T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE 4. MERTEBE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GENİŞLEMELERİ

Songül BAYRAK

BURDUR, 2018

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE 4. MERTEBE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GENİŞLEMELERİ

Songül BAYRAK

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2018

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Songül BAYRAK tarafından Doç. Dr. Hüseyin TUNA yönetiminde hazırlanan **"Zaman Skalası Üzerinde 4. Mertebe Singüler Diferansiyel Operatörün Genişlemeleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 25/12/2018

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU (Başkan)
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06.02.2019 Tarih ve 2019/05-13 Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

Doç. Dr Ayşe Gül MUTLU GÜLMEMİŞ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Zaman Skalası Üzerinde 4. Mertebe Singüler Diferansiyel Operatörün Genişlemeleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

25/ 12 / 2018

Songül BAYRAK

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Hüseyin TUNA' ya teşekkürlerimi sunarım.

0459-YL-17 No`lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen yakınlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Aralık, 2018 **Songül BAYRAK**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGE DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

C_{rd}	: Sağdan yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
C_{ld}	: Soldan yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
D(A)	: *A* operatörünün tanım kümesi
R(A)	: *A* operatörünün değer kümesi
$U(f,P)$	: Darboux toplamı
$W(t)$	: Wronskian eşitliği
$\mathcal{D}$	: $y\epsilon\mathcal{H}$ fonksiyonlarının kümesi
$\boldsymbol{\mathcal{H}}$	: Hilbert uzayı
$\mathfrak{R}$	: A regresif matrisinin sağdan yoğun matris fonksiyonlarının kümesi
$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
$\boldsymbol{\nabla}$	: Nabla türev
$\boldsymbol{\Delta}$	: Delta türev
$\boldsymbol{\sigma}$	: İleri sıçrama operatörü
$\boldsymbol{\rho}$	: Geri sıçrama operatörü
$\boldsymbol{\mu}$	: İleri sıçrama fonksiyonu
$\boldsymbol{\upsilon}$	: Geri sıçrama fonksiyonu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Zaman Skalası Üzerinde 4. Mertebe Singüler Diferansiyel Operatörün Genişlemeleri

Songül BAYRAK

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Aralık, 2018

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, sınır değer uzayı, lineer bağıntı kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramlar yardımıyla simetrik diferansiyel operatörlerin maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Son olarak zaman skalası üzerinde singüler dördüncü mertebe dinamik operatörün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: dördüncü mertebeden diferansiyel operatör, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları, zaman skalası

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü (BAP) tarafından 0459-YL-17 proje numarası ile desteklenmiştir.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

The Extensions of Singular Fourth Order Differential Operator on Time Scales

Songül BAYRAK

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural andAppliedSciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin TUNA

December, 2018

In this work, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, the notions of a space of boundary value and linear relations are defined. On that basis maximal dissipative and self adjoint extensions of a symmetric differential operator are described in terms of boundaryconditions.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self adjoint and other extensions of singular fourth order differential operator on time scales is given in terms of boundaryconditions.

Keywords: Fourth order differential operatör, symmetric operators, self adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions, timescales

The present M.Sc.Thesis was supported by Mehmet Akif Ersoy University Scientific Research Projects Coordination under the Project number of 0459-YL-17 .

1. GİRİŞ

Yakın zamanlarda çok ilgi çeken bir konu olan zaman skalası teorisi üzerinde temel sonuçlar Stefan Hilger (1988) tarafından elde edilmiştir. Zaman skalası teorisi sürekli kalkülüs ile diskret kalküsü bir teoride birleştirme fikrinden doğmuştur. Zaman skalası üzerindeki dinamik denklemler teorisi, diferansiyel denklemler teorisi ile fark denklemler teorisini birleştirir. Bu konu üzerine yapılan çalışmaların pek çok önemli uygulamaları vardır. Örneğin, ısı transferi çalışmalarında, böcek popülasyon modellerinde, borsa ve sinirsel ağ modellerinde bu konudan yararlanılır. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi için Bohner ve Peterson'un (2001, 2003) çalışmalarına bakılabilir.

Simetrik operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili ilk sonuçlar J. von Neumann (1929), tarafından elde edilmiştir. J. von Neumann hangi koşullarda simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl olacağını göstermiştir. Rellich (1951), Krein (1947, 1952), Vishik (1952), Birman (1956), Phillips (1959), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır.

Sonraları, lineer bağıntılar simetrik operatörlerin genişlemesinde kullanılmaya başlandı. Bu tipteki ilk sonuçlar Rofe-Beketov (1969) tarafından elde edildi. Lineer bağıntılar kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (1984), Bairamogly (1984) ve Kholkin (1981) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (1976) ve Kochubei (1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bkz.: Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (1989).

Bu tez çalışmasında, zaman skalaları üzerinde singüler dördüncü mertebeden bir dinamik denklem için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri verildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Zaman Skalasında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Reel (Gerçel) sayıların keyfi boş olmayan kapalı alt kümelerine zaman skalası denir. Zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.1.1. Reel (Gerçel) sayılar kümesi olan $\mathbb{R}$, tam sayılar kümesi olan $\mathbb{Z}$, doğal sayılar kümesi olan $\mathbb{N}$, ve [2,5] kapalı aralığı zaman skalasına örnek oluştururken, rasyonel sayılar kümesi olan $\mathbb{Q}$, irrasyonel sayılar kümesi olan $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; kompleks sayılar kümesi olan $\mathbb{C}$ ve (1,3) açık aralığı zaman skalasına örnek oluşturmazlar (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.2. $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\sigma(\mathrm{t}) := \inf\{\mathrm{s} \in \mathbb{T}: \mathrm{s} > t\} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanan $\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.3. $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\rho(\mathrm{t}) := \sup\{\mathrm{s} \in \mathbb{T}: \mathrm{s} < t\} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanan $\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Yukarıda verilen ikinci ve üçüncü tanımda $\inf\emptyset = \sup\mathbb{T}$ dir ($\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{t}$ olur, eğer $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir maksimum t ye sahipse) ve $\sup\emptyset = \inf\mathbb{T}$ dir ($\rho(\mathrm{t}) = \mathrm{t}$ olur, eğer $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir minimum t ye sahipse).

Tanım 2.1.4. $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı ileri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(\mathrm{t}) = \sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{t} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.5. $\upsilon: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı geri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\upsilon(t) = t - \rho(t) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.6. Eğer $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$' ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$'ye soldan yayılmış nokta denir. Eğer

$$\rho(t) < t < \sigma(t) \tag{2.5}$$

ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına ayrık(izole) nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.7. Eğer $t < sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ' ye sağdan yoğun nokta, $t > inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ 'ye soldan yoğun nokta denir. Eğer

$$\rho(t) = t = \sigma(t) \tag{2.6}$$

ise $t \in \mathbb{T}$ 'ye hem sağ hem de sol yoğun nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.1.2.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise en az bir $t \in \mathbb{R}$ için

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} = \inf(t, \infty) = t$

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$

olur. Yani her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t$ ve $\rho(t) = t$ olur ki $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Ayrıca her $t \in \mathbb{R}$ $\mu(t) \equiv \upsilon(t) \equiv 0$ olur.

ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise en az bir $t \in \mathbb{Z}$ için

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{t + 1, t + 2, \dots\} = t + 1$

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{t - 1, t - 2, \dots\} = t - 1$

olur. Yani her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t + 1$ ve $\rho(t) = t - 1$ olur kit $\in \mathbb{Z}$ noktası ayrık(izole) nokta olur. Ayrıca her $t \in \mathbb{Z}$ $\mu(t) \equiv \upsilon(t) \equiv 1$ olur.

Eğer $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ise

$\sigma(2^n) = 2^{n+1}, \sigma(t) = 2t$

olur. Benzer şekilde

$\rho(2^n) = 2^{n-1}, \rho(t) = \frac{t}{2}$

olur. Burada herhangi bir t ∈ noktası ayrık(izole) noktadır.

Tablo 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağdan yayılımlı	$t < \sigma(t)$
t soldan yayılımlı	$\rho(t) < t$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t ayrık(izole)	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Tanım 2.1.8. $\mathbb{T}$ zaman skalası soldan yayılmış maksimum değer M' ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklindedir.

