=0$$

olur. $p_{11}(x)-p_{22}(x)$, buradan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{22}(x)-p_{11}(x)}$$

bulunur. O halde Q=Q(x) matrisi şu formu alır:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

Buradan (3.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.4}$$

formunda yazılabilir. Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonunu $q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olacak biçimde seçelim. Yani $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$
olsun. O halde φ(x) 'i çekersek aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(s) + p_{22}(s)\}\, ds$ olur.

Buradan (3.3) teki denklemin,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{3.5}$$

formunda olduğu bulunur. Sonrasında (3.4) ve (3.5) denklemlerine, (3.1) denkleminin kanonik (doğal) formu denir. (3.1) denkleminin çeşitli spektral özellikleri araştırılırken bu kanonik formlardan uygun olanı kullanılır. Örneğin, (3.1) denkleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarını araştırırken veya keyfi bir vektör fonksiyonunun (3.1) denkleminin özvektör fonksiyonlarına göre ayrışım formüllerini incelerken (3.4) kanonik formunu kullanmak uygundur. Buna karşılık (3.1) denkleminin özdeğerlerinin sayısının asimptotik davranışları ile ilgili problemlerde ve sonsuz aralıklar üzerindeki ters problemlerde , (3.5) teki kanonik denklemlerini kullanmak daha uygun olur (Levitan ve Sargsjan, 1991).

3.2. Sınır Koşulları ile Verilen Dirac Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektör Fonksiyonlarının Bazı Temel Özellikleri

p(x) ve r(x), $[0, \pi]$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere (3.2) denklem sistemi için (3.4) kanonik formunun kullanıldığı aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\}y_1 = 0, \quad y_1' + \{\lambda + r(x)\}y_2 = 0 \tag{3.6}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0 \tag{3.7}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0 \tag{3.8}$$

Varsayalım ki $\lambda = \lambda_0$ sayısı için (3.6)-(3.8) sınır değer problemi, aşikardan farklı

$$y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$$

çözümüne sahiptir. Bu durumda λ_0 sayısına özdeğer ve $y(\mathrm{x},\lambda_0)$ vektör fonksiyonuna da λ_0 özdeğerine karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Önerme 3.2.1. (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin farklı λ_1 , λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(\mathrm{x},\lambda_1)$ ve $z(\mathrm{x},\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları birbirine ortogonaldir,

yani

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0 \; d\imath r \text{ (Levitan ve Sargsjan, 1991).}$$

İspat: $y(\mathrm{x},\lambda_1)$ ve $z(\mathrm{x},\lambda_2)$ vektör fonksiyonları (3.6) da ki sistemin çözümü oldukları için,

$$\begin{aligned} &y_2'(x,\lambda_1) - \{\lambda_1 + p(x)\}y_1(x,\lambda_1) = 0, \quad z_2'(x,\lambda_2) - \{\lambda_2 + p(x)\}z_1(x,\lambda_2) = 0 \\ &y_1'(x,\lambda_1) + \{\lambda_1 + r(x)\}y_2(x,\lambda_1) = 0, \quad z_1'(x,\lambda_2) + \{\lambda_2 + r(x)\}z_2(x,\lambda_2) = 0 \end{aligned}$$

Sırasıyla $z_1(x,\lambda_2), -z_2(x,\lambda_2), -y_1(x,\lambda_1), y_2(x,\lambda_2)$ fonksiyonları ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_1)\} \\ &\qquad\qquad = (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafı 0'dan π 'ye entegre edilirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = \{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2) - y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\}_0^\pi$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı, (3.7) - (3.8) sınır koşullarından dolayı 0 olur. O halde

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0 \tag{3.9}$$

dır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan üstteki eşitliğin her iki tarafı $(\lambda_1 - \lambda_2)$ sayısına bölünürse

$$\int_0^{\pi}\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}dx = 0$$

elde edilir. Bu ise $y(\mathrm{x},\lambda_1)$ ile $z(\mathrm{x},\lambda_2)$ özvektör fonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.2. (3.6) - (3.8) deki sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

İspat: λ_0 sayısı (3.6) - (3.8) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $y(\mathrm{x},\lambda_0)$ bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu olsun. O halde $y(x,\lambda_0)$, 0'a denk değildir. Kolayca gösterilebilir ki, $\overline{\lambda_0}$ sayısı da (3.6) - (3.8) sınır değer probleminin bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör fonksiyonu $\overline{y(\mathrm{x},\lambda_0)}$ 'dır. Bu bilgilere göre (3.9) denklemi

$$\left(\lambda - \overline{\lambda_0}\right)\int_0^{x}\{|y_1(x,\lambda_0)|^2 + |y_2(x,\lambda_0)|^2\}\,dx = 0$$

halini alır. $y(x,\lambda_0)$, 0'a denk olmadığından

$$\int_0^{x}\{|y_1(x,\lambda_0)|^2 + |y_2(x,\lambda_0)|^2\}\,dx > 0$$

dır. O halde $\lambda - \overline{\lambda_0} = 0$ yani $\lambda = \overline{\lambda_0}$ dir. Buradan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ elde edilir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

3.3. (3.6) – (3.8) Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri ve Özvektör Fonksiyonları İçin Asimptotik Formüller

3.3.1 Operatör Dönüşümünün Tanımı ve Genel İfadesi

Tanım 3.3.1.1. A ve B iki lineer diferansiyel operatörü olsun ve E_1 ile E_2 iki lineer fonksiyon uzayı, X ise E_1 den E_2 ye bir sürekli lineer dönüşüm olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $AX = XB$, ve.
2. X^{-1} sürekli tersi vardır.

A ve B aşağıdaki gibi olsun:

$$A \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \qquad B \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

eşitliklerinde $p_k(x)$, $r_k(x)$, $k = 1,2$ *olmak üzere* $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyon olsunlar.

E_1 ve E_2 sürekli türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere f(x) ve g(x) sınır koşullarını sağlasın:

$$\begin{aligned} &f_1(0)sin(\gamma) + f_2(0)cos(\gamma) = 0 \\ &g_1(0)sin(\delta) + g_2(0)cos(\delta) = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Burada γ ve δ iki keyfi gerçek sayıdır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Teorem 3.3.1.2. Bir X operatör dönüşümü, şu şekilde ifade edilebilir:

$$X\{f(x)\} = R(x)f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds, \tag{3.12}$$

denkleminde R(x) ve K(x, s) ikinci dereceden sürekli türevlenebilir matrislerdir.

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\alpha(x)$ ve $B(x)$ fonksiyonları açıkça hesaplanabilir:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\kappa} sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]\, d\tau + sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\},$$
$$\beta(x) = \frac{1}{\kappa} cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]\, d\tau + sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\}, \qquad (3.13)$$

$\kappa = \sec(\delta - \gamma)$ dir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

3.3.2. Operatör Dönüşümünün Yardımı ile Asimptotik Formüllerin Elde Edilmesi

$\varphi(x,\lambda)$, (3.6) sisteminin çözümünün

$$\varphi_1(0,\lambda) = cos\alpha, \qquad \varphi_2(0,\lambda) = -sin\alpha \qquad (3.14)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olsun. Açıkça görülüyor ki $\varphi(x,\lambda)$, (3.7) deki sınır koşullarını sağlıyor. p(x) = r(x) = 0 için (3.6)' daki problemi ele alalım.

Kolayca görülüyor ki

$$\psi_1(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha)$$
$$\psi_2(x,\lambda) = \sin(\lambda x - \alpha) \qquad (3.15)$$

dir. (3.6)-(3.7) probleminin çözümüne şimdi operatör dönüşümü uygulayalım. (3.6)' daki denklem sistemi şu şekildedir:

$$A_1 y \equiv \begin{pmatrix} -p(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & -r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y. \qquad (3.16)$$

Öte yandan, vektör değerli fonksiyon $\psi(x,\lambda)$ aşağıdakinin çözümüdür:

$$B_1 y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y. \qquad (3.17)$$

$\psi(x,\lambda)$ vektör fonksiyonu $B_1\psi = \lambda\psi$ denkleminin çözümü olduğu için, X operatör dönüşümünün tanımından

$$A_1 X\{\psi\} = XB_1\{\psi\} = X\{\lambda\psi\} = \lambda X\{\psi\}$$

elde edilir. Yani $\varphi = X\{\psi\}$, $A_1\{\psi\} = \lambda\psi$ eşitliğinin çözümüdür. Bu nedenle, $\psi(x,\lambda)$ ifadesi (3.17)'nin çözümü olursa, $\varphi(\mathrm{x},\lambda) = X\{\psi(x,\lambda)\}$ eşitliği (3.16)'nın çözümü olur. Söz konusu durumda,

$p_1(x) = -p(x), \quad r_1(x) = -r(x), \quad p_2(x) = r_2(x) = 0$ dır.

