T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE SITR MODELİ ÜZERİNE

Pelin YAPRAKDAL

BURDUR, 2019

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE SITR MODELİ ÜZERİNE

Pelin YAPRAKDAL

Danışman: Doç. Dr. İlknur KOCA

BURDUR, 2019

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler ve SITR Modeli Üzerine”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

19 / 04 / 2019

Pelin YAPRAKDAL

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. İlknur KOCA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Nisan, 2019 **Pelin YAPRAKDAL**

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

B.D.P.	: Başlangıç değer problemi
${}_{a}\boldsymbol{D}_{t}^{\alpha}$	: α. basamaktan Riemann-Liouville türevi
${}_{a}^{C}\boldsymbol{D}_{t}^{\alpha}$	: α. basamaktan Caputo türevi
${}_{a}\boldsymbol{I}_{t}^{\alpha}$	: α. basamaktan Riemann-Liouville integrali
$\boldsymbol{L_1(a,b)}$	: (a, b) aralığında yakınsak dizi kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
$\mathbb{N}^{+}$	: Pozitif doğal sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}^{2}$	: İki boyutlu reel uzay
$\mathbb{Z}^{+}$	: Pozitif tam sayılar
$\boldsymbol{\Sigma}$	: Toplam
$\int$	: İntegral
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Gamma fonksiyonu
$[\boldsymbol{\alpha}]$	: α reel sayısının taban tamsayısı
$[\quad]^{T}$	: Matrisin transpozu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler ve SITR Modeli Üzerine

Pelin YAPRAKDAL

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlknur KOCA

Nisan, 2019

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematiğin önemli bir çalışma alanı olan kesirli kalkülüs teorisine giriş yapılmış olup, bu alanda en çok kullanılan kesirli basamaktan türev operatörleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Matematiksel modellemede önemli bir alana sahip olan hastalık modelleri hakkında bilgi verilmiştir. SITR modelinin matematiksel incelemesi yapılmıştır. Kesirli basamaktan SITR modelinin kararlılık analizi ve çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmiştir.

Son olarak SITR modelinin çözümleri için uygun bir iterasyon Atangana-Toufik yöntemiyle elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli basamaktan diferensiyel denklemler, SITR modeli, kararlılık, başlangıç değer problemi.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

On A Fractional Order Differential Equations and SITR Model

Pelin YAPRAKDAL

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. İlknur KOCA

April, 2019

In this thesis, fractional studies which are an important area of applied mathematics are considered. We have investigated the basic theory of fractional differential equations involving fractional derivatives.

Disease models which have an important area in mathematical modeling are discussed. Specially, mathematical analysis of the SITR model is considered. The stability analysis of SITR model and existence and uniqueness of its solutions have been obtained.

Finally, a suitable iteration for the solutions of the SITR model is obtained by Atangana-Toufik method.

Keywords: Fractional order differential equations, SITR model, stability, initial value problem.

1. GİRİŞ

Son yıllarda kesirli kalkülüs, teorik matematikte olduğu kadar uygulamalı matematikte de önemli bir yer edinmiştir. Kesirli kalkülüsün kesirli basmaktan türev ve integrallerle ilgilenen bir dal olduğuna dikkat edilmelidir. Bu konuyla ilgili pek çok kitap yazılmış, bu kitaplarda da kesirli kalkülüsün tarihi detaylı bir şekilde verilmiştir (Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006). Bu bölümde kesirli kalkülüsün tarihi ile ilgili bir özet verilecektir.

Kesirli basamaktan türev kavramı ilk olarak L'Hospital ve Leibnitz arasındaki mektuplaşma sırasında ortaya atılmıştır. Leibnitz, bir çalışmasında $y(x)$ fonksiyonunun n. basamaktan türevi için $d^n y/dx^n$ gösterimini kullanmıştır. Bu gösterimle ilgili olarak L'Hospital, Leibnitz'e n nin bir tamsayı olmaması ve hatta n=1/2 olması durumuyla ilgili bir soru yöneltmiştir. Bu soruya Leibnitz 30.09.1695 tarihli bir mektupla cevap vermiştir ve böylelikle kesirli basamaktan türev literatüre girmiştir (Miller ve Ross 1993).

Kesirli türev kavramının ilk kez kullanıldığı bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konu da çalışmalar yapmıştır (Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999). Ancak kesirli operatörler bir fiziksel problemi çözmek için ilk kez Niels Henrik Abel tarafından 1823'te kullanılmıştır (Abel 1881).

Abel'in uygulamalı problemlerde kesirli operatörleri kullanmasından sonra Liouville tarafından kapsamlı bir çalışma yapılmış ve konuyla ilgili birçok makale yayınlanmıştır (Liouville, 1834). 1847 yılında Riemann, bugün de en sık kullanılan kesirli integral olan Riemann-Liouville integralinin tanımını vermiştir.

Uygulamalı problemlerde önemli yer tutmasına rağmen, Riemann- Liouville kesirli integral ve türev operatörlerini geometrik ve fiziksel olarak anlamlandırmak oldukça zordur. Bu zorluktan kurtulmak için Caputo' nun 1967 yılında tanımladığı türev operatörü daha sonraki yıllarda uygulamalı problemlerde sıklıkla kullanılmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde matematiksel modelleme ve epidemik modellerin kurulması ile ilgili genel bilgiler verilmiş olup tezde ele alınan modelin denklemi verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler teorisinde kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiş ve kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümü için Atangana-Toufik yöntemi Caputo türevi ile ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise, SITR model için kararlılık analizi, çözümlerinin varlık ve tekliğinin incelenmesi ve Atangana-Toufik yöntemiyle modelin nümerik çözümü elde edilmiştir. Son olarak beşinci bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme, herhangi bir gerçek yaşam problemine çözüm bulmaktaki en etkin araçlardan biridir. Matematiksel bir model, gerçek yaşama ait verilere yakın bir matematik dili kullanılarak sembollerle taklit edilen bir modelleme alanıdır. Matematiksel modelleme de temel amaç model oluşturmak değil, modeller yardımıyla herhangi bir duruma açıklık getirmektir.

Matematiksel modelleme gerçek yaşam ile matematik arasında bir köprü görevi görür. Blum, matematiksel modellemenin bir yandan gerçek yaşamdan matematiksel yaşama geçişi, diğer yandan ise bu geçişteki tüm süreci temsil ettiğini ifade eder (Blum, 2002).

2.1.1. Bazı Matematiksel Modeller

Bu bölümde bazı matematiksel modellerden bahsedilecektir.

Li M.Y., Graef J.R., Wang L., Karsai J. (1999), yaptıkları çalışmada SEIR modelinin genel dinamikleri ve salgın hastalıkların toplam popülasyon üzerinde neden olduğu değişimleri incelenmiştir.

Nasri M., Dehghan M., Douraki M.J. (2005), bu yaptıkları çalışmada, HIV enfeksiyonunun yayılmasının matematiksel (diferensiyel denklem sistemi) modelini incelemişlerdir. Bu çalışmanın devamında fark denklemlerle ilgili temel tanım ve teoremleri vermişler daha sonra çalışmanın başında verilen diferensiyel modelini fark denklem modeline çevirerek verilen teoremlere göre incelemişlerdir. Daha sonra fark denklem modelini lineerleştirerek, lineer sistemi incelemişlerdir. Çalışmanın son kısmında ise nümerik sonuçlara yer vermişlerdir.

Li G., Jin Z. (2005), yaptıkları çalışmada SEIR modelinin bağışıklık kazanmış ya da hastalığı taşıyıp henüz ortaya çıkmamış bireyler için genel dinamikleri incelenmiş ve denge noktası analizi yapılmıştır.

Derouich M. Boutayep A. (2008), yaptıkları çalışmada, kuş gribinin insanlar ve kuşlar arasında yayılmasını belirleyen modeli vermişlerdir. Bu modeldeki sistemlerin kararlılık analizini yapmışlar ve değişik parametreler kullanılarak hastalığın yayılmasının benzetimini yapmışlardır.

Iwami S.,Takeuchi Y., Liu X. (2009), yaptıkları çalışmada, kuş gribinin yayılma modelini vermişler, hastalığın yayılması gelişimi üzerinde durmuşlar, hastalıktan korunma, hastalığın evrimi ve bu evrim sürecinden sonra hastalıktan korunmak için çeşitli önerilerde bulunmuşlardır.

Acedo L., Gonzalez-Parra G., Arenas A.J. (2010), yaptıkları çalışmada, klasik SIRS modeli genel çözümü için analitik yaklaşımlar kullanmışlardır. Ayrıca değişik parametrelerle nümerik simülasyonlar yapmışlardır.

Dokuyucu M.A., Çelik E., Bulut H., Baskonuş H.M. (2018), yaptıkları çalışmada, kanser tedavisi için kurulmuş olan modellerden radyoterapiyle tedavi metodunu kesirli basamaktan inşasını yapmışlar ve bu model için ilk kez Caputo-Fabrizio türevi yardımıyla incelenmiştir.

Koca İ. (2018), yaptığı çalışmada, Ebola modelini, Atangana-Baleanu kesirli operatörleri yardımıyla incelemiştir. Ayrıca ebola hastalık modelinin için çözümlerin varlığı ve tekliğini Picard-Lindelof metodu ile vermiştir. Son bölümde model için nümerik çözümleri incelemiştir.

2.2. Epidemik Modellerin İncelenmesi

İnsanoğlu yüzyıllar boyunca salgın hastalıklarla mücadele etmiş, birçok insan bu yüzden hayatını kaybetmiş ve bunula birlikte büyük ekonomik zararlara uğramışlardır. Bu salgın hastalıklar epidemik salgın hastalıklar olarak tanımlanmaktadır. Epidemik modeller, belirli bir zaman ve popülasyon içerisinde hastalıkların oluşmasında ve yayılmasında etkili olan faktörlerin araştırılmasına yönelik bir çalışma sahasıdır.

Epidemik modellerin incelenmesinde matematiksel yöntemler hastalığın yayılımını, oluşumunu, analizini ve kontrolünü sağlamakta önemli katkı sağlamaktadır. Epidemik modeller HIV/AIDS, hepatit C ve grip gibi bulaşıcı hastalıklarla ilgilendiği gibi bulaşıcı olmayan kanser gibi hastalıklarla da ilgilenmektedir.

SIR ve SIS yaklaşımları epidemik modeller arasında yer almaktadır. Aşağıdaki tabloda dört farklı model için bazı hastalık örnekleri verilmiştir.

Tablo 2.1. Bazı hastalık modelleri

SI	SIR	SIS	SIRS
HIV	Suçiçeği	Nezle	Boğmaca
Uçuk	Kabakulak		Frengi
	Kızamık		Salmonellez
	Çocuk felci		

2.2.1. Modellerde Kullanılan Değişkenler

Matematiksel modeller oluşturulurken popülasyon durumuna göre farklı değişkenler kullanılmaktadır. Aşağıda bu modellerde kullanılan bazı değişkenler verilmiştir:

S : (Susceptible) Hasta olmaya yatkın bireyler

I: (Infected) Hastalığa maruz kalmış bireyler

T: (Treated) Tedavi edilen bireyler

R: (Recovered) Bağışıklık kazanıp tamamen iyileşen bireyler

2.2.2. SIR Modeli

SIR modeli sınırlı bir popülasyon içinde hastalığa maruz kalma riski olan bireylerin zaman içerisindeki değişimini tahmin etmemize olanak sağlayan epidemik bir modeldir. SIR modellerinin en temel olanlarından biri Kermack-McKendrick modelidir. Kermack-McKendrick modeli de bulaşıcı bir hastalığın kapalı bir toplulukta yayılımını açıklamaya çalışmıştır.

Bu modelde bulaşıcı hastalığa maruz kalan bireyler üç gruba ayrılmıştır. Birinci grupta bu hastalığa yakalanmamış ancak bu hastalığa karşı bağışıklığa sahip olmayan yani hastalığa yakalanma riski bulunan bireyler (S) yer almaktadır. İkinci grupta enfekte olmuş, hastalığı taşıyabilen ve duyarlı bireylere bulaştırabilen enfekte bireyler (I) yer almaktadır. Üçüncü grupta ise hastalığa karşı bağışıklık kazanarak iyileşen veya ölen bireyler (R) yer almaktadır. Modelde kullanılan grupların baş harflerinden hareketle SIR model ismi verilmektedir.