$\mathbb{T}$ zaman skalası sağdan yayılmış minimum değer m ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}_K = \mathbb{T} - \{m\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}_K = \mathbb{T}$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.1.9. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $f^\rho: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\rho(t) = f(\rho(t))$ şeklinde tanımlıdır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

2.2. Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.2.1. $U \subset \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\delta > 0$ için

$U(t) = \{s \in \mathbb{T}: |s - t| < \delta\}$

biçiminde tanımlanan U(t) kümesine t' nin δ-komşuluğu denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.2.2. $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $t \in U(t_0)$ için

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

Olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu varsa $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.2.3. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^Δ türevi her $s \in U$ için

$$\left|f\big(\sigma(t) - f(s)\big) - f^\Delta(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^Δ türevine delta(Hilger) türevi denir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^K$ için f fonksiyonu f^Δ türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}^K$ kümesine delta(Hilger) türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.2.4. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^∇ türevi her $s \in U$ için

$$\left|f\big(\rho(t) - f(s)\big) - f^\nabla(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^∇ türevine nabla türevi denir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}_K$ için f fonksiyonu f^∇ türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}_K$ kümesine nabla türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f\big(\rho(t)\big)}{s - \rho(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}$ olduğundan her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^\Delta = f'$ şeklindedir. Benzer şekilde

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^\nabla = f'$ şeklindedir

ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\mathbb{T}^{K} = \mathbb{T}$ olduğundan $\forall t \in \mathbb{T}^{K}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{\sigma(t)\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\Delta} = \Delta f$ şeklindedir. Benzer şekilde

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{\rho(t)\to t} \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{t - (t-1)} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\nabla} = \nabla f$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.2.1.

i) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ olur. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ bir sabittir. Her $\varepsilon > 0$ ve her $s \in \mathbb{T}$ için

$\left|f(\sigma(t) - f(s)) - 0(\sigma(t) - s)\right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$. Benzer şekilde $f^{\nabla} \equiv 0$ olur.

ii) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 1$ olur. Her $\varepsilon > 0$ ve $\forall s \in \mathbb{T}$ için

$\left|f(\sigma(t) - f(s)) - 1(\sigma(t) - s)\right| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$

ifadesi doğrudur. Benzer şekilde $f^{\nabla} \equiv 1$ olur.

Not 2.2.1.

i) Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ ise

$f^{\Delta}(t) = 2t = t + \sigma(t)$

şeklinde olur. Benzer şekilde

$f^{\nabla}(t) = 2t = t + \rho(t)$

olur.

ii) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \sqrt{t}$ ise

$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{\sigma(t)}}$

şeklinde olur. Benzer şekilde

$f^{\nabla}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{\rho(t)}}$

olur.

Teorem 2.2.1. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{K}$ olsun. O zaman aşağıdaki iddialar doğrudur:

i) Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirse t noktasında süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağdan yayılmış ise f fonksiyonu, t noktasında Δ türevlenebilirdir:

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

iii) Eğer t sağdan yoğun ise f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirdir:

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

iv) Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebiliyor ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

yazılır (Bohner and Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.2.2. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. O zaman aşağıdaki iddialar doğrudur:

i) Eğer f fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebilirse t noktasında süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t soldan yayılmış ise f fonksiyonu, t noktasında ∇ türevlenebilirdir:

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\upsilon(t)} \text{ dir.}$$

iii) Eğer t soldan yoğun ise f fonksiyonu t de ∇ türevlenebilirdir:

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \text{ dir.}$$

iv) Eğer f fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebiliyor ise

$$f(\rho(t)) = f(t) + \upsilon(t) f^{\nabla}(t)$$

yazılır (Bohner and Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.2.3. $f, g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar her $t \in \mathbb{T}^K$ için Δ türevlenebilir olsunlar.

Bu durumda

i) $f + g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

şeklinde olup $f + g$ fonksiyonu da t de Δ türevlenebilirdir.

ii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

şeklinde olup αf fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

iii) $f.g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f.g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g\big(\sigma(t)\big)$$

şeklinde olup $f.g$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

iv) Eğer $f(t)f\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f\big(\sigma(t)\big)}$$

şeklinde olup $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

v) Eğer $g(t)g\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\sigma(t)\big)}$$

şeklinde olup $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.2.4. $f, g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar ve her $t \in \mathbb{T}_K$ için ∇ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i) $f + g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f + g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

şeklinde olup $f + g$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

ii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere ve

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t)$$

şeklinde olup αf fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

iii) $f.g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f.g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f\big(\rho(t)\big)g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g\big(\rho(t)\big)$$

şeklinde olup $f.g$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

iv) Eğer $f(t)f\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f\big(\rho(t)\big)}$$

şeklinde olup $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

v) Eğer $g(t)g\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise

$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(\mathrm{t}) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\rho(t)\big)}$

şeklinde olup $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.2.5. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}^{\mathrm{K}^2} = (\mathbb{T}^{\mathrm{K}})^{\mathrm{K}}$ üzerinde ikinci mertebeden delta (Hilger) türevi

$f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{\mathrm{K}^2} \rightarrow \mathbb{R}$

şeklinde tanımlanır. n. mertebeden delta (Higher) türevi

$f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{\mathrm{K}^{\mathrm{n}}} \rightarrow \mathbb{R}$

seklinde tanımlanır. Ayrıca $\sigma^2(t) = \sigma\big(\sigma(t)\big)$ ve $\rho^2(t) = \rho\big(\rho(t)\big)$ olmak üzere her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}_0$ için

$\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$

şeklinde olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.2.2. $(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$ nin ikinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned}((fg)^{\Delta})^{\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + \big(f^{\Delta^{\sigma}} + f^{\sigma^{\Delta}}\big)g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\Delta\sigma}$ dır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.2.3. Zaman skalası olarak $\mathrm{h} > 0$ için $\mathbb{T} = \mathrm{h}\mathbb{Z} = \{\mathrm{hk}: \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için

$\sigma(\mathrm{t}) = \inf\{\mathrm{s} \in \mathbb{T}: \mathrm{s} > t\} = \inf\{\mathrm{t} + \mathrm{nh}: \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} = \mathrm{t} + \mathrm{h}$

$\rho(\mathrm{t}) = \sup\{\mathrm{s} \in \mathbb{T}: \mathrm{s} < t\} = \sup\{\mathrm{t} - \mathrm{nh}: \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} = \mathrm{t} - \mathrm{h}$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = h$ ve $\upsilon(t) = t - \rho(t) = h$

elde edilir. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

türevine sahiptir. İkinci mertebeden türev ise

$$
\begin{aligned}
f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}\big(\sigma(t)\big) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\
&= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{(t+h)-t} \\
&= \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h} \\
&= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2} \\
&= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu şekilde genelleştirilirse $f^{\Delta^n}(t)$ şu şekilde hesaplanabilir:

$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n}\int \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(t+kh)$ (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tablo 2.2. Bazı zaman skalaları

$\mathbb{R}$	―――――――――――――――
$\mathbb{Z}$	....
h$\mathbb{Z}$	....

Tablo 2.3. Bazı zaman skalalarına örnekler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\upsilon(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	1	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	h	$t+h$	$t-h$
2^N	t	t	$2t$	$\frac{t}{2}$

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1. Eğer $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$' deki sağdan yoğun noktalarda sağdan, soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli fonksiyon denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.2. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$' deki sağdan yoğun noktalarda sürekli ve soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona sağdan yoğun sürekli ya da rd-sürekli fonksiyon denir .

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd} \coloneqq C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd}^1 \coloneqq C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

şeklinde ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.3. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$' deki soldan yoğun noktalarda sürekli ve sağdan yoğun noktalarda sağdan limiti varsa bu fonksiyona sol yoğun sürekli ya da ld-sürekli fonksiyon denir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{ld} \coloneqq C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{ld}^1 \coloneqq C_{ld}^1(\mathbb{T}) = C_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.1. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i) f sürekli ise rd-süreklidir.

ii) f rd-sürekli ise düzenlidir.

iii) İleri sıçrama operatörü σ rd-süreklidir.

iv) f düzenli ya da rd-sürekli ise f^σ fonksiyonu da düzenli ya da rd-süreklidir.

v) f sürekli olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli ya da rd-sürekli ise $f \circ g$ fonksiyonu da bu özelliğe sahiptir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.2. Kompakt aralık üzerinde her düzenli fonksiyon sınırlıdır.

İspat: $f: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için

$|f(t_n)| > 0$ ve $t_n \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}], \{t_n : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subset [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

olduğundan bir $\{t_{n_k}\}_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_k} = t_0 \quad t_0 \in [a,b]\ ve\ \{t_n : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T} \tag{2.7}$$

ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ dir. (2.7) den dolayı t_0 ayrık(izole) nokta değildir ve t_0 aşağıdan yada yukarıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her bir durum için $t \to t_0$ iken $f(t)$ nin limiti düzenlilikten dolayı sonlu olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.4. $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $D \subset \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ olmak üzere $\mathbb{T}^{\mathrm{K}} \backslash \mathrm{D}$ ve $\mathbb{T}$ nin sağdan yayılımlı elemanlarını kapsayan ve $\forall \mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için f türevlenebilir ise D ile ön türevlenebilir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.3.(Ortalama Değer Teoremi) f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde reel değerli D ile ön türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman her $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \le g^{\Delta}(t)$$

olur. Ayrıca her $\mathrm{s}, \mathrm{r} \in \mathbb{T}$ ve $\mathrm{s} \le \mathrm{r}$ için

$$|f(s) - f(r)| \le g(s) - g(r)$$

olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Sonuç 2.3.1. f ve g fonksiyonları D ile ön türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

i) Eğer $\mathrm{U}, \mathrm{s}, \mathrm{r} \in \mathbb{T}$ noktaları ile kompakt aralık ise

$$|f(s) - f(r)| \le \sup_{\mathrm{t} \in \mathrm{U}^{\mathrm{K}} \cap \mathrm{D}} \left\{\left|f^{\Delta}(t)\right|\right\} |s - r|$$

olur.

ii) Eğer her $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

iii) Eğer her $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için $g(t) = f(t) + C$ olur. Burada C bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.5. $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ üzerinde delta (Hilger) türevlenebilir ve her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ için $F^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun delta-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer f fonksiyonun Δ-anti türevi varsa f fonksiyonuna Δ-integrallenebilir fonksiyon denir. $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.6. $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_{K}$ üzerinde nabla türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}_{K}$ için $F^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer *f* fonksiyonun ∇-anti türevi varsa *f* fonksiyonuna ∇- integrallenebilir fonksiyon denir. $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.4. Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.5. Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^{K}$ ise

$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t = \mu(t)f(t)$

olur.