Bu nedenle, *iz*$[A_1 - B_1] = -[p(x) + r(x)]$ *dir*. Ayrıca, (3.11) sınır koşulundaki (3.7) ile yer değiştirdiği için, $\gamma = \delta$ olur. Böylece K=1 olur. (3.13) ile

$$\alpha(x) = \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\},$$
$$\beta(x) = \sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\} dir. \quad (3.18)$$

(3.6) ve (3.14) teki problemin $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için (3.12)' yi elde ederiz.

$$\varphi(x,\lambda) = R(x)\psi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,s)\psi(s,\lambda)ds \ dir.$$

Bu nedenle, $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarına göre, R(x) matrisinin ifadesini hesaplarsak, (3.18) deki değerlerinden şu formül elde edilir:

$$\varphi_1(x,\lambda) = cos\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + \int_0^x \{K_{11}(x,s)\cos(\lambda s - \alpha) + K_{12}(x,s)\sin(\lambda s - \alpha)\}ds \quad (3.19)$$
$$\varphi_2(x,\lambda) = sin\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + \int_0^x \{K_{21}(x,s)\cos(\lambda s - \alpha) + K_{22}(x,s)\sin(\lambda s - \alpha)\}ds \quad (3.20)$$

$\varphi(x,\lambda)$vektör değerli fonksiyonun bileşenleri için,

$$\xi(x,\lambda) = \lambda x - \frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) - r(\tau)]\, d\tau, \quad (3.21)$$

ve $K_{ij}(x,s)$, i ,j = 1, 2 ifadeleri, K(x,s) kernel matrisinin elemanlarıdır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Önerme 3.3.2.1. | λ | düzgün olarak sonsuza yakınsadığında, (x e göre) şu sonuçlar elde edilir:

$$\varphi_1(x,\lambda) = cos\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + O(\lambda^{-1})$$
$$\varphi_2(x,\lambda) = sin\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + O(\lambda^{-1}) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(x,\lambda) = -xsin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\} + O(1)$$
$$\frac{\partial\varphi_2(x,\lambda)}{\partial\lambda} = xcos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\} + O(1) \qquad (3.23)$$

İspat: (3.22) yi elde edebilmek için, (3.19) ve (3.20)' deki kısmi integral yöntemini uygulamak yeterlidir. Çünkü $K_{ij}(x, s)$ fonksiyonu türevlenebilirdir. Buna rağmen, ilk önce (3.19) ve (3.20)' nin türevini alırsak, (3.23) aynı şekilde ispatlanır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Önerme 3.3.2.2. (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ (3.7)'deki sınır şartını sağladığı için, problemdeki özdeğerleri belirlemek için, $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarını (3.8)' deki sınır şartlarında yerine koymalıyız ve kökler bulunmalıdır.

$$D(\lambda) = \varphi_1(\pi,\lambda)sin\beta + \varphi_2(\pi,\lambda)cos\beta.$$
$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}sin\beta + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}cos\beta.$$

λ_0 bir katlı özdeğer, ve $\varphi^0(x,\lambda_0)$ buna karşılık gelen vektör değerli özfonksiyonlardan herhangi biri olsun.

$$D(\lambda_0) = 0, \qquad \frac{dD(\lambda_0)}{d\lambda} = 0$$

koşulu aynı anda sağlanmalıdır. Yani,

$$\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)sin\beta + \varphi_2^0(\pi,\lambda_0)cos\beta = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)sin\beta + \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)cos\beta = 0.$$

sinβ ve sinα aynı anda yok edilemeyeceği için, şu şekilde bir denklem elde edilir:

$$\varphi_2^0(\pi,\lambda)\frac{\partial\varphi_1^0(\pi,\lambda_0)}{\partial\lambda} - \varphi_1^0(\pi,\lambda)\frac{\partial\varphi_2^0(\pi,\lambda_0)}{\partial\lambda} = 0. \qquad (3.24)$$

Şimdi, (3.6)'daki sistemin λ'ya göre türevini aldığımızda,

$$\left(\frac{\partial y_2}{\partial \lambda}\right)_x' - \{\lambda + p(x)\}\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = y_1$$
$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\right)_x' + \{\lambda + r(x)\}\frac{\partial y_2}{\partial \lambda} = -y_2 \tag{3.25}$$

(3.6) ve (3.25)' daki denklemleri sırasıyla $\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}, \frac{-\partial y_2}{\partial \lambda}$, $-y_1$ ve y_2 ile çarptığımızda, ve birbirine ekleyip x'e göre 0'dan π'ye kadar integral aldığımızda şunu elde ederiz:

$$\left\{y_1(x,\lambda)\frac{\partial y_2}{\partial \lambda} - y_2(x,\lambda)\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\right\}_0^\pi = \int_0^\pi [y_1^2(x,\lambda) + y_2^2(x,\lambda)]dx.$$

$\lambda = \lambda_0$ koyduğumuzda, şu şekilde hesaplanır:

$$\left.\frac{\partial \varphi_1^0(x,\lambda_0)}{\partial \lambda}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \varphi_2^0(x,\lambda_0)}{\partial \lambda}\right|_{x=0} = 0$$

(3.19) , (3.20) den ve (3.24)' teki denklemden yararlanarak, şu bağıntıyı elde ederiz:

$$\int_0^\pi [\{\varphi_1^0(x,\lambda_0)\}^2 + \{\varphi_2^0(x,\lambda_0)\}^2]dx = \varphi_1^0(\pi,\lambda_0)\frac{\partial \varphi_2^0(\pi,\lambda_0)}{\partial \lambda} - \varphi_2^0(\pi,\lambda_0)\frac{\partial \varphi_1^0(\pi,\lambda_0)}{\partial \lambda} = 0.$$

Böylece $\varphi_1^0(x,\lambda_0) = \varphi_2^0(x,\lambda_0) \equiv 0 \; veya \; \varphi^0\,(x,\lambda_0) \equiv 0$ ifadelerinin imkansız olduğu görülür. Sonuç olarak, önerme ispatlanmış olur (Levitan ve Sargsjan, 1991). Yukarıda (3.6), (3.7), (3.8)' deki sınır değer probleminin özdeğerlerinin aşağıdaki ifadenin kökleriyle çakıştığını söylemiştik:

$$\varphi_1(\pi,\lambda)sin\beta + \varphi_2(\pi,\lambda)cos\beta = 0.$$

(3.22) deki tahminden, $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$'yi yerine koyduğumuzda, şu denklemi elde ederiz:

$$\sin(\lambda\pi - \vartheta) + O(\lambda^{-1}) = 0, \tag{3.26}$$
$$\vartheta = \beta - a - \frac{1}{2}\int_0^\pi \{p(\tau) + r(\tau)\}d\tau. \tag{3.27}$$

Açıkça görülüyor ki (3.26)' daki denklemin çözümü şu şekildedir:

$$\pi\lambda_n - \vartheta = n\pi + \delta_n.$$

(3.26) deki değerleri yerine koyarsak,

$sin\delta_n = O(n^{-1}), i.e., \delta_n = O(n^{-1})$

olduğunu görürüz. Bu nedenle aşağıdaki asimptotik formülü elde ederiz:

$$\lambda_{\pm n} = \frac{\vartheta}{\pi} \pm n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.28}$$

(3.6)' daki sistemlerden p(x) ve r(x) fonksiyonlarının türevlenebilir olduğunu düşünürsek, (3.28)' deki formüller epeyce netleşir. Yani, terimlerin açılımı şu şekilde yazılabilir:

$$\lambda_n = \frac{\vartheta}{\pi} + n + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(3.28)' i kullanarak, vektör değerli özfonksiyonlar için şu asimptotik formülleri kullanabiliriz:

$$\varphi_1(x, \lambda_n) \equiv u_n(x), \quad \varphi_2(x, \lambda_n) \equiv u_n(x), \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \cos(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \\ u_n(x) &= \sin(\xi_n - \alpha) + O(n^{-1}), \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\xi_n = \xi(x, \lambda_n) = \lambda_n x - \frac{1}{2}\int_0^x \{p(\tau) + r(\tau)\}\, d\tau.$$

Normalize edilmiş vektör değerli özfonksiyonların asimptotik açılımlarını elde etmek için, şu integrali düşünmeliyiz:

$$a_n^2 = \int_0^\pi \{u_n^2(x) + v_n^2(x)\}dx = \pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Bu nedenle, normalize edilmiş vektör değerli özfonksiyonlar şu şekildedir:

$$\frac{1}{a_n}\varphi(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\xi_n - a) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\xi_n - a) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

(Levitan ve Sargsjan, 1991).

3.4. İntegral Denklemleri Metoduyla Açılım Teoreminin İspatı

Aşağıdaki sistemin çözümünü araştıralım.