2.2.3. SIR Modelinin Kurulması

SIR epidemik model aşağıdaki ön kabuller doğrultusunda kurulur.

- Popülasyon sabittir.
- Duyarlı (S) gruptan çıkmış bir birey sadece enfekte (I) olmuş gruba geçer. Enfekte olmuş gruptan ayrılan bir birey sadece iyileşmiş (R) gruba geçer. İyileşmiş gruptan ayrılan bir bireyde artık bağışıklık kazanmıştır ve bir daha hastalığa yakalanmaz.
- Yaş, sosyal statü, cinsiyet gibi faktörler enfekte olmada etkili değildir.
- Doğuştan bağışıklığa sahip birey yoktur.
- Popülasyon üyeleri homojendir.

SIR modelinde, yukarıdakilere ek olarak yine dışarıdan göç olmadığı veya başka hastalıklardan ölüm olmadığı farz edilir (Akpınar, 2012). SIR modelinin kurulmasında aşağıdaki diferensiyel denklemler ve parametreler kullanılır:

S(t) : Hastalanmamış fakat hastalığa karşı bağışıklığı olmayan bireyler,

I(t) : Enfeksiyon bulaşmış taşıyıcı ve bağışıklığı olmayan bireylere bulaştırabilen bireyler,

R(t) : Tekrar enfeksiyona maruz kalma veya enfeksiyon bulaştırma ihtimali olmayan bireyler,

β : Temas sayısı ve bulaşıcılık düzeyini içeren bulaşma hızı,

γ : İyileşme hızı

olarak tanımlanır. Burada β ve γ birer pozitif sabittir. O halde aşağıdaki lineer olmayan adi diferensiyel denklemi verilebilir:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t),$$

$$S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0.$$

Bu denklem sisteminde herhangi bir t anında N(t) toplam nüfusu göstermek üzere;

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$$

olacaktır.

2.2.4. SITR Hastalık Modeli

Herhangi bir t anındaki toplam nüfus (N(t)) dört farklı gruba ayrılır. Herhangi bir t anında hastalığa yakalanmamış ve bağışıklığı olmayan bireyler (S(t)), enfeksiyon bulaşmış taşıyıcı ve bağışıklığı olmayan bireylere bulaştırabilen bireyler (I(t)), tedavi edilen bireyler (T(t)) ve son grupta tekrar enfeksiyona maruz kalma veya enfeksiyon bulaşma ihtimali olmayan bireyler (R(t)) yer almaktadır. Modelde kullanılan grupların baş harflerinden esinlenerek SITR Model ismini almaktadır.

Ayrıca

$$N(t) = S(t) + I(t) + T(t) + R(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

SITR Model aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta SI \ , \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1)I \ , \\
\frac{dT}{dt} &= \gamma I - (\alpha + \mu)T \ , \\
\frac{dR}{dt} &= \alpha T + \delta I - \mu R \ .
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}
S(t_0) &= S_0 \geq 0 \ , \\
I(t_0) &= I_0 \geq 0 \ , \\
T(t_0) &= T_0 \geq 0 \ , \\
R(t_0) &= R_0 \geq 0 \ , \\
\mu &> \mu_1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak verilir.

SITR modelinde kullanılan parametreler,

Λ: duyarlı bireylerin iyileşme oranı

μ: doğal ölüm oranı

μ_1: enfeksiyon nedeniyle insan ölüm oranı

β: duyarlı bireylere bulaşma oranı

γ: hasta bireylerin tedavi oranı

α: tedavi edilen bireylerin iyileşme oranı

δ: hasta bireylerin tedavisiz iyileşme oranı

şeklinde verilmektedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak bazı temel teoremler ve tanımlar verilecektir. Bu teorem ve tanımlar kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerde önemli rol oynamaktadır. Aynı zamanda bu bölümün son kısmında SITR model denkleminin çözümü için kullanılacak olan Atangana-Toufik metoduna Caputo türevi uygulanarak ele alınmıştır.

3.1. Gamma Fonksiyonu

En basit anlamıyla faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesi olan Gamma fonksiyonu kesirli diferensiyel denklemler ile doğrudan ilişkilidir. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{z-1} du \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir. Bunun nedeni, Gamma fonksiyonunun

$$\int_0^\infty e^{-u}\, u^n du = n! = \int_0^\infty e^{-u} u^{(n+1)-1} du = \Gamma(n+1) \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $z > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$z! = \int_0^\infty e^{-u} u^z du = \Gamma(z+1) \tag{3.3}$$

yazabiliriz. Buradan görülüyor ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı $\int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$ genelleştirilmiş integraline *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* denir. $z = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \tag{3.4}$$

dir. Bu sonuç 0! in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyelin $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ çarpımı ile verildiğini biliyoruz. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ Eşitliğini içerdiğine göre, eğer $z = n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n) \tag{3.5}$$

yazılabilmelidir. Gerçekten aşağıda görüleceği gibi Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3.6}$$

eşitliği tüm $z > 0$ değerleri için gerçekler (Arfen and Weber 1995).

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-u} u^z du = \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty u^z e^{-u}\, du \tag{3.7}$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} (-u^z e^{-u})}_{0} \Big|_0^b + z\int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du$$

$$= z\Gamma(z)$$

$\Gamma(z)$ fonksiyonuna karşılık gelen $\int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$ integrali $z > 0$ için yakınsak olup, $c > 0$ olmak üzere bu integral her $[c, d]$ sonlu aralığında düzgün yakınsaktır. O halde Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. Gamma fonksiyonunun tanım bölgesi $\{z : z > 0\}$ dır.
ii. Gamma fonksiyonu $z > 0$ için süreklidir.

iii. $\Gamma(z)$ ye karşılık gelen integral, her sonlu $[c,d] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan z değişkenine göre integral işareti altında türev alarak $\Gamma(z)$ nin türevi elde edilebilir.

Benzer şekilde yüksek basamaktan türevleri de bulunabilir. Böylece $\Gamma'(z)\ ve\ \Gamma''(z)$ türevleri için

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty u^{z-1}(lnu)e^{-u}du \quad , \quad \Gamma''(\mathrm{z}) = \int_0^\infty u^{z-1}(lnu)^2\, e^{-u}du \tag{3.8}$$

yazılabilir. Böylece, $z > 0$ için $\Gamma''(z) > 0$ olup, $\Gamma(z)$ in eğrisi $z > 0$ için yukarı konkavdır. $\Gamma(z)$ in $z \to 0^+$ için limiti

$$\lim_{z\to 0^+} \Gamma(z) = \infty \tag{3.9}$$

dir. Gerçekten

$$\Gamma(z) > \int_0^1 u^{z-1}e^{-u}\, du > e^{-1}\int_0^1 u^{z-1}du = \frac{1}{ez} \tag{3.10}$$

olup, böylece,

$$\lim_{z\to 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z\to 0^+} \frac{1}{ez} \to \infty \tag{3.11}$$

olur. Diğer yandan, faktöriyel özelliğinden dolayı,

$$\lim_{z\to\infty} \Gamma(z) = \lim_{z\to\infty} (z-1)\,\Gamma(z-1) \to \infty \tag{3.12}$$

olur.

3.1.1. Genelleştirilmiş Gamma Fonksiyonu

Şimdiye kadar z in pozitif değerleri için tanımladığımız Gamma fonksiyonunu negatif z değerleri için de tanımlayabiliriz. Yani $\Gamma(z)$ yi tüm reel eksene genişletebiliriz. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ özelliğini kullanarak $1 \leq z \leq 2$ için $\Gamma(z)$ in bilinen değerlerinden yararlanıp her $z \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(z)$ ler elde edilebilir. Negatif z değerleri için $\Gamma(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

$-1 \leq z \leq 0$ ise, $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ de $0 < z+1 < 1$ olacağından ve $(z+1) \in (0,1)$ deki $\Gamma(z+1)$ değerleri bilindiğinden $z \in (-1,0)$ için $\Gamma(z)$ ler bulunabilirler. Benzer şekilde, $-2 < z < -1$ ise $0 < z+2 < 1$ olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)} \tag{3.13}$$

eşitliklerinde $\Gamma(z)$ ler hesabedilebilir.

3.2. Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur.
Beta fonksiyonu çoğunlukla;

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \text{ , Re(z)} > 0, Re(\text{w}) > 0 \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.1. Gamma ve Beta Fonksiyonu Arasındaki İlişki

Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasında ilişki kurabilmek için Laplace dönüşümünü kullanacağız.

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}\,(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{3.15}$$

integralini göz önüne alalım. Açık olarak $h_{z,w}(t)$, t^{z-1} ve t^{w-1} fonksiyonunun konvolüsyonudur ve $h_{z,w}(1) = B(z,w)$ dır.

İki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü, onların Laplace dönüşümünün çarpımına eşit olduğundan,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}.\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\mathrm{w})}{s^{z+w}} \tag{3.16}$$

olur. Burada $H_{z,w}(s), h_{z,w}(t)$ nin Laplace dönüşümüdür.

Diğer taraftan $\Gamma(z)\Gamma(w)$ çarpımı sabit olduğu için yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının ters Laplace dönüşümü alınarak $h_{z,w}(t)$ orijinal fonksiyonunu yeniden elde etmek mümkündür. Laplace dönüşümünün tekliğinden

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(\mathrm{z}+\mathrm{w})}.t^{z+w-1} \tag{3.17}$$

olup, $t = 1$ alırsak beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birini elde ederiz:

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{3.18}$$

Ayrıca, buradan da

$$B(z,w) = B(w,z) \tag{3.19}$$

elde edilir.

Beta fonksiyonunun tanımı sadece $Re(z) > 0, Re(w) > 0$ olduğu zaman geçerlidir. Eğer Gamma fonksiyonunun analitik genişletmesine sahip isek, yukarıdaki denklemdeki ilişki beta fonksiyonunun tüm kompleks düzleme analitik genişletmesini sağlar.

Beta fonksiyonu yardımıyla Gamma fonksiyonu için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{3.20}$$

önemli bağıntısını elde ederiz. Bu formülü $0 < Re(z) < 1$ koşulu altında, $z \neq 0, \mp 1, \mp 2,$ … için geçerlidir (Podlubny, 1999).

3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyonu tamsayı basamaktan diferensiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Onun bir parametre genişletilmiş şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{3.21}$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir (Erdelyi, 1955).

3.3.1. İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{3.22}$$

seri açılımı ile verilir. (3.22) denkleminden,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \tag{3.23}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{z-1}}{z} \tag{3.24}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z\right) \tag{3.25}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \tag{3.26}$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right\} \tag{3.27}$$

dir.

3.4. Kesirli Basamaktan Türev ve İntegral

Bu bölümde kesirli basamaktan türev ve integral tanımlarına yer verilecektir.

3.4.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

$\alpha > 0\ ve\ f \in L_1(a,b)$ olmak üzere sol ve sağ α. mertebeden kesirli integralleri sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{3.28}$$

$$ {}_tI_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau\ . \tag{3.29}$$

"*" konvolüsyon operatörü ve

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ t^{\alpha-1} & , t > 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

olmak üzere (3.28)' de tanımı verilen integral, Laplace konvolüsyonu olarak da ifade edilebilir:

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{3.31}$$

Benzer durum (3.29) integrali için de geçerlidir.

3.4.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$f(t) \in L_1(a,b)$ fonksiyonu için $n-1<\alpha<n\ (n\in\mathbb{N}^+)$ olmak üzere *f'* in α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri sırası ile

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = D^n\, {}_aI_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.32)$$

$$ {}_tD_b^\alpha f(t) = (-D)^n\, {}_tI_b^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.33)$$

olarak tanımlanır.

3.4.3. Caputo Kesirli Türevi

$n-1<\alpha<n\ (n\in\mathbb{N}^+)\ ve\ f, n.$ mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere *f'* in α. mertebeden sol ve sağ kesirli türevleri sırasıyla

$$ {}_a^CD_t^\alpha f(t) = {}_aI_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\mathrm{\alpha})}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)d\tau \qquad (3.34)$$

$$ {}_t^CD_b^\alpha f(t) = {}_tI_b^{n-\alpha}(-D)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)d\tau \qquad (3.35)$$

biçiminde tanımlanır.