İspat: Teorem 2.3.4. gereğince *f* fonksiyonunun *F* anti-türevi vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t &= F\big(\sigma(t)\big) - F(t) \\ &= \mu(t)F^{\Delta}(t) \\ &= \mu(t)f(t) \end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.6. Her ld-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.7. Eğer $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_{K}$ ise

$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla t = \upsilon(t)f(t)$

olur.

İspat: Teorem 2.3.6. gereğince *f* fonksiyonunun *F* anti-türevi vardır. O zaman

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla t = F\big(\rho(t)\big) - F(t)$$

$$= \quad v(t)F^{\Delta}(t)$$
$$= \quad v(t)f(t)$$

elde edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.3.1. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ ise

$$\int a^t \Delta(t)$$

integralini hesaplayalım.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan

$$\int a^t \Delta(t) = \frac{a^t}{a-1} + C$$

elde edilir. Burada *C* bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.3.2. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

şeklinde hesaplanır.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iii) Eğer $[a, b\,]$ aralığı ayrık noktalar içeriyorsa ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathrm{h}\mathbb{Z} = \{\mathrm{hk}\colon \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$ ve $\mathrm{h} > 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\displaystyle\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tablo 2.4. Bazı zaman skalalarına örnekler

Zaman Skalası	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
σ	t	$t+1$
ρ	t	$t-1$
$\mu(t)$	0	1
$\upsilon(t)$	0	1
$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t)$
$\int_a^b f(t)\Delta t$	$\int_a^b f(t)dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$, (a<b ise)
f rd- sürekli	f sürekli	herhangi f

Teorem 2.3.8. Eğer $f^{\Delta} \geq 0$ ise *f* azalan değildir.

İspat: $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $f^{\Delta} \geq 0$ ve $s, \mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. O zaman

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau \geq f(s)$$

olur. Dolayısıyla *f* artan değildir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.9. Eğer $\mathrm{a, b, c} \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise

i)$\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$

ii) $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$

iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

v) $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t$

vi) $\int_a^b f(t)g^\Delta \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t$

vii) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

viii) Eğer $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

ix) Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3.10. Eğer $\mathrm{a, b, c} \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{ld}$ ise

i) $\int_a^b (f(t) + g(t))\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$

ii) $\int_a^b (\alpha f(t))\nabla t = \alpha \int_a^b f(t)\nabla t$

iii) $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$

iv) $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$

v) $\int_a^b f(\rho(t))g^\nabla \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t$

vi) $\int_a^b f(t)g^\nabla \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(\rho(t))\nabla t$

vii) $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$

viii) Eğer $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \leq \int_a^b g(t)\nabla t$$

ix) Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$$

olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.3.3. $\mathrm{a, b} \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{ld}$ olsun. O zaman

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$$

şeklinde hesaplanır.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^{b} f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t=b+1}^{a} f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iii) Eğer $[a, b\,]$ aralığı ayrık noktalar içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in(a,b]} \upsilon(t)f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t\in(a,b]} \upsilon(t)f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.3.7. Simetrik bir A operatörünün uygun bir simetrik genişlemesi yoksa, A operatörüne maksimaldir denir (Naimark, 1968).

Kendine eş (Self-adjoint) her A operatörü maksimal simetrik bir operatördür.

Tanım 2.3.8. A, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve λ keyfi bir kompleks sayı olsun. R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$, sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $\left(A - \bar{\lambda} I\right)$ operatörlerinin değer kümeleri olmak üzere,

$N_\lambda = H \ominus R_\lambda$ ve $N_{\bar{\lambda}} = H \ominus R_{\bar{\lambda}}$

uzaylarına, A operatörünün defekt uzayları denir. N_λ ve $N_{\bar{\lambda}}$ defekt uzayları, sırasıyla, λ ve $\bar{\lambda}$ özdeğerlerine ait A^*operatörünün çözümlerinin uzaylarıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.3.9. $m = dimN_\lambda$**.** ve $n = dimN_{\bar{\lambda}}$ $(\Im\lambda > 0)$ olmak üzere (m, n) ikilisi, A operatörünün indis defekti olarak tanımlanır (Naimark, 1968).

Tanım 2.3.10. *A* lineer operatörünün *D(A)* tanım kümesi *H* Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $f \in D(A)$ için

$$\Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.7}$$

ise, A lineer operatörüne disipatif(dissipative) operatör denir. Her $f \in D(A)$ için

$$\Im(Af, f) \leq 0 \qquad (2.8)$$

ise, A lineer operatörüne akretif(acceretive) operatör denir (Gorbachuc ve Gorbachuk, 1991).

A lineer operatörüne akretif(acceretive) operatördür ancak ve ancak A disipatif(dissipative) operatördür.

Eğer A disipatif(akretif) operatörü kendinden farklı disipatif(akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif(akretif) operatör denir.

Disipatif operatörler daima kapanabilir. Disipatif operatörlerin kapanışı da disipatifdir. Maksimal disipatif operatörler daima kapalıdır.

Tanım 2.3.11. $f \in D(A)$ için

$\tilde{A}f = Af$ ve $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ oluyorsa, A operatörüne $\tilde{A}$ operatörünün genişlemesi denir. $\tilde{A}$ operatörüne ise A operatörünün kısıtlanması denir. Eğer A operatörü, simetrik $\tilde{A}$ operatörünün bir simetrik genişlemesi ise $A \subset \widetilde{A^*}$ dır. Yani $\tilde{A}$ operatörünün her simetrik genişlemesi, $\widetilde{A^*}$ operatörünün kısıtlamasıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.3.12. $A: D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun $\left(\overline{D(A)} = H\right)$. $\forall f, g \in D(A)$ için

$(Af, g) = (f, Ag)$ ise, yani $A \subset A^*$ ise, A ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.3.13. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$\Im(x, x') \geq 0$ (sırasıyla $\Im(x, x') \leq 0, \Im(x, x') = 0$)
oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif(sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif(akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatf genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatiftir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eştir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.3.14. $m = dimN_{\lambda}$ ve $n = dimN_{\bar{\lambda}}$ $(\Im\lambda > 0)$ olmak üzere (m, n) ikilisi, A operatörünün indis defekti olarak tanımlanır (Naimark, 1968).

3. SINIR DEĞER UZAYLARI VE DİSİPATİF GENİŞLEMELERİ

3.1. Disipatif Genişlemeler

Teorem 3.1.1. Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif A operatörü maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $\Im\lambda < 0$ için

$R(A - \lambda I) = H$

olmasıdır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: . A kapalı disipatif operatör, $Im\lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A - \lambda I) = H$

kapalıdır. (2.6) eşitsizliğinden

$Im((A - \lambda I)f, f) \geq -Im\lambda(f, f)$

dir. Fakat

$Im((A - \lambda I)f, f) \leq \|(A - \lambda I)f\|\|f\| - Im\lambda \leq \|(A - \lambda I)f\|$

dir. Buradan $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır. Şimdi iki durum oluşabilir:

1) $Im\lambda < 0$ için $R(A - \lambda I) = H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif $\tilde{A}$ genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A} - \lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan

$Im(\tilde{A}f_0, f_0) = Im\lambda(f_0, f_0)$

olur ki bu $\tilde{A}$ nın disipatifliği ile çelişir.

2) $R(A - \lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahiptir ve bu genişleme şu şekilde inşa edilir:

$N = H \ominus R(A - \lambda I), D_{\tilde{A}} = D_A + N,$

$\tilde{A}(f + u) = Af + \bar{\lambda}u, f \in D_A, u \in N.$

olarak tanımlayalım $\tilde{A}$ operatörü doğru tanımlanır: $f + u = 0$ ise

$(Af, f) = (Au, u) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u)$

dir. $Im(Af, f) \leq 0$ ise $u = 0, f = 0$ olur. $\tilde{A}$ operatörü disipatiftir:

$\left(\tilde{A}(f + u), f + u\right) = (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (Af, u) + \bar{\lambda}(u, f)$

$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^*u) + \bar{\lambda}(u, f)$

$=(Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f)$

Buradan

$Im(\tilde{A}(f + u), f + u) = Im(Af, f) + Im\bar{\lambda}(u, u) \geq 0.$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi $\tilde{A}$ operatörü maksimal disipatiftir. Teorem 3.1.1. den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir. Teorem 3.1.1. den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır. A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

Teorem 3.1.2. $\tilde{A}$ operatörü A simetrik operatörünün disipatif (akretif) genişlemesi olsun. O zaman $\tilde{A} \subset A^*$ dır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat. Farz edelim ki $\tilde{A} \supset A$ disipatif bir genişleme olsun. Teorem 3.1.1 ile $\tilde{A}$ operatörünü maksimal disipatif kabul edelim.

$$B = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \tilde{B} = (\tilde{A} - iI)(\tilde{A} + iI)^{-1} \tag{3.1}$$

operatörlerini alalım. $-i$ disipatif (simetrik) operatörün özdeğerin olamayacağından (3.1) anlamlıdır. B operatörü $R(A + iI)$ uzayını $R(A - iI)$ uzayına izometrik olarak resmeder. Eğer $f \in R(A + iI)$, yani $f = (A + iI)g, g \in D_A$ ise,

$$\|Bf\|^2 = \|(A - iI)g\|^2 = \big((A - iI)g, (A - iI)\big)$$
$$= (Ag, Ag) - i(g - Ag) + i(Ag, g) + (g, g)$$
$$\|f\|^2 = \|(A + iI)g\|^2 = \big((A + iI)g, (A + iI)\big)$$
$$= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g)$$

dir.

