T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE SİMETRİK 4.MERTEBE DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Hatice BULUT

BURDUR, 2019

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE SİMETRİK 4.MERTEBE DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Hatice BULUT

Danışman

Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2019

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Hatice BULUT tarafından **Doç. Dr. Hüseyin TUNA** yönetiminde hazırlanan **"Zaman Skalası Üzerinde Simetrik 4. Mertebe Diferansiyel Operatörünün Genişlemeleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 02/01 /2019

Doç. Dr. Sırma Zeynep ALPARSLAN GÖK (Başkan)
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

....

Doç. Dr. Ayşe Gül MUTLU GÜLMEMİŞ

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Zaman Skalası Üzerinde Simetrik 4. Mertebe Diferansiyel Operatörünün Genişlemeleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

02 / 01 / 2019

Hatice BULUT

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Doç. Dr. Hüseyin TUNA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım

Ocak, 2019

Hatice BULUT

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{R}$	: Reel sayı
∇	: Nabla türev
Δ	: Delta türev
$\mathbf{T}$	: Zaman Skalası
$\boldsymbol{\sigma}$	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
$\boldsymbol{\mu}$	: İleri sıçrama fonksiyonu
$\boldsymbol{\upsilon}$	: Geri sıçrama fonksiyonu
$\boldsymbol{C_{rd}}$	: Sağa yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C_{ld}}$	: Sola yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{Z}$	: Tam sayılar
$\boldsymbol{N_0}$	: Negatif olmayan tam sayılar
$\nabla \boldsymbol{f}$	: İleri fark operatörü
$\Delta \boldsymbol{f}$	: Geri fark operatörü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Zaman Skalası Üzerinde Simetrik 4.Mertebe Diferansiyel Operatörünün Genişlemeleri

Hatice BULUT

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Ocak, 2019

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Daha sonra, zaman skalaları üzerinde 2n. mertebeden diferansiyel ifadelerin temel özellikleri verildi.

Son olarak sınırlı zaman skaları üzerinde düzgün olmayan kirişlerinin ters titreşim Euler-Bernoulli dinamik denklemi için sınır değer uzayı oluşturuldu. Bu operatörler için disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verildi.

Anahtar Kelimeler: Simetrik operatör, Kendine eş operatör, Disipatif operatör, Akretif operatör, Genişleme, Sınır değer uzayı, Sınır koşulları

SUMMARY

M. Sc. Thesis

The Extensions of Symmetric Fourth Order Differential Operators on Time Scales

Hatice BULUT

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin TUNA

January, 2019

In this work, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the work are given.

Later, basic properties of 2nd order differential expression on bounded time scales are given.

Finally, a space of boundary value is constructed for Euler-Bernoulli dynamic equation of transverse vibrations of non-uniform beams on bounded time scales. A description of all maximal dissipative, accretive, self adjoint and other extensions of such operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: Symmetric operators, Self adjoint operators, Dissipative operators, Accretive operators, A space of boundary value, Boundary conditions

1.GİRİŞ

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemler matematikte oldukça yeni bir çalışma alanıdır. Bu alandaki temel sonuçlar Hilger tarafından 1988 tarihinde elde edilmiştir (Hilger, 1990). Zaman skalası kavramı, diferansiyel denklemler ve fark denklemler teorilerini birleştirme amacıyla ortaya çıkmıştır. Zaman skalası üzerine çalışmaların pek çok önemli uygulamaları vardır. Örneğin, ısı transferi çalışmalarında, böcek popülasyon modelleri, borsa ve sinirsel ağ modellerinde kullanılmaktadır. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi için Bohner ve Peterson'un (Bohner ve Peterson, 2001, 2003) çalışmalarına bakılabilir.

Zaman skalası üzerinde yüksek mertebeden dinamik denklemler Anderson, Guseinov ve Hoffacker tarafından çalışılmıştır (Anderson vd., 2006). Zaman skalası üzerinde çift mertebeli karışık türevli problemler için Green fonksiyonu Anderson Hoffacker tarafından çalışılmıştır (Anderson ve Hoffacker, 2003). Yine aynı yazarlar tarafından çift mertebeli kendine eş problemler 2003 yılında çalışılmıştır (Anderson ve Hoffacker, 2003a). 2002 yılında zaman skalası üzerinde sınır değer problemlerinin pozitif çözümleri ve Green fonksiyonları Atıcı ve Guseinov tarafından çalışılmıştır. (Atıcı ve Guseinov, 2002). Zaman skalası üzerinde yüksek mertebeden kendine eş diferansiyel ifadeler ve bu denklemlere karşılık gelen Green fonksiyonlarının simetrikliği Guseinov tarafından ele alınmıştır (Guseinov, 2005).

Hilbert uzayı içindeki simetrik operatörlerin simetrik genişleme teorisi ile ilgili sonuçlar ilk kez 1929 yılında J.von. Neumann (Neumann ,1929) tarafından verildi. Bu teori self-adjoint lineer diferansiyel operatörler ile eşleşen spektral problemler içinde merkezi bir rol oynar. Simetrik operatörlerin soyut sınır koşulları yardımıyla self-adjoint genişlemeleri ilk kez Calkin (Calkin, 1939) tarafından verildi. Sonra, Rofe-Beketov (Rofe-Beketov ,1969) tarafından lineer bağıntı ve soyut sınır koşulları yardımıyla simetrik operatörlerin self-adjoint genişlemeleri belirlendi. Bruk (Bruk , 1976) ve Kochubei (Kochubei ,1975); sınır değer uzay kavramını tanımladılar. Bu kavram yardımıyla, simetrik operatörlerin self-adjoint, maksimal disipatif, maksimal akretif genişlemelerini elde ettiler. Krein (Krein, 1952), Maksudov ve Allahverdiev (Maksudov ve Allahverdiev, 1993), Malamud ve Mogilevskiy (Malamud ve Mogilevskiy, 1997), Allahverdiev (Allahverdiev, 2013, 2014, 2016), Canoğlu ve Allahverdiev (Canoğlu ve Allahverdiev , 2003), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır. Bu konuda daha geniş bilgi için Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk, Gorbachuk and Kochubei ,1989) isimli kaynağa bakılabilir.

Düzgün olmayan kirişlerin ters titreşimi problemi, inşaat mühendisliğinde ve makine mühendisliğindeki önemli problemlerden biridir. Bu problem modern mühendislikte pek çok uygulamaya sahiptir.. Örneğin, türbin kanadı, helikopter kanatları, uydu yapısı ve robotik silahlar gibi. Pek çok araştırmacı tarafından bu konu çalışılmıştır : Conway ve Dubil (Conway ve Dubil ,1965), Mabie ve Rogers (Mabie ve Rogers ,1968), De Rosa ve Auciello (De Rosa ve Auciello , 1996); Conway, Becker ve Dubil (Conway vd.,1964); Cranch ve Adler (Cranch ve Adler ,1956); Auciello ve Nole (Auciello ve Nole ,1998); Wang (Wang ,1967, 1996); Storti ve, Aboelnaga (Storti ve, Aboelnaga ,1987); Caruntu (Caruntu , 1996, 2000, 2009); Naguleswaran (Naguleswaran , 1994, 1995); Wright, Smith, Theresher ve Wang (Wright vd.,1982), Jones, Song ve Thomas (Jones vd., 2004).