3.4.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve Caputo Kesirli Türevi Arasındaki İlişkiler

Teorem 3.4.4.1. $f(t), (a,t)$ sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $m-1<\alpha<m\ (m\in\mathbb{Z}^+)$ olmak üzere $f^{(k)}(t)\ (k=1,2,\dots,m+1)$ türevleri de $[a,t]$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir ise $k=1,2,\dots m+1$ için $f^{(k)}(a)=0$ şartı sağlanırsa

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = {}_a^CD_t^\alpha f(t) \qquad (3.36)$$

eşitliği geçerlidir.

Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi arasındaki ilişkiyi incelemek için, sabit fonksiyonu her ikisini de uygulayıp neden Caputo kesirli türevini tercih ettiğimizi görelim:

$t \in \mathbb{R}$ için $f(t) = c$ ve $c \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olacak şekilde $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım.

Riemann-Liouville kesirli türevi için;

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \tag{3.37}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}. c d\tau$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{(t-\tau)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}. c - \right|_0^t$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}. \frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right)$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}. \frac{-\alpha+1}{1-\alpha}. t^{-\alpha+1-1}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}. t^{-\alpha}$$

elde edilir.

Caputo kesirli türevi için;

$$^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \tag{3.38}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}. 0 d\tau$$

$$= 0$$

elde edilir. (3.37) ve (3.38) sonuçlarından da görüldüğü üzere Caputo kesirli türevi Riemann kesirli türevine göre daha gerçekçi sonuçlar vermektedir.

3.5. Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler İçin Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

$\alpha \in (0,1]$, olmak üzere

$$D^{\alpha}x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{3.39}$$

$$D^{\alpha}x_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

.

.

.

$$D^{\alpha}x_k(t) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

otonom sistemini

$$x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}, \dots, x_k(0) = x_{0k}$$

başlangıç değerleri ile birlikte göz önüne alalım. (3.39) sisteminin denge noktaları,

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = 0, i = 1,2, \dots, k \tag{3.40}$$

koşullarını sağlayan $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ noktalarıdır.
Denge noktalarının asimptotik kararlığını elde etmek için,

$$x(t) = x_i^* + \varepsilon_i(t) \tag{3.41}$$

diyelim. $x(t)$, (3.39) da verilen B.D.P.' in çözümü olduğundan

$$D^{\alpha}\big(\varepsilon_i(t)\big) = f_i(x_1^* + \varepsilon_1, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_k^* + \varepsilon_k), \quad i = 1,2, \dots, k \tag{3.42}$$

yazılabilir. * denge noktasını göstermek üzere,

$$f_i(x_1^* + \varepsilon_1, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_k^* + \varepsilon_k)$$

$$= f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \tag{3.43}$$

$$+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}|_* \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}|_* \varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}|_* \varepsilon_k$$

$$+\cdots$$

ve $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = 0$ olduğundan,

$$f_i(x_1^* + \varepsilon_1, x_2^* + \varepsilon_2, \dots, x_k^* + \varepsilon_k) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1}|_* \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}|_* \varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}|_* \varepsilon_k \tag{3.44}$$

yazılabilir. (3.43) ve (3.44)' den

$$D^\alpha\big(\varepsilon_i(t)\big) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1}|_* \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}|_* \varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}|_* \varepsilon_k \ \ (i = 1,2, \dots, k) \tag{3.45}$$

elde edilir.

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k]^T \tag{3.46}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_*, i, j = 1,2, \dots, k \tag{3.47}$$

olmak üzere, (3.45) ifadesi

$$D^\alpha \varepsilon = A\varepsilon \tag{3.48}$$

$$\varepsilon_i(0) = x_i(0) - x_i^* \quad , \qquad i = 1,2, \dots, k$$

başlangıç değer problemini verir. *B, A* matrisinin öz vektörlerinden oluşan matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ değerleri *A* matrisinin özdeğerleri olmak üzere,

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$A = BCB^{-1} \tag{3.50}$$

dir. (3.50) ifadesi (3.48)' de yerine yazılırsa,

$$D^{\alpha}\eta = C\eta \tag{3.51}$$

sistemi elde edilir. Burada, Burada, $\eta = B^{-1}\varepsilon$ ve $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k]$ dir. (3.51) ile verilen sistemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları yardımı ile

$$\eta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \eta_i(0) = E_{\alpha}(\lambda_i t^{\alpha})\eta_i(0) \quad , \qquad (i = 1,2, \dots, k) \tag{3.52}$$

şeklinde yazılabilir (Podlubny 1999).

Matignon (1996) tarafından elde edilen sonuçlar kullanılırsa,

$$|arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2} \,, \qquad (i = 1,2, \dots, k) \tag{3.53}$$

olduğunda $\eta_i(t)$ azalandır. O halde $\varepsilon_i(t)$ de azalandır.

Yani, $|arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ koşulları tüm $\lambda_i, i = 1,2, \dots, k$ özdeğerleri için sağlanıyorsa denge noktaları asimptotik kararlıdır.

3.5.1. Routh-Hurwitz Teoremi

Aşağıdaki reel katsayılı polinomun bütün köklerinin reel kısımlarının negatifliği için gerek ve yeter şart,

$$K(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.54}$$

Karakteristik polinomunun reel katsayıları ile oluşturulan Hurwitz matrisinin bütün esas köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Hurwitz matrisi H_n' nin ana diyagonallerinin, sıralı olarak a_1' den a_n' e kadar sayıları sırasıyla $K(\lambda)$ polinomunun katsayıları olduğu unutulmamalıdır. Bu matristeki diğer sütunlar yalnızca tek sayılarla veya sadece eşit indisli katsayılardan oluşur. Bu nedenle, Hurwitz matrisinin $H_n = (b_{ik})$ elemanları $b_{ik} = a_{2i-k}$ ile verilir, diğer katsayılar sıfırlarla değiştirilir. Hurwitz matrisinin ana diyagonal minörlerini aşağıdaki gibi tanımlar:

$$\begin{aligned} &D_1 = |a_1|, \\ &D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \\ &\vdots \\ &D_n = det(H_n). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Hurwitz teoremi büyük n' ler için pratik hale gelir. Bunu gözlemlemek için;
Örneğin; ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinomlara uygulayalım.

i. $K(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$
$a_1 > 0$ ve $a_2 > 0$

ii. $K(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$
$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ ve $a_1a_2 - a_3 > 0$

iii. $K(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$
$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0$ ve $a_1a_2a_3 - {a_3}^2 - {a_1}^2a_4 > 0$

Hurwitz koşullarında, tüm $a_i > 0,\ i = 1, \dots, n$ olduğu ancak bütün katsayıların pozitifliği $K(\lambda)$' nın tüm dizilerinin reel kısımları için negatif olmak yeterli değildir. Bu köklerin negatif reel kısımlara sahip olup olmadığını anlamak için gerekli koşul kullanılabilir.

Teorem 3.5.1.1. $K(\lambda)$ karakteristik polinomunun kökleri negatif reel kısımlara sahipse, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ler pozitiftir.

İspat: $K(\lambda)$ polinomu $\lambda + \alpha$ veya $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ şeklinde alınabilir.

α, β ve γ reel sayıları, $K(\lambda)$ polinomunun kökleri negatif reel kısımlara sahipse $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $\gamma > 0$ dır. Bu $K(\lambda)$ polinomunun katsayılarının pozitif olduğunu gösterir.

Tanım 3.5.1.1. $D(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$ diferensiyel denklemine ait $K(\lambda)$ karakteristik polinomunun tüm kökleri negatif reel kısımlı ise diferensiyel denklemin çözümleri kararlıdır.

3.6. Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremi

Bu bölümde kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için ele alınan bir başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili bilgi verilecektir.

3.6.1. Lipschitz Koşulu

Eğer bir $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı bir $f(t, u)$ fonksiyonu her $(t, u_1), (t, u_2) \in D$ ve $k > 0$ bir sabit olmak üzere;

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq k|u_1 - u_2| \tag{3.57}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f Lipschitz koşulunu sağlar denir ve $f \in Lip(D, K)$ şeklinde gösterilir.

Tanımın bir sonucu olarak, bir $f(t, u)$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul her $(t, u_1), (t, u_2) \in D$ için

$$\frac{|f(t, u_1) - f(t, u_2)|}{|u_1 - u_2|} \leq k\ , u_1 \neq u_2 \tag{3.58}$$

olacak şekilde bir $k > 0$ olmasıdır.

Aşağıdaki teorem Lipschitz koşulunu gerçekleyen fonksiyonlar için genel bir kriter vermektedir.

Teorem 3.6.1.1. f(t,u) fonksiyonu, $R = \{(t,u): |t - t_0| \leq p, |u - u_0| \leq q\}$ dikdörtgeninde tanımlı, sürekli bir fonksiyon olsun. Burada p ve q pozitif reel sayılardır. Kabul edelim ki $\frac{\partial f}{\partial u}$, R de tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda $f(t,u)$, R de Lipschitz koşulunu sağlar.

3.6.2. Picard Teoremi

$f(t,u)$ ve $\frac{\partial f}{\partial u}$ türevi bir

$$\Omega(a,b) = \{(t,u): |t - t_1| \leq a, |u - u_1| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli ise bu durumda

$$\frac{df}{du} = f(t,u), u(t_0) = u_0 \tag{3.59}$$

başlangıç değer probleminin $|t - t_1| \leq h \leq a$ aralığında tanımlı olan bir tek U(t) çözümü vardır. Burada

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = max(f(t,u)). \tag{3.60}$$

Lemma 3.6.2.1. $f(t,u)$ fonksiyonu $\Omega(a,b)$ bölgesinde sürekli ise o zaman (3.59) başlangıç değer problemi

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,u(s))\,ds \tag{3.61}$$

İntegral denklemine eşdeğerdir.

Teorem 3.6.2.1. $f(t,u)$ fonksiyonu $\Omega(a,b)$ bölgesinde sürekli ve $f \in Lip(\Omega, \mathrm{L})$ ise (3.59) B.D.P. bir tek u(t) çözümüne sahiptir.

Bu çözüm $|t - t_1| \leq h$, $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ aralığında tanımlıdır.

3.7. Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Atangana-Toufik Yöntemi

Bu bölümde kesirli basamaktan bir Caputo B.D.P.'nin çözümü için Atangana-Toufik metodunun incelemesini yapacağız.

$$\begin{cases} {}_a^C D_t^{\alpha} U(t) = F(t,U) \\ \quad U(t_0) = U_0 \end{cases} \tag{3.62}$$

Başlangıç değer problemini ele alalım.

(3.62) ile verilen kesirli basamaktan Caputo B.D.P. (3.62) integral denklemine denktir.

$$U(t) - U(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F\big(\tau, U(\tau)\big) d\tau \tag{3.63}$$

(3.63) denkleminde $t = t_{n+1}$ için aşağıdaki eşitlik yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U(t_{n+1}) - U(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1} F\big(\tau, U(\tau)\big) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}. F\big(\tau, U(\tau)\big) d\tau \tag{3.64}$$

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, $F\big(\tau, U(\tau)\big)$ fonksiyonu için Lagrange interpolasyonu uygulanırsa,

$$F\big(\tau, U(\tau)\big) = \frac{\tau - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}. F\big(t_k, U(t_k)\big) - \frac{\tau - t_k}{t_k - t_{k-1}}. F\big(t_{k-1}, U(t_{k-1})\big)$$

$$= \frac{F\big(t_k, U(t_k)\big)}{h}.(\tau - t_{k-1}) - \frac{F\big(t_{k-1}, U(t_{k-1})\big)}{h}.(\tau - t_k)$$

$$\simeq \frac{F(t_k, U_k)}{h}.(\tau - t_{k-1}) - \frac{F(t_{k-1}, U_{k-1})}{h}.(\tau - t_k) \tag{3.65}$$

(3.65) eşitliği, (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$U(t_{n+1}) - U(t_0) =$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.\left(\frac{F(t_k,U_k)}{h}.(\tau-t_{k-1})-\frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}.(\tau-t_k)\right)d\tau \qquad (3.66)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.(\tau-t_{k-1}).\frac{F(t_k,U_k)}{h}d\tau - \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.(\tau - t_k).\frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{F(t_k,U_k)}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.(\tau-t_{k-1})d\tau - \frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}\int_{t_k}^{t_{k-1}}(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1}.(\tau-t_k)d\tau\right)$$

Denklemi daha anlaşılır hale getirmek için

$$C_{\alpha,k,1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.(\tau-t_{k-1})d\tau \qquad (3.67)$$

ve

$$C_{\alpha,k,2} = \int_{t_k}^{t_{k-1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.(\tau-t_k)d\tau \qquad (3.68)$$

eşitliklerini göz önünde bulunduralım.

