T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KABA KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLAR

Mehmet ŞEN

BURDUR, 2019

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KABA KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLAR

Mehmet ŞEN

Danışman: Doç. Dr. Sadık BAYHAN

BURDUR, 2019

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Mehmet ŞEN tarafından **Doç. Dr. Sadık BAYHAN** yönetiminde hazırlanan **“Kaba Kümeler ve Topolojik Uzaylar”** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 24/05/2019

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ (Başkan)
Akdeniz Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı..(İmza)

Dr. Öğr. Üyesi Neşe İŞLER ACAR (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı..................(İmza)

Doç. Dr. Sadık BAYHAN (Danışman)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı..................(İmza)

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu’nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)

....

Prof. Dr. Ayşe Gül MUTLU GÜLMEMİŞ

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Kaba Kümeler ve Topolojik Uzaylar"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

24 / 05 / 2019

(İmza)

Mehmet ŞEN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamı büyük bir titizlik ve dikkatle takip ederek bana her açıdan destek olan ve yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Sadık BAYHAN'a sonsuz teşekkürlerimi, saygılarımı ve sevgilerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU'na teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme de minnettarlığımı sunarım.

Mayıs, 2019 **Mehmet ŞEN**

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$	: Küme ailesi
A_R	: R bağıntısına karşılık gelen Boole matrisi
$[a_{ij}]_{n\times n}$	: $n \times n$ türünde matris
$\underline{apr}\ (X)$	: X kümesinin Pawlak alt yaklaşımı
$\overline{apr}\ (X)$	: X kümesinin Pawlak üst yaklaşımı
$\alpha(X)$	: X kümesinin tamlık ölçüsü
$bnd(X)$	: X kümesinin sınırı
$\mathcal{B}$	: τ topolojisinin tabanı
$BND(X)$	: X kümesinin sınır bölgesi
$X \cup Y$	: X ve Y kümelerinin birleşimi
$X \cap Y$	: X ve Y kümelerinin arakesiti
$cl(X)$	: X kümesinin kapanışı
$Core(P)$	: P kümesinin çekirdeği
Δ_U	: U kümesi üzerinde özdeşlik ya da birim bağıntısı
$ebas(X)$	: X kümesinin en büyük alt sınırı
$ek\ddot{u}s(X)$	: X kümesinin en küçük üst sınırı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$ext(X)$	: X kümesinin dışı
$e(R)$	: R bağıntısının denklik kapanışı
f_a	: Bilgi fonksiyonu
$IND(B)$	: B-ayırt edilemezlik bağıntısı
$int(X)$	: X kümesinin içi
(i) $\Longrightarrow$ (ii)	: (i) varsa (ii) vardır
(i) $\Longleftarrow$ (ii)	: (ii) varsa (i) vardır
(i) $\Leftrightarrow$ (ii)	: (i) ve (ii) birbirine denktir
(i) $:\Leftrightarrow$ (ii)	: Eşitliğin sol tarafındaki ifade (i), eşitliğin sağ tarafındaki ifade (ii) ile tanımlanmıştır
$\mu_X(x)$	: Kaba üyelik fonksiyonu
$NEG(X)$	: X kümesinin negatif bölgesi
$\mathcal{N}(x)$	: x elemanının komşuluk ailesi

$\mathcal{P}(U)$: U kümesinin kuvvet kümesi

$POS(X)$: X kümesinin pozitif bölgesi

$\pi(X)$: X kümesinin belirsizliğinin ölçüsü

$\underline{R}(X)$: X kümesinin herhangi bir bağıntıya göre alt yaklaşımı

$\overline{R}(X)$: X kümesinin herhangi bir bağıntıya göre üst yaklaşımı

$R_s(x)$: x elemanının R bağıntısına göre ardıl komşuluğu

$Red(P)$: P kümesinin indirgemesi

$S = (U, V)$: Bilgi sistemi

$S = (U, V \cup \{d\})$: Karar sistemi

$SIM(B)$: Eksik bilgi sistemindeki B-ayırt edilemezlik bağıntısı (tolerans bağıntısı)

$S_B(x)$: Tolerans sınıfı

$\mathcal{S}$: τ topolojisinin alttabanı

$T(R)$: R bağıntısından elde edilen topoloji

$t(R)$: R bağıntısının geçişli kapanışı

(U, τ) : Topolojik uzay

(U, τ_{dis}) : Ayrık topoloji

(U, τ_{ind}) : Ayrık olmayan topoloji

$U \setminus X$: U evrensel kümesine göre X kümesinin tümleyeni

U/R : Bölüm kümesi

$[x]$: x elemanının denklik sınıfı

$|X|$: X kümesinin eleman sayısı

$X \times Y$: X ve Y kümelerinin kartezyen çapımı

$X \subseteq Y$: X, Y kümesinin alt kümesidir.