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\}y_1 = f_1(x) \tag{3.31}$$
$$y_1' - \{\lambda + r(x)\}y_2 = -f_2(x) \tag{3.32}$$

f(x) sıfırdan farklı bir sürekli vektör değerli fonksiyon olmak üzere aşağıdaki sınır koşullarını sağlasın:

$$y_1(a)sin\alpha + y_2(a)cos\alpha = 0, \tag{3.33}$$
$$y_1(b)sin\beta + y_2(b)cos\beta = 0. \tag{3.34}$$

λ sabit bir karmaşık sayı, $\varphi(x,\lambda)$ ise (3.6)' daki sistemin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olsun:

$$\varphi_1(a,\lambda) = cosa, \quad \varphi_2(a,\lambda) = -sin\alpha, \tag{3.35}$$

ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\psi_1(b,\lambda) = cos\beta, \quad \psi_2(b,\lambda) = -sin\beta, \tag{3.36}$$

koşullarını sağlar. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ lineer bağımsızsa, yani $\varphi(x,\lambda)$ bir vektör değerli özfonksiyon değildir ayrıca (3.34) deki sınır koşunu sağlar:

$$\varphi(x,\lambda) = C\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)$$

O zaman, Wronskian

$$W(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda) \\ \psi_1(x,\lambda) & \psi_1(x,\lambda) \end{vmatrix} \neq 0 \; dır.$$

Tersine, belli bir λ için, Wronskian $W(\varphi,\psi)$= 0 dır. O zaman
$\varphi(x,\lambda) = C\psi(x,\lambda)$ dir. Bu nedenle, $\varphi(x,\lambda)$ bir vektör değerli özfonksiyondur. Sonuç olarak, Wronskian'ı λ 'nın bir fonksiyonu olarak düşünürsek, (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin özdeğerleri, $W(\varphi,\psi)$' nın kökleriyle çakışır.

İspatladık ki $W(\varphi,\psi)$ ifadesi x'e bağlı değildir. O zaman

$$\begin{gathered} \varphi_2' - \{\lambda + p(x)\}\varphi_1 = 0, \quad \psi_2' - \{\lambda + p(x)\}\psi_1 = 0, \\ \varphi_1' + \{\lambda + r(x)\}\varphi_2 = 0, \quad \psi_1' + \{\lambda + r(x)\}\psi_2 = 0 \; dır. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Denklemi $\psi_1, -\psi_2, -\varphi_1, \varphi_2$ ile çarpıp, birbirine eklediğimizde, şunu elde ederiz:

$$(\varphi_2'\psi_1 - \varphi_1'\psi_2 - \psi_2'\varphi_1 + \psi_1'\varphi_2)(x,\lambda) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(x,\lambda) = \frac{d}{dx}W\{\varphi,\psi\} = 0.$$

Bu ifade iddiayı ispatlar. Bu nedenle $W\{\varphi,\psi\}$ sadece λ'ya bağlıdır ve $W\{\varphi,\psi\} \equiv \omega(\lambda)\ dır.$ Şimdi $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ matrisinin transpozu için, bir gösterim tanımlayalım:$u^{\mathrm{T}} = (u_1, u_2)$. Bu durumda

$$u^{\mathrm{T}}v = (u_1 u_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

$$uv^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(v_1 v_2) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{pmatrix}$$ dir.

Vektör değerli fonksiyonlar $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ yukarıdaki değerlere sahip ve $\omega(\lambda) = W(\varphi,\psi)$olsun. Değerleri yerine koyduğumuzda,

$$G(x,y;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\psi(x,\lambda)\varphi^T(y,\lambda), & y < x \\ \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\psi^\tau(y,\lambda), & x < y \end{cases} \tag{3.38}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade Green matrisi olarak adlandırılır.
Şimdi,

$$y(x,\lambda) = \int_a^b G(x,y;\lambda)f(y)dy \tag{3.39}$$

vektör değerli fonksiyonunun (3.31)-(3.34) sisteminin çözümü olduğunu göstereceğiz. Tanımlardan yola çıkarsak,

$$G(x,y;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda) & \varphi_1(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda) \end{pmatrix}, & x < y \\ \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix} \varphi_1(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda) & \varphi_1(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda) \\ \varphi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda) & \varphi_2(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}, & y < x \end{cases}$$

dir. Bu nedenle,

$$G(x,y;\lambda)f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)f_1(y) & + & \varphi_1(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)f_2(y)\\ \varphi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)f_1(y) & + & \varphi_2(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)f_2(y)\end{pmatrix}, & x<y\\ \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)f_1(y) & + & \varphi_1(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)f_2(y)\\ \varphi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)f_1(y) & + & \varphi_2(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)f_2(y)\end{pmatrix}, & y<x\end{cases}$$

ve $[u^\tau v](y)=u_1(y)v_1(y)+u_2(y)v_2(y)$ ifadesini yerine koyarsak, (3.39)' dan şunu elde ederiz:

$$y_1(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_1(x,\lambda)\int_a^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^b[\psi^T f](y)dy\right\} \tag{3.40}$$

$$y_2(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_2(x,\lambda)\int_a^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^b[\psi^T f](y)dy\right\} \tag{3.41}$$

(3.40)' daki ifadede x'e göre türev aldığımızda,

$$y_1'(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_1'(x,\lambda)\int_a^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_1'(x,\lambda)\int_x^b[\psi^T f](y)dy\right.$$

$$\left.-\varphi_1(x,\lambda)[\psi_1(x,\lambda)f_1(x)+\psi_2(x,\lambda)f_2(x)]+\psi_1(x,\lambda)[\varphi_1(x,\lambda)f_1(x)+\varphi_2(x,\lambda)f_2(x)]\right\}$$

(3.37)' deki sistemden $\varphi_1'(x,y)$ ve $\psi_1'(x,\lambda)$ yerine koyarsak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}y_1'(x,\lambda)=&-\frac{\lambda+r(x)}{\omega(\lambda)}\left\{\psi_2(x,\lambda)\int_a^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^b[\psi^T f](y)dy\right\}\\&-\frac{1}{\omega(\lambda)}\{\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)\}f_2(x)\end{aligned} \tag{3.42}$$

(3.41)' deki denklemi dikkate aldığımızda
$\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)=W\{\varphi,\psi\}=\omega(\lambda)$ elde edilir ve (3.42) şu şekilde yazılabilir:

$$y_1'(x,\lambda)=-\{\lambda+r(x)\}y_2(x,\lambda)-f_2(x),$$

ki bu ifade (3.32) ile çakışır. (3.31)' in geçerliliği aynı şekilde ispatlanır. Bu nedenle (3.39)' daki vektör değerli fonksiyon, (3.31) ve (3.32)' deki sistemin çözümüdür. Bu durumun, (3.39)' un (3.33) ve (3.34)' deki sınır koşullarını sağladığı açıktır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Teorem 3.4.1. λ, (3.6),(3.33),(3.34)' deki homojen sınır değer problemlerinin özdeğeri değilse, homojen olmayan (3.31) - (3.34) sistemi herhangi bir *f(x)* fonksiyonu için çözülebilirdir, ve çözümü (3.39)' da verilmiştir. Tersine, λ, (3.6),(3.33),(3.34)' deki homojen sınır değer problemlerinin özdeğeriyse, homojen olmayan (3.31)-(3.34) sisteminin çözümü yoktur (Levitan ve Sargsjan, 1991).

λ, homojen sınır değer probleminin özdeğeri değilse, homojen olmayan sistemin tek bir çözümü vardır. Gerçekten de, homojen olmayan problemin iki çözümünün farkı, homojen problemin vektör değerli özdeğeridir. Bu fark sıfırdır.

λ =0 sayısının özdeğer olmadığını kabul edelim. Aksi halde, sabit bir η sayısı seçeceğiz, ve şu sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$y_2' - \{(\lambda-\eta)+p(x)\}y_1 = 0, \quad y_1(a)sin\alpha + y_2(a)cos\alpha = 0,$$
$$y_1' + \{(\lambda-\eta)+r(x)\}y_2 = 0, \quad y_1(b)sin\beta + y_2(b)cos\beta = 0.$$

Onun vektör değerli özfonksiyonu, η sayısı bulunmayan problemle aynıdır. Açıkça görülüyor ki, η sayısı öyle seçilebilir ki sıfır yeni problem için bir özdeğer olmaz.

G(x,y;0) = G(x,y) ‘yi koyduğumuzda,

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, f(t)dt$$

ifadesi aşağıdaki sistemin başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olur:

$$y_2' - p(x)y_1 = f_1(x), \quad y_1' + r(x)y_1 = -f_2(x),$$

(3.31) ve (3.32) deki sistemi tekrar yazarsak,

$$By \equiv \begin{pmatrix} -p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & -r(x) \end{pmatrix} y = f(x) + \lambda y.$$

Bu da gösteriyor ki, (3.31) - (3.34) sistemi, aşağıdaki integral denklem sistemine denktir:

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\{f(t) + \lambda y(t)\}dt,$$

$$y(x) - \lambda\int_a^b G(x,t)y(t)dt = \int_a^b G(x,t)f(t)dt \equiv g(x)\,.$$

Özel olarak, (3,6), (3.33), (3.34)' deki homojen sınır değer problemi aşağıdaki integral denklemine denktir:

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x,t)y(t)dt = 0. \tag{3.43}$$

$\lambda_0, \lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}, \lambda_{\pm 3}, \ldots, \lambda_{\pm n}, \ldots$ değerleri, (3,6), (3.33), (3.34)' deki sınır değer problemlerinin özdeğerleri ve $v_0(x), v_{\pm 1}(x), v_{\pm 2}(x), v_{\pm 3}(x), \ldots, v_{\pm n}(x), \ldots$ değerleri ise bunlara karşılık gelen normalize edilmiş vektör değerli özfonksiyonlardır. Çekirdek matrisi:

$$H(x,\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n^T(\xi)}{\lambda_n}, \tag{3.44}$$

göz önüne alalım. Bölüm 3.3.2 de elde edilen asimptotik formüller yardımıyla, $H(x,\xi)$ serisi $x = \xi$ köşegeninin her komşusuna düzgün olarak yakınsar. Ayrıca, (3.44)' deki serinin kısmi toplamının sınırlılığı

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin nx/n$$

matrisinden elde edilir. Dolayısıyla terim terime integre edilebilir.

$$Q(x,\xi) = H(x,\xi) - G(x,\xi) = -G(x,\xi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n^T(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdek matrisi süreklidir.