$(g, Ag) = (Ag, g)$ ise $\|Bf\| = \|f\|$

dir. Benzer şekilde $\tilde{B}$ operatörünün bir büzülme operatörü olduğu gösterilir. (3.1) ifadesinden

$A = -i(B + I)(B - I)^{-1}, \tilde{A} = -i(\tilde{B} + I)(\tilde{B} - I)^{-1}$

dir. Açıktır ki $\tilde{B}$ operatörü B operatörünün genişlemesidir. $u \in N_{-i}$ olsun. O zaman $u \perp D_B$ dir. $v \in D_B, \xi \in \mathbb{C}$ için

$$\|\xi v+u\|^2-\left\|\tilde{B}(\xi v+u)\right\|^2\geq 0 \tag{3.2}$$

dir.

$\|\tilde{B}v\| = \|Bv\| = \|v\|$

olduğunu hesaba katarsak (3.2) den

$\|u\|^2 - \|\tilde{B}u\|^2 - 2Re(\xi(\tilde{B}v,\tilde{B}v)) \geq 0$

elde edilir. ξ keyfi olduğundan

$(\tilde{B}v,\tilde{B}v) = 0$

olur. Böylece $her\ v \in D_B$ için $\widetilde{B}_u \perp \widetilde{B}_v = Bv$ dir. Yani $\widetilde{B}_u \perp R(A-iI), \widetilde{B}_u \in N_i$ Buradan da C, N_{-i} den N_i ye büzülme operatörü olmak üzere $\tilde{B} = B \oplus C$. $g \in D_{\tilde{A}}$ olsun.

$f = (\tilde{A} + iI)g$

$\tilde{B}f = (\tilde{A} - iI)g$

olur. Son iki eşitlikten $f_1 \in R(A+iI), f_2 \in N_{-i}$ olmak üzere

$$g = \frac{1}{2i}\left(f-\tilde{B}f\right) = \frac{1}{2i}(f^1+f^2-Bf^1-Cf^2)$$

$$=\frac{1}{2i}(f_1-Bf_1)+\frac{1}{2i}(f_2-Cf_2)$$

dir. B operatörünün tanımından $f_1 - Bf_1 \in D_A . f_2 - Cf_2 \in N_{-i} \oplus N_i$. Buradan $g \in D_{A^*}$ ve

$$A^*g = \frac{1}{2i}(f_1-Bf_1)+\frac{1}{2i}(f^2+Cf^2{}_2$$

$$=\frac{1}{2}(f_1+Bf_1)+\frac{1}{2}(f_2+Cf_2)$$

dir. Diğer taraftan

$\tilde{A}g = A^*g$

dir.

3.2. Lineer Bağıntılar

Tanım 3.2.1. H bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine lineer bağıntı denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in genişlemesi denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 3.2.2. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$Im(x',x) \geq 0, (\ sırasıyla, Im(x',x) \leq 0, Im(x',x) = 0)$

oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatifdir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eştir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\}$,

$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının Cayley dönüşümü denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır. Eğer $\{x, x'\} \in \theta, \{y, y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$\{x - y, x' - y'\} \in \theta, x' - y' = -i(x - y)$

olur. Diğer taraftan

$0 \leq Im(x' - y', x - y) = Im(-i(x - y), x - y) = -\|x - y\|^2$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$\|U_\theta(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$

$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x)$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta(x' + ix)\| \leq \|x' + ix\|, \{x, x'\} \in \theta \tag{3.3}$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (4.3) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.3. K, H bir hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K - I)x' + i(K + I)x = 0 \tag{3.4}$$

$$(K - I)x' - i(K + I)x = 0 \tag{3.5}$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (3.4), (3.5) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (3.4) ifadesindeki ((3.5) deki) K operatörü izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (3.4) veya (3.5) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat. (3.4) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.
$K(x' + ix) = x' - ix$
$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$
$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x).$
Sonuncu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4Im(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \tag{3.6}$$

olur. Böylece θ bağıntısı disipatiftir. $u \in H$ için
$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$
tanımlayalım. O zaman $\{x, x'\} \in \theta$, $x' + ix = u, x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H, U_\theta = K$ olduğunu gösterir. θ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\widetilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur . Bu ise ancak $U_{\widetilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\widetilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir. θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, U_θ da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dır. Bunu ispatlayalım: Tersini kabul edelim. U_θ ,$\overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise U_θ, $H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ, H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (3.4) eşitliğine karşılık gelen $\widetilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\widetilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\widetilde{\theta} \supset \theta$ dır. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\widetilde{\theta} = \theta, U_{\widetilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ, H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından her $\{x, x'\} \in \theta$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \tag{3.7}$$

dır. Daha önceden belirttiğimiz gibi (3.7) maksimal disipatif $\widetilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\widetilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (3.4) ile belirlenir. (3.6) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır. θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{\{-x, x'\}: \{x, x'\}\} \in \theta \tag{3.8}$$

bağıntısı maksimal disipatifdir. Gösterdik ki

$\{x, x'\} \in \theta_1\ (veya\ \{-x, x'\} \in \theta) \ \Leftrightarrow\ (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$

dir. Bu ifade de (3.5) e denktir. Tersi de benzer şekilde gösterilir. Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$

$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$

eşitlikleri denktir.

$K_1K_2(x' - ix) = x' + ix, K_2K_1(x' + ix)K_2K_1(x' + ix)$

elde edilir.

$\{x' + ix | \{x, x'\} \in \theta\} = \{x' - ix | \{x, x'\} \in \theta\} = H$

olduğundan

$K_1K_2 = K_2K_1 = I$

olur, yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersi aşikardır.

3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler

Tanım 3.3.1. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2 \colon \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{K}$ lineer dönüşümler olsun.

i) $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ için

$(A^*f, g) - (f, A^*) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$

ii) Keyfi $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathrm{K}$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ vektörü vardır; şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 3.3.1. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $dimK = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} = \mathrm{D}_{\mathrm{A}} \oplus \mathrm{N}_{\mathrm{i}} \oplus \mathrm{N}_{-\mathrm{i}} \tag{3.9}$$

idi. $\mathrm{P}_{-\mathrm{i}}, P_i \colon \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}, \mathrm{N}_{\mathrm{i}}$ izdüşüm operatörleri olsun. $dim\mathrm{N}_{-\mathrm{i}} = dim\mathrm{N}_{\mathrm{i}}$ olduğundan $\mathrm{N}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ izometrik bir dönüşüm vardır. Bunu U ile gösterelim. $K = \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$\Gamma_1 = \mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + UP_i, \Gamma_2 = -i\mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + iUP_i$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin A operatörünün sınır değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (3.9) ifadesinden $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ ise

$f = f_0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{f} + P_i f, g = g_0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{g} + P_i g, f_0, g_0 \in \mathrm{D}_\mathrm{A}$

dir.

$\mathrm{A}^* P_i = -iP_i, \mathrm{A}^* P_{-i} = -iP_{-i}$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$(\mathrm{A}^* f, g) - (f, \mathrm{A}^* g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$(\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır. $F_1, F_2 \in K, f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ alalım.

$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$

$f_{-i} = \dfrac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_i, f_i = \dfrac{1}{2i}U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$

olsun. O zaman $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olur.

Teorem 3.3.2. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \qquad (3.10)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \qquad (3.11)$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (3.10) ve (3.11) koşulunu sağlayan $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (3.10) , (3.11) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (3.10), (3.11) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$(cosC)\Gamma_2 f - (sinC)\Gamma_1 f = 0$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \qquad (3.12)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (3.13)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$\|K_f\| \leq \|f\|$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (3.12), (3.13) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: $\tilde{A}$, A operatörünün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Teorem 3.1.3 ile $\tilde{A} \subset A^*$ dır. (K, Γ_1, Γ_2), A operatörünün sınır değer uzayı olmak üzere

$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden θ, K da disipatif bağıntıdır. Eğer $\tilde{\theta} \supset \theta$ ve θ disipatif bağıntı ise $\tilde{\tilde{A}}$, A^* operatörünün $D_{\tilde{\tilde{A}}}$=\{f$\in D_{A^*}$\}:$\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \tilde{\theta}\}$ kümesinin kısıtlaması olarak tanımlanan $\tilde{\tilde{A}}$ operatörünün disipatif genişlemesidir. Buradan $\tilde{\tilde{A}}$ =$\tilde{A}$. Eğer $\{x, x'\} \in \theta$ ise belli bir $f \in D_{A^*}$, için $x = \Gamma_2 f, x' = \Gamma_1 f$, olur. Burada $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$, ve $f \in D_{\tilde{A}.}$, yani, $\{x, x' \in \theta$. Böylece $\tilde{\theta} = \theta$ ve θ maksimal disipatif bağıntıdır. Teorem 3.2.3 den istenen sonuçlar elde edilir.