$X \setminus Y$: X kümesinin Y kümesinden farkı

$x \vee y$: $ekus(\{x, y\})$

$x \wedge y$: $ebas(\{x, y\})$

$\circ$: Bileşke işlemi

$\emptyset$: Boş küme

$\Longrightarrow$: Gerektirir

$\Longleftarrow$: Yeter

$\Longleftrightarrow$: Gerek ve yeter koşul

: veya ö.k. : öyle ki

$:=$: Tanım olarak eşittir

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Kaba Kümeler ve Topolojik Uzaylar

Mehmet ŞEN

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sadık BAYHAN

Mayıs, 2019

Kaba küme teorisi, kesin olmayan, belirsiz veya muğlak bilgilerle başa çıkmak için güçlü bir matematiksel araçtır. Kaba küme teorisinin temel kavramları bilgi sistemleri, denklik bağıntıları ve yaklaşım uzaylarının yaklaşım operatörleridir. Bu teorinin başlangıç noktası, ölçümlerden ve uzmanlardan elde edilen nesneler ve özelliklerin oluşturduğu veri kümesidir. Topoloji matematiğin bir dalıdır ve birçok uygulamaya sahiptir. Bilgi sistemlerini ve kaba kümeleri incelemek için bir araçtır. Yaklaşım operatörleri kaba küme teorisi ile topoloji arasında yakın bağlantı kurar. Topoloji ve komşuluk sistemi kullanılarak tanecikli hesaplama için bir model kurulur. Bu tezde, topolojik yöntemlerle genelleştirilmiş yaklaşım uzayları ve kaba kümelerin topolojik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kaba küme, yaklaşım uzayı, alt ve üst yaklaşım, bilgi sistemi, topolojik uzay

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Rough Sets and Topological Spaces

Mehmet ŞEN

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sadık BAYHAN

May, 2019

Rough set theory is a powerful mathematical tool for dealing with inexact, uncertain or vague information. The fundamental concepts of rough set theory are information systems, equivalence relations and approximation operators of approximation spaces. The starting point of this theory is data set which consists of objects and attiributes obtained from measurements and human experts. Topology is a branch of mathematics and has many applications. It is a tool to study information systems and rough sets. Approximation operators draw close links between rough set theory and topology. Using topology and neighborhood system is established a model of granular computing. In this thesis, generalized approximation spaces via topological methods and topological properties of rough sets are investigated.

Keywords: Rough set, approximation space, lower and upper approximation, information system, topological space

1. GİRİŞ

Verilerin toplanması, incelenmesi ve değerlendirilerek analizinin yapılmasına duyulan gereksinim günümüzde önemini her geçen gün artırmaktadır. Bu gerçek geleceğin "veri" üzerine kurulacağı konusundaki söylemleri destekler niteliktedir. Peki "veri" nedir ? Bir araştırmanın temelini oluşturan elemanlar ya da öğeler olarak tanımlanabilir. Örnek olarak; ülkemizdeki üniversitelerden 2018 yılında mezun olan bütün öğrencilerin kümesi alınsın. Bu kümenin en dar anlamda veri oluşturduğundan söz edilebilir. Ancak verinin sahip olduğu özelliklere göre sınıflandırılması araştırmacılar için daha büyük önem kazanmaktadır. Öğrencinin mezun olduğu üniversite, fakülte, bölüm, lisans bitirme derecesi ya da akademik ortalaması, cinsiyeti, yaşı, yabancı dil seviyesi, edindiği sertifikalar, yurt dışı deneyimi ve benzeri özelliklerin eşleştirilmesi verinin bileşenlerini oluşturmaktadır. Bir sonraki aşamada ise, mezunlar sahip olduğu özelliklere göre sınıflandırılır. Böylece bilgi sistemi adı verilen tablolar oluşturulabilir. İşveren konumundaki şirketler, firmalar ve fabrikalar istihdam konusunda doğru karar alabilmek için veriye ya da bir bilgi sistemine gereksinme duyarlar. Onlar için veriye sahip olmak kadar, verinin doğru yorumunun yapılması da önemlidir.