Bu tez çalışmasında sınırlı zaman skalaları üzerinde Euler-Bernoulli düzgün olmayan kirişlerinin ters titreşim problemi ele alındı. Dördüncü mertebeden bir dinamik denklemle ifade edilen bu probleme karşılık gelen operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif, self-adjoint genişlemeleri verildi.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 2.1. Reel (Gerçel) sayıların keyfi, boş olmayan kapalı alt kümelerine zaman skalası denir. Zaman skalası T ile gösterilir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Örnek 2.1. Reel (Gerçel) sayılar (R),Tam sayılar (Z), Doğal sayılar (N) ve [2,5] kapalı alt aralığı bir zaman skalasına örnek oluştururken Rasyonel sayılar (Q), İrrasyonel sayılar (R/Q), Kompleks sayılar (C) ve (1,3) açık aralığı zaman skalasına örnek oluşturmazlar.

Tanım 2.2. $t \in T$olmak üzere $\sigma: T \rightarrow T$ operatörü ileri sıçrama operatörüdür ve

$\sigma(t) = \inf\{s\epsilon T: s > t\}$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003).

Tanım 2.3.. $t \in T$olmak üzere; $\rho: T \rightarrow T$ operatörü geri sıçrama operatörüdür ve

$\rho(t) = \sup\{s\epsilon T: s < t\}$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.4. Graininess fonksiyonları $\mu, \vartheta: T \rightarrow (0, \infty)$, $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ve $\vartheta(t) = t - \rho(t)$, $\forall t \in T$ ile tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.5. $t \in T$ olsun. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise t ye sol yayılmış nokta denir. Eğer $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in T$ noktasına ayrık (izole) nokta denir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.6. $t \in T$ olsun. Eğer $t < supT$ ve $\sigma(t) = t$ ise t ye sağ yoğun nokta, $t > infT$ ve $\rho(t) = t$ ise t ye sol yoğun nokta denir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.7. T zaman skalası sol yayılmış maksimum değer M' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi $T^K = T - \{M\}$ dir. Diğer durumda $T^K = T$ şeklindedir.

T zaman skalası sağ yayılmış maksimum değer m' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi

$T_K = T - \{m\}$ dir. Diğer durumda $T_K = T$ şeklindedir.

Örnek 2.2. Eğer $T = R$ ise $\sigma(t) = \rho(t) = t$ ve $\mu(t) = \nu(t) = 0$ dır. $t = hZ$ ise, $\sigma(t) = t + h$, $\rho(t) = t - h$ ve $\mu(t) = \nu(t) = h$ dır. Diğer yandan $T = K_q$ ise $\sigma(t) = q^t$, $\rho(t) = q^{-1}t$, $\mu(t) = (q-1)t$ ve $\nu(t) = (1 - q^{-1})t$ olur.

Sola dağılmış maksimal nokta hariç T nin elemanlarından oluşan kümeyi T^K ile gösterelim. Benzer şekilde, sağa dağılmış minimal nokta çıkartılarak oluşturulan kümeye T_K ile gösterelim. Bu tezde $T^{K^2} = (T^K)^K$ gösterimini kullanıyoruz.

Tanım 2.9. $U \subset T$ olmak üzere $\forall\delta > 0$ için

$U(t) = \{s \in T : |s - t| < \delta\}$

ile tanımlanan U(t) kümesine t'nin δ komşuluğu denir.

Tanım 2.10. (Delta Türevi) $f: T \to R$ tanımlı bir fonksiyon ve $t \in T^K$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ olacak şekilde $\exists\delta > 0$ için t noktasının $U = (t-\delta, t+\delta) \cap T$ komşuluğunda $f^{\Delta}(t)$ türevi,

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}[\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \ , \forall s \in U \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^{Δ}(t) türevine f fonksiyonunun delta (Hilger) türevi (veya Δ -türevi) denir.

Eğer $\forall t \in T^K$ için f fonksiyonu Δ −türevlenebiliyorsa T^K kümesinde delta (Hilger) türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.11. (Nabla Türevi) $f: T \to R$ tanımlı bir fonksiyon ve $t \in T_K$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ olacak şekilde $\exists\delta > 0$ için t noktasının $U = (t-\delta, t+\delta) \cap T$ komşuluğunda $f^{\nabla}(t)$ türevi,

$$\left| f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}[\rho(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \ , \forall s \in U$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^{∇}(t) türevine f fonksiyonunun nabla türevi denir.

Eğer $\forall t \in T_K$ için f fonksiyonu ∇-türevlenebiliyorsa T_K kümesinde nabla türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(\rho(t))}{s - \rho(t)}$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Örnek 2.3. Eğer $T = R$ ise,

$$f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(t) = f'(t)$$

dir.

$T = hZ$ ise,

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

ve

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(t-h)}{h}$$

dir.

Eğer $T = K_q$ ise her $t \neq 0$ için

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$$

ve

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(q^{-1}t)}{(1-q^{-1})t},$$

$$f^{\Delta}(0)=f^{\nabla}(0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(s)-f(0)}{s}$$

dir.

Örnek 2.4. Eğer $f: T \to R$ ve $\forall t \in T$ için $f(t) = t^2$ ise

$f^{\Delta}(t) = 2t = t + \sigma(t)$

şeklinde olur. Benzer şekilde

$f^{\nabla}(t) = 2t = t + \rho(t)$

olur.

Örnek 2.5. Eğer $f: T \to R$ ve $\forall t \in T$ için $f(t) = \sqrt{t}$ ise

$$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}}$$

Şeklinde olur. Benzer şekilde

$$f^{\nabla} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\rho(t)}}$$

şeklinde olur.

Teorem 2.1. $f, g: T \to R$ tanımlı bu fonksiyonlar $t \in T^K$ için Δ türevlenebilir olsun.

$i)$ $f + g: T \to R$ tanımlanır ve

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

şeklinde t'de Δ türevlenebilirdir.

$ii)$ $\forall \alpha \epsilon R$ için $\alpha f: T \to R$ tanımlanır ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

şeklinde t'de Δ türevlenebilirdir.

$iii)$ $fg: T \to R$ tanımlanır ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$$
$$= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) \quad (2.2)$$

şeklinde t'de Δ türevlenebilirdir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, o zaman

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

$\frac{1}{f}$, t'de Δ türevlenebilirdir.

v) Eğer g(t)g(σ(t))≠0 ise, o zaman

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

$\frac{f}{g}$, t'de Δ türevlenebilirdir.

Teorem 2.2. . $f, g: T \to R$ tanımlı bu fonksiyonlar $t \in T_K$ için ∇ türevlenebilir olsun.

$i)$ $f + g: T \to R$ tanımlanır ve

$$(f + g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

şeklinde t'de ∇ türevlenebilirdir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

$ii)$ $\forall \alpha \epsilon R$ için $\alpha f: T \to R$ tanımlanır ve

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t)$$

şeklinde t'de ∇ türevlenebilirdir.