(3.67) ve (3.68) eşitliğinde $y = t_{n+1} - \tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$C_{\alpha,k,1} = \int_{t_{n+1}-t_k}^{t_{n+1}-t_{k+1}} y^{\alpha-1}.(t_{k-1}-t_{n+1}+y)dy \qquad (3.69)$$

$$= \int_{t_{n+1}-t_k}^{t_{n+1}-t_{k+1}} y^{\alpha}dy + (t_{k-1}-t_{n+1})\int_{t_{n+1}-t_k}^{t_{n+1}-t_{k+1}} y^{\alpha-1}dy$$

$$= \frac{(t_{n+1}-t_{k+1})^{\alpha+1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (t_{n+1}-t_{k-1}).\frac{(t_{n+1}-t_{k+1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha}$$

ve

$$C_{\alpha,k,2} = \int_{t_{n+1}-t_k}^{t_{n+1}-t_{k-1}} y^{\alpha-1}(t_k-t_{n+1}+y)dy \qquad (3.70)$$

$$= \int_{t_{n+1}-t_k}^{t_{n+1}-t_{k-1}}(y^{\alpha-1}(t_k-t_{n+1})+y^{\alpha})dy$$

$$= (t_k - t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha-1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1}$$

elde edilir. (3.66) denkleminde (3.69) ve (3.70) yerine yazılırsa;

$$U(t_{n+1}) = U(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{F(t_k,U_k)}{h}\left[\frac{(n-k)^{\alpha+1}-(n+1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-k+2)[(n-k)^{\alpha}-(n-k+1)^{\alpha}]}{\alpha}\right] - \frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}\left[(t_k - t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha-1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1}\right]\right) \quad (3.71)$$

elde edilir.

3.7.1. Hata Analizi

Bu kısımda, tanımlanan yöntemi kullanarak kesirli kısmi diferensiyel denklemlere yaklaşırken yapılan hatayı tespit edeceğiz. Bu, aşağıdaki teoremle kurulacaktır.

Teorem 3.7.1.1. (3.62)’ de verilen B.D.P. verilen fonksiyonun sınırlı bir ikinci türevini içeren,Caputo kesirli türevi ile lineer olmayan kesirli basamaktan bir diferensiyel denklem olsun. $\varepsilon_k \in [t_k, t_{k+1}]$ için hata sabiti aşağıdaki gibi tahmin edilir:

$$|R_n^{\alpha}| \leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)}\max_{[0,t_{n+1}]}\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[F(\tau,U(\tau))\right]_{\tau=\varepsilon_k}(n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha})(\alpha-1)(n^2-3n-4)\right|.$$

İspat: Daha önce tanımlanan algoritmanın türev gösterimini ele alalım.

$$U(t_{n+1}) - U(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}F(\tau,U(\tau))d\tau \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}.F(\tau,U(\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{F(t_k,U_k)}{h}(\tau-t_{k-1}) - \frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}(\tau-t_k) + \frac{(\tau-t_k)(\tau-t_{k-1})}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[F(\tau,U(\tau))\right]_{\tau=\varepsilon_k}\right)(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{F(t_k,U_k)}{h}(\tau-t_{k-1}) - \frac{F(t_{k-1},U_{k-1})}{h}(\tau-t_k)\right)(t_{n+1}-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau + R_n^{\alpha}$$

Burada hata terimi aşağıdaki gibi verilir,

$$R_n^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k)(\tau - t_{k-1})}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau \qquad (3.73)$$

Dikkat edilmelidir ki $[t_k, t_{k+1}]$ aralığındaki pozitif değerleri için $\tau \to (\tau - t_{k-1})(t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1}$ dir. Bundan dolayı $\varepsilon_k \in [t_k, t_{k+1}]$ için

$$R_n^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} \frac{(\varepsilon_k - t_k)}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_{k-1}) \, (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau \qquad (3.74)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} \frac{(\varepsilon_k - t_k)}{2} \times C_{\alpha,k,1} h^{\alpha+1}$$

(3.69), (3.74)' deki denklemde yerine yazılırsa

$$|R_n^\alpha| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} \frac{(\varepsilon_k - t_k)}{2} \left[\frac{(t_{n+1} - t_{k+1})^{\alpha+1} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (t_{n+1} - t_{k-1}). \frac{(t_{n+1} - t_{k+1})^{\alpha} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha}}{\alpha} \right] \right| \qquad (3.75)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} \right| \left| \frac{(\varepsilon_k - t_k)}{2} \right| \left| \frac{(t_{n+1} - t_{k+1})^{\alpha+1} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (t_{n+1} - t_{k-1}). \frac{(t_{n+1} - t_{k+1})^{\alpha} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha}}{\alpha} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{h}{2} \max_{[0,t_{n+1}]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F\big(\tau, U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k} \sum_{k=0}^{n} \alpha[(n-k)^{\alpha+1} - (n+1-k)^{\alpha+1}] - (\alpha+1)(n-k+2)[(n-k)^{\alpha} - (n-k+1)^{\alpha}] \right|$$

$$\alpha[(n-k)^{\alpha+1} - (n+1-k)^{\alpha+1}] \leq \alpha(n^{\alpha+1} - (n+1)^{\alpha+1}) \qquad (3.76)$$

$$(\alpha+1)(n-k+2)[(n-k)^{\alpha} - (n-k+1)^{\alpha}] \leq (\alpha+1)(n+2)(n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}) \qquad (3.77)$$

(3.76) denkleminden (3.77) denklemi çıkarılırsa;

$$\alpha[(n-k)^{\alpha+1}-(n+1-k)^{\alpha+1}]-(\alpha+1)(n-k+2)[(n-k)^{\alpha}-(n-k+1)^{\alpha}] \leq \alpha[n^{\alpha+1}-(n+1)^{\alpha+1}]-(\alpha+1)(n-k+2)[n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}] \tag{3.78}$$

$$\leq \alpha n^{\alpha+1}-\alpha(n+1)^{\alpha+1}-(\alpha+1)(n-k+2)n^{\alpha}+(\alpha+1)(n-k+2)(n+1)^{\alpha}$$

$$\leq n^{\alpha}\big(\alpha n-(\alpha+1)(n-k+2)\big)-(n+1)^{\alpha}\big(\alpha(n+1)-(\alpha+1)(n-k+2)\big)$$

$$\leq n^{\alpha}(\alpha n-\alpha n+\alpha k-2\alpha-n+k-2)-(n+1)^{\alpha}(\alpha n+\alpha-\alpha n+\alpha k-2\alpha-n+k-2)$$

$$\leq n^{\alpha}(\alpha k-2\alpha-n+k-2)-(n+1)^{\alpha}(\alpha k-2\alpha-n+k-2+\alpha)$$

$$\leq n^{\alpha}(\alpha k-2\alpha-n+k-2)-(n+1)^{\alpha}(\alpha k-2\alpha-n+k-2)-(n+1)^{\alpha}$$

$$\leq (\alpha k-2\alpha-n+k-2)(n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha})-(n+1)^{\alpha}\alpha$$

(3.78), (3.75)’ de yerine yazılırsa,

$$|R_n^{\alpha}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{h}{2}\max_{[0,t_{n+1}]}\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[F\big(\tau,U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k}(n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha})\sum_{k=0}^{n}(\alpha k-2\alpha-n+k-2)-(n+1)^{\alpha}\alpha\right| \tag{3.79}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{h}{2}\max_{[0,t_{n+1}]}\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[F\big(\tau,U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k}(n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha})\left[\frac{\alpha n(n+1)}{2}-2\alpha(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}-2(n+1)\right]-(n+1)^{\alpha}\alpha\right|$$

$$\leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)}\max_{[0,t_{n+1}]}\left|\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[F\big(\tau,U(\tau)\big)\right]_{\tau=\varepsilon_k}(n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha})(\alpha-1)(n^2-3n-4)\right|$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. SITR Hastalık Modeli için Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

$\alpha \in (0,1]$ için aşağıdaki Caputo diferensiyel denklem sistemini ele alalım:

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha S(t) &= F_1\big(t, S(t)\big),\\
{}_a^C D_t^\alpha I(t) &= F_2\big(t, I(t)\big),\\
{}_a^C D_t^\alpha T(t) &= F_3\big(t, T(t)\big),\\
{}_a^C D_t^\alpha R(t) &= F_4\big(t, R(t)\big),
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Başlangıç koşulları

$$S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, T(t_0) = T_0, R(t_0) = R_0.$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
F_1\big(t, S(t)\big) &= \Lambda - \mu S(t) - \beta S(t) I(t),\\
F_2\big(t, I(t)\big) &= \beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) I(t),\\
F_3\big(t, T(t)\big) &= \gamma I(t) - (\alpha + \mu) T(t),\\
F_4\big(t, R(t)\big) &= \alpha T(t) + \delta I(t) - \mu R(t),
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

dir.

(4.1) sistemine ait denge noktaları

$${}_a^C D_t^\alpha S(t) = 0 \Longrightarrow F_1\big(t, S(t)\big) = 0,$$

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}I(t)=0 \Longrightarrow F_2\big(t,I(t)\big)=0, \tag{4.3}$$

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}T(t)=0 \Longrightarrow F_3\big(t,T(t)\big)=0,$$

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}R(t)=0 \Longrightarrow F_4\big(t,R(t)\big)=0,$$

$E_0=(S^0,I^0,T^0,R^0)=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0,0\right)$ ve $E_1=(S^*,I^*,T^*,R^*)$ dir.

$E_0=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0,0\right)$ hastalıksız denge noktası için Jakobien matris aşağıdaki gibi verilir:

$$J_0=\begin{bmatrix} -\mu & \beta & 0 & 0 \\ -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & \frac{\beta\Lambda}{\mu}-(\mu+\gamma+\delta+\mu_1) & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & -(\alpha+\mu) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Teorem 4.1.1. Aşağıdaki koşul sağlandığı taktirde (4.1) ile verilen sistemin $E_0=\left(\frac{\Lambda}{\mu},0,0,0\right)$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

$$\frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\gamma+\delta+\mu_1)}<1 \tag{4.5}$$

İspat : (4.1) sisteminin E_0 denge noktasının kararlı olması için bu noktada elde edilmiş Jakobien matrisin tüm λ_i özdeğerlerinin

$$\lambda_i<0\ ,\ i=1,2,3,4$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir. Bu özdeğerler,

$$\lambda_1=-\mu,$$

$$\lambda_2=\frac{\beta\Lambda}{\mu}-(\mu+\gamma+\delta+\mu_1),$$

$\lambda_3 = -(\alpha + \mu),$

$\lambda_4 = -\mu.$

Burada $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ olduğu aşikardır. $\lambda_2 < 0$ olması için $\frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\gamma+\delta+\mu_1)} < 1$ olmalıdır.

Sonuç olarak E_0 denge noktası, $\frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\gamma+\delta+\mu_1)} < 1$ için asimptotik kararlı olur.