$H(x,\xi)$ve$G(x,\xi)$sürekli olduğu fakat x = ξ noktasında sürekli değildir.

$$G(x,x+0) - G(x,x-0) = H(x,x+0) - H(x,x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ayrıca, $Q(x,\xi), Q(x,\xi) = Q^T(x,\xi)$eşitliğini sağlar, $Q(x,\xi)$ ile integral operatörünün kendi eşlenikliğini sağlar. Bu koşulu sağlayan herhangi bir matris, *kendine eş çekirdek* olarak adlandırılır.

İntegral denklemler teorisindeki benzer teoremle, sıfır olmayan herhangi bir kendine eş kernel $Q(x,\xi)$, en az bir özfonksiyona sahiptir. Yani, öyle bir λ_0 ve bir vektör değerli fonksiyon $u(x) \neq 0$ vardır ki,

$$u(x) + \lambda_0 \int_a^b Q(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = 0. \tag{3.45}$$

Eğer, $Q(x,\xi)$'in vektör değerli özfonksiyonunun olmadığını gösterirsek,
$Q(x,\xi) \equiv 0$, yani,

$$G(x,\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n^T(\xi)}{\lambda_n} \tag{3.46}$$

elde edilir.
(3.43) eşitliğinden devam edersek,

$$\int_a^b G(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\lambda_k}v_k(x). \tag{3.47}$$

bulunur. O zaman

$$\int_a^b Q(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi \equiv q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \end{pmatrix} \; dır.$$

$Q(x,\xi)$ matrisinin tanımından

$$q(x)\int_a^b H(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi - \int_a^b G(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi \tag{3.48}$$

elde edilir.
Diğer yandan, (3.44)' deki serinin her terimi şu şekildedir:

$$\frac{1}{\lambda_n}v_n(x)v_n^T(\xi) = \frac{1}{\lambda_n}\begin{pmatrix} v_{n1}(x)v_{n1}(\xi) & v_{n1}(x)v_{n2}(\xi) \\ v_{n2}(x)v_{n1}(x) & v_{n2}(x)v_{n2}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Bu nedenle:

$$\int_a^b H(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi \equiv h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix},$$

yazarsak $v_n(x)$ vektör değerli özfonksiyonlarının ortonormalitesine bağlı olarak, şu formu elde ederiz:

$$h_1(x) = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \{v_{k1}(x)v_{k1}^2(\xi) + v_{k1}(x)v_{k2}^2(\xi)\}d\xi = \frac{1}{\lambda_k}\{v_{k1}(x),$$
$$h_2(x) = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \{v_{k2}(x)v_{k1}^2(\xi) + v_{k2}(x)v_{k2}^2(\xi)\}d\xi = \frac{1}{\lambda_k}\{v_{k2}(x),$$

yani, $h(x) = v_k(x)/\lambda_k$ (3.47) ve (3.48) ile beraber,

$$q(x) = \int_a^b Q(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\lambda_k}v_k(x) - \frac{1}{\lambda_k}v_k(x) = 0, \tag{3.49}$$

yani, çekirdek $Q(x,\xi)$, (3.6), (3.33), (3.34)' deki sınır değer probleminin bütün vektör değerli özfonksiyonlarına diktir sonucu elde edilir.

u(x), (3.45) deki denklemin bir çözümü olsun. Bütün $v_n(x)$*'* lere *u(x)'* in ortogonal olduğunu gösteririz. Gerçekten de, (3.45)' ten,

$$u_1(x) + \lambda_0\int_a^b \{q_{11}(x,\xi)u_1(\xi) + q_{12}(x,\xi)u_2(\xi)\}d\xi = 0$$
$$u_2(x) + \lambda_0\int_a^b \{q_{21}(x,\xi)u_1(\xi) + q_{22}(x,\xi)u_2(\xi)\}d\xi = 0$$

elde edilir.

Birinci denklemi $v_{n1}(x)$ ile, ikincisini $v_{n2}(x)$ ile çarpıp, *x*'e göre a'dan b'ye integre edip, birbirine eklediğimizde, şu sonucu elde ederiz:

$$\int_a^b u^T(x)v_n(x)dx + \lambda_0\int_a^b u^T(\xi)\left\{\int_a^b Q^T(x,\xi)v_n(x)dx\right\}d\xi = 0 \tag{3.50}$$

$Q(x,\xi\,) = Q^T(\xi,x)$ olduğu için

$$\int_a^b Q^T(x,\xi)v_n(x)dx = \int_a^b Q(\xi,x)v_n(x)dx = 0, dir.$$

(3.50) eşitliğinden şu sonucu çıkarırız:

$$\int_a^b u^T(x)v_n(x)dx = 0.$$

$Q(x,\xi)$ tanımından,

$$u(x) + \lambda_0 \int_a^b Q\,(x,\xi)u(\xi)d\xi = u(x) - \lambda_0 \int_a^b G\,(x,\xi)d\xi = 0,$$

yani, *u(x)* (3.6), (3.33), (3.34)' teki sınır değer problemlerinin vektör değerli özfonksiyonudur. *u(x)* bütün $v_n(x)$' lere ortogonal olduğu için $u_n(x)\equiv 0$. Bu nedenle $Q(x,\xi) = 0$ (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Teorem(Açılım teoremi) 3.4.2. *f(x)* sürekli türevlenebilir ve (3.33), (3.34)' teki sınır koşullarını sağlıyorsa, *f(x)* fonksiyonu (3.6), (3.33) ve (3.34)' teki sınır değer probleminin vektör değerli özfonksiyonunun mutlak ve düzgün yakınsak Fourier serisine açılabilir. Yani,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n\,(x), \qquad a_n = \int_a^b f^T\,(x) v_n(x)dx \tag{3.51}$$

dir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

İspat:

$f_2'(x) - p(x)f_1(x) \equiv h_1(x), \quad f_1'(x) + r(x)f_2(x) \equiv h_2(x)$ alalım.

(3.39) formülünden,

$$f(x)\int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi, \quad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix},$$

veya (3.46)' daki $G(x,\xi)$ için kullanılan ifadeden

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(x)\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b h^T(\xi)v_n(\xi)d\xi \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n(x).$$

elde edilir. Ayrıca

$$f^T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n^T(x),$$

eşitliğinde sağ tarafı $v_n(x)$ ile çarpıp, a'dan b'ye integral alırsak,

$$a_n = \int_a^b f^T(x) v_n(x) dx \tag{3.52}$$

bulunur. Çünkü $v_n(x\ )$ ortonormalize edilmiştir. Böylece teoremin ispatını yapmış olduk (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Teorem 3.4.3. $[a,\ b]$ aralığında herhangi bir karesel integrallenebilir vektör değerli *f(x)* fonksiyonu için, Parseval eşitliği

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n'}^2, \quad f^2(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) \tag{3.53}$$

Geçerlidir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

İspat: *f(x)* bundan önceki teoremi sağlıyorsa, (3.53)' deki eşitlik (3.51)' deki seriye düzgün yakınsar. Aslında, (3.51)' deki açılımın sol tarafını $f^T(x)$ ile çarpıp, a'dan b'ye integralini aldığımızda, (3.52)' den aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\int_a^b f^T(x) f(x) dx \equiv \int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_a^b f^T(x) v_n(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2,$$

$L^2(a,b)$ sınıfındaki keyfi vektör değerli fonksiyon için Parseval eşitliği benzer metodla ispatlanabilir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Şimdi (3.39)' daki formülümüzü tekrar ele alalım. Sağ taraf rezolvent olarak adlandırılır. (3.6),(3.33),(3.34)' teki sınır değer problemlerinin özdeğeri olmayan bütün λ'lar için bir rezolvent olduğunu gösterdik. Şimdi ise *f(x)* verildiğinde rezolvent Fourier serisine nasıl açılacağını göstereceğiz.