$iii)$ $fg: T \to R$ tanımlanır ve

$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f(\rho(t))g^{\nabla}(t)$$
$$= f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}g(\rho(t)) \quad (2.3)$$

şeklinde t'de ∇ türevlenebilirdir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, o zaman

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f(\rho(t))}$$

$\frac{1}{f}$, t'de ∇ türevlenebilirdir.

v) Eğer g(t)g(ρ(t))≠0 ise, o zaman

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

$\frac{f}{g}$, t'de ∇ türevlenebilirdir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Şimdi delta ve nabla türevleri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 2.3.

(i) Eğer $f: T \to R$ ise, T^K üzerinde Δ-türevlenebilir ve eğer f^{Δ}, T^Küzerinde sürekliyse f, T_K üzerinde ∇-diferansiyellenebilir ve her $t \in T^K$ için

$$f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}(\rho(t))$$

dir.

(ii)Eğer $f: T \to R$ ise, T_K üzerinde ∇-türevlenebilir ve eğer f^{∇}, $T_K$üzerinde sürekliyse f, T^K üzerinde Δ-diferansiyellenebilir ve her $t \in T_K$için

$$f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(\sigma(t))$$

dir. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.12. Eğer $f: T \to R$ fonksiyonunun T deki sağ yoğun noktalarda sağdan limiti ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa, bu fonksiyona düzenli fonksiyon denir.

Tanım 2.13. (Delta integrali) $f: T \to R$ düzenli fonksiyon olsun. Eğer $F : T \to \mathrm{R}$ fonksiyonu T^Kda delta türevlenebilir ve $\forall t \in T^K$için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun delta-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer fonksiyonunun Δ anti-türevi varsa f ye Δ integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in T$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.14. (Nabla integrali) $f : T \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $F : T \to \mathrm{R}$ fonksiyonu T_K da nabla türevlenebilir ve $\forall t \in T_K$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer fonksiyonunun∇ anti-türevi varsa f ye ∇ integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in T$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Örnek 2.6. $a, b \in T$ ve $a < b$ olsun.

i)Eğer $T = R$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$$

Sağda ki integral normal integraldir.

ii)Yalnız izole noktaların oluşturduğu aralık $[a,b]$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t)$$

ve

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \sum_{t\in(a,b]} v(t)f(t)$$

$\mu(t) = \sigma(t) - t$ ve $v(t) = t - \rho(t)$dir.

Özel olarak $T = Z$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

ve

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

dır. Eğer $T = hZ$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = h \sum_{t\in[a,b)} f(t)$$

ve

$$\int_a^b f(t)\nabla t = h \sum_{t\in(a,b]} f(t)$$

dir.

Eğer $T = K_q$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = (q-1) \sum_{t\in[a,b)} tf(t)$$

ve

$$\int_a^b f(t)\nabla t = (1-q^{-1}) \sum_{t\in(a,b]} tf(t)$$

dır.

Tanım 2.15. Bir $f: T \to R$ fonksiyonu Tnin bütün sağ-yoğun noktalarında sürekli ve T nin bütün sol-yoğun noktalarında soldan limitleri var ve sonlu ise sağ-yoğun sürekli (rd-sürekli) denir. T üzerinde bütün sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}(T)$ ile gösterilir.

Benzer şekilde Bir $f: T \to R$ fonksiyonu T nin bütün sol-yoğun noktalarında sürekli ve Tnin bütün sağ-yoğun noktalarında limitleri var ve sonlu ise sol-yoğun sürekli (ld-sürekli) denir. T üzerinde bütün sol-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi $C_{ld}(T)$ ile gösterilir.

[a,b) aralığı üzerinde bütün sağ-yoğun sürekli sınırlı fonksiyonlar a dan b ye Δ integrallenebilirdir. (a,b] aralığı üzerinde bütün sol-yoğun sürekli sınırlı fonksiyonlar a dan b ye ∇ integrallenebilirdir.

Teorem 2.4. Eğer $f: T \to R$ sürekli bir fonksiyon, $\forall a, b \in T$ için $a < b$ olduğunda

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(\rho(t))\nabla t \ ve \int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(\sigma(t))\Delta t \tag{2.4}$$

dir.

Gerçekten, eğer $F \to R$ ise f için $\Delta -$ antitürevi vardır. $\forall t \in T^K$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ve Teorem 2.1. (i) den $\forall t \in T_K$ için

$$F^{\nabla}(t) = F^{\Delta}(\rho(t)) = f(\rho(t))$$

ifadesine sahibiz.

Bu yüzden F , $f(\rho(t))$ için $\nabla -$ antitürevleri vardır. Böylece

$$\int_a^b f(\rho(t))\nabla t = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\Delta t$$

dır.

Teorem 2.3. (ii) kullanılarak benzer tarzda (2.4) eşitliğindeki ikinci formül ispatlanabilir.

Eğer $f, g: T \to R$ fonksiyonlar sürekli türevleniyorsa delta ve nabla diferansiyellenebilir bu yüzden

$$\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t \tag{2.5}$$

$\int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(\rho(t))g^\Delta(t)\nabla t$ (2.6)

$\int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g^\nabla(t)\nabla t$ (2.7)

$\int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t$ (2.8)

olur. (Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Tanım 2.16. $V \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa *V*' ye $\mathbb{K}$ üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

a) (*V*,+) Cebirsel yapısı değişmeli gruptur. Yani,

1. $\forall u,v \epsilon V$, $u+v \epsilon V'$dir.
2. $\forall u,v,k \epsilon V$, $u+(v+k)=(u+v)+k$' dir.
3. $\forall u \epsilon V$, $u+0=0+u= u \epsilon V$olacak şekilde bir tek $0 \epsilon V$vardır.
4. $\forall u,v \epsilon V$, $u+(-u)=(-u)+u=0$ olacak şekilde bir tek $-u \epsilon V$vardır.
5. $\forall u,v \epsilon V$, $u+v=v+u$' dır.

b) $u,v,\epsilon V$ve $\theta, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\theta u \in K$'dir
2. $\theta(u+v) = \theta u + \theta v$'dir.
3. $(\theta + \beta)u = \theta u + \beta u$'dir
4. $(\theta\beta)u = \theta(\beta u)$' dir.
5. $\forall u \in V$, $1V=V$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır. Burada 1, $\mathbb{K}$ cisminin birim elemanıdır.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ olması halinde *V*'ye reel lineer uzay $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ olması halinde *V*' ye kompleks lineer uzay denir (Bozkurt ve Türen, 2000).

Tanım 2.17. Lineer uzaylarda tanımlı olan dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.18. *U*, bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u,v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (u,v) ile gösterilen kompleks sayısına *u* ve *v* elemanlarının *iç çarpımı* ve *U* lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

1. $(u,u) \geq 0; (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u,v) = \overline{(v,u)}$
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u,v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u,v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.19. $(U, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. *u* vektörünün normu,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{j=i}^{\infty} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(U, (.,.))$iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.20. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}$$

normuna göre tam ise, yani $(U, (.,.))$içindeki her Cauchy dizisi *U'* nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.21. Bir *U* iç çarpım uzayı

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

ifadesi bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur.