$E_1 = (S^*, I^*, T^*, R^*)$ denge noktası için Jakobien matris aşağıdaki gibi verilir:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I^*(t) & \beta I^*(t) & 0 & 0 \\ -\beta S^*(t) & \beta S^*(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & -(\alpha + \mu) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Teorem 4.1.2. Aşağıdaki koşulları sağlandığı taktirde (4.1) ile verilen sistemin $E_1 = (S^*, I^*, T^*, R^*)$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

(i) $a_i > 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

(ii) $a_1 a_2 - a_3 > 0.$

(iii) $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$

İspat : (4.1) sisteminin E_1 denge noktasının kararlı olması için

$$K(\lambda) = det(J_1 - \lambda I) = 0$$

Karakteristik denkleminin çözülmesiyle elde edilir. Daha açık olarak

$$K(\lambda) = \begin{vmatrix} -\mu - \beta I^*(t) - \lambda & \beta I^*(t) & 0 & 0 \\ -\beta S^*(t) & \beta S^*(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) - \lambda & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & -(\alpha + \mu) - \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix}$$

$$K(\lambda) = (-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)(\beta S^*(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) - \lambda)(-(\alpha + \mu) - \lambda)(-\mu - \lambda) - \big(\beta I^*(t)\big)\big(-\beta S^*(t)\big)(-(\alpha + \mu) - \lambda)(-\mu - \lambda)$$

$$= (-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)(\beta S^*(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) - \lambda)(\alpha + \mu + \lambda)(\mu + \lambda) + \beta^2 I^*(t) S^*(t)(\alpha + \mu + \lambda)(\mu + \lambda)$$

$= (\alpha + \mu + \lambda)(\mu + \lambda)[(-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)(\beta S^*(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) - \lambda) + \beta^2 I^*(t) S^*(t)]$

$= (\alpha + \mu + \lambda)(\mu + \lambda)[(-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)\beta S^*(t) - (-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)(\mu + \gamma + \delta + \mu_1) - (-\mu - \beta I^*(t) - \lambda)\lambda + \beta^2 I^*(t) S^*(t)]$

$= (\alpha + \mu + \lambda)(\mu + \lambda)[-\mu\beta S^*(t) - \beta^2 I^*(t) S^*(t) - \beta S^*(t)\lambda + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\delta + \mu\mu_1 + \beta\mu I^*(t) + \beta\gamma I^*(t) + \beta\delta I^*(t) + \beta\mu_1 I^*(t) + \mu\lambda + \beta I^*(t)\lambda + \lambda^2 + \beta^2 I^*(t) S^*(t)]$

$= (\alpha + \mu + \lambda)[-\mu^2\beta S^*(t) - \beta\mu S^*(t)\lambda + \mu^3 + \mu^2\gamma + \mu^2\delta + \mu^2\mu_1 + \beta\mu^2 I^*(t) + \beta\gamma\mu I^*(t) + \beta\delta\mu I^*(t) + \beta\mu\mu_1 I^*(t) + \mu^2\lambda + \beta\mu I^*(t)\lambda + \mu\lambda^2 - \mu\beta S^*(t)\lambda - \beta S^*(t)\lambda^2 + \mu^2\lambda + \mu\gamma\lambda + \mu\delta\lambda + \mu\mu_1\lambda + \beta\mu I^*(t)\lambda + \beta\gamma I^*(t)\lambda + \beta\delta I^*(t)\lambda + \beta\mu_1 I^*(t)\lambda + \mu\lambda^2 + \beta I^*(t)\lambda^2 + \lambda^3]$

$= (-\mu^2\beta\alpha - \mu^3\beta)S^*(t) + (\beta\mu^2\alpha + \beta\gamma\mu\alpha + \beta\delta\mu\alpha + \beta\mu\mu_1\alpha + \beta\mu^3 + \beta\gamma\mu^2 + \beta\delta\mu^2 + \beta\mu^2\mu_1)I^*(t) + \mu^3\alpha + \mu^2\gamma\alpha + \mu^2\delta\alpha + \mu^2\mu_1\alpha + \mu^4 + \mu^3\gamma + \mu^3\delta + \mu^3\mu_1 + \lambda[(-2\beta\mu\alpha - 3\beta\mu^2)S^*(t) + (2\beta\mu\alpha + \beta\gamma\alpha + \beta\delta\alpha + \beta\mu_1\alpha + 3\beta\mu^2 + 2\beta\gamma\mu + 2\beta\delta\mu + 2\beta\mu\mu_1)I^*(t) + 2\mu^2\alpha + \mu\gamma\alpha + \mu\delta\alpha + \mu\mu_1\alpha + 3\mu^3 + 2\mu^2\gamma + 2\mu^2\delta + 2\mu^2\mu_1] + \lambda^2[(-\beta\alpha - 3\beta\mu)S^*(t) + (\beta\alpha + 3\beta\mu + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\mu_1)I^*(t) + 2\mu\alpha + 4\mu^2 + \mu\gamma + \mu\delta + \mu\mu_1] + \lambda^3[-\beta S^*(t) + \beta I^*(t) + \alpha + 3\mu] + \lambda^4$

$$K(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada

$a_1 = \alpha + 3\mu + \beta\big(I^*(t) - S^*(t)\big)$

$a_2 = (\beta\alpha + 3\beta\mu)\big(I^*(t) - S^*(t)\big) + (\beta\gamma\alpha + \beta\delta\alpha + \beta\mu_1\alpha + 2\beta\gamma\mu + 2\beta\delta\mu + 2\beta\mu\mu_1)I^*(t) + 2\mu^2 + \alpha + \mu\gamma\alpha + \mu\delta\alpha + \mu\alpha\mu_1 + 3\mu^3 + 2\mu^2\gamma + 2\mu^2\delta + 2\mu^2\mu_1$

$a_3 = (+2\beta\mu\alpha + 3\beta\mu^2)\big(I^*(t) - S^*(t)\big) + (\beta\gamma\alpha + \beta\delta\alpha + \beta\mu_1\alpha + 2\beta\gamma\mu + 2\beta\delta\mu + 2\beta\mu\mu_1)I^*(t) + 2\mu^2\alpha + \mu\gamma\alpha + \mu\delta\alpha + \mu\mu_1\alpha + 3\mu^3 + 2\mu^2\gamma + 2\mu^2\delta + 2\mu^2\mu_1$

$a_4 = (\mu^2\beta\alpha + \mu^3\beta)\big(I^*(t) - S^*(t)\big) + (\beta\gamma\mu\alpha + \beta\delta\mu\alpha + \beta\mu\mu_1\alpha + \beta\gamma\mu^2 + \beta\delta\mu^2 + \beta\mu_1\mu^2)I^*(t) + \mu^3\alpha + \mu^2\gamma\alpha + \mu^2\delta\alpha + \mu^2\mu_1\alpha + \mu^4 + \mu^3\gamma + \mu^3\delta + \mu^3\mu_1$

dır.

a_1, a_2, a_3 ve a_4 ler yukarıdaki gibi düzenlendiğinde eğer $I^*(t) > S^*(t)$ sağlanırsa, $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ ve $a_4 > 0$ olur.$a_1a_2 - a_3 > 0$ ve $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$ olursa Routh-Hurwitz teoremi sağlanır. Dolayısıyla tüm karakteristik kökleri negatif reel kısımlıdır. Sonuç olarak E_1 denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

4.2. SITR Hastalık Modeli için Varlık ve Teklik İncelemesi

Bu bölümde SITR model için çözümlerin varlık ve tekliğini ele alacağız.

$|t - t_0| \leq a\,, a > 0$ için

$$\begin{aligned}
&R_1: |S - S_0| \leq b_1\,, |S(t)| \leq c_1\,, (b_1 > 0\ ve\ c_1 > 0),\\
&R_2: |I - I_0| \leq b_2\,, |I(t)| \leq c_2\,, (b_2 > 0\ ve\ c_2 > 0),\\
&R_3: |T - T_0| \leq b_3\,, |T(t)| \leq c_3\,, (b_3 > 0\ ve\ c_3 > 0),\\
&R_4: |R - R_0| \leq b_4\,, |R(t)| \leq c_4\,, (b_4 > 0\ ve\ c_4 > 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.1) ile verilen diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki integral denklem sistemine denktir:

$$\begin{aligned}
&S(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S(\tau)\big)d\tau,\\
&I(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I(\tau)\big)d\tau,\\
&T(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T(\tau)\big)d\tau,\\
&R(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R(\tau)\big)d\tau.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Teorem 4.2.1. F_1, F_2, F_3 ve F_4 çekirdekleri aşağıdaki koşulları sağladığı taktirde Lipschitz süreklidir denir.

i. $|F_1(t, S(t)) - F_1(t, S_1(t))| \leq L_1 . |S(t) - S_1(t)|$ olacak şekilde L_1 vardır.

ii. $|F_2(t, I(t)) - F_2(t, I_1(t))| \leq L_2 . |I(t) - I_1(t)|$ olacak şekilde L_2 vardır.

iii. $|F_3(t, T(t)) - F_3(t, T_1(t))| \leq L_3 . |T(t) - T_1(t)|$ olacak şekilde L_3 vardır.

iv. $|F_4(t, R(t)) - F_4(t, R_1(t))| \leq L_4 . |R(t) - R_1(t)|$ olacak şekilde L_4 vardır.

İspat :

i.

$$|F_1(t, S(t)) - F_1(t, S_1(t))| = |\Lambda - \mu S(t) - \beta S(t) I(t) - \Lambda + \mu S_1(t) + \beta S_1(t) I(t)|$$

$$= |-\mu(S(t) - S_1(t)) - \beta I(t)(S(t) - S_1(t))|$$

$$= |(-\mu - \beta I(t))(S(t) - S_1(t))|$$

$$\leq |-\mu - \beta I(t)| . |S(t) - S_1(t)|$$

$$\leq |\mu + \beta I(t)| . |S(t) - S_1(t)|$$

$$\leq (\mu + \beta c_2)|S(t) - S_1(t)|$$

$$\leq L_1 . |S(t) - S_1(t)|$$

olacak şekilde $0 \leq L_1 < 1$ vardır.

ii.

$$|F_2(t, I(t)) - F_2(t, I_1(t))| = |\beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) I(t) - \beta S(t) I_1(t) + (\mu + \gamma + \delta + \mu_1) I_1(t)|$$

$$= |\beta S(t)(I(t) - I_1(t)) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1)(I(t) - I_1(t))|$$

$$= |(\beta S(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1))(I(t) - I_1(t))|$$

$$\leq |\beta S(t) - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1)| . |I(t) - I_1(t)|$$

$\leq \left(\beta c_1 - (\mu + \gamma + \delta + \mu_1)\right).|I(t) - I_1(t)|$

$\leq L_2.|I(t) - I_1(t)|$

olacak şekilde $0 \leq L_2 < 1$ vardır.

iii.

$\left|F_3\left(t, T(t)\right) - F_3\left(t, T_1(t)\right)\right| = |\gamma I(t) - (\alpha + \mu)T(t) - \gamma I(t) + (\alpha + \mu)T_1(t)|$

$= \left|-(\alpha + \mu)\left(T(t) - T_1(t)\right)\right|$

$\leq |(\alpha + \mu)|.|T(t) - T_1(t)|$

$\leq (\alpha + \mu).|T(t) - T_1(t)|$

$\leq L_3.|T(t) - T_1(t)|$

olacak şekilde $0 \leq L_3 < 1$ vardır.

iv.

$\left|F_4\left(t, R(t)\right) - F_4\left(t, R_1(t)\right)\right| = |\alpha T(t) + \delta I(t) - \mu R(t) - \alpha T(t) - \delta I(t) + \mu R_1(t)|$

$= \left|-\mu\left(R(t) - R_1(t)\right)\right|$

$\leq \mu.|R(t) - R_1(t)|$

$\leq L_4.|R(t) - R_1(t)|$

olacak şekilde $0 \leq L_4 < 1$ vardır.

i ,ii ,iii ve iv koşulları sağlandığından dolayı F_1, F_2, F_3 ve F_4 çekirdekleri Lipschitz süreklidir.

Şimdi t' ye göre süreklilik şartı ve Lipschitz koşulu altında sistemin çözümleri için varlık ve teklik teoremlerini ele alacağız.

Teorem 4.2.2. (Sistem için Picard Varlık Teoremi)

$B \subset \mathbb{R}^2$ ve $F_i : B \longrightarrow R_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki koşulları sağlayan reel bir fonksiyon olsun.

1) $i = 1, 2, 3, 4$ için F_i' ler B' de süreklidir.

2) $F_1(t, S(t)), F_2(t, I(t)), F_3(t, R(t))$ ve $F_4(t, T(t))$ fonksiyonları D bölgesinde Lipschitz sabitleriyle birlikte Lipschitz süreklidir.