(3.39) ifadesinde belirlenen $y(x,\lambda)$ vektör değerli fonksiyonu (3.33) ve (3.34) sınır koşullarını sağlar. Bu nedenle, kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$\int_a^b \left(By(x,\lambda)\right)^T v_n(x) dx = \int_a^b \{[y_2' - p(x)y_1]v_{n1} - [y_1' - r(x)y_2]v_{n2}\} dx$$

$$= \{y_2(x,\lambda)v_{n1}(x) - y_1(x,\lambda)v_{n2}(x)\}_a^b$$
$$- \int_a^b \{[v_{n1}' + r(x)u_{n2}]y_2 - [v_{n2}' - p(x)v_{n1}]y_1\} dx$$

$$= \lambda_n \int_a^b v_n^T\,(x) y(x,\lambda) dx$$

$$=\lambda_n d_n(\lambda) \tag{3.54}$$

$y(x,\lambda)$ yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$y(x,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,(\lambda) v_n(x), a_n = \int_a^b f^T(x) v_n(x) dx.$$

O zaman, (3.39) ve (3.54) ifadelerinden

$$a_n = \int_a^b f^T(x) v_n(x) dx = \int_a^b \big(By(x,\lambda)\big)^T v_n(x) dx - \lambda \int_a^b y^T(x,\lambda) v_n(x) dx$$
$$= (\lambda_n - \lambda) d_n(\lambda_n)$$

bulunur. O halde,

$d_n(\lambda) = a_n/(\lambda_n - \lambda)$,

ve rezolvent açılımı şu şekilde bulunur:

$$y(x,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{\lambda_n - \lambda} v_n\,(x). \tag{3.55}$$

(Levitan ve Sargsjan, 1991).

3.5. Periyodik ve yarı periyodik problemler

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

veya

$$y_2' + p(x) y_1 = \lambda y_1, \quad -y_1' + r(x) y_2 = \lambda y_2. \tag{3.56}$$

sistemi için özdeğer problemini göz önüne alalım.

Sistemin katsayılarının ($p(x)$ ve $r(x)$) iki gerçek değerli, a periyotlu düzgün periyodik fonksiyonlar (Yani, $p(x+a) = p(x)$, $r(x+a) = r(x)$ ve x bir gerçek sayı) olduğunu varsayalım. (3.56) denklem ile bağlantılı olarak,

$$y_1(0) = y_1(a), \quad y_2(0) = y_2(a) \tag{3.57}$$
$$y_1(0) = -y_1(a), \quad y_2(0) = -y_2(a). \tag{3.58}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım.

(3.56), (3.57) sınır değer problemi periyodik denir. (3.56), (3.58) sınır değer problemine yarı periyodik denir. (3.56), (3.57) ve (3.56), (3.58) deki problemler birlikte (3.56) denklemi

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_1(a) \\ y_2(0) &= y_2(a) \end{aligned} \tag{3.59}$$

sınır koşulları ile kullanışlıdır.

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix} \quad ve \quad \vartheta(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \vartheta_1(x,\lambda) \\ \vartheta_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

(3.56) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \vartheta_2(0,\lambda) = 0, \quad \varphi_2(0,\lambda) = \vartheta_1(0,\lambda) = 1 \tag{3.60}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. (3.56) denkleminden

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi_2}{dx} + p(x)\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \qquad \frac{d\vartheta_2}{dx} + p(x)\vartheta_1 = \lambda\vartheta_1, \\ &-\frac{d\varphi_1}{dx} + r(x)\varphi_2 = \lambda\varphi_2, \quad -\frac{d\vartheta_1}{dx} + r(x)\vartheta_2 = \lambda\vartheta_2. \end{aligned} \tag{3.61}$$

bu denklemler elde edilir.

Sırasıyla $-v_1, -v_2, \varphi_1, \varphi_2$, ile çarpıp ve daha sonra topladığımızda,

$$\frac{d}{dx}\{\varphi_1(x,\lambda)\vartheta_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\vartheta_1(x,\lambda)\} = 0.$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_1(x,\lambda)\vartheta_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\vartheta_1(x,\lambda) = -1 \tag{3.62}$$

bulunur. Böylece, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\vartheta(x,\lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır, ve (3.56) denkleminin çözümü için bir baz oluşturur.

λ_0'ın (3.56) - (3.57) sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğunu varsayalım ve $y(x,\lambda_0)$ buna karşılık gelen vektör değerli özfonksiyon olsun. Öyle bir C_1 ve C_2 sabiti vardır ki $y(x,\lambda) = C_1\varphi(x,\lambda_0) + C_2\vartheta(x,\lambda_0)$ sağlanır veya

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda_0) &= C_1\varphi_1(x,\lambda_0) + C_2\vartheta_1(x,\lambda_0), \\ y_2(x,\lambda_0) &= C_1\varphi_2(x,\lambda_0) + C_2\vartheta_2(x,\lambda_0), \end{aligned} \tag{3.63}$$

(3.57) ve (3.60)' ı göze alarak, şu sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1\varphi_1(a,\lambda_0) + C_2\vartheta_1(a,\lambda_0), \\ C_1 &= C_1\varphi_2(a,\lambda_0) + C_2\vartheta_2(a,\lambda_0). \end{aligned}$$

(3.63) sistemi için aşikar olmayan bir çözüm var olması için gerekli ve yeterli koşul determinantı sıfır olmasıdır.

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(a,\lambda_0) & \vartheta_1(a,\lambda_0)-1 \\ \varphi_2(a,\lambda_0)-1 & \vartheta_2(a,\lambda_0) \end{vmatrix}$$
$$= \varphi_1(a,\lambda_0)\vartheta_2(a,\lambda_0) - \varphi_2(a,\lambda_0)\vartheta_1(a,\lambda_0) - 1 + \varphi_2(a,\lambda_0) + \vartheta_1(a,\lambda_0) +$$
$$= \varphi_2(a,\lambda_0) + \vartheta_1(a,\lambda_0) - 2 = 0.$$

Bu nedenle, (3.56) ve (3.57) periyodik sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki denklemin kökleridir:

$$\vartheta_1(a,\lambda) + \varphi_2(a,\lambda) = 2.$$

Aynı şekilde (3.56) ve (3.58) yarı periyodik problemlerinin kökleri $\vartheta_1(a,\lambda) + \varphi_2(a,\lambda) = -2$ denkleminin kökleri olduğu ispatlanabilir. Periyodik ve yarı periyodik problemde, özdeğer tekrar edebilir. Sturm-Liouville probleminin aksine, $\vartheta_1(a,\lambda)$ ve $\varphi_2(a,\lambda)$ fonksiyonları pozitif ve negatif λ arasında dalgalanır (salınım yapar). Bu nedenle, (3.56)' deki sistemin spektrumu ayrık sınır koşulları için -∞ dan +∞'a genişler (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Önerme 3.5.1. Periyodik ve yarı periyodik bir problemin $\bar{\lambda}$ özdeğerini tekrarlaması için gerek ve yeter koşul;

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = \varphi_2(a,\bar{\lambda}) = 1, \qquad \vartheta_2(a,\bar{\lambda}) = \varphi_1(a,\bar{\lambda}) = 0, \\ &(\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = \varphi_2(a,\bar{\lambda}) = -1, \quad \vartheta_2(a,\bar{\lambda}) = \varphi_1(a,\bar{\lambda}) = 0.) \end{aligned} \tag{3.64}$$

olmasıdır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Uyarı: Sadece ikinci kısmı ispatlamak yeterlidir. Gerçekten de,$\vartheta_2(a,\lambda) = \varphi_1(a,\lambda) = 0$ olursa, Wronskian'ın sabit olmasından $\varphi_2(a,\bar{\lambda})\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = 1$. Ayrıca, $\bar{\lambda}$ bir özdeğer olduğu için $\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) + \varphi_2(a,\bar{\lambda}) = \pm 2$ olur. Buradan $\vartheta_1(a,\bar{\lambda}), \varphi_2(a,\bar{\lambda})$, ikinci dereceden denklem olan $x^2 \pm 2x+1 = 0$ ifadesinin kökleridir. Bu yüzden, $\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = \varphi_2(a,\bar{\lambda}) = \pm 1$ dir. Sturm-Liouville probleminde olduğu gibi, özdeğerin katı (multiplicity) fonksiyonunun sıfırlarıyla bağlantılı olarak basit değildir.

$F(\lambda) \mp 2 \equiv \vartheta_1(a,\lambda) + \varphi_1(a,\lambda) \mp 2\ dir.$ (Levitan ve Sargsjan, 1991).

Teorem 3.5.2. $\bar{\lambda}$ bir nokta olmak üzere $F(\lambda) \mp 2 = 0$ denkleminin katlı köküdür ancak ve ancak

$$\vartheta_2(a,\bar{\lambda}) = \varphi_1(a,\bar{\lambda}) = 0, \tag{3.65}$$

yani $\bar{\lambda}$ tekrarlayan bir özdeğerdir (Levitan ve Sargsjan, 1991).