Sayılabilir, tam ortonormal sistem içeren bir iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve genellikle *H* ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.22. K , H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı $(K \subseteq H)$olsun.

$$T: K \subseteq H \to H$$

dönüşümü, her $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{C}$ ve her $u, v \epsilon K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$$

eşitliğini sağlanıyorsa, *T* dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.23. H Hilbert uzayının bir alt kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir *L* lineer operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise L , H üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. Tüm H uzayında tanımlanıp aşağıdaki koşulları sağlayan *L* fonksiyoneline *sınırlı lineer fonksiyonel* denir.

1. $u, v \in H \; ve \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \; dir.$

2. Her $u \in H$ ve bir *k* sabiti için

$|L(u)| \leq k\|u\|$ dir (Naimark, 1968).

Tanım 2.24. H Hilbert uzayı üzerinnde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin. Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u\neq 0}\frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|\leq 1}\|Tu\|$$

eşitliği ile de hesaplanabilir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.25. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t)$$

eşitliğini saplayan T^* operatörüne T' nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in$ H vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i. $(T^*)^* = T$

ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$

iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$

iv. $(T)^* = L^*T^*$

v. $\|T^*\| = \|T\|$ $(T\ sınırlı\ iken)$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.26. $T^* = T$ ise, *T'* ye *kendine eş operatör* adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.27. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\text{lm}(Th, h) \geq 0$$

ise, T lineer operatörüne *dissipatif (dissipative) operatör* denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

3.KENDİNE EŞ DİFERANSİYEL İFADELER

T zaman skalası olsun. $p_0, p_1, ..., p_n$, T üzerinde tanımlı sağa-yoğun sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall t \in T$ için $p_0(t) \neq 0$ ve $a \in T^{K^n}$, $b \in T_{K^n}$, $T^* = T_{K^n}^{K^n} = T^{K^n} \cap T_{K^n}$ ve $a < b$ olsun. Bu takdirde herhangi bir 2. mertebeden diferansiyel ifade,

$$Ly(t) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\left[p_i(t)y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{n-i-1}\Delta} \tag{3.1}$$

$$= (-1)^n\left[p_0(t)y^{\Delta^{n-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{n-1}\Delta} + \cdots - \left[p_{n-3}(t)y^{\Delta^2\nabla}(t)\right]^{\nabla^2\Delta} + [p_{n-2}(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla\Delta} - [p_{n-1}(t)y^{\nabla}(t)]^{\Delta} + p_n(t)y(t)$$

ile tanımlanır. (Gusenov, 2005)

Tanım 3.1. $T_{K^{n-i}}^{K^{n-i}}$ üzerinde tanımlı ve $0 \leq i \leq n$ için sağ-yoğun sürekli $\left(p_i y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}\right)^{\nabla^{n-i-1}\Delta}$ fonksiyonlarının lineer kümesini Ω ile gösterelim. $\forall y \in \Omega$ için Ly ifadesi tanımlıdır ve T^* üzerinde sağ-yoğun sürekli fonksiyon belirtir.

Her $y \in \Omega$ ifadesi için T^* sağa-yoğun sürekli bir fonksiyon Ly tanımlandı.

$n = 1$ ise (3.1) ifadesi

$$Ly(t) = -[p_0(t)y^{\nabla}(t)]^{\Delta} + p_1(t)y(t) \tag{3.2}$$

şeklindedir.

$n = 2$ için

$$Ly(t) = [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla\Delta} - [p_1(t)y^{\nabla}]^{\Delta} + p_2(t)y(t) \tag{3.3}$$

olur.

Teorem 3.1. $a, b \in T$ olsun öyle ki $a \in T^{K^n}, b \in T_{K^n}$ ve $a < b$ olsun. Bütün $y, z \in \Omega$ fonksiyonları için Lagrange özdeşliği (Green formülü)

$$\int_a^b (Ly)z\Delta t = [y,z]_a^b + \int_a^b y(Lz)\Delta t \tag{3.4}$$

ile verilir ki bu da

$$[y,z]_a^b = [y,z](b) - [y,z](a)$$

ve

$$[y,z](t) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left\{ \begin{matrix} y^{\Delta^{n-k-1}}(t)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[p_i(t)z^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{k-i}} \\ -z^{\Delta^{n-k-1}}(t)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[p_i(t)y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{k-i}} \end{matrix} \right\} \tag{3.5}$$

olur.

Özel olarak $n = 1$ için

$[y,z](t) = p_0(t)y(t)z^{\nabla}(t) - y^{\nabla}(t)z(t)$

dır.

$n = 2$ için

$[y,z](t) = [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}z(t) - y(t)[p_0(t)z^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}$

$-p_0(t)[y^{\Delta\nabla}(t)z^{\Delta}(t) - y^{\Delta}(t)z^{\Delta\nabla}(t)] - p_1(t)[y^{\nabla}(t)z(t) - y(t)z^{\nabla}(t)]$

olur.

İspat: Yalnızca $n = 1$ ve $n = 2$ durumlarını ele alacağız. Bu durum keyfi n ler için benzer şekilde ispatlanabilir.

Eğer $n = 1$ ise

$$\int_a^b (Ly)z\Delta t = -\int_a^b \left[p_0(t)y^{\nabla}(t)\right]^{\Delta} z(t)\Delta t + \int_a^b p_1(t)y(t)z(t)\Delta t \tag{3.6}$$

dir.

(2.7) ve (2.8) formüllerinde ilk tarafına kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_a^b [p_0(t)y^{\nabla}]^{\Delta}z(t)\Delta t = p_0(t)y^{\nabla}(t)z(t)\Big|_a^b - \int_a^b p_0(t)y^{\nabla}(t)z^{\nabla}(t)\nabla t$$

$$= p_0(t)y^{\nabla}(t)z(t)\Big|_a^b - p_0(t)y(t)z^{\nabla}(t)\Big|_a^b + \int_a^b y(t)[p_0(t)z^{\nabla}]^{\Delta}\Delta t$$

elde ederiz.

Bu ifadeyi (3.6) nın sağ tarafında yerine koyduğumuzda $n=1$ durumu için tamamen kanıtlanmış olur.

Eğer $n=2$ ise, (3.3) de olduğu gibi $Ly(t)$ tanımlandı.

$L_1y(t) = [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla\Delta}$

ifadesi için (2.5) de kısmi integrasyon uygularsak ve Teorem 2.3'den (ii) kullanılarak

$$\int_a^b (L_1y)z\Delta t = \int_a^b [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla\Delta} z(t)\Delta t$$

$$= [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}z(t)\Big|_a^b - \int_a^b [p_0y^{\Delta\nabla}]^{\nabla}\left(\sigma(t)\right)z^{\Delta}(t)\Delta t$$

$$= [p_0(t)y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}z(t)\Big|_a^b - \int_a^b [p_0y^{\Delta\nabla}]^{\nabla}(t)z^{\Delta}(t)\Delta t$$

ifadesini elde ederiz.