Farz edelim ki $\tilde{A}, A^*$ operatörünün (3.10) koşulunu sağlayan vektörlerin $D_{\tilde{A}}$ kümesine kısıtlaması olsun.

$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$

ele alalım. Teorem 3.2.3 göre θ bağıntısı maksimal disipatiftir. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden $\tilde{A}$ disipatiftir.

Farz edelim ki $\tilde{\tilde{A}}$ operatörü $\tilde{A}$ operatörünün disipatif genişlemesi olsun. $\tilde{\theta} = \left\{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}\right\}$ dır. $\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi olduğundan $\tilde{\theta}$=θ dır. Eğer $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$ ise $g \in D_{\tilde{A}.}$ için $\Gamma_2 f = \Gamma_1 g, \Gamma_2 f = \Gamma_2 g$. Bu ise $f - g \in D_{AA}$, buradan f$\in D_{\tilde{A}.}$ Böylece $\tilde{A}$=$\tilde{\tilde{A}}$ ve $\tilde{A}$ maksimal disipatiftir.

4. DÖRDÜNCÜ DERECEDEN DİNAMİK DENKLEMLER

4.1. Dördüncü Dereceden Dinamik Denklemler

n=2 olsun ve

$$Ly(t) = (p_0 y^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t) - (p_1 y^{\nabla})^{\Delta}(t) + p_2(t)y(t) \tag{4.1}$$

Dördüncü mertebeden dinamik ifadeyi ele alalım. $y \in \Omega$ için tanımdan

$$\begin{aligned} y^{[0]} &= y \\ y^{[1]} &= y^{\nabla} \\ y^{[2]} &= (p_0 y^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t) \\ y^{[3]} &= p_1 y^{\nabla} - \left(y^{[2]}\right)^{\nabla} \\ y^{[4]} &= p_2 y^{\nabla} - \left(y^{[3]}\right)^{\Delta} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$Ly = y^{[4]}$

olur. Bu halde $y, z \in \Omega$ için $\boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{z}$ nin Langrange parantezi

$[y,z](t) = y^{[0]}(t)z^{[3]}(t) - y^{[3]}(t)z^{[0]}(t) + y^{[1]}(t)z^{[2]}(t) - y^{[2]}(t)z^{[1]}(t)$

olur ve

$zLy = yLz = [y,z]^{\Delta}$

Langrange özdeşliği sağlanır. (4.1) dinamik ifadesi ile birlikte

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{4} \beta_{jk} y^{[k-1]}(b) = 0, \;\; 1 \le j \le 4$$

Bu sınır koşullarının self-adjoint olması için gerek ve yeter koşul $\forall y, z \in \Omega_{[a,b)}$ için

$$\begin{aligned} 0 = \;& y(b)z^{[3]}(b) - y^{[3]}(b)z(b) + y^{[1]}(b)z^{[2]}(b) - y^{[2]}(b)z^{[4]}(b) \\ & -y(a)z^{[3]}(a) + y^{[3]}(a)z(a) - y^{[1]}(a)z^{[2]}(a) + y^{[2]}(a)z^{[1]}(a) \end{aligned}$$

olmasıdır. Buna göre

i) $y(a) = y^{[1]}(a) = 0$

ii) $y^{[1]}(a) = y^{[3]}(a) = 0$

iii) $y(a) = y^{[2]}(a) = 0$

iv) $y^{[2]}(a) = y^{[3]}(a) = 0$

koşullarının her biri ile

i) $y(b) = y^{[1]}(b) = 0$

ii) $y^{[1]}(b) = y^{[3]}(b) = 0$

iii) $y(b) = y^{[2]}(b) = 0$

iv) $y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b) = 0$

koşullarının birisinin alınması sonucunda 16 farklı tipte self-adjoint sınır koşulu elde edilir. Ayrıca

$y(a) = y(b), y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b), y^{[2]}(a) = y^{[2]}(b), y^{[3]}(a) = y^{[3]}(b)$

"periyodik" sınır koşulları da self-adjoint olur.

Burada

$Ly(t) = (py^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t), \qquad t \in [a,b)$

dinamik ifadelerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.1. Ly nin $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$y(a) = y^{[1]}(a) = y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b)$

sınır koşulları ile birlikte

$$G(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t \left(\int_a^\tau \frac{s-x}{p(x)} \nabla x \right) \Delta\tau & , \quad t \le s \\ \displaystyle\int_a^s \left(\int_a^\tau \frac{t-x}{p(x)} \nabla x \right) \Delta\tau & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Hatırlatma 4.1.1.

$y(a) = y^{[1]}(a) = y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b)$

sınır koşulları

$y(a) = y^{\Delta}(a) = y^{\Delta\nabla}(b) = y^{\Delta\nabla^2}(b)$

formunda yeniden ifade edilebilir.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{R}, h\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{E}$ Örnek 2.2. de tanımlandığı gibi olsun ve bir $m > 1$ tamsayısı için $hm = 1$ olsun. $a = 0$ ve $p(t) \equiv 1$ ile $b = 1$ alınırsa

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}: G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t^2(3s-t)}{6} & , \quad t \le s \\ \dfrac{s^2(3t-s)}{6} & , \quad t \ge s \end{cases}$$

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z}: G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t\rho(t)(3s - \sigma(t))}{6} & , \quad t \le s \\ \dfrac{s\rho(s)(3t - \sigma(s)}{6} & , \quad t \ge s \end{cases}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{E}: G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t\rho(t)\big((q^2 + q + 1)s - \sigma(t)\big)}{(q+1)(q^2+q+1)} & , \quad t \le s \\ \dfrac{s\rho(s)\big((q^2 + q + 1)t - \sigma(s)\big)}{(q+1)(q^2+q+1)} & , \quad t \ge s \end{cases}$$

elde edilir[8]. Buradaki her üç halde de Green fonksiyonunun simetrik olduğu görülebilir. Ayrıca sırasıyla, $h \to 0$ ve $q \to 1$ limit hallerinde $\mathbb{R}$ elde edilir.

Hatırlatma 4.1.2. Anderson, 2003 te (Önek 18) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ hali için

$$Ly(t) = \left(y^{\Delta^2}\right)^{\nabla^2}(t)$$

nin Green fonksiyonunun

$$y(a) = y^{\Delta}(a) = y^{\Delta^2}(b) = y^{\Delta^2\nabla}(b) = 0$$

sınır koşulları ile birlikte simetrik olmadığını göstermiştir. $p(t) \equiv 1$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ halinde Δ ve ∇ operatörleri değişmeli olduğundan, benzer şekilde (4.1) formundaki Ly için de bu ifade gösterilebilir. Ancak bu sınır koşulları

$$y(a) = y^{\Delta}(a) = y^{\Delta\nabla}(b) = y^{\Delta\nabla^2}(b) = 0$$

sınır koşullarının aksine kendine eş değildir. Bu ise Green fonksiyonunun neden simetrik olmadığını gösterir.

Teorem 4.1.2. $Ly = (py^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}$ nin Green fonksiyonu

$$y^{\Delta\nabla}(a) = y^{\Delta\nabla^2}(a) = y(b) = y^{\Delta}(b)$$

kendine eş sınır koşulları ile

$$G(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^b \left(\int_\tau^b \frac{x - t}{p(x)} \nabla x\right) \Delta\tau & , \quad t \le s \\ \displaystyle\int_t^b \left(\int_\tau^b \frac{x - s}{p(x)} \nabla x\right) \Delta\tau & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer $p(t) \equiv 1$ ise

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}: G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(b-s)^2(2b + s - 3t)}{6} & , \quad t \le s \\ \dfrac{(b-t)^2(2b + t - 3s)}{6} & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olur.

Teorem 4.1.3. $Ly = (py^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}$ nin Green fonksiyonu

$y^{[0]}(a) = y^{[2]}(a) = y^{[1]}(b) = y^{[3]}(b) = 0$

kendine eş sınır koşulları ile

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-a)\left(\int_a^s \frac{x-a}{p(x)}\nabla x + \int_s^b \frac{s-a}{p(x)}\nabla x\right) - \int_a^t \left(\int_a^\tau \frac{x-a}{p(x)}\nabla x\right)\Delta\tau & , \quad t \le s \\ (s-a)\left(\int_a^t \frac{x-a}{p(x)}\nabla x + \int_t^b \frac{t-a}{p(x)}\nabla x\right) - \int_a^s \left(\int_a^\tau \frac{x-a}{p(x)}\nabla x\right)\Delta\tau & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer $p(t) \equiv 1$ ise

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}: G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-a)(2b-s-a)}{2} + \frac{(a-t)^3}{6} & , \quad t \le s \\ \frac{(s-a)(t-a)(2b-t-a)}{2} + \frac{(a-s)^3}{6} & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olur.