İspat: (3.65)' deki şartlar sağlanırsa, önerme 3.5.1' den sonraki uyarı ile

$\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = \varphi_2(a,\bar{\lambda}) = \pm 1$ dir. Ayrıca, (3.62)' deki eşitlik şu şekilde yazılabilir:

$$-\varphi_1\vartheta_2 = 1 - \varphi_2\vartheta_1 = 1 - \frac{1}{4}\{(\vartheta_1 + \varphi_2)^2 - (\vartheta_1 - \varphi_2)^2\}$$

(3.65) sağlanırsa, son denklemin sağ tarafı $\lambda = \bar{\lambda}$ noktasında çok katlı köklüdür, çünkü sol taraf da aynı özelliğe sahiptir. Bununla birlikte, sağ taraf şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{1}{4}\{[2 - (\vartheta_1 + \varphi_2)][2 + (\vartheta_1 + \varphi_2)]\} + \frac{1}{4}(\vartheta_1 - \varphi_2)^2$$

$\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = \varphi_2(a,\bar{\lambda})$olduğu için,$(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ ifadesi $\lambda = \bar{\lambda}$ noktasında katlı köklüdür. Bu nedenle, aynı durum $[2 - (\vartheta_1 + \varphi_2)][2 + (\vartheta_1 + \varphi_2)]$ için geçerlidir. Fakat,$\bar{\lambda}$ periyodik problemin bir özdeğeriyse, ikinci çarpan $2 + (\vartheta_1 + \varphi_2) = 4$ ve bu nedenle,
$[2 - (\vartheta_1 + \varphi_2)] \equiv 2 - F(\lambda)]$ fonksiyonunun $\lambda = \bar{\lambda}$ katlı kökü vardır.

Tersine, $F'(\bar{\lambda}) = 0$ olsun, yani $\bar{\lambda}, F(\lambda) = \pm 2$ nin bir katlı kökü olsun. (3.61) ifadesindeki denklemin türevini λ'ya göre aldığımızda,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial \lambda} + \{p(x) - \lambda\}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} = \varphi_1, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x \partial \lambda} + \{p(x) - \lambda\}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \lambda} = \vartheta_1,\\
&-\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial \lambda} + \{r(x) - \lambda\}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} = \varphi_2, \quad -\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x \partial \lambda} + \{r(x) - \lambda\}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \lambda} = \vartheta_2,\\
&\frac{\partial \varphi_1(0,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi_2(0,\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta_1(0,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vartheta_2(0,\lambda)}{\partial \lambda} = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sabitlerin değişimi metodu yardımıyla vektör değerli fonksiyonlar olan $\partial\varphi/\partial\lambda$ ve $\partial\vartheta/\partial\lambda$ ifadeleri için problemi çözersek,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} &= \varphi_1(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(\xi,\lambda)\vartheta(\xi,\lambda)d\xi - \vartheta_1(x,\lambda)\int_0^x \varphi^2(\xi,\lambda)d\xi\\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} &= \varphi_2(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(\xi,\lambda)\vartheta(\xi,\lambda)d\xi - \vartheta_2(x,\lambda)\int_0^x \varphi^2(\xi,\lambda)d\xi\\
\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \lambda} &= \vartheta_1(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(\xi,\lambda)\vartheta(\xi,\lambda)d\xi - \varphi_1(x,\lambda)\int_0^x \vartheta^2(\xi,\lambda)d\xi\\
\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \lambda} &= \vartheta_2(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(\xi,\lambda)\vartheta(\xi,\lambda)d\xi - \varphi_2(x,\lambda)\int_0^x \vartheta^2(\xi,\lambda)d\xi
\end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir. Burada

$$\varphi^T\vartheta = \varphi_1\vartheta_1 + \varphi_2\vartheta_2, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

(3.66) ifadesinde x=a için aşağıdaki sonuç çıkar.

$$\big(F(\lambda) = \vartheta_1(a,\lambda) + \varphi_2(a,\lambda)\big),$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\\
&= (\varphi_2 - \vartheta_1)\int_0^a \varphi^T(\xi,\lambda)\vartheta(\xi,\lambda)d\xi + \varphi_1\int_0^a \vartheta^2(\xi,\lambda)d\\
&- \xi\vartheta_2\int_0^a \varphi^2(\xi,\lambda)d\xi.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

x=a için (Burada ve ileride $\varphi(a,\lambda)$, $\vartheta(a,\lambda)$ ifadeleri φ ve ϑ ile gösterilmiştir.)

Şimdi,$-2 < F(\lambda) < 2$ olsun.

$(\vartheta_1+\varphi_2)^2=\vartheta_1^2+\varphi_2^2+2\vartheta_1\varphi_2<4=4(\varphi_2\vartheta_1-\varphi_1\vartheta_2)$

$(\vartheta_1-\varphi_2)^2=(\vartheta_1+\varphi_2)^2-4\vartheta_1\varphi_2=(\vartheta_1+\varphi_2)^2-4-4\varphi_1\vartheta_2<-4\varphi_1\vartheta_2$ dir.

Bu nedenle, ϑ_2 ve φ_1 sıfırdan farklı ve ters işaretlidir.

(3.67) ifadesindeki özdeşlik şu şekle dönüşür.

$$\begin{aligned}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=\varphi_1\int_0^a&\left\{\vartheta_1^2(\xi,\lambda)+\frac{\varphi_2-\vartheta_1}{\varphi_1}\vartheta_1(\xi,\lambda)\varphi_1(\xi,\lambda)-\frac{\vartheta_2}{\varphi_1}\varphi_1^2(\xi,\lambda)\right\}d\xi\\&+\varphi_1\int_0^a\left\{\vartheta_2^2(\xi,\lambda)+\frac{\varphi_2-\vartheta_1}{\varphi_1}\vartheta_2(\xi,\lambda)\varphi_2(\xi,\lambda)-\frac{\vartheta_2}{\varphi_1}\varphi_2^2(\xi,\lambda)\right\}d\xi\\&=\varphi_1\int_0^a\left\{\vartheta_1(\xi,\lambda)+\frac{\varphi_2-\vartheta_1}{2\varphi_1}\varphi_1(\xi,\lambda)\right\}^2d\xi+\frac{4-F^2(\lambda)}{4\varphi_1}\int_0^a\varphi_1^2(\xi,\lambda)\,d\xi\\&+\varphi_1\int_0^a\left\{\vartheta_2(\xi,\lambda)+\frac{\varphi_2-\vartheta_1}{2\varphi_1}\varphi_2(\xi,\lambda)\right\}^2d\xi\\&+\frac{4-F^2(\lambda)}{4\varphi_1}\int_0^a\varphi_2^2(\xi,\lambda)\,d\xi.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Burada denklemin sağ tarafı sıfır olmaz, ve işareti φ_1işareti ile çakışır. Bu sebeple, *F(λ)*, $F^2(\lambda)<4$ noktasında maksimum veya minimuma sahip olamaz. Eğer belirli $\bar{\lambda}$ noktasında $F'(\bar{\lambda})<0,\ F(\overline{A})=2$ olursa, $F(\lambda)$ -2 değerine kadar azalır. $\vartheta_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ için asimptotik formüllerden, Sturm-Liouville probleminin tam tersi olarak, (3.56) için periyodik ve yarı periyodik problemlerin özdeğerleri $F(\lambda)$ artan ve azalan λ yönlerinde dalgalandığından

... $<\lambda_{-2}\le\lambda_{-1}<\mu_{-2}\le\mu_{-2}<\lambda_0\le\lambda_1<\mu_0\le\mu_1<\lambda_{22}\le\lambda_3<\mu_2\le\mu_3<$.. olur.
Burada $\lambda_0,\lambda_{\pm1},\lambda_{\pm2},\ldots$ değerleri periyodik problemin özdeğerleri, $\mu_0,\mu_{\pm1},\mu_{\pm2},$..değerleri ise yarı periyodik özdeğerleridir.

$F(\lambda)$ -2 fonksiyonun ikinci dereceden veya daha fazla mertebeden kökünün $\lambda=\bar{\lambda}$ olduğunu varsayalım. $\varphi_1(a,\bar{\lambda})\neq 0$ varsayarsak, (3.68)' deki formülle $F'(\bar{\lambda})=0$ ile bir çelişkiyi engellemiş oluruz.
Bu nedenle $\varphi_1(a,\bar{\lambda})=0\ \vartheta_2(a,\bar{\lambda})=0$ de aynı şekilde ispatlanır.
Bu nedenle

$\vartheta_1(a,\bar{\lambda})\varphi_2(a,\bar{\lambda}) = 1, \vartheta_1(a,\bar{\lambda}) - 2 = -\varphi_2(a,\bar{\lambda}) = -1/\vartheta_1(a,\bar{\lambda}),\ [\vartheta_1(a,\lambda) - 1]^2 = 0$
yani