(2.7) formülünde kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_a^b [p_0 y^{\Delta\nabla}]^{\Delta}\,(t) z^{\Delta}(t)\Delta t = p_0(t) y^{\Delta\nabla}(t) z^{\Delta}(t)\Big|_a^b - \int_a^b p_0(t) y^{\Delta\nabla}\,(t) z^{\Delta\nabla}(t)\nabla t$$

elde edilir.

(2.6) formülünde kısmi integrasyon uygularsak ve Teorem 2.3 (i) den

$$\int_a^b [p_0 y^{\Delta\nabla}]^{\Delta}\,(t) z^{\Delta\nabla}(t)\nabla t = p_0(t) y^{\Delta}(t) z^{\Delta\nabla}(t)\Big|_a^b - \int_a^b [y^{\Delta}]\big(\rho(t)\big)\,[p_0 z^{\Delta\nabla}]^{\nabla}(t)\nabla t$$

$$= p_0(t) y^{\Delta}(t) z^{\Delta\nabla}(t)\Big|_a^b - \int_a^b y^{\nabla}(t)\,[p_0 z^{\Delta\nabla}]^{\nabla}(t)\nabla t$$

bulunur. Son olarak, (2.8) formülünde kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_a^b y^{\nabla}(t)[p_0 z^{\Delta\nabla}]^{\nabla}\,(t)\nabla t = y(t)[p_0 z^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}\Big|_a^b - \int_a^b y(t)[p_0 z^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla\Delta}\Delta t$$

elde ederiz. Bu formüllerin tamamını birleştirirsek,

$$\int_a^b (L_1\, y) z\Delta t = [p_0(t) y^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla} z(t)\Big|_a^b - p_0(t) y^{\Delta\nabla}(t) z^{\Delta}(t)\Big|_a^b$$

$$+ p_0(t) y^{\Delta}(t) z^{\Delta\nabla}(t)\Big|_a^b - y(t)[p_0(t) z^{\Delta\nabla}(t)]^{\nabla}\Big|_a^b + \int_a^b y(L_1 z)\Delta t$$

elde edilir. Sonuç olarak, $n=1$ durumundaki hesaplamalar hesaba katarak $n=2$ durumunu kanıtlayabiliriz. (Guseinov, 2005)

Uyarı 3.1. (3.4) özdeşliği gösterdi ki, Ly diferansiyel ifadesi

$$\langle y, z\rangle = \int_a^b y(t) z(t)\Delta t$$

iç çarpımına göre formal olarak kendine eşdir (self-adjoint).

Her bir $y \in \Omega$ için, $t \in T^*$ kümesi $0 \le k \le n-1$ için

$y^{[k]} = y^{\Delta^k}, 0 \le k \le n-1, y^{[0]} = y^{\Delta^n} = y,$

$y^{[n]} = p_0 y^{\Delta^{n-1}\nabla},$

$y^{[n+k]} = p_k y^{\Delta^{n-k-1}\nabla} - \left(y^{[n+k-1]}\right)^{\nabla}, 1 \le k \le n-1,$

$y^{[2n]} = p_n y - \left(y^{[2n-1]}\right)^{\Delta}$

olsun.

Bu fonksiyonlar $y^{[i]}, 0 \leq i \leq 2n$, quasi-türevleri olarak adlandırılır. Bu fonksiyonlar yardımıyla Ly ifadesi

$$y^{[n+j]} = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \left[p_i(t) y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t) \right]^{\nabla^{j-i}}, 0 \leq j \leq n-1,$$

$$y^{[2n]} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \left[p_i(t) y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t) \right]^{\nabla^{n-i-1}\Delta} = Ly(t)$$

ile gösterilmiş olur.

Böylece (3.5) eşitliği ile tanımlanan $[y,z](t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$[y,z](t) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ y^{[k-1]}(t) z^{[2n-k]}(t) - y^{[2n-k]}(t) z^{[k-1]}(t) \right\} \tag{3.7}$$

4.KENDİNE EŞ SINIR ŞARTLARI VE GREEN FONKSİYONU

Bu bölümde zaman skalası üzerinde kendine eş sınır koşulları ve green fonksiyonundan söz edeceğiz.

$a, b \in T$ öyle ki $a < b$ için $a \in T^{K^n}, b \in T_{K^n}$ olsun. Eğer y ve z reel değerli, $[a, b)$ üzerinde sağa yoğun sürekli ve sınırlı fonksiyonlar ise, onların iç çarpımını

$\langle y, z \rangle = \int_a^b y(t)z(t)\Delta t$

ile tanımlayalım. Farzedelim ki

$p_n: [a, b) \to R$

sağa yoğun sürekli ve sınırlı fonksiyon olsun ve $0 \le i \le n-1$ için

$p_i: [\rho^{n-i-1}(a), b] \to R$

üzerinde sağa yoğun sürekli $p_0(t) \neq 0$ olsun.

Tanım 4.1. Ω[a,b) tüm sağa yoğun sürekli $y: [\rho^n(a), \sigma^{n-1}] \to R$ fonksiyonlarının lineer kümesi olsun öyle ki

(i) $t \in [a, b]$ için $\left[p_i(t)y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{n-i-1}}, 0 \le i \le n-1$ fonksiyonu tanımlıdır.

(ii) $t \in [a, b]$ için $\left[p_i(t)y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{n-i-1}\Delta}, 0 \le i \le n-1$ fonksiyonu tanımlıdır ve $[a, b)$üzerinde sağa yoğun sürekli ve sınırlıdır.

$y \in \Omega[a, b)$ için

$$Ly(t) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\left[p_i(t)y^{\Delta^{n-i-1}\nabla}(t)\right]^{\nabla^{n-i-1}\Delta}, t \in [a, b) \tag{4.1}$$

olsun. Bu yüzden Ly , [a,b) üzerinde sağa yoğun sürekli ve sınırlıdır. Diferansiyel ifade (4.1) ile birlikte

$$U_j(y) := \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} y^{[k-1]}(b) = 0, 1 \le j \le 2n \tag{4.2}$$

sınır şartları tanımlayalım. Burada $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, 1 \le j, k \le 2n$ reel sayılardır. (Guseinov, 2005)

Tanım 4.2. (4.2) nin sınır şartlarına göre (4.1) diferansiyel ifadesi kendine eşdir ancak ve ancak (4.2) koşullarını sağlayan bütün $y, z \in \Omega[a, b)$ fonksiyonları için

$\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle$

dir.

Bu durum (3.4) eşitliği ile

$\langle Ly, z \rangle - \langle y, Lz \rangle = [y, z]\Big|_a^b$

elde edilir. Burada $[y, z]$ (3.5) eşitliği ile tanımlanır. (Guseinov, 2005)

Böylece (4.2) sınır şartları kendine eşdir ancak ve ancak bütün $y, z \in \Omega[a, b)$ fonksiyonları için

$[y, z]_a^b = 0$

dır.

Örneğin,

$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0, 0 \leq k \leq n-1$

sınır şartları ve

$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b), \ 0 \leq k \leq 2n-1$

sınır şartları kendine eşdir.