$(t_0, S_0), (t_0, I_0), (t_0, T_0)$ ve (t_0, R_0) B bölgesinde başlangıç noktaları ve a>0, b_i>0 i=1, 2, 3, 4 sabitler olmak üzere R_i dikdörtgensel bölgeleri aşağıdaki gibidir:

$$R_1 = \{(t, S):\ |t - t_0| \le a, |S - S_0| \le b_1\} \subset B,$$

$$R_2 = \{(t, I):\ |t - t_0| \le a, |I - I_0| \le b_2\} \subset B,$$

$$R_3 = \{(t, T):\ |t - t_0| \le a, |T - T_0| \le b_3\} \subset B, \qquad (4.10)$$

$$R_4 = \{(t, R):\ |t - t_0| \le a, |R - R_0| \le b_4\} \subset B.$$

$$h = min\left(a_i, \frac{b_i}{f_i}\right)$$

ve

$$f_1 = \max_{(t,S)\in R_1} F_1(t, S(t)),$$

$$f_2 = \max_{(t,I)\in R_2} F_2(t, I(t)),$$

$$f_3 = \max_{(t,T)\in R_3} F_3(t, T(t)), \qquad (4.11)$$

$$f_4 = \max_{(t,R)\in R_4} F_4(t, R(t))$$

olarak alırsak, B.D.P. $|t - t_0| \le a$ aralığında S, I, R, T olacak şekilde tek çözüme sahiptir. $|t - t_0| \le a$ üzerinde $S_n(t),\ I_n(t),\ T_n(t),\ R_n(t)$ Picard ardışık yaklaşımlar teoremi ile ispatlayacağız.

$$S_n(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big)d\tau,$$

$$I_n(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big)d\tau,$$

$$T_n(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)d\tau, \tag{4.12}$$

$$R_n(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_n(\tau)\big)d\tau.$$

Teoremi dört bölümde ispatlayacağız.

A. Bu bölümde $\{S_n(t), I_n(t), T_n(t), R_n(t)\}$ denklemlerinin bazı özelliklerini göstereceğiz.

(i) Yukarıda verilen $\{S_n, I_n, T_n, R_n\}$ iyi tanımlıdır.

(ii) $\{S_n, I_n, T_n, R_n\}$ denklemleri sürekli türeve sahiptir.

(iii) $[t_0, t_0 + h]$ aralığında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|S_n(t) - S_0| \le \frac{f_1.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$|I_n(t) - I_0| \le \frac{f_2.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$|T_n(t) - T_0| \le \frac{f_3.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$|R_n(t) - R_0| \le \frac{f_4.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

(iv) $\{F_1(t, S_{n-1}), F_2(t, I_{n-1}), F_3(t, T_{n-1}), F_4(t, R_{n-1})\}$ denklemleri iyi tanımlıdır.

İspat :

(i) $\{S_n, I_n, T_n, R_n\}$ iyi tanımlıdır:

$$S_n(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big)d\tau \tag{4.13}$$

(4.13) denkleminde n=1 için,

$$S_1(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_0(\tau)\big) d\tau \tag{4.14}$$

denklemi elde edilir. Denklemi için (iii) de verilen şart sağlanır mı?

$$|S_1(t) - S_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_0(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

n=k için doğru olduğunu kabul edelim. n=k+1 için sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$$|S_{k+1}(t) - S_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_k(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

dir.

$$I_n(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big) d\tau \tag{4.15}$$

(4.15) denkleminde n=1 için,

$$I_1(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_0(\tau)\big) d\tau \tag{4.16}$$

denklemi elde edilir. Denklemi için (iii) de verilen şart sağlanır mı?

$$|I_1(t) - I_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_0(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$\leq \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

n=k için doğru olduğunu kabul edelim. n=k+1 için sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$|I_{k+1}(t) - I_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_k(\tau)\big)d\tau\right|$

$\leq \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

dir.

$$T_n(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)d\tau \tag{4.17}$$

(4.17) denkleminde n=1 için,

$$T_1(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_0(\tau)\big)d\tau \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir. Denklemi için (iii) de verilen şart sağlanır mı?

$|T_1(t) - T_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_0(\tau)\big)d\tau\right|$

$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_3 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$

$\leq \frac{f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

n=k için doğru olduğunu kabul edelim. n=k+1 için sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$|T_{k+1}(t) - T_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_k(\tau)\big)d\tau\right|$

$\leq \frac{f_3 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$

dir.

$$R_n(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big) d\tau \qquad (4.19)$$

(4.19) denkleminde n=1 için,

$$R_1(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_0(\tau)\big) d\tau \qquad (4.20)$$

denklemi elde edilir. Denklemi için (iii) de verilen şart sağlanır mı?

$$|R_1(t) - R_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_0(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_4 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_4 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

n=k için doğru olduğunu kabul edelim. n=k+1 için sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$$|R_{k+1}(t) - R_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_k(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{f_4 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

dir.

Sonuç olarak $\{S_n, I_n, T_n, R_n\}$ iyi tanımlıdır.

(ii) $\{S_n, I_n, T_n, R_n\}$ denklemleri sürekli türeve sahip olduğu açıktır.

(iii) Teoremde verilen eşitsizliklerin sağlandığını ispatlayalım.

$$|S_n(t) - S_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| . \left|F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} . f_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-1+1}}{-\alpha} \right|_0^t$$

$$\leq \frac{f_1}{\Gamma(\alpha)} . \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

$$\leq \frac{f_1 . t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$|I_n(t) - I_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| . \left|F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} . f_2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-1+1}}{-\alpha} \right|_0^t$$

$$\leq \frac{f_2}{\Gamma(\alpha)} . \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

$$\leq \frac{f_2 . t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$|T_n(t) - T_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}|.\left|F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.f_3\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_3}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-1+1}}{-\alpha}\right|_0^t$$

$$\leq \frac{f_3}{\Gamma(\alpha)}.\frac{t^\alpha}{\alpha}$$

$$\leq \frac{f_3.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$|R_n(t) - R_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big)d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}|.\left|F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big)\right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.f_4\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{f_4}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(t-\tau)^{\alpha-1+1}}{-\alpha}\right|_0^t$$

$$\leq \frac{f_4}{\Gamma(\alpha)}.\frac{t^\alpha}{\alpha}$$

$$\leq \frac{f_4.t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(iv) $\{F_1(t,S_{n-1}),F_2(t,I_{n-1}),F_3(t,T_{n-1}),F_4(t,R_{n-1})\}$ denklemleri iyi tanımlılığı açıktır.

B. $[t_0,t_0+h]$ aralığında $\{S_n,I_n,T_n,R_n\}$ fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$|S_n(t)-S_{n-1}(t)|\le {L_1}^{n-1}f_1\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n,$$

$$|I_n(t)-I_{n-1}(t)|\le {L_2}^{n-1}f_2\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n,$$

$$|T_n(t)-T_{n-1}(t)|\le {L_3}^{n-1}f_3\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n, \tag{4.21}$$

$$|R_n(t)-R_{n-1}(t)|\le {L_4}^{n-1}f_4\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n.$$

İspat:

$$S_n(t)=S_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}F_1\big(\tau,S_{n-1}(\tau)\big)\,d\tau \tag{4.22}$$

(4.22) eşitliğinde n yerine n-1 yazarsak

$$S_{n-1}(t)=S_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}F_1\big(\tau,S_{n-2}(\tau)\big)\,d\tau \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.22)’ den (4.23) eşitliği çıkarılırsa

$$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left(F_1\big(\tau,S_{n-1}(\tau)\big)-F_1\big(\tau,S_{n-2}(\tau)\big)\right)d\tau\right) \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24)’ de her iki tarafın mutlak değerini alalım.

$$|S_n-S_{n-1}|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t|(t-\tau)^{\alpha-1}|\left|F_1\big(\tau,S_{n-1}(\tau)\big)-F_1\big(\tau,S_{n-2}(\tau)\big)\right|d\tau\right) \tag{4.25}$$

(4.22)’ de n=1 için

$$S_1(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_0(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.26}$$

(4.26) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değerini alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$|S_1(t) - S_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

elde edilir.

(4.22)' de n=2 için

$$S_2(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.27}$$

(4.27) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değerini alıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$|S_2(t) - S_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.24) eşitliğinde n=2 için

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big(F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_0(\tau)\big) \Big)\, d\tau \right) \tag{4.29}$$

(4.29) eşitliğinin her iki tarafını mutlak değer alırsak,

$$|S_2 - S_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big| F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_0(\tau)\big) \Big|\, d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} L_1 |S_1(\tau) - S_0(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq \frac{L_1 f_1 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{L_1 f_1 t^{2\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}$$

elde edilir.

(4.24) eşitliğinde n=3 için

$$S_3 - S_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_1\big(\tau, S_2(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big) \right) d\tau \right) \tag{4.30}$$

Her iki tarafın (4.30) eşitliğinde mutlak değerini alırsak,

$$|S_3 - S_2| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_1\big(\tau, S_2(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big) \right| d\tau$$

$$\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |S_2(\tau) - S_1(\tau)| \, d\tau$$

$$\leq \frac{{L_1}^2 f_1 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{{L_1}^2 f_1 t^{3\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^3}$$

elde edilir bu şekilde devam ettirsek;

$$|S_n(t) - S_{n-1}(t)| \leq {L_1}^{n-1} f_1 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n \tag{4.31}$$

elde edilir.

$$I_n(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big) \, d\tau \tag{4.32}$$

(4.32) eşitliğinde n yerine n-1 yazarsak,

$$I_{n-1}(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-2}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.33}$$

(4.32) eşitliğinden (4.33) eşitliği çıkarılıp her iki tarafın mutlak değerini alırsa,

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big(F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_{n-2}(\tau)\big) \Big)\, d\tau \right) \tag{4.34}$$

$$|I_n - I_{n-1}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| \left| F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_{n-2}(\tau)\big) \right| d\tau \right)$$

(4.32)' de n=1 için

$$I_1(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_0(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.35}$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alalım.

$$|I_1(t) - I_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.32)' de n=2 için

$$I_2(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.36}$$

$$|I_2(t) - I_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

elde edilir. (4.34) eşitliğinde n=2 için

$$I_2 - I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big(F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_0(\tau)\big) \Big)\, d\tau \right)$$

$|I_2 - I_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_0(\tau)\big) \right| d\tau$

$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} L_2 |I_1(\tau) - I_0(\tau)|\, d\tau$

$\leq \frac{L_2 f_2 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$

$\leq \frac{L_2 f_2 t^{2\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}$

(4.34) eşitliğinde n=3 için

$I_3 - I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_2\big(\tau, I_2(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big) \right) d\tau \right)$

$|I_3 - I_2| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_2\big(\tau, I_2(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big) \right| d\tau$

$\leq \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |I_2(\tau) - I_1(\tau)|\, d\tau$

$\leq \frac{{L_2}^2 f_2 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$

$\leq \frac{{L_2}^2 f_2 t^{3\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^3}$

elde edilir ve bu şekilde devam ettirsek;

$|I_n(t) - I_{n-1}(t)| \leq {L_2}^{n-1} f_2 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n$

elde edilir.

$$T_n(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \qquad (4.37)$$

$$T_{n-1}(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-2}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.38}$$

(4.37) eşitliğinden (4.38) eşitliği çıkartılıp her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_{n-2}(\tau)\big)\right) d\tau\right) \tag{4.39}$$

$$|T_n - T_{n-1}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| \left|F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_{n-2}(\tau)\big)\right| d\tau\right)$$

elde edilir.

(4.37) eşitliğinde n=1 için

$$T_1(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_0(\tau)\big)\, d\tau$$

$$|T_1(t) - T_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_3 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.37) eşitliğinde n=2 için

$$T_2(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big)\, d\tau$$

$$|T_2(t) - T_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_3 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.39) eşitliğinde n=2 için

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_0(\tau)\big)\right) d\tau\right)$$

$$|T_2 - T_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_0(\tau)\big) \right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} L_3 |T_1(\tau) - T_0(\tau)| \, d\tau$$

$$\leq \frac{L_3 f_3 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{L_3 f_3 t^{2\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}$$

(4.39) eşitliğinde n=3 için

$$T_3 - T_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_3\big(\tau, T_2(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big) \right) d\tau \right)$$

$$|T_3 - T_2| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_3\big(\tau, T_2(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big) \right| d\tau$$

$$\leq \frac{L_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |T_2(\tau) - T_1(\tau)| \, d\tau$$

$$\leq \frac{{L_3}^2 f_3 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{{L_3}^2 f_3 t^{3\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^3}$$

elde edilir ve bu şekilde devam ettirsek;

$$|T_n(t) - T_{n-1}(t)| \leq {L_3}^{n-1} f_3 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n$$

elde edilir.

$$R_n(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big) \, d\tau \qquad (4.40)$$

$$R_{n-1}(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-2}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.41}$$

(4.40) eşitliğinden (4.41) eşitliği çıkarılıp her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$R_n - R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big(F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_{n-2}(\tau)\big) \Big)\, d\tau \right) \tag{4.42}$$

$$|R_n - R_{n-1}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |(t-\tau)^{\alpha-1}| \left| F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_{n-2}(\tau)\big) \right| d\tau \right)$$

elde edilir.