$y^{[1]}(a) = y^{[3]}(a) = y^{[0]}(b) = y^{[2]}(b) = 0$

sınır koşulları için Green fonksiyonu

$$G(t,s) = \begin{cases} (b-t)\int_s^b \int_a^\tau \frac{\nabla x}{p(x)}\Delta\tau - \int_s^b \int_t^\tau \frac{x-1}{p(x)}\nabla x\Delta\tau & , \quad t \le s \\ (b-s)\int_{st}^b \int_a^\tau \frac{\nabla x}{p(x)}\Delta\tau - \int_t^b \int_s^\tau \frac{x-s}{p(x)}\nabla x\Delta\tau & , \quad t \ge s \end{cases}$$

olur.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde zaman skalaları üzerindeki singüler 4. mertebeden dinamik operatörün genişlemeleri verilecektir.

5.1. 4. Mertebeden Dinamik Operatörlerin Genişlemeleri

$\mathbb{T}$ zaman skalası alttan sınırlı üstten sınırsız bir zaman skalası olsun öyle ki $inf\mathbb{T} = a > -\infty$ ve $sup\mathbb{T} = \infty$ olsun. Bu halde $\mathbb{T}$ yi $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ ile gösterelim.

Denklemden operatöre geçmek için

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\Delta t, \quad f, g \in L_\Delta^2[a, \infty)_{\mathbb{T}}$$

yardımıyla $L_\Delta^2[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ uzayını tanımlayalım (Rynne, 2007).

Dördüncü dereceden dinamik denklem olan

$$\Upsilon x := (p_0 x^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t) - (p_1 x^{\nabla})^{\Delta} + p_2(t)x(t) = \lambda x(t), t \in [a, \infty) \tag{5.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada p_0, p_1 ve p_2 reel değerli fonksiyonlar, p_0^{-1}, p_1 ve p_2 lokal olarak $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde Δ integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar ve $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $p_0 > 0$ olsun. Notasyon sadeliği açısından

$x^{[0]} = x$

$x^{[1]} = x^{\Delta}$

$x^{[2]} = p_0 x^{\Delta\nabla}$

$x^{[3]} = p_1 x^{\nabla} - \left(x^{[2]}\right)^{\nabla}$

$x^{[4]} = p_2 x - \left(x^{[3]}\right)^{\Delta}$

olarak yazalım. Şimdi (5.1) denklemini Hamilton sistemine dönüştürelim.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x^{\Delta} \\ -(p_0 x^{\Delta\nabla})^{\Delta} + p_1 x^{\Delta} \\ p_0 x^{\Delta\Delta} \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ x^{\Delta} \\ -(p_0 x^{\Delta\nabla})^{\nabla} + p_1 x^{\nabla} \\ p_0 x^{\Delta\nabla} \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa, (5.1) denklemi

$$J\hat{X}^{\Delta} = (\lambda A + B)X \tag{5.2}$$

denklemine dönüşür. Burada

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-p_2&0&0&0\\0&-p_1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1/p_0\end{bmatrix}$$

ve

$$J=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

dir. Dikkat edilirse *A* ve *B* matrislerinin simetrik matris olduğu görülür.

$x(t,\lambda)$ ve $z(t,\lambda)$ çözümleri için Green formülü

$$\int_a^\infty (\Upsilon x)(t)\overline{z(t)}\Delta t-\int_a^\infty x(t)\overline{(\Upsilon z)(t)}\Delta t=[x,z]_\infty-[x,z]_a \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$[x,z]_t:=x^{[0]}(t)\bar{z}^{[3]}(t)-x^{[3]}(t)\bar{z}^{[0]}(t)+x^{[1]}(t)\bar{z}^{[2]}(t)-x^{[2]}(t)\bar{z}^{[1]}(t)$$

ve

$$[x,z]_\infty:=\lim_{t\to\infty}[x,z]_t$$

dir (Anderson vd., 2006). $[x,z]_\infty$ un mevcut ve sonlu olduğu açıktır. (5.2) den karşılık gelen vektörler $X(t,\lambda)$ ve $Z(t,\lambda)$ yerine yazılırsa

$$X^T JZ(t)=[x,z]_t$$

elde edilir.

$y_i, 1\leq i\leq 4$, fonksiyonları denklem (5.1) in aşağıdaki koşulları sağlayan çözümleri olsunlar:

$$p_0^2(t)W(y_1,y_2,y_3,y_4)=1$$

ve

$$\begin{bmatrix}[y_1,y_1]&[y_2,y_1]&[y_3,y_1]&[y_4,y_1]\\ [y_1,y_2]&[y_2,y_2]&[y_3,y_2]&[y_4,y_2]\\ [y_1,y_3]&[y_2,y_3]&[y_3,y_3]&[y_4,y_3]\\ [y_1,y_4]&[y_2,y_4]&[y_3,y_4]&[y_4,y_4]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

dir. Burada y_1,y_2,y_3 ve y_4 ün Wronskian'ı

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4)=\begin{vmatrix}y_1&y_2&y_3&y_4\\ y_1^{[1]}&y_2^{[1]}&y_3^{[1]}&y_4^{[1]}\\ y_1^{[2]}&y_2^{[2]}&y_3^{[2]}&y_4^{[2]}\\ y_1^{[3]}&y_2^{[3]}&y_3^{[3]}&y_4^{[3]}\end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır (Anderson vd., 2006). Böylece şu Lemmayı verebiliriz.

Lemma 5.1.1. Her $f, g \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$|f, g|_t = \begin{vmatrix} [y_2, g]_t & [g, y_4]_t \\ [y_2, f]_t & [f, y_4]_t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [y_1, g]_t & [g, y_3]_t \\ [y_1, f]_t & [f, y_3]_t \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

Plücker özdeşliği elde edilir.

İspat: İlk üç Δ türevleri $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde lokal Δ mutlak sürekli $\Upsilon(y) \in L^2_\Delta[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ olacak şekildeki tüm fonksiyonların $L^2_\Delta[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ fonksiyonlarının kümesini D_{max} ile gösterelim. D_{max} kümesi üzerinde Γ_{max} maksimal operatörü $\Gamma_{max} y = \Upsilon(y)$ eşitliği ile tanımlayalım.

$$x^{[0]}(a) = x^{[1]}(a) = x^{[2]}(a) = x^{[3]}(a) = [x, z]_\infty = 0, \ \ \forall z \in D_{max} \tag{5.5}$$

Koşullarını sağlayan bütün $x \in D_{max}$ vektörlerinin lineer kümesini D_{min} ile gösterelim. Eğer Γ_{max} operatörünü D_{min} kümesi üzerinde kısıtlarsak Γ_{min} minimal operatörünü elde ederiz. $\Gamma^*_{\min} = \Gamma_{max}$ eşit olduğu açıktır ki Γ_{min} (2,2), (3,3), (4,4) olabilen kapalı simetrik operatördür (Naimark, 1968).

Tanım 5.1.1. $\mathbb{H}$ Hilbert uzay $\Phi_1, \Phi_2 : D(M^*) \to \mathbb{H}$ lineer dönüşümler olsun.

i) $f, g \in D(M^*)$ için

$(M^* f, g)_{\mathbb{H}} - (f, M^* g)_{\mathbb{H}} = (\Phi_1 f, \Phi_2 g)_{\mathbb{H}} - (\Phi_2 f, \Phi_1 g)_{\mathbb{H}}$

i) Keyfi $F_1, F_2 \in \mathbb{H}$ için $\Phi_1 f = F_1, \Phi_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D(M^*)$ vektörü vardır; şartlarını sağlayan $(\mathbb{H}, \Phi_1, \Phi_2)$ üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuck ve Gorbachuck, 1984).

5.2. Lim-2 Durumu

Bu bölümde Lim-2 durumda singüler 4. mertebeden dinamik operatörleri ele alacağız. Sınır değer uzay kavramı yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif kendine eş diğer genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade edeceğiz.

Γ_{min} simetrik operatörü (2,2) indis defekte sahip olsun. Bu durumda her $y, z \in D_{max}$ için $[y, z]_\infty = 0$ dır (Neumann, 1929). Γ_{min} simetrik operatörünün tanım bölgesi

$x^{[0]}(a) = x^{[1]}(a) = x^{[2]}(a) = x^{[3]}(a) = 0,$

koşullarını sağlayan $x \in D_{min}$ vektörlerinden oluşur.

Şimdi D_{max} kümesinden $\mathbb{C}^2$ ye tanımlı S_1 ve S_2 lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S_1 f = \begin{pmatrix} -x^{[0]}(a) \\ x^{[1]}(a) \end{pmatrix}, S_2 f = \begin{pmatrix} x^{[3]}(a) \\ x^{[2]}(a) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Lemma 5.2.1. Keyfi $x, z \in D_{max}$ için

$$(\Gamma_{max} x, z)_{L_\Delta^2} - (x, \Gamma_{max} z)_{L_\Delta^2} = (S_1 x, S_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (S_2 x, S_1 z)_{\mathbb{C}^2} \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Her $x, z \in D_{max}$ için Green formülünden

$$(\Gamma_{max} x, z)_{L_\Delta^2} - (x, \Gamma_{max} z)_{L_\Delta^2} = -[x, z]_{\mathrm{a}} \tag{5.8}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}(S_1 x, S_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (S_2 x, S_1 z)_{\mathbb{C}^2} &= -x^{[0]}(a)\bar{z}^{[3]}(a) - x^{[1]}(a)\bar{z}^{[2]}(a) \\ &+ x^{[3]}(a)\bar{z}^{[0]}(a) + x^{[2]}(a)\bar{z}^{[1]}(a) \\ &= -[x, z]_{\mathrm{a}}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (5.8) eşitliği kullanılarak (5.7.) eşitliği elde edilir.