Eğer $g: [a, b) \to R$ herhangi sağa-yoğun sürekli ve sınırlı fonksiyon olmak üzere

$Ly(t) = g(t), U_J(y) = 0, 1 \leq j \leq 2n$

homojen olmayan sınır değer problemi,

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) g(s) \Delta s \quad (4.3)$$

ile verilen

$y: [\rho^n(a), \sigma^{n-1}(b)] \to R$

çözüm fonksiyonuna sahip ise,

$Ly(t) = 0, U_j(y) = 0, 1 \leq j \leq 2n$

sınır değer problemi $G(t, s)$ Green fonksiyonuna sahiptir.

Sınır şartları $U_j(y) = 0, 1 \leq j \leq 2n$ ve Ly diferansiyel ifadesi tarafından üretilen operatör Λ olsun. $D(\Lambda)$ tanım kümesi, (4.2) sınır koşullarını sağlayan $y \in \Omega[a, b)$ oluşur öyle ki $\Lambda y = Ly$ eşitliği sağlanır.

$G(t, s)$ Green fonksiyonun varlığı, $g: [a, b) \to R$ tüm sınırlı sağa yoğun foksiyonlar için

$$(\Lambda^{-1} g)(t) = \int_a^b G(t, s) g(s) \Delta s, t \in [\rho^n(a), \sigma^{n-1}(b)] \quad (4.4)$$

ile tanımlı Λ operatörüne karşılık gelen Λ^{-1} operatörünün varolduğu anlamına gelir.

Kabul edelim ki (4.2) sınır şartları kendine eş olsun. O zaman tüm $y, z \in D(\Lambda)$ için

$$\langle \Lambda y, z \rangle = \langle y, \Lambda z \rangle \quad (4.5)$$

olur, bu Λ operatörünün kendine eş olduğu anlamına gelir.

Λ^{-1} operatörü de tüm $f, g \in C_{Rd}[a, b)$ için simetrik yani

$$\langle \Lambda^{-1} f, g \rangle = \langle f, \Lambda^{-1} g \rangle \quad (4.6)$$

dir.

simetriktir.

(4.5) ve (4.6) den $Ly(t) = 0, U_j(y) = 0, 1 \leq j \leq 2n$

kendine eş sınır değer probleminin $G(t,s)$ Green fonksiyonu simetriktir yani $t \in [a,b)$ için $G(t,s) = G(s,t)$ dir.

Örnek 4.1. İkinci mertebeden $L(t)$ diferansiyel ifade (3.2) de verildi.

$\alpha y(a) - \beta y^1(a) = 0, \gamma y(b) + \delta y^{[1]}(b) = 0$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon R, |\alpha| + |\beta| \neq 0, |\gamma| + |\delta| \neq 0$ sınır koşulları $Ly(t)$ diferansiyel ifadesi kendine eşdir.

φ ve ψ,

$\varphi(a) = \beta, \varphi^{[1]}(a) = \alpha;$

$\psi(b) = \delta, \psi^{[1]}(b) = -\gamma$

başlangıç koşullarını sağlayan

$-[p_0(t)y^\nabla(t)]^\Delta + p_1(t)y(t) = 0, t\epsilon[a,b)$

denkleminin çözümleri olsunlar.

$w = W_t(\varphi, \psi) = \varphi(t)\psi^{[1]}(t) - \varphi^{[1]}(t)\psi(t)$

φ ve ψ çözümleri Wronskian, t den bağımsızdır. Eğer $w \neq 0$ ise (3.2),(3.7) sınır değer problemlerinin Green fonksiyonu

$$G(t,s) = -\frac{1}{w}\begin{cases} \varphi(t)\psi(s), t \leq s \\ \varphi(s)\psi(t), s \leq t \end{cases}$$

İle verilir. $G(t,s)$ fonksiyonunun simetrik olduğu açıktır. (Guseinov, 2005)

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde sınırlı zaman skalaları üzerinde düzgün olmayan Euler-Bernoulli kirişlerinin ters titreşiminin genişlemelerini anlatacağız.

Euler-Bernoulli düzgün olmayan kirişlerinin ters titreşim problemi

$$l(y) \coloneqq (EI^*(t)y^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t) - \rho_0 w^2 A^*(t)y(t), t\epsilon T_1 = T^* \cap (a,b), a < b \tag{5.1}$$

ifadesi ile verilir. Burada y ters yer değiştirme E, ρ_0 ve w sırasıyla Young modelleri, kütle yoğunluğu ve doğal frekansdır. $A^*(t)$ ve $I^*(t)$ mevcut enine kesitlerin şuan ki durgunluk momenti ve alanıdır. t ışının mevcut boylam koordinat ve a ve b kirişin sabit ve değişken ucunun koordinatlarıdır.

Notasyonun sadeliği için,

$y^{[0]} = y$

$y^{[1]} = y^{\Delta}$

$y^{[2]} = EI^*(t)y^{\Delta\nabla}$

$y^{[3]} = -\left(y^{[2]}\right)^{\nabla}$

$y^{[4]} = -\rho_0 w^2 A^*(t)y - \left(y^{[3]}\right)^{\Delta}$

notasyonunu kullanalım.

y_i $1 \leq i \leq 4$, (5.1) denkleminin çözümleri olsun. y_1, y_2, y_3 ve y_4 ünWronskianı

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1^{[1]} & y_2^{[1]} & y_3^{[1]} & y_4^{[1]} \\ y_1^{[2]} & y_2^{[2]} & y_3^{[2]} & y_4^{[2]} \\ y_1^{[3]} & y_2^{[3]} & y_3^{[3]} & y_4^{[3]} \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır.

Birinci, ikinci,üçüncü Δ-türevleri T_1 de Δ-mutlak sürekli ve $ly \in L_\Delta^2(T_1)$ koşulunu sağlayan bütün $y(t) \in L_\Delta^2(T_1)$ fonksiyonlarının kümesini Dom_{max} ile gösterelim.

$L_{max}y = ly$ ile Dom_{max} üzerinde L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım.

$\forall y, z \in Dom_{max}$ için, Green formülü

$$\int_a^b (ly)(t)\overline{z(t)}\,\Delta t - \int_a^b y(t)\overline{(lz)(t)}\,\Delta t = [y,z]_b - [y,z]_a \tag{5.2}$$

İle tanımlanır. Burada

$[y,z]_t \coloneqq y^{[0]}(t)\bar{z}^{[3]}(t) - y^{[3]}(t)\bar{z}^{[0]}(t) + y^{[1]}(t)\bar{z}^{[2]}(t) - y^{[2]}(t)\bar{z}^{[1]}(t)$

dir.

Dom_{min}

$y^{[0]}(a) = y^{[1]}(a) = y^{[2]}(a) = y^{[3]}(a) = 0$

$y^{[0]}(b) = y^{[1]}(b) = y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b) = 0$

koşullarını sağlayan tüm $y \in Dom_{max}$ vektörlerin lineer kümesi olsun. Eğer L_{max} operatörü Dom_{min} kümesine kısıtlanırsa, L_{min} minimal operatör elde edilir. Açıktır ki $L_{min}^{*} = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür. (Naimark, 1968)

Tanım 5.1. H Hilbert uzayı üzerinde bir M lineer operatörü (D(M) yoğun) , $Im(Mf) \geq 0, \forall f \in D(M) (Im(Mf, f) \leq 0, \forall f \in D(M)))$ koşulunu sağlarsa disipatif (akretif) operatör ve uygun disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse maksimal disipatif (maksimal akretif) operatör olarak adlandırılır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 5.2. H bir Hilbert uzay ve Φ_1 ,Φ_2 : D(M)→ H lineer dönüşümler olsun.