Klasik küme teorisine göre bir nesne bir kümeye aittir (var-1) ya da ait değildir (yok-0) biçiminde ifade edilebilir. O halde klasik kümeler sadece $\{0,1\}$ değerlerini alan fonksiyonlar olarak düşünülebilir. Günlük hayatta iki değerli mantığın sınırlarını zorlayan adına belirsiz ya da muğlak adı verilen durumlarla karşılaşılır. Yakın ya da genç kavramları belirsizlik içeren somut örneklerdir. İki değerli klasik mantığın çözmekte yetersiz kaldığı bu ve benzeri durumları aşmak için derecelendirme yoluna gidilmiştir. Bir nesnenin bir kümeye ait olması belirli bir dereceyle mümkün olmaktadır. Böylece temelleri Zadeh tarafından atılan belirtisiz küme teorisi kurulmuştur (Zadeh, 1965). Bu teoriye göre, bir belirtisiz küme sadece $\{0,1\}$ değerlerini alan bir fonksiyon olmanın ötesinde, $[0,1]$ kapalı aralığında değerler alabilmektedir.

Klasik kümelerde yer alan nesneler, herhangi bir ek bilgiye gereksinme duyulmadan sıralanır. Ancak aynı özelliklere sahip olan nesneleri sınıflandırma düşüncesi verinin işlenmesinde çok yararlı olabilmektedir. Verilerin işlenmesi düşüncesi, bizleri belirsizliğe bir diğer yaklaşım olarak, kaba küme teorisine götürmektedir (Pawlak, 1982). Bu teorinin temel fikri; bir kümenin alt ve üst yaklaşım operatörleri yardımıyla karakterize edilmesi olarak ifade edilebilir. Bilgi sistemlerinde görünmeyen ya da gizli kalmış bilgilerin yaklaşımlarda bulunarak ortaya çıkarılması da kaba küme teorisinin amaçları arasında sayılabilir. Bu teorinin uygulama alanları arasında; yapay zeka, makine öğrenmesi, veri madenciliği, uzman sistemler, biyoinformatik, tıp ve sosyal bilimler sayılabilir.

Kaba küme teorisi gelişimini yapısal ve cebirsel yöntemler doğrultusunda sürdürmektedir. Bağıntılar, örtüler, ayrışımlar, komşuluklar ve örgüler yapısal yöntemlerin kapsamında yer almaktadır (Yao, 1996, 1998). Cebirsel yöntemlerin içeriğinde ise alt ve üst yaklaşım operatörleri yer almaktadır. Pawlak kaba küme yaklaşımının genelleştirilmesi; birbirlerine eşdeğer olan üç başlık altında toplanır (Yao, 2003). Bunlar eleman-tabanlı, tanecik-tabanlı ve altsistem-tabanlı yaklaşımlar olarak adlandırılır. Eleman-tabanlı yaklaşımda denklik bağıntısının yerine herhangi bir bağıntı alınır. Bu çalışmada eleman-tabanlı yaklaşımdan etkin olarak yararlanılacaktır.

Kaba küme teorisinin bazı topolojik kavramlarla olan benzerliği, kaba kümeler ile topoloji arasında ilişkinin kurulmasına olanak sağlamıştır (Vlach, 2008). Boş olmayan bir kümenin herhangi bir ayrışımı olan aile, bu küme üzerinde kurulan topolojinin tabanı olmaktadır. Bir ayrışımdan denklik bağıntısı elde edilir. Denklik bağıntısı ise kaba küme teorisinin temelidir. Denklik bağıntısı olma sınırlayıcı bir durum yaratır. Bu çalışmada hem denklik bağıntısına dayalı Pawlak kaba küme yaklaşımının hem de herhangi bir bağıntıya dayanan genelleştirilmiş kaba kümelerin topolojik özellikleri incelenecektir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; tez konusunun kapsamına yönelik tarihsel süreç ve motivasyon verildikten sonra, ikinci bölümde; çalışmanın bütününde gereksinme duyulan kümeler teorisi, topolojinin temel kavramları ve temel önermeler yer almıştır. Bölüm 3 de bilgi ve karar sistemleri, Pawlak kaba küme yaklaşımı, alt ve üst yaklaşım operatörlerinin özellikleri, Pawlak kaba küme yaklaşımının topolojik özellikleri, bilgi tabanı, kaba topoloji ve örnekleri bir araya getirilmiştir. Genelleştirilmiş kaba kümeler, topolojik özellikleri, eksik bilgi sistemleri ve topolojik indirgeme konuları dördüncü bölümün içeriğini oluşturmaktadır. Bu çalışmanın son bölümünde, incelenen konuya ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir. İlk olarak küme kavramı ve işlemleri, bağıntının tanımı ve çeşitli bağıntı türleri verildikten sonra, Boole cebiri tanımı ve temel topolojik uzay kavramları ifade edilecektir. Ayrıca çalışma süresince kullanacağımız U gösterimi evrensel küme için kullanılacaktır.