Lemma 5.2.2. Her $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 kompleks sayıları için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x \in D_{max}$ fonksiyonu vardır:

$$x^{[0]}(a) = \alpha_1,\ \ x^{[1]}(a) = \alpha_2,\ \ x^{[2]}(a) = \alpha_3, \qquad x^{[3]}(a) = \alpha_4$$

İspat:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

olsun. Bu durumda $\alpha_i(t) \in L_\Delta^2[a, \infty)_{\mathbb{T}} (i = 1,2,3,4)$ fonksiyonları

$\alpha_1^{[0]}(a) = 1$ $\alpha_1^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_1^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_1^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_2^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[3]}(a) = 1$

$\alpha_3^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_3^{[1]}(a) = -1$ $\alpha_3^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_3^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_4^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_4^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_4^{[2]}(a) = 1$ $\alpha_4^{[3]}(a) = 1$

koşullarını sağlayan

$x(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2 + \alpha_3(t)v_1 + \alpha_4(t)v_2$

vektör değerli fonksiyonu D_{max} kümesine aittir ve

$S_1 x = u, S_2 x = v$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 5.2.1. (3,1) ile tanımlı $(\mathbb{C}^2, S_1, S_2)$ üçlüsü Γ_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

Sonuç 5.2.1. K, $\mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise Γ_{min} operatörünün

$$(K - I)S_1 x + i(K + I)S_2 x = 0 \tag{5.9}$$

ve

$$(K - I)S_1 x - i(K + I)S_2 x = 0 \tag{5.10}$$

koşullarını sağlayan $x \in D_{max}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanması sırasıyla Γ_{min} operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.9) ve (5.10) biçiminde gösterilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.9) ve (5.10) ifadesindeki K izometrik operatör olursa Γ_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter olursa Γ_{min} kendine eş genişlemesini verir. Disipatif ve akretif genişlemelerin genel formu

$\Im h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$, $\Im h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$,($\Im h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\Im h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty, \Im h_3 = 0$) olmak üzere

$x^{[3]}(a) - h_1 x^{[0]}(a) = 0$

$x^{[1]}(a) - h_2 x^{[2]}(a) = 0$

sınır koşulları Γ_{min} in maksimal disipatif (Kendine eş) genişlemelerini tanımlar.

5.3. Lim-4 Durumu

Burada Lim-4 durumda singüler 4. mertebeden dinamik operatörleri ele alacağız. Şimdi Γ_{min} operatörünü indis defekti (4,4) olsun. O zaman $y_i \in L^2_\Delta[a,\infty)_{\mathbb{T}}, 1 \leq i \leq 4,$ ve $y_i \in D_{max}, 1 \leq i \leq 4$ olur.

Teorem 5.3.1. Γ_{min} operatörünün tanım bölgesi D_{min} aşağıdaki koşulları sağlayan $x \in D_{max}$ fonksiyonlarından oluşur.

$x^{[0]}(a) = x^{[1]}(a) = x^{[2]}(a) = x^{[3]}(a) = 0,$

$$[x,y_1]_\infty = [x,y_2]_\infty = [x,y_3]_\infty = [x,y_4]_\infty = 0 \tag{5.11}$$

İspat: (5.4) ve (5.5) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

D_{max} kümesinden $\mathbb{C}^4$ ye tanımlı Ω_1 ve Ω_2 lineer dönüşümleri

$$\Omega_1 x = \begin{pmatrix} -x^{[0]}(a) \\ -x^{[1]}(a) \\ [x,y_2]_\infty \\ [x,y_1]_\infty \end{pmatrix}, \Omega_2 \begin{pmatrix} x^{[3]}(a) \\ x^{[2]}(a) \\ [x,y_4]_\infty \\ [x,y_3]_\infty \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.3.2. (4,2) yardımı ile tanımlanan $(\mathbb{C}^4, \Omega_1, \Omega_2)$ üçlüsü Γ_{min} operatörünün bir sınır uzayıdır.

İspat: Her $x, z \in D_{max}$ için

$$\begin{aligned}(\Omega_1 x, \Omega_2 z) - (\Omega_2 x, \Omega_1 z) &= -x^{[0]}(a)\bar{z}^{[3]}(a) - x^{[1]}(a)\bar{z}^{[2]}(a) \\ &+ [x,y_2]_\infty[z,y_4]_\infty + [x,y_1]_\infty[z,y_3]_\infty \\ &+ x^{[3]}(a)\bar{z}^{[0]}(a) + x^{[2]}(a)\bar{z}^{[1]}(a) \\ &- [x,y_4]_\infty[z,y_2]_\infty - [x,y_3]_\infty[z,y_1]_\infty \\ &= -x^{[0]}(a)\bar{z}^{[3]}(a) - x^{[1]}(a)\bar{z}^{[2]}(a) \\ &+ x^{[3]}(a)\bar{z}^{[0]}(a) + x^{[2]}(a)\bar{z}^{[1]}(a)\end{aligned}$$

$$+ \quad [x, y_4]_\infty [y_2, z]_\infty - [x, y_2]_\infty [y_4, z]_\infty$$
$$+ \quad [x, y_3]_\infty [y_1, z]_\infty - [y_1, x]_\infty [z, y_3]_\infty$$

ve (5.4) Plücker özdeşliğinden

$(\Omega_1 x, \Omega_2 z) - (\Omega_2 x, \Omega_1 z) = [x, z]_\infty - [x, z]_a$

elde edilir. (5.3) Green formülünden

$(\Omega_1 x, \Omega_2 z) - (\Omega_2 x, \Omega_1 z) = (\Gamma_{max} x, z)_{L_\Delta^2} - (x, \Gamma_{max} z)_{L_\Delta^2}$

bulunur. Yani sınır uzayı tanımının ilk şartı sağlanır. İkinci şart ise aşağıdaki Lemma yardımıyla gösterilir.

Lemma 5.3.1 Keyfi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ve β_3 kompleks sayıları için aşağıdaki şartları sağlayan $x \in D_{max}$ operatörü vardır.

$$x^{[0]}(a) = \alpha_0, x^{[1]}(a) = \alpha_1, x^{[2]}(a) = \alpha_2, x^{[3]}(a) = \alpha_3$$
$$[x, y_1]_\infty = \beta_0,\ [x, y_2]_\infty = \beta_1, [x, y_3]_\infty = \beta_2, [x, y_4]_\infty = \beta_3$$

İspat: f fonksiyonu

$$(f, y_1)_{L_\Delta^2} = \beta_0 + \alpha_3,\ (f, y_2)_{L_\Delta^2} = \beta_1 - \alpha_1 \tag{5.13}$$
$$(f, y_3)_{L_\Delta^2} = \beta_2 - \alpha_0\ , (f, y_4)_{L_\Delta^2} = \beta_3 + \alpha_2$$

Koşullarını sağlayan $L_\Delta^2(a, \infty)$ nin bir elemanı olsun. O halde f fonksiyonu y_1, y_2, y_3 ve y_4 ün lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Aslında

$f = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$

dersek, (4.3) teki koşullar c_1, c_2, c_3, c_4 sabitlerinin denklem sistemini oluşturur.

Bu sistemin determinantı y_1, y_2, y_3 ve y_4 lineer bağımsız fonksiyonlarının Gram determinantı olup sıfırdan farklıdır.

$x(t)$ aşağıdaki koşulları sağlayan $\Upsilon(x) = f$ denkleminin bir çözümü olsun:

$x^{[0]}(a) = \alpha_0, x^{[1]}(a) = \alpha_1, x^{[2]}(a) = \alpha_2, x^{[3]}(a) = \alpha_3$.

Kabul edelim ki $x(t)$ aranan fonksiyon olsun. $x(t)$ ve y_j ye Green fonksiyonu uygulanırsa

$\left(f, y_j\right)_{L_\Delta^2} = \left(\Upsilon(x), y_j\right)_{L_\Delta^2} = \left[x, y_j\right]_\infty - \left[x, y_j\right]_a, j = 1,2,3,4$

elde edilir. Ama $\Upsilon\left(y_j\right) = 0$ $(j = 1,2,3,4)$ dır.