1)Her $f, g \in D(M^*)$ için

$$(M^* f, g)_H - (f, M^* g)_H = (\Phi_1 f, \Phi_2 g)_H - (\Phi_2 f, \Phi_1 g)_H;$$

2) Keyfi $F_1, F_2 \in H$ için bir $f \in D(M^*)$ vektörü vardır öyle ki $\Phi_1 f = F_1$ ve $\Phi_2 = F_2$ olur.

şartları sağlayan (H, Φ_1, Φ_2) üçlüsüne sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Şimdi $\Phi_1, \Phi_2 \colon Dom_{max} \to C^4$ lineer dönüşümleri

$$\Phi_1 y = \begin{pmatrix} -y^{[0]}(a) \\ -y^{[1]}(a) \\ y^{[0]}(b) \\ y^{[1]}(b) \end{pmatrix}, \Phi_2 y = \begin{pmatrix} y^{[3]}(b) \\ y^{[2]}(b) \\ y^{[3]}(b) \\ y^{[2]}(b) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

ile tanımlayalım.

Teorem 5.1. (C^4, Φ_1, Φ_2)üçlüsü L_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

İspat: $\forall y, z \in Dom_{max}$ için

$$\begin{aligned}
&(\Phi_1 y - \Phi_2 z)_{C^4} - (\Phi_1 z - \Phi_2 y)_{C^4} = -y^{[0]}(a)\bar{z}^{[3]}(a) - y^{[1]}(a)\bar{z}^{[2]}(a) \\
&+y^{[0]}(b)\bar{z}^{[3]}(b) - y^{[1]}(b)\bar{z}^{[2]}(b) - \left(-\bar{z}^{[0]}(a)y^{[3]}(a) - \bar{z}^{[1]}(a)y^{[2]}(a)\right) \\
&\qquad - \left(-\bar{z}^{[0]}(b)y^{[3]}(b) + \bar{z}^{[1]}(b)y^{[2]}(b)\right) \\
&\qquad = y^{[0]}(b)\bar{z}^{[3]}(b) - \bar{z}^{[0]}(b)y^{[3]}(b) + y^{[1]}(b)\bar{z}^{[2]}(b) - \bar{z}^{[1]}(b)y^{[2]}(b) \\
&\qquad - y^{[0]}(a)\bar{z}^{[3]}(a) + \bar{z}^{[0]}(a)y^{[3]}(a) - y^{[1]}(a)\bar{z}^{[2]}(a) + \bar{z}^{[1]}(a)y^{[2]}(a) \\
&\qquad = [y, z](b) - [y, z](a)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(5.2) Green formülünden

$(\Phi_1 y - \Phi_2 z)_{C^4} - (\Phi_1 z - \Phi_2 y)_{C^4} = [y,z](b) - [y,z](a)$

$= (L_{max} y, z) - (y, L_{max} z)$

bulunur.

Böylelikle, sınır değeri uzayının tanımının ilk koşulunu kanıtladık. Şimdi, sınır değer uzayının tanımının ikinci koşulunu ispatlayalım.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in C^4$$

olsun.

$$y(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)v_1 + \alpha_3(t)u_2 + \alpha_4(t)v_2 + \alpha_5(t)u_3 + \alpha_6(t)v_3 + \alpha_7(t)u_4 + \alpha_8(t)v_4, \alpha_i(t) \epsilon H (i = 1, \ldots, 4)$$

vektör değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$\alpha_1^{[0]}(a) = 1$ $\alpha_1^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_1^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_1^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_2^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_2^{[3]}(a) = 1$

$\alpha_3^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_3^{[1]}(a) = -1$ $\alpha_3^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_3^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_4^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_4^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_4^{[2]}(a) = 1$ $\alpha_4^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_5^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_5^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_5^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_5^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_6^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_6^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_6^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_6^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_7^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_7^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_7^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_7^{[3]}(a) = 0$

$\alpha_8^{[0]}(a) = 0$ $\alpha_8^{[1]}(a) = 0$ $\alpha_8^{[2]}(a) = 0$ $\alpha_8^{[3]}(a) = 0$

ve

$\alpha_1^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_1^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_1^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_1^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_2^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_2^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_2^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_2^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_3^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_3^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_3^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_3^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_4^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_4^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_4^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_4^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_5^{[0]}(b) = -1$ $\alpha_5^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_5^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_5^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_6^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_6^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_6^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_6^{[3]}(b) = 1$

$\alpha_7^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_7^{[1]}(b) = 1$ $\alpha_7^{[2]}(b) = 0$ $\alpha_7^{[3]}(b) = 0$

$\alpha_8^{[0]}(b) = 0$ $\alpha_8^{[1]}(b) = 0$ $\alpha_8^{[2]}(a) = 1$ $\alpha_8^{[3]}(b) = 0$

Bu durumda bu fonksiyon Dom_{max} kümesine aittir ve $\Phi_1 y = u, \Phi_2 y = v$ olur.

Sonuç 5.1: T, C^4 uzayında büzülme operatörü ise, L_{max} operatörünün

$$(T-I)\Phi_1 y + i(T+I)\Phi_2 y = 0 \tag{5.4}$$

veya

$$(T-I)\Phi_1 y - i(T+I)\Phi_2 y = 0 \tag{5.5}$$

koşullarını sağlayan $y \in Dom_{max}$ vektörlerinin kümesine kısıtlanışı sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir.

Tersine, $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.4) ((5.5)) biçiminde gösterilebilir. T büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.4) ((5.5)) ifadesindeki T operatörü izometrik operatör olursa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer T operatörü üniter olursa $L_{\min}$ operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

L operatörünün disipatif (akretif) genişlemelerinin genel formu sırasıyla

$T(\Phi_1 y + i\Phi_2 y) = \Phi_1 y - i\Phi_2 y, \Phi_1 y + i\Phi_2 y \in Dom(T)$

$T(\Phi_1 y - i\Phi_2 y) = \Phi_1 y + i\Phi_2 y, \Phi_1 y - i\Phi_2 y \in Dom(T)$

koşulları ile verilir. Burada T operatörü $f \in Dom(T)$ için

$$\|Tf\| \le \|f\|$$

şartını sağlayan bir lineer operatördür.

6.SONUÇ

Bu tez çalışmasında, sınırlı zaman skaları üzerinde düzgün olmayan kirişlerinin ters titreşim Euler-Bernoulli dinamik denklemi

$(EI^*(t)y^{\Delta\nabla})^{\nabla\Delta}(t) - \rho_0 w^2 A^*(t)y(t), t\epsilon T_1 = T^* \cap (a,b), a < b$

için sınır değer uzayı oluşturulmuştur. Bu denkleme karşılık gelen operatörler için maksimal disipatif, maksimal akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Bu çalışma zaman skalaları üzerinde singüler durumdaki 4. Mertebeden dinamik denklemlere genişletilerek ayrı bir araştırma konusu olabilir. Ayrıca zaman skalası üzerinde 2n. mertebeden dinamik denklemler için literatürde herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Böyle bir çalışma literatürdeki boşluğu doldurabilir.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces,* Volume I. Frederick Ungar, New York.

Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *J. Difference Equ. Appl.,* 19, no. 5, 839-849.

Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62, no. 9, 1146-1152.

Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30, no. 6, 1475-1484.

Anderson, D.R., Guseinov, Gusein Sh., Hoffacker, J.,2006. Higher-order self-adjoint boundary-value problems on time scales, *J. Comput. Appl. Math.*, 194, 2, 309-342.

Anderson, D.R., Hoffacker, J., 2003. Green's function for an even order mixed derivative problem on time scales, *Dynam. Systems App.,*12, 9-22.

Anderson, D.R., Hoffacker, J., 2003a. Stacked delta-nabla self-adjoint problem of even order, *Math.Comput.Modelling,*38,481-494.

Atici, F.M., Guseinov, G.Sh., 2002. On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *J.Comput. Appl. Math.*,141,75-99.

Auciello, N.M., Nole, G., 1998. Vibrations of a cantilever tapered beam with varying section properties and carrying a mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration,* 214 (1) 105-119.

Bohner, M., Peterson, A., 2001. *Dynamic Equations on Time Scales: An Intruduction with Applications,* Birkhaüser, Boston

Bohner, M.,, Peterson, A., (Eds.), 2003. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston

Bozkurt, D., Türen, B., 2000. *Lineer Cebir*, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Bruk, V.M., 1976. On a class of boundary --value problemswith a spectral parameter in the boundary conditions, *Mat. Sb.,*100, 210-216.

Calkin, J.W., 1939. Abstract boundary conditions, *Trans. Amer. Math. Soc*.,Vol 45,No. 3, 369-442.

Canoğlu, A., Allahverdiev, B.P., 2003. Selfadjoint and dissipative extensions of a symmetric Schrödinger operator. *Math.* Balkanica (N.S.) 17, no. 1-2, 113-120.

Caruntu, D.I., 2009. Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness. *Mechanics Research Communications* 36: 391-404.

Caruntu, D.I., 2000. On nonlinear vibration of nonuniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation, *Solid Mechanics and its Applications,* Vol. 73, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, pp. 109-118.

Caruntu, D.I., 1996. Relied studies on factorization of the differential operator in the case of bending vibration of a class of beams with variable cross-section,*Revue Roumaine des Sciences Techniques, Sé rie de Mecanique Appliquee,* 41 (5-6) , 389-397.

Conway, H.D., Becker, E.C.H.,Dubil, J.F., 1964. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates, *Journal of Applied Mechanics* June 329-331.

Conway, H.D., Dubil, J.F., 1965. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam, *Journal of Applied Mechanics* 32E 932-935.

Cranch, E.T., Adler, A., 1956. Bending vibrations of variable section beams, *Journal of Applied Mechanics March* 103-108.

Çakar, Ö., 2007. *Fonksiyonel Analize Giriş*, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No. 13, Ankara.

Gorbachuk, M.L., Gorbachuk V.I.,1984. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations,* Naukova Dumka, Kiev; English transl. 1991, Birkhauser Verlag.

Gorbachuk, M.L., V.I. Gorbachuk, Kochubei, A.N., (1989). The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations', *Ukrain. Mat. Zh.* 41,(1989),1299-1312; English transl. in *Ukrainian Math. J.* 41(1989), 1117-1129.

Guseinov, Gusein Sh., 2005. Self-adjoint boundary value problems on time scales and symmetric Green's functions, *Turkish J. Math*., 29 (4), 365-380.

Hilger, S., 1990. Analysis on measure chains -a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math*.,1818-1856.

Jones, M.A., Song, B., Thomas, D.M., 2004. Controlling wound healing through debridement, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 40, no. 9-10, pp. 1057-1064.

Kochubei, A.N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, *Mat. Zametki* 17,1975, 41-48; English transl. in *Math. Notes* 17, 25-28.

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval [illegible]', *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat*. 16, 292-324.

Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.

Mabie, J.J., Rogers, C.B., 1968. Traverse vibrations of tapered cantilever beams with end support, *Journal of Acoustical Society of America* 44, 1739-1741.

Maksudov, F.G., Allahverdiev, B.P., 1993. On the extensions of Schrö dinger operators with a matrix potentials, *Dokl. Akad. Nauk* 332, no.1,18-20;English transl. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math*. 48 (1994), no.2, 240-243.

Malamud, M.M., Mogilevskiy, V.I., 1997. On extensions of dual pairs of operators, *Dopov. Nats Akad. Nauk.* Ukr., no. 1,30-37.

Naguleswaran, S., 1994. A direct solution for the transverse vibration of Euler--Bernoulli wedge and cone beams, *Journal of Sound and Vibration,* 172 (3),289-304.

Naguleswaran, S., 1995. The vibration of a complete Euler-Bernoulli beam of constant depth and breadth proportional to axial coordinate raised to a positive exponents, *Journal of Sound and Vibration,* 187 (2), 311-327.

Naimark, M.A., 1968. *Linear Differential Operators*, 2nd edn., Nauka, Moscow, English transl. of 1st. edn., 1,2, 1969, New York.

Neumann, J. von., 1929. Allgemeine Eigenwertheorie Hermitischer Functional operatoren, *Math. Ann.* 102, 49-131.

Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions', *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 184,1034-1037;English transl. in *Soviet Math. Dokl.* 10(1969),188-192.

De Rosa, M.A., Auciello, N.M., 1996. Free vibrations of tapered beams with flexible ends, *Computers & Structures* 60 (2) 197-202.

Rynne, B.P., 2007. L^2 spaces and boundary value problems on time-scales, *J. Math. Anal. Appl*. 328, 1217-1236.

Storti, D., Aboelnaga, Y., 1987. Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions, *Journal of Applied Mechanics,* 54, 311-314.

Tuna, H., Allahverdiev, B.P., 2018. Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16 (1) , 275-285.

Wright, A.D., Smith, Thresher, Wang 1982. Vibration modes of centrifugally stiffened beam, *Journal of Applied Mechanics,* 49 , 197-202.

Wang, H.C., 1967. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams, *Journal of Applied Mechanics* 34E , 702-708.

Wang, H.C., 1996. Sturm--Liouville equation for free vibration of a tube-in-tube tall building, *Journal of Sound and Vibration*, 191 (3), 349-355.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice BULUT

Doğum Yeri ve Yılı : Burdur/1993

Eğitim Durumu

Yıl

Lise : Cumhuriyet Lisesi

2011

Lisans : Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

2015

Çalıştığı Kurum / Kurumlar
Yıl

1- Burdur Turuncu Temel Lisesi (Öğretmen)
   2016-2017
2- Isparta Bahçeşehir Koleji (Öğretmen)
   2018-2019

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

Tuna H. and Bulut H., Transverse vibration of nonuniform Euler-Bernoulli beams on bounded Time scales, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, Volume: 1 11111Issue: 1, (2018), 77-81.