Tanım 2.1 U kümesinin herhangi iki altkümesi X ve Y olsun. Hem X hem de Y kümesi içinde bulunan öğelerin oluşturduğu kümeye X ve Y kümelerinin kesişimi adı verilir ve $X \cap Y$ simgesi ile gösterilir. X kümesi veya Y kümesi içinde bulunan öğelerden oluşan kümeye X ve Y kümelerinin birleşimi adı verilir ve $X \cup Y$ simgesi ile gösterilir. Ayrıca X kümesinin içinde bulunmasına karşın Y kümesi içinde bulunmayan öğelerin oluşturduğu kümeye X ile Y kümelerinin farkı adı verilir ve $X \setminus Y$ simgesi ile gösterilir. Özel olarak $U \setminus X$ kümesine de X kümesinin tümleyeni denir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.2 I herhangi bir küme olsun. I nın her bir $i \in I$ elemanı için bir X_i kümesi varsa, bütün bu X_i kümelerinin topluluğu olan $\{X_i : i \in I\}$ kümesine bir küme ailesi denir ve kısaca $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i \in I}$ şeklinde gösterilir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.3 Bir U kümesinin tüm altkümelerinin oluşturduğu küme ailesine, U kümesinin kuvvet kümesi denir ve $\mathcal{P}(U)$ simgesi ile gösterilir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.4 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(U)$ küme ailesi $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i \in I}$ olarak verilsin.

i. Bu ailede bulunan kümelerden her biri içinde bulunan tüm elemanlardan oluşan kümeye $\mathcal{A}$ ailesinin kesişimi adı verilir ve $\bigcap_{i \in I} X_i$ biçiminde gösterilir. Böylece;

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \forall i \ (i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$$

eşitliği yazılabilir.

ii. Bu ailede bulunan kümelerden en az biri içinde bulunan tüm elemanların oluşturduğu kümeye $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi adı verilir ve $\bigcup_{i \in I} X_i$ biçiminde gösterilir. O halde;

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \exists i \ (i \in I \ ve \ x \in X_i)\}$$

eşitliği bulunur (Özer vd., 1994).

Tanım 2.5 Aşağıdaki özelliklere sahip bir $\mathcal{A} = \{X_i \subseteq U : i \in I\}$ ailesine U kümesinin bir ayrışımı denir (Özer vd.,1994).

i. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(U)$,

ii. $\emptyset \notin \mathcal{A}$,

iii. $(i, j \in I) \wedge (i \neq j) \Longrightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$,

iv. $U = \bigcup \mathcal{A}$ (ya da $U = \bigcup_{i \in I} X_i$).

Örnek 2.1 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesinin $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c\}$, $X_3 = \{d\}$ olmak üzere altkümeleri verilsin. $\{X_1, X_2, X_3\}$ küme ailesi U kümesinin bir ayrışımıdır.

Tanım 2.6 Boş olmayan herhangi U ve V kümeleri verilsin. $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere bütün (x, y) sıralı ikililerinin kümesine U ve V kümelerinin kartezyen çarpımı ya da dik çarpımı adı verilir. U ve V kümelerinin kartezyen çarpımı $U \times V$ simgesi ile gösterilir ve

$$U \times V = \{(x, y) : x \in U \ ve \ y \in V\}$$

dir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.7 U ve V boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere, $U \times V$ çarpım kümesinin herhangi bir R altkümesine U kümesinden V kümesine bir bağıntı denir.

Bir $R \subseteq U \times V$ bağıntısı verildiğinde, x elemanının R bağıntısıyla y elemanı ile ilişkili olması xRy gösterimi ile ifade edilir. O halde $R = \{(x, y) : xRy\} \subseteq U \times V$ dir.

Özel olarak R bağıntısı $U \times U$ kümesinin bir altkümesi ise, R ye U kümesi üzerinde bir bağıntı adı verilir. U kümesi üzerinde özdeşlik ya da birim bağıntı $\Delta_U = \{(x, x) : x \in U\}$ olarak tanımlanır ve U kümesinin köşegeni olarak adlandırılır. $R \subseteq U \times V$ bir bağıntı olmak üzere

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subseteq V \times U$$

kümesine R bağıntısının tersi denir (Yüksel, 2015).