$x^{[0]}(a) = \alpha_0, x^{[1]}(a) = \alpha_1, x^{[2]}(a) = \alpha_2, x^{[3]}(a) = \alpha_3$, olduğundan

$$[x, y_j]_a = \begin{cases} -\alpha_3 & , \quad j = 1 \\ \alpha_1 & , \quad j = 2 \\ \alpha_0 & , \quad j = 3 \\ -\alpha_2 & , \quad j = 4 \end{cases}$$

bulunur. Böylece

$(f, y_1)_{L^2_\Delta} = [x, y_1]_\infty - [x, y_1]_a = [x, y_1]_\infty + \alpha_3$

$(f, y_2)_{L^2_\Delta} = [x, y_2]_\infty - [x, y_2]_a = [x, y_2]_\infty - \alpha_1$

$(f, y_3)_{L^2_\Delta} = [x, y_3]_\infty - [x, y_3]_a = [x, y_3]_\infty - \alpha_0$

$(f, y)_{L^2_\Delta} = [x, y_4]_\infty - [x, y_4]_a = [x, y_4]_\infty + \alpha_2$

olur. (4.3) e göre

$[x, y_1]_\infty = \beta_0,\ [x, y_2]_\infty = \beta_1, [x, y_3]_\infty = \beta_2, [x, y_4]_\infty = \beta_3$

olarak bulunur.

Sonuç 5.3.1. Γ_{min} operatörünün

$$(K - I)S_1 x + i(K + I)S_2 x = 0 \tag{5.14}$$

ve

$$(K - I)S_1 x - i(K + I)S_2 x = 0 \tag{5.15}$$

Koşullarını sağlayan $x \in D_{max}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanışı sırasıyla Γ_{min}operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleridir (5.14) ve (5.15) biçiminde gösterilebilir. *K* büzülme operatörü genişleme ile tek türlü olarak belirlenir. Eğer (5.14) ve (5.15) ifadelerindeki *K* operatörü izometrik operatör olursa Γ_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini tanımlar eğer *K* operatörü üniter olursa Γ_{min} operatörünün kendine eş genişlemelerini verir.

Özel olarak

$x^{[3]}(a) - h_1 x^{[0]}(a) = 0$

$x^{[1]}(a) - h_2 x^{[2]}(a) = 0$

$[x, y_4]_\infty - h_3 [x, y_2]_\infty = 0$

$[x, y_3]_\infty - h_4[x, y_1]_\infty = 0$

Sınır koşulları $\Im h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$, $\Im h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty, \Im h_3 \geq 0$ veya $h_3 = \infty, \Im h_4 \geq 0$ veya $h_4 = \infty$,($\Im h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\Im h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty, \Im h_3 = 0)$ veya $h_3 = \infty$ veya $\Im h_4 \geq 0$ veya $h_4 = \infty$) olmak üzere Γ_{min} in maksimal disipatif (kendine eş) genişlemelerini tanımlar.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, zaman skalaları üzerinde singüler 4. mertebeden diferansiyel operatörü ele alındı. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma zaman skalası üzerinde n. mertebeden diferansiyel operatörlerine genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Agarwal R. P., Bohner M., Li W.T., 2004. Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations, vol. 267 *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics,* Marcel Dekker, New York, NY, USA.

Allahverdiev, B. P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential. *Izvest. Ross. Akad. Nauk. Ser . Math*. 59, 19-54 (English transl. Izv. Math. 59,45-62).

Allahverdiev, B.P. , 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *J. Difference Equ. Appl*. 19, no.5, 839-849.

Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62 ,no. 9, 1146-1152.

Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30 , no. 6, 1475-1484.

Anderson D. R. , Guseinov Gusein Sh. , Hoffacker J. , 2006. Higher-order self-adjoint boundary-value problems on time scales, *J. Comput. Appl. Math*., 194 ,2, 309-342.

Anderson D.R. , Hoffacker J. , 2003. A stacked delta- nabla self adjoint problem of even order, Math. *Comput. Modelling* 38, 481-494.

Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, Izu. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. *Fiz-Tekhn. Mat. Nauk* 2,140-143.

Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Mat. Sb*.38 , 431-450.

Bohner, M., Peterson, A., 2001. *Dynamic Equations on Time Scales,* Birkhäuser, Boston.

Bohner, M., Peterson, A., 2003. (Eds.), *Advances in Dynamic Equations on Time Scales,* Birkhäuser, Boston.

Bruk, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, *Mat. Sb*.,100, 210-216.

Calkin,J. W.,1939. Abstract boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.,*Vol 45,No. 3,369-442.

Canoğlu, A., Allahverdiev, B.P., 2003. Selfadjoint and dissipative extensions of a symmetric Schrödinger operator. *Math. Balkanica* (N.S.) 17 , no. 1-2, 113-120.

Fulton, C.T., 1989. The Bessel-squared equation in the lim-2, lim-3, and lim-4 cases, Quart. *J. Math. Oxford (2)*,40,423-456.

Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N. and Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, *Dokl.Akad .Nauk* SSSR 205,1029-1032; English transl., Soviet Math. Dokl. 13(1972),1063-1067.

Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I. , 1984. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Naukova Dumka, Kiev (English transl. 1991,Birkhauser Verlag).

Gorbachuk,M.L. , Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrain. Mat. Zh.* 41, 1299-1312 (English transl. in *Ukrainian Math. J*. 41 (1989), 1117-1129).

Guseĭnov, I. M., Pashaev, R. T., 1983. Description of selfadjoint extensions of a class of differential operators of order 2n with defect indices (n+k,,n+k), 0<k<n, Izv.Akad.Nauk Azerb. *Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk*, No.2, ,15-19 (in Russian).

Guseinov Gusein Sh., 2003. Integrration on time scales, *J.Math.Anal.Appl*.285, 107-125.

Guseinov Gusein Sh., 2005. Self-adjoint boundary value problems on time scales and symmetric Green's functions, *Turkish J. Math*., 29, 365-380.

Guseinov, G. Sh. 2008. An expansion theorem for a Sturm-Liouville operator on semi-unbounded time scales, *Advances in Dynamical Systems and Applications* 3, 147-160.

Hilger S., 1990. Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Math.*,1818-1856.

Huseynov A., 2012. Weyl's limit point and limit circle for a dynamic systems. *Dynamical systems and methods*, Springer, New York, 215-225.

Jones M. A., Song B., Thomas D. M.,2004. "Controlling wound healing through debridement," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 40, no. 9-10, pp. 1057-1064.

Khol'kin, A. M., 1981. Self-adjoint boundary conditions at-infinity for a quasiregular system of even-order differential equations pp.174-183 in: *Theory of operators in function spaces and its applications, Naukova Dumka*, Kiev.

Kochubei, A. N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, *Mat. Zametki 17,*,41-48*;* English transl. in Math. Notes 17,25-28.

Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. *I, Mat*. Sb. 20, 431-495; II, Mat. Sb. 21,(1947), 365-404

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval (0,∞), *Akad. Nauk* SSSR Ser Mat. 16,292-324 .

Maksudov, F.G., Allahverdiev, B.P., 1993. On the extensions of Schrödinger operators with a matrix potentials, *Dokl. Akad. Nauk* 332, no.1,18-20;English transl. Russian Acad. *Sci. Dokl. Math*. 48 (1994), no.2, 240-243.

Malamud, M. M., Mogilevskiy, V. I., 1997. On extensions of dual pairs of operators, *Dopov. Nats Akad. Nauk. Ukr*. ,no. 1,30-37.

Mirzoev, G. A., 1980. Fourth order quasi regular differential operator, *Dokl. Akad. Nauk* SSSR 251, no.3,550-553; *English transl. Soviet Math. Dpkl*. 21,(1980), 480-483.

Mogilevskiy, V. I., 1994. On proper extensions of a singular differential operator in a space of vector functions, *Dopov. Akad. Nauk. Ukraini*, no.9,29-33 (in Russian).

Naimark., M.A., 1968. Linear Differential Operators, *2nd edn., Nauka*, Moscow, (English transl. of 1st. edn., 1,2, 1969, New York).

Neumann, J. von., 1929. Allgemeine Eigenwertheorie Hermitischer Functionaloperatoren, *Math. Ann*. 102,49-131.

Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', *Trans. Amer. Math . Soc*. 90,193-254; *Russiantransl. İn Matematika* 6:4(1962)11-70.

Rellich, F., 1951. Halbbeschrankte gewöhnliche Differential operatoren zweiter Ordnung' , *Math. Ann*. 122,343-368.

Rofe-Beketov, F.S. , 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, *Dokl. Akad. Nauk* SSSR 184,1034-1037 (*English translet in Soviet Math. Dokl*. 10 (1969),188-192).

Rynne B. P., 2007. L^2 spaces and boundary value problems on time-scales, *J. Math. Anal. Appl*. 328,1217-1236.

Spedding V., 2003. "Taming nature's numbers," *New Scientist*, vol. 179, no. 2404, pp. 28--31.

Thomas D. M., Vandemuelebroeke L. , Yamaguchi K., 2004. "A mathematical evolution model for phytoremediation of metals," *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, vol. 5, no. 2, pp. 411-422, 2005.ker, Florida.

Tuna, H. , Allahverdiev, B. P. , Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, (In Press).

Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', Trudy Moskov. *Mat Obshch* 1,187-246.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Songül BAYRAK

Doğum Yeri ve Yılı : Eminönü 1992

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	:Esenler Çok Programlı Lisesi	2006-2010
Lisans	:Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	2010-2014

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Mavikent Ramazan Abacı Ortaokulu /Antalya (Öğretmen)	2015-2016
2- Özel Özden Etüt Merkezi /Antalya (Öğretmen)	2016-2017
3- Özel Antalya Doruk Koleji / Antalya (Öğretmen)	2017-…

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

Tuna, H., Bayrak S., 2018. On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales. FILOMAT, 32, 11.