$\vartheta_1(a,\bar{\lambda}) = 1$ ve $\varphi_2(a,\bar{\lambda}) = 1.$

Böylece,

$$\vartheta_1(a,\lambda) = \varphi_2(a,\lambda) = 1, \quad \vartheta_2(a,\lambda) = \varphi_1(a,\lambda) = 0, \tag{3.69}$$

koşulları $F(\lambda)$ -2 ifadesinde ikinci mertebeden bir sıfıra sahip olması için gereklidir. Benzer şekilde $F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun katlı kökü olması için gerek ve yeter koşulları

$$\vartheta_1(a,\lambda) = \varphi_2(\lambda) = -1, \quad \vartheta_2(0,\lambda) = \varphi_1(a,\lambda) = 0, \tag{3.70}$$

biçimdedir. Gösterdik ki $F(\lambda)$ -2 fonksiyonun kökleri ikinci mertebeden daha fazla olamayacağını gösterelim. (3.61) daki denklemin λ ya göre iki kere türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\vartheta_2}{\partial x\partial\lambda^2} + \{p(x) - \lambda\}\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\lambda^2} = 2\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\lambda}\\
&-\frac{\partial^3\vartheta_1}{\partial x\partial\lambda^2} + \{r(x) - \lambda\}\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\lambda^2} = 2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\lambda}\\
&\frac{\partial^2\vartheta_1(0,\lambda)}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial^2\vartheta_2(0,\lambda)}{\partial\lambda^2} = 0\\
&\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial\lambda^2} + \{p(x) - \lambda\}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\lambda^2} = 2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}\\
&-\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x\partial\lambda^2} + \{r(x) - \lambda\}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\lambda^2} = 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}\\
&\frac{\partial^2\varphi_1(0,\lambda)}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial^2\varphi_2(0,\lambda)}{\partial\lambda^2} = 0
\end{aligned}$$

vektör değerli fonksiyonları olan $\partial^2\vartheta/\partial\lambda^2$ ve $\partial^2\varphi/\partial\lambda^2$ değerleri sabitlerin değişimi metoduyla çözülebilir. Bunun için, şu ifadeler gereklidir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\vartheta_1(x,\lambda)}{\partial\lambda^2} &= 2\varphi_1(x,\lambda)\int_0^x \left\{\frac{\partial\vartheta_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_1(\xi,\lambda) + \frac{\partial\vartheta_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_2(\xi,\lambda)\right\}d\xi\\
&\quad - 2\vartheta_1(x,\lambda)\int_0^x \left\{\frac{\partial\vartheta_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\varphi_1(x,\lambda) + \frac{\partial\vartheta_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\varphi_2(\xi,\lambda)\right\}d\xi
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial^2\varphi_2(x,\lambda)}{\partial\lambda^2} = 2\varphi_2(x,\lambda)\int_0^x \left\{\frac{\partial\varphi_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_1(\xi,\lambda) + \frac{\partial\varphi_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_2(\xi,\lambda)\right\} d\xi$$
$$- 2\vartheta_2(x,\lambda)\int_0^x \left\{\frac{\partial\varphi_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\varphi_1(\xi,\lambda) + \frac{\partial\varphi_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\varphi_2(x,\lambda)\right\} d\xi$$

x=a yapıp (3.69) dikkate alıp birlikte topladığımızda,

$$\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\int_0^a \left\{\frac{\partial\varphi_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_1(\xi,\lambda) + \frac{\partial\varphi_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_2(\xi,\lambda)\right\} d\xi - 2\int_0^a \left\{\frac{\partial\vartheta_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_1(\xi,\lambda) + \frac{\partial\vartheta_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\vartheta_2(\xi,\lambda)\right\} d\xi$$

elde edilir. $\partial\varphi/\partial\vartheta$ve $\partial\vartheta/\partial\lambda$ için (3.66) daki eşitliklerde yer değişikliği yaptığımızda, basit bir işlemden sonra şunu elde ederiz:

$$\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2} = -\int_0^a d\xi \int_0^\xi \{\vartheta_1(\xi,\lambda)\varphi_1(t,\lambda) - \vartheta_1(t,\lambda)\varphi_1(\xi,\lambda)\}^2\, dt$$
$$-\int_0^a d\xi \int_0^\xi \{\vartheta_1(\xi,\lambda)\varphi_2(t,\lambda) - \vartheta_2(t,\lambda)\varphi_1(\xi,\lambda)\}^2\, dt.$$

Burada eşitliğin sağ tarafı sıfırdır bu nedenle

$$\left.\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} \neq 0$$

Yarı periyodik problemler için de aynı işlemleri yapılarak, teorem ispatlanır (Levitan ve Sargsjan, 1991).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde singüler Dirac operatörlerinin spektral özelliklerini inceleyeceğiz. a bir singüler nokta, λ bir karmaşık spektral parametre olmak üzere

$$l_1(y) := J\frac{dy(x)}{dx} + B(x)y(x) = \lambda A(x)y(x), x \in I := (a,b], -\infty \leq a < b < +\infty \quad (4.1)$$

Dirac sistemini ele alalım. Burada

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

A(x) > 0 (hemen her $x \in I$); *A(x)* ve *B(x)* matrislerinin elemanları gerçek değerli, *I* aralığında sürekli fonksiyon olur.

(4.1) deki denklem, rölatif parçacık için radyal dalga denklemidir. (4.1) in spektral özellikleri, Allahverdiev (2003), Allahverdiev (2005), Roos and Sangren (1961), Roos and Sangren (1963), Titchmarsh, (1961), Titchmarsh, (1962) de incelenmiştir.

$l(y) := A^{-1}(x)l_1(y)(x \in I)$ diferansiyel ifadesinde operatöre geçmek için değerleri $\mathbb{C}^2$ de olan vektör değerli fonksiyonların $H := L_A^2(I;E)$ $(E := \mathbb{C}^2)$ *Hilbert uzayını*

$$(y,z) = \int_a^b (A(x)y(x), z(x))_E \, dx$$

iç çarpımı yardımıyla tanımlayalım.

D={ *y*∈*H* |y_1 , y_2| üzerinde lokal mutlak sürekli ve *I(y)* ∈*H*} olsun. *D* üzerinde *L* operatörünü *Ly* =*l(y)* eşitliği yardımıyla tanımlarız.

y,z∈ *D* keyfi vektörleri için, Green formülü şöyledir:

$$(Ly,z) - (y,Lz) = [y,z]_b - [y,z]_a \,, \quad (4.2)$$

$$[y,z]_x := W_x[y,\bar{z}] \quad = y_1(x)\overline{z_2(x)} - y_2(x)\overline{z_1(x)}, [y,z]_a = \lim_{x\to a}[y,z]_x.$$

H uzayında bulunan , *I* üzerinde vektör değerli kompakt destekli düzgün fonksiyonların lineer yoğun kümesini *D₀'* ile gösterelim. *L* operatörünün *D₀'* ne kısıtlanmışını *L₀'* ile gösterelim. (4.2) denkleminden *L₀'* simetriktir ve kapanışı vardır. Onun kapanışını *L₀* ile gösterelim. *L₀* ve *L* operatörleri sırası ile minimal ve maksimal operatörler olarak adlandırılır.

L₀ operatörünün indis defekti (2,2) olsun. Yani Weyl'in limit çember durumu sağlansın.

$$u(x,\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x,\lambda) \\ u_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

ve

$$v(x,\lambda) = \begin{pmatrix} v_1(x,\lambda) \\ v_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$l(y) = \lambda y, \qquad x \in I \tag{4.3}$$

denkleminin,

$$\begin{aligned} u_1(b,\lambda) &= \cos\alpha, \quad u_2(b,\lambda) = \sin\alpha, \\ v_1(b,\lambda) &= -\sin\alpha\, v_2(b,\lambda) = \cos\alpha\,, \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

(4.3) denkleminin iki çözümünün Wronskian'ı *x*'e bağlı değildir ve denklemin iki çözümü lineer bağımsızdır. Açıkça görülüyor ki

$$W_x[u,v] = W_b[u,v] = 1,\ x\epsilon I$$

dir. L_0'ın indis defekti (2,2) olduğundan *u, v*∈*H* ve ayrıca *u, v* ∈ *D. u(x,λ)* ve *v(x,λ)* çözümleri (4.3) ün temel bir sistemini oluşturuyor, ve *λ* değişkenine göre tam fonksiyondurlar (Levitan and Sargsjan, 1991).

u(x) = u(x, 0) ve v(x) = v(x,0)

l(y)=0 denkleminin çözümleri olsun. Bu çözümler

$$\begin{aligned} u_1(b) &= \cos\alpha, \quad u_2(b,\lambda) = \sin\alpha, \\ v_1(b) &= -\sin\alpha \quad v_2(b,\lambda) = \cos\alpha\,. \end{aligned}$$

başlangıç şartlarını sağlasınlar.

$y_1(b)\cos\alpha + y_2(b)\,sin\,\alpha$

$$= 0 \tag{4.4}$$

$$[y,u]_a + h[y,v]_a = 0,\ \ Imh\ >\ 0, a\ \in\ \mathbb{R} \tag{4.5}$$

Sınır şartlarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Lemma 4.1. Sıfır, L operatörünün öz değeri değildir.

İspat: y ∈ D(L) ve *Ly*= 0 olsun. O zaman

$$J\frac{dy(x)}{dx} + B(x)y(x) = 0,$$

ve $y(x) = c_1u(x) + c_2v(x)$tir. Bu çözüm (4.4) ve (4.5) teki sınır koşularında yerine konulduğunda

$c_1 = c_2 = 0$ elde edilir, o zaman y=0 bulunur.

Lemma 4.1 den ,L^{-1}ters operatörü vardır. L^{-1} operatörünü tanımlamak için, Green'in fonksiyon modelini kullanırız. *v(x)* ve θ(x) = *u(x)* + *hv(x)* fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonlar *H* uzayına aittir. Bunların Wronskian'ı W(v, θ) = -1'dir.