(4.40) eşitliğinde n=1 için

$$R_1(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_0(\tau)\big)\, d\tau$$

$$|R_1(t) - R_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_4 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.40) eşitliğinde n=2 için

$$R_2(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big)\, d\tau$$

$$|R_2(t) - R_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f_4 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau$$

$$\leq \frac{f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.42) eşitliğinde n=2 için

$$R_2 - R_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big(F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_0(\tau)\big) \Big)\, d\tau \right)$$

$$|R_2 - R_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_0(\tau)\big) \right| d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} L_4 |R_1(\tau) - R_0(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq \frac{L_4 f_4 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{L_4 f_4 t^{2\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}$$

(4.42) eşitliğinde n=3 için

$$R_3 - R_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(F_4\big(\tau, R_2(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big) \right) d\tau \right)$$

$$|R_3 - R_2| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_4\big(\tau, R_2(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big) \right| d\tau$$

$$\leq \frac{L_4}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |R_2(\tau) - R_1(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq \frac{{L_4}^2 f_4 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{{L_4}^2 f_4 t^{3\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^3}$$

elde edilir ve bu şekilde devam ettirsek;

$$|R_n(t) - R_{n-1}(t)| \leq {L_4}^{n-1} f_4 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n$$

elde edilir.

C. Şimdi $\{S_n(t)\}$, $\{I_n(t)\}$, $\{T_n(t)\}$ ve $\{R_n(t)\}$ fonksiyonlar dizilerinin düzgün yakınsaklığını gösterelim.

$$ {}^{1}M_n = \sum_{n=1}^{\infty} L_1{}^{n-1} f_1 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n} \tag{4.43} $$

serisini ele alalım. O zaman,

$$ {}^{1}M_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_1{}^{n} f_1 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1} \tag{4.44} $$

olur. Bölüm kriterine göre

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{|\,{}^{1}M_{n+1}|}{|\,{}^{1}M_n|} = \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_1{}^{n} f_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_1{}^{n-1} f_1\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} L_1 \left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right| < 1 \tag{4.45} $$

ise $\sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})$ kısmi toplamlar dizisini göz önüne alırsak $S_n(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(S_k(t) - S_{k-1}(t)\big)$, Weierstrass M-kriterine gereğince $S(t)$'ye yakınsak olur.

$$ {}^{2}M_n = \sum_{n=1}^{\infty} L_2{}^{n-1} f_2 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n} \tag{4.46} $$

serisini ele alalım. O zaman,

$$ {}^{2}M_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_2{}^{n} f_2 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1} \tag{4.47} $$

olur. Bölüm kriterine göre

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{|\,{}^{2}M_{n+1}|}{|\,{}^{2}M_n|} = \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_2{}^{n} f_2\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_2{}^{n-1} f_2\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} L_2 \left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right| < 1 \tag{4.48} $$

ise $\sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1})$ kısmi toplamlar dizisini göz önüne alırsak

$I_n(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(I_k(t) - I_{k-1}(t)\big)$, Weierstrass M-kriterine gereğince $I(t)$'ye yakınsak olur.

$$ {}^{3}M_n = \sum_{n=1}^{\infty} L_3{}^{n-1} f_3 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n} \tag{4.49} $$

serisini ele alalım. O zaman,

$$ {}^{3}M_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_3{}^{n} f_3 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1} \tag{4.50} $$

olur. Bölüm kriterine göre

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{|\,{}^{3}M_{n+1}|}{|\,{}^{3}M_{n}|} = \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_3{}^{n} f_3 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_3{}^{n-1} f_3 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} L_3 \left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right| < 1 \tag{4.51} $$

ise $\sum_{k=1}^{n}(T_k - T_{k-1})$ kısmi toplamlar dizisini göz önüne alırsak

$T_n(t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(T_k(t) - T_{k-1}(t)\big)$, Weierstrass M-kriterine gereğince $T(t)$'ye yakınsak olur.

Son olarak;

$$ {}^{4}M_{n} = \sum_{n=1}^{\infty} L_4{}^{n-1} f_4 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n} \tag{4.52} $$

serisini ele alalım. O zaman,

$$ {}^{4}M_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_4{}^{n} f_4 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1} \tag{4.53} $$

olur. Bölüm kriterine göre

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{|\,{}^{4}M_{n+1}|}{|\,{}^{4}M_{n}|} = \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_4{}^{n} f_4 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n+1}\right|}{\left|\sum_{n=1}^{\infty} L_4{}^{n-1} f_4 \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} L_4 \left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right| < 1 \tag{4.54} $$

ise $\sum_{k=1}^{n}(R_k - R_{k-1})$ kısmi toplamlar dizisini göz önüne alırsak

$R_n(t) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_k(t) - R_{k-1}(t)\big)$, Weierstrass M-kriterine gereğince $R(t)$'ye yakınsak olur.

Picard iterasyonu ile tanımladığımız $\{S_n(t)\}$, $\{I_n(t)\}$, $\{T_n(t)\}$ ve $\{R_n(t)\}$ fonksiyonlar dizileri $[t_0, t_0+h]$ aralığında sırasıyla $S(t), I(t), T(t)$ ve $R(t)$' ye yakınsaktır. (A) kısmında, her bir S_n, I_n, T_n ve R_n dizilerinin $[t_0, t_0+h]$ aralığında sürekli olduklarını söylemiştik. Böylece $S(t), I(t), T(t)$ ve $R(t)$' lerde süreklidir denir. O halde B.D.P.' nin çözümü vardır.

D. (4.1) B.D.P.' lerinin iki farklı çözümü olduğunu varsayalım.

$$S(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.55}$$

ve

$$S_1(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.56}$$

olacak şekilde iki farklı çözüm olsun. $|t - t_0| \le h$ için (4.55) denkleminden (4.56) denklemini çıkarırsak;

$$S(t) - S_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big[F_1\big(\tau, S(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big)\big]\, d\tau$$

elde edilir.

$$|S(t) - S_1(t)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big|F_1\big(\tau, S(\tau)\big) - F_1\big(\tau, S_1(\tau)\big)\big|\, d\tau \tag{4.57}$$

$$\le \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}|S(\tau) - S_1(\tau)| d\tau$$

$$\le \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)}|S(\tau) - S_1(\tau)|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$|S(t) - S_1(t)| \le |S(t) - S_0 + S_0 - S_1(t)| \tag{4.58}$$

$$\le |S(t) - S_0| + |S_1(t) - S_0|$$

$$\le \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$\leq \frac{2f_1 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$

(4.57) eşitliği (458) da yerine yazılırsa

$|S(t) - S_1(t)| \leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2f_1 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$

$\leq \frac{2L_1 f_1 t^{2\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}$

elde edilir. Ve tümevarımla n' in pozitif tam sayı değerleri için

$|S(t) - S_1(t)| \leq \frac{2f_1}{L_1} \left(\frac{L_1 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n$

dir. Sağ tarafın $n \to \infty$ iken limitini alırsak,

$\lim_{n\to\infty} \frac{2f_1}{L_1} \left(\frac{L_1 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n = 0$

olduğundan $S(t) = S_1(t)$ dir. Yani çözüm tektir.

$$I(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.59}$$

ve

$$I(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.60}$$

olacak şekilde iki farklı çözüm olsun. $|t - t_0| \leq h$ için (4.59) denkleminden (4.60) denklemini çıkarırsak;

$I(t) - I_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[F_2\big(\tau, I(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big)\right] d\tau$

elde edilir.

$$|I(t) - I_1(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left| F_2\big(\tau, I(\tau)\big) - F_2\big(\tau, I_1(\tau)\big) \right| d\tau \tag{4.61}$$

$$\leq \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |I(\tau) - I_1(\tau)| d\tau$$

$$\leq \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} |I(\tau) - I_1(\tau)| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$|I(t) - I_1(t)| \leq |I(t) - I_0 + I_0 - I_1(t)| \tag{4.62}$$

$$\leq |I(t) - I_0| + |I_1(t) - I_0|$$

$$\leq \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\leq \frac{2 f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.61) eşitliği (4.62) da yerine yazılırsa

$$|I(t) - I_1(t)| \leq \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} \frac{2 f_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$\leq \frac{2 L_2 f_2 t^{2\alpha}}{\big(\Gamma(\alpha+1)\big)^2}$$

elde edilir. Ve tümevarımla n' in pozitif tam sayı değerleri için

$$|I(t) - I_1(t)| \leq \frac{2 f_2}{L_2} \left(\frac{L_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n$$

dir. Sağ tarafın $n \to \infty$ iken limitini alırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 f_2}{L_2} \left(\frac{L_2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^n = 0$$

olduğundan $I(t) = I_1(t)$ dir.Yani çözüm tektir.

$$T(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.63}$$

ve

$$T_1(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.64}$$

olacak şekilde iki farklı çözüm olsun. $|t - t_0| \leq h$ için (4.63) denkleminden (4.64) denklemini çıkarırsak;

$$T(t) - T_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \big[F_3\big(\tau, T(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big)\big]\, d\tau$$

elde edilir.

$$|T(t) - T_1(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \big|F_3\big(\tau, T(\tau)\big) - F_3\big(\tau, T_1(\tau)\big)\big|\, d\tau \tag{4.65}$$

$$\leq \frac{L_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |T(\tau) - T_1(\tau)| d\tau$$

$$\leq \frac{L_3}{\Gamma(\alpha)} |T(\tau) - T_1(\tau)| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$$|T(t) - T_1(t)| \leq |T(t) - T_0 + T_0 - T_1(t)| \tag{4.66}$$

$$\leq |T(t) - T_0| + |T_1(t) - T_0|$$

$$\leq \frac{f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\leq \frac{2 f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.65) eşitliği (4.66) da yerine yazılırsa

$$|T(t) - T_1(t)| \leq \frac{L_3}{\Gamma(\alpha)} \frac{2 f_3 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

$\leq \frac{2L_3 f_3 t^{2\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}$

elde edilir. Ve tümevarımla n' in pozitif tam sayı değerleri için

$|T(t) - T_1(t)| \leq \frac{2f_3}{L_3}\left(\frac{L_3 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n$

dir. Sağ tarafın $n \to \infty$ iken limitini alırsak,

$\lim_{n\to\infty} \frac{2f_3}{L_3}\left(\frac{L_3 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n = 0$

olduğundan $T(t) = T_1(t)$ dir.Yani çözüm tektir.

$$R(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.67}$$

ve

$$R_1(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.68}$$

olacak şekilde iki farklı çözüm olsun. $|t - t_0| \leq h$ için (4.67) denkleminden (4.68) denklemini çıkarırsak;

$R(t) - R_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[F_4\big(\tau, R(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big)\right] d\tau$

elde edilir.

$$|R(t) - R_1(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left|F_4\big(\tau, R(\tau)\big) - F_4\big(\tau, R_1(\tau)\big)\right| d\tau \tag{4.69}$$

$\leq \frac{L_4}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}|R(\tau) - R_1(\tau)| d\tau$

$\leq \frac{L_4}{\Gamma(\alpha)}|R(\tau) - R_1(\tau)|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$

$$|R(t) - R_1(t)| \leq |R(t) - R_0 + R_0 - R_1(t)| \tag{4.70}$$

$$\leq |R(t) - R_0| + |R_1(t) - R_0|$$

$$\leq \frac{f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\leq \frac{2 f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

(4.69) eşitliği (4.70) da yerine yazılırsa

$$|R(t) - R_1(t)| \leq \frac{L_4}{\Gamma(\alpha)} \frac{2 f_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \tag{4.71}$$

$$\leq \frac{2 L_4 f_4 t^{2\alpha}}{\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}$$

elde edilir. Ve tümevarımla n' in pozitif tam sayı değerleri için

$$|R(t) - R_1(t)| \leq \frac{2 f_4}{L_4} \left(\frac{L_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n \tag{4.72}$$

dir. Sağ tarafın $n \to \infty$ iken limitini alırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 f_4}{L_4} \left(\frac{L_4 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^n = 0$$

olduğundan $R(t) = R_1(t)$ dir.Yani çözüm tektir.