^{T} matris transpozunu göstermek üzere

$$G(x,t) = \begin{cases} v(x)\theta^T(t), & a \le x \le t \le b \\ v(t)\theta^T(x), & a \le t \le x \le b \end{cases} \tag{4.6}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon yardımıyla

$$Kf = \int_a^b G(x,t)\overline{f(t)}dt\ (f \in H) \tag{4.7}$$

operatörünü tanımlayalım. $K = L^{-1}$ olduğu açıktır.

Teorem 4.2. K operatörü H uzayında kompakt lineer bir operatördür.

İspat: L operatörünün indis defekti (2,2) olduğundan v, θ ∈ H dir. Buradan G(x,t) fonksiyonunun Hilbert-Schmidt çekirdek olduğu elde edilir. K operatörünün çekirdeği Hilbert-Schmidt olduğundan K operatörünün kompaktlığı elde edilir. Bu teoremden aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 4.3. L operatörünün spektrumu ayrıktır.

Lemma4.4. *l(y)*= 0 denkleminin *u(x)* ve *v(x)* reel çözümleri için $[u, v]_x = 1$ $(a \le x \le b)$ olsun. O zaman

$$[y,z]_x = [y,u]_x[\bar{z},v]_x - [y,v]_x[\bar{z},u]_x \qquad (4.8)$$

dir.

İspat: $y_i(x)$ ve $x_i(x)$ (i = 1,2) fonksiyonları gerçek değerli ve $[u, v]_x = 1$ $(a \le x \le b)$ olduğu için, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
[y,u]_x[\bar{z},v]_x - [y,v]_x[\bar{z},u]_x
&= \big(y_1(x)u_2(x) - y_2(x)\,u_1(x)\big)\big(\bar{z}_1(x)v_2(x) - \bar{z}_2(x)v_1(x)\big) \\
&\quad -\big(y_1(x)v_2(x) - y_2(x)v_1(x)\big)\big(\bar{z}_1(x)u_2(x) - \bar{z}_2(x)u_1(x)\big) \\
&= y_1(x)u_2(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) - y_1(x)u_2(x)\bar{z}_2(x)v_1(x) \\
&\quad -y_2(x)u_1(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) + y_2(x)u_1(x)\bar{z}_2(x)v_1(x) \\
&\quad -y_1(x)v_2(x)\bar{z}_1(x)u_2(x) + y_1(x)v_2(x)\bar{z}_2(x)u_1(x) \\
&\quad +y_2(x)v_1(x)\bar{z}_1(x)u_2(x) - y_2(x)v_1(x)\bar{z}_2(x)u_1(x) \\
&= -y_1(x)u_2(x)\bar{z}_2(x)u_1(x) - y_2(x)u_1(x)\bar{z}_1(x)v_2(x) \\
&\quad -y_1(x)v_2(x)\bar{z}_1(x)u_2(x) + y_1(x)v_2(x)\bar{z}_2(x)u_1(x) \\
&\quad +y_2(x)v_1(x)\bar{z}_1(x)u_2(x) \\
&= \big(-y_1(x)\bar{z}_2(x) + y_2(x)\bar{z}_1(x)\big)(u_2(x)v_1(x) - u_1(x)v_2(x) \\
&= [y,z]_x.
\end{aligned}
$$

Teorem 4.5. *L* operatörü *H uzayında* dissipatiftir.

İspat: y $\in D$ olsun. Green özdeşliğinden

$$(Ly,y) - (y,Ly) = [y,y]_b - [y,y]_a$$

elde ederiz.

$y \in D$ olduğundan,

$$[y,y]_b = 0 \qquad (4.9)$$

dir. Lemma 4.4 den

$$
\begin{aligned}
[y,y]_a = \quad & [y,u]_b[y,v]_a - [y,v]_a[y,u]_a \\
&= -2i\,\mathrm{lm}\,h\,([y,v]_a)^2
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

bulunur. (4.9) ve (4.10) ifadelerinden,

$$\mathrm{lm}(Ly, y)) = \mathrm{lm}\, h\, ([y, v]_a)^2 \tag{4.11}$$

elde edilir ki bu bize L operatörünün H uzayında dissipatifliğini verir. Bu teoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.6. L dissipatif operatörünün bütün öz değerleri kapalı üst yarı düzlemdedir. $(\mathrm{Im}\lambda \geq 0)$

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında bir H Hilbert uzayında sınır koşullarında spektral parametre bulunduran geçiş koşullu Dirac operatörü ele alındı. Bu operatörün dissipatifliği verildi. Öz değerlerinin reel olmadığı ve üst yarı kompleks düzlemde olduğu gösterildi.
Green fonksiyonu kuruldu. Green fonksiyonu yardımıyla Resolvent operatörünün kompaktlığı gösterildi.

Bu çalışmanın devamı olarak birden fazla singüler nokta bulunması durumunda Dirac operatörünün spektral özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Volume I. Frederick Ungar, New York.

Allahverdiev, B.P., 2003. Spectral analysis of dissipative Dirac operators with general boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 287-303.

Allahverdiev, B.P., 2005. Extensions, dilations and functional models of dirac operators in limit circle case. *Forum Mathematicum.*, 17, 591-611.

Balcı, M., 2010. *Matematik Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.

Baskakov, A.G., Derbushev, A.V., Shcherbakov, A.O., 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izvestiya: Mathematics*, 75, 445-469.

Bozkurt, D., Türen, B., 2000. *Lineer Cebir*, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Çakar, Ö., 2007. *Fonksiyonel Analize Giriş*, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No. 13, Ankara.

Djakov, P., and Mityagin, B., 2013. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (4), pp. 1361-1375

Gorbachuk, V.I., Gorbachuk M.L., 1991. *Boundary Value Problems for Operator Differential Eguations,* Kluwer Academic Publishers, London.

Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I., 1993. ''*On a Baundary Value Problem I'' Differentsial'nye Uravneniya,*') (1):54-60, (in Russian), Trans. In Differeential Equations, 29 (1): 45-50.

Krein, M.G., Nudelman,A.A., 1989. On some spectral properties of an ınhomogeneous string with dissipative boundary condition. *Journal of Operator Theory*, 22, 369-395.

Krein, M.G., 1952. On the in determinate case of the Sturm-Liouville boundary problem in the interval (0,∞), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 16 (4) 293-324 (in Russian).

Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.

Levitan, B.M., Sargsjan, I. S., 1991. *Sturm-Liouville and Dirac Operators. Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (translated from the Russian).

Lunyov, A.A., Malamud, M.M., 2014. On Spectral Synthesis for Dissipative Dirac Type Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, DOI 10.1007/s00020-014-2154-9.

Malamud, M.M., Oridoroga, L.L., 2012. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations. *Journal of Functional Analysis,* 263, 1939-1980.

Naimark M. A., 1968. *Linear Differental Operators*, Second ed. Nauka, Moscow English transl. of Örst ed.,Parts 1, 2, Ungar, New York.

Roos, B.W., and Sangren, W.C.,1961. Spectra for a pair of singular first order differential equations, Proc. Amer. Math. Soc, 12 468-476.

Roos, B.W., and Sangren, W.C.,1960. Spectra for a pair of first order differential equations, San Diego, California, General Atomic Report GA 1373.

Roos, B.W., and Sangren, W.C., 1963. Expansions associated with a pair of singular first-order differential equations, *J. Math. Phys.*, 4, 999-1008.

Thaller, B., 1992. The Dirac Equation, Springer.

Titchmarsh, E.C.,1961. Some eigen function expansion formulae. Proc. London Math. Soc. 3, 11, 159-168.

Titchmarsh, E.C., 1961. On the nature of the spectrum in problems of relativistic quantum mechanics. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 12, 227-240.

Titchmarsh, E.C., 1962. On the nature of the spectrum in problems of relativistic quantum mechanics. II. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 2, 13, 181-192.2.

Tuna, H., and Çoruh, M.. 2016. The Completeness of System of Eigenfunctions of 1D Dirac Operators. *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 4 (2), 35-43.

Weidmann, J.,1987. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, *Lecture Notes in Mathematics.* Vol 1258, Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Murat ÇORUH

Doğum Yeri ve Yılı : Sapanca 1976

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	:Soma Linyit Lisesi	1993
Lisans	:Anadolu Üniversitesi	1999

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Erzincan-Tercan Mamahatun Ortaokulu (Öğretmen)	1999
2- Kütahya-Tavşanlı Derecik Ortaokulu (Öğretmen)	2004
3- Kütahya-Tavşanlı Cumhuriyet Lisesi (Öğretmen)	2006
4- Kütahya-Merkez Anadolu İmam Hatip Lisesi(Öğretmen)	2008
5- Kütahya-Merkez Kılıçarslan Anadolu lisesi (Öğretmen)	2010
6- Isparta-Eğirdir Anadolu İmam Hatip Lisesi (Öğretmen)	2012
7- Isparta-Merkez Meryem Albayrak M.T.A.L.(Öğretmen)	2014
8- Isparta-Merkez Işıkkent Anadolu İmam Hatip Lisesi(Öğretmen)	2018

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

TUNA, H , ÇORUH, M . (2016). The Completeness of System of Eigenfunctions of 1D Dirac Operators. Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi, 4 (2), 35-43. DOI: 10.17100/nevbiltek.211039