Limit fonksiyonları olan S(t), I(t), T(t) ve R(t)' ler B.D.P.' lerini sağladığını sırasıyla ispatlayalım.

$$S_n(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\left(\tau, S_{n-1}(\tau)\right) d\tau \tag{4.73}$$

için $\lim_{n\to\infty} S_n(t) = S(t)$ düzgün yakınsak olduğunu göstermiştik. Buradan,

$\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall\, n \geq n_0$ ve $\forall\, t \in (t_0 - h,\ t_0 + h)$ için $|S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{L_1}$ vardır.

$$|F_1(\tau, S_n(\tau)) - F_1(\tau, S(\tau))| < L_1|S_n(\tau) - S(\tau)| < L_1 \frac{\varepsilon}{L_1} \leq \varepsilon \tag{4.74}$$

dır. Öyleyse $F_1(\tau, S_n(\tau))$, $F_1(\tau, S(\tau))$' ya düzgün yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau\right) \tag{4.75}$$

$S(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S(\tau)\big)\, d\tau$ olduğundan $S_n(t)$ B.D.P.' ni sağlar.

$$I_n(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.76}$$

için $\lim_{n\to\infty} I_n(t) = I(t)$ düzgün yakınsak olduğunu göstermiştik. Buradan,

$\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall\, n \geq n_0$ ve $\forall\, t \in (t_0 - h,\ t_0 + h)$ için $|I_n(t) - I(t)| < \frac{\varepsilon}{L_2}$ vardır.

$$|F_2(\tau, I_n(\tau)) - F_2(\tau, I(\tau))| < L_2|I_n(\tau) - I(\tau)| < L_2 \frac{\varepsilon}{L_2} \leq \varepsilon \tag{4.77}$$

dır. Öyleyse $F_2(\tau, I_n(\tau))$, $F_2(\tau, I(\tau))$' ya düzgün yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau\right) \tag{4.78}$$

$I(t) = I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I(\tau)\big)\, d\tau$ olduğundan $I_n(t)$ B.D.P.' ni sağlar.

$$T_n(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.79}$$

için $\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t)$ düzgün yakınsak olduğunu göstermiştik. Buradan,

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall\ n \geq n_0$ ve $\forall\ t \in (t_0 - h,\ t_0 + h)$ için $|T_n(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{L_3}$ vardır.

$$|F_3(\tau, T_n(\tau)) - F_3(\tau, T(\tau))| < L_3 |T_n(\tau) - T(\tau)| < L_3 \frac{\varepsilon}{L_3} \leq \varepsilon \tag{4.80}$$

dır. Öyleyse $F_3(\tau, T_n(\tau))$, $F_3(\tau, T(\tau))$' ya düzgün yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau\right) \tag{4.81}$$

$T(t) = T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T(\tau)\big)\, d\tau$ olduğundan $T_n(t)$ B.D.P.' ni sağlar.

$$R_n(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \tag{4.82}$$

için $\lim_{n\to\infty} R_n(t) = R(t)$ düzgün yakınsak olduğunu göstermiştik. Buradan,

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall\ n \geq n_0$ ve $\forall\ t \in (t_0 - h,\ t_0 + h)$ için $|R_n(t) - R(t)| < \frac{\varepsilon}{L_4}$ vardır.

$$|F_4(\tau, R_n(\tau)) - F_4(\tau, R(\tau))| < L_4 |R_n(\tau) - R(\tau)| < L_4 \frac{\varepsilon}{L_4} \leq \varepsilon \tag{4.83}$$

dır. Öyleyse $F_4(\tau, R_n(\tau))$, $F_4(\tau, R(\tau))$' ya düzgün yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau\right) \tag{4.84}$$

$R(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R(\tau)\big)\, d\tau$ olduğundan $R_n(t)$ B.D.P.' ni sağlar.

4.3. SITR Hastalık Modelinin Atangana-Toufik Yöntemi ile Nümerik Çözümü

Bu kısımda (3.7) bölümünde Caputo kesirli basamaktan denklemlerin çözümü için ele aldığımız Atangana-Toufik yönteminin SITR hastalık modeline uygulaması yapılacaktır. Caputo kesirli basamaktan SITR modeli,

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_1\big(\tau, S(\tau)\big)d\tau \\
I(t) &= I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_2\big(\tau, I(\tau)\big)d\tau \\
T(t) &= T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_3\big(\tau, T(\tau)\big)d\tau \\
R(t) &= R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_4\big(\tau, R(\tau)\big)d\tau \\
S(t_0) &= S_0,\ I(t_0) = I_0,\ T(t_0) = T_0,\ R(t_0) = R_0
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

integral denklemleri yardımıyla verilmektedir. (3.66) eşitliğinde verilen nümerik iterasyon (4.85) integral denklemlerine uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\Bigg(\frac{F_1(t_k,S_k)}{h}\left[\frac{(n-k)^{\alpha+1}-(n+1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-k+2)[(n-k)^{\alpha}-(n-k+1)^{\alpha}]}{\alpha}\right] - \\
&\frac{F_1(t_{k-1},S_{k-1})}{h}\left[(t_k - t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha-1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1}\right]\Bigg) + {}^{1}R_n^{\alpha} \\
I_{n+1} &= I_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\Bigg(\frac{F_2(t_k,I_k)}{h}\left[\frac{(n-k)^{\alpha+1}-(n+1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-k+2)[(n-k)^{\alpha}-(n-k+1)^{\alpha}]}{\alpha}\right] - \\
&\frac{F_2(t_{k-1},I_{k-1})}{h}\left[(t_k - t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha-1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1}\right]\Bigg) + {}^{2}R_n^{\alpha} \\
T_{n+1} &= T_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\Bigg(\frac{F_3(t_k,T_k)}{h}\left[\frac{(n-k)^{\alpha+1}-(n+1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-k+2)[(n-k)^{\alpha}-(n-k+1)^{\alpha}]}{\alpha}\right] - \\
&\frac{F_3(t_{k-1},T_{k-1})}{h}\left[(t_k - t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1}-t_{k-1})^{\alpha-1}-(t_{n+1}-t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1}\right]\Bigg) + {}^{3}R_n^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

$$R_{n+1} = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{F_4(t_k, R_k)}{h} \left[\frac{(n-k)^{\alpha+1} - (n+1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(n-k+2)[(n-k)^{\alpha} - (n-k+1)^{\alpha}]}{\alpha} \right] - \frac{F_4(t_{k-1}, R_{k-1})}{h} \left[(t_k - t_{n+1}) \frac{(t_{n+1} - t_{k-1})^{\alpha} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{(t_{n+1} - t_{k-1})^{\alpha-1} - (t_{n+1} - t_k)^{\alpha-1}}{\alpha+1} \right] \right) + {}^{4}R_n^{\alpha}$$

Burada ${}^{i}R_n^{\alpha}$, $i = 1,2,3,4$ olmak üzere

$$\left| {}^{1}R_n^{\alpha} \right| \leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)} \max_{[0,t_{n+1}]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F_1(\tau, S(\tau)) \right]_{\tau=\varepsilon_k} (n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha})(\alpha - 1)(n^2 - 3n - 4) \right|$$

$$\left| {}^{2}R_n^{\alpha} \right| \leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)} \max_{[0,t_{n+1}]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F_2(\tau, I(\tau)) \right]_{\tau=\varepsilon_k} (n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha})(\alpha - 1)(n^2 - 3n - 4) \right|$$

(4.87)

$$\left| {}^{3}R_n^{\alpha} \right| \leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)} \max_{[0,t_{n+1}]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F_3(\tau, T(\tau)) \right]_{\tau=\varepsilon_k} (n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha})(\alpha - 1)(n^2 - 3n - 4) \right|$$

$$\left| {}^{4}R_n^{\alpha} \right| \leq \frac{h}{4\Gamma(\alpha+2)} \max_{[0,t_{n+1}]} \left| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[F_4(\tau, R(\tau)) \right]_{\tau=\varepsilon_k} (n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha})(\alpha - 1)(n^2 - 3n - 4) \right|$$

şeklindedir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında kesirli basamaktan diferensiyel denklemler teorisinin en sık kullanılan türev operatörlerinden olan Caputo ve Riemann-Liouville türev operatörleri ele alınmıştır. Kesirli basamaktan türev yardımıyla SITR hastalık modelinin genel matematiksel incelemesi yapılmıştır. Bu anlamda SITR kesirli basamaktan modelin çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmiştir. Ayrıca kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümleri için önemli bir uygulama alanına sahip olan Atangana-Toufik yöntemi Caputo kesirli türev operatörü için yeniden ele alınmıştır. Son olarak kesirli basamaktan SITR modelinin çözümleri için uygun bir iterasyon Atangana-Toufik yöntemiyle elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Abel, N.H. 1881. Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies. *Oeuvres Completes*, 1; 16-18.

Acedo, L., González-Parra, G., & Arenas, A. J. (2010). An exact global solution for the classical SIRS epidemic model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(3), 1819-1825.

Akpınar, H. (2012). Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması. *Marmara Üniversitesi e-dergi*: Öneri dergisi cilt 10, sayı 38(18).

Arfken, G.B.and Weber, H.J. 1999. *Mathematical Methods for Physicist*, Fourth Edition.

Atangana, A., & Koca, I. (2016). Chaos in a simple nonlinear system with Atangana–Baleanu derivatives with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, 447-454.

Bilbay, H. (2015). SIR Modellerinin Nümerik Çözümleri Üzerine. *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi*.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51(1-2), 149-171.

Caputo, M. 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. *II. Geophysical journal international*, 13(5), 529-539.

Çağlıyan, M., Çelik, N., & Doğan, S. (2007). *Adi diferensiyel denklemler*. Nobel Yayın Dağıtım.

Derouich M. Boutayep A., An Avian Influenza Mathematical Model, *Aplied Mathematical Sciences*, Vol. 2 no. 36, 1749-1760

Dokuyucu, M. A., Celik, E., Bulut, H., & Baskonus, H. M. (2018). Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative. *The European Physical Journal Plus*, 133(3), 92.

Erdelyi, A., (ed.) 1955. *Higher Transcendental Functions*,V.3., McGraw Hill, N.Y.

Goswami, N. K., & Shanmukha, B. A Mathematical Model of Influenza: Stability and Treatment. *Proceeding of the International Conference on Mathematical Modeling and Simulation (*ICMMS 16).

Iwami, S., Takeuchi, Y., & Liu, X. (2009). Avian flu pandemic: Can we prevent it?. *Journal of theoretical biology*, 257(1), 181-190.

Johnson, T. (2009). Mathematical Modeling of Diseases: Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Model, *Senior Seminar, University of Minnesota*, Morris.

Keeling, Matt. "The mathematics of diseases." *Plus Magaazine*: Living Mathematics. Mar. 2001. Fall 2008.

Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of Royal Society of London*. Series A, 115, 700-721.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Diferential Equations*. Elsevier, Amsterdam.

Li G., Jin Z., Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period, *Chaos, Solitons and Fractals* 25 (2005) 1177–1184.

Li M.Y., Graef J.R., Wang L., Karsai J., Global dynamics of a SEIR model with varying total population size, *Mathematical Biosciences* 160 (1999) 191-213.

Linda J.S. Allen, "*An Introduction to mathematical biology*," Pearson/Prentice Hall, (2007).

Liouville, Joseph. "Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 11 (1834): 1-19.

Miller, K.S. and Ross, B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Diferential Equations*. John Willey&Sons Inc., Toronto.

Nasri M., Dehghan M., Douraki M.J., Study of system of non-linear difference equations arasing in a deterministic model for HIV infection, *Applied Mathematics and Computation* 171 (2005) 1306-1330.

Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press.

Toufik, M., & Atangana, A. (2017). New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: Application to chaotic models. *The European Physical Journal Plus*, 132(10), 444.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Pelin YAPRAKDAL

Doğum Yeri ve Yılı :BURDUR 1987

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	: Milas Lisesi	2001/ 2005
Lisans	: Gazi Üniversitesi	2007/ 2016

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl
1- Özel Burdur Çözüm Özel Öğretim Kursu	2016/ 2017
2- Özel Burdur Çözüm Matematik Özel Öğretim Kursu	2017/ 2018
3- Özel Burdur Açı Matematik Özel Öğretim Kursu	2018/ -