Tanım 2.8 U kümesi üzerinde verilen bir R bağıntısı, sahip olduğu özelliklere göre çeşitli adlarla bilinir. Bu tür bağıntılara ilişkin tanımları verelim.

i. Her $x \in U$ için xRx ise R bağıntısı yansımalıdır.
ii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Longrightarrow yRx$ ise R bağıntısı simetriktir.
iii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Longrightarrow yRx$ sağlanmıyor ise R bağıntısı ters simetriktir.
iv. Her $x, y, z \in U$ için $(xRy \text{ ve } yRz) \Longrightarrow xRz$ ise R bağıntısı geçişlidir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.9 U kümesi üzerinde R ve S gibi iki bağıntı verilsin. R ile S bağıntılarının bileşkesi yine U kümesi üzerinde bir bağıntı belirler ve

$$S \circ R = \{(x, z) \in U \times U :\ (\exists y \ \in U)\ [(x, y) \in R\ ve\ (y, z) \in S]\}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $R = S$ alınarak, bir R bağıntısının bütün kuvvetleri (bileşkeleri) $R^1 = R$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $R^{n+1} = R^n \circ R$ ile hesaplanır (Bülbül, 2014).

Önerme 2.1 U kümesi üzerinde verilen bir R bağıntısı için aşağıdaki denklikler sağlanır (Özer vd., 1994).

i. R bağıntısı yansımalıdır $\Leftrightarrow \Delta_U \subseteq R$,
ii. R bağıntısı simetriktir $\Leftrightarrow\ R = R^{-1}$,
iii. R bağıntısı geçişlidir $\Leftrightarrow\ R \circ R \subseteq R$.

Tanım 2.10 Bir U kümesi üzerinde yansımalı, ters simetrik ve geçişli olma koşullarını sağlayan bir R bağıntısına kısmen sıralama bağıntısı adı verilir. U kümesi üzerinde bir R kısmen sıralama bağıntısı varsa, U kümesine kısmen sıralıdır denir (Özer vd., 1994).

Örnek 2.2 $\mathcal{P}(U)$ ailesi üzerinde tanımlanan "$\subseteq$" altküme olma bağıntısı bir kısmen sıralama bağıntısıdır (Özer vd., 1994).

Tanım 2.11 U kümesi üzerinde bir R kısmen sıralama bağıntısı ve bir $X \subseteq U$ altkümesi verilsin.

i. Her $x \in X$ için xRa olacak biçimde bir $a \in U$ öğesine X kümesinin bir üst sınırı denir.
ii. Her $x \in X$ için bRx olacak biçimde bir $b \in U$ öğesine X kümesinin bir alt sınırı denir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.12 U kümesi üzerinde bir R kısmen sıralama bağıntısı ile bir $X \subseteq U$ altkümesi verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $a \in U$ öğesine, X kümesinin en küçük üst sınırıdır denir ve $a = ek\ddot{u}s(X)$ yazılır.

i. a, X kümesinin bir üst sınırıdır: $\forall x \in X$ için xRa dır.

ii. a, X kümesinin üst sınırlar kümesinin en küçük öğesidir; yani b, X kümesinin bir üst sınırı ise, aRb dir.

Benzer biçimde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $c \in U$ öğesine, X kümesinin en büyük alt sınırıdır denir ve $c = ebas(X)$ yazılır.

i. c, X kümesinin bir alt sınırıdır: $\forall x \in X$ için cRx dir.

ii. c, X kümesinin alt sınırlar kümesinin en büyük öğesidir; yani d, X kümesinin bir alt sınırı ise, dRc dir (Özer vd., 1994).

Tanım 2.13 Bir $R \subseteq U \times U$ kısmen sıralama bağıntısı verildiğinde her $x, y \in U$ için $\{x, y\}$ kümesinin eküs'ü ve ebas'ı varsa, R kısmen sıralama bağıntısı bir örgü olarak adlandırılır (Özer vd., 1994).

Genellikle bir örgü verildiğinde $x \vee y = ek\ddot{u}s(\{x, y\})$ ile $x \wedge y = ebas(\{x, y\})$ kısaltmalarına başvurulur.

Örnek 2.3 $\mathcal{P}(U) \neq \emptyset$ küme ailesi verilsin. $X_1, X_2 \in \mathrm{P}(U) \implies X_1 \cap X_2 \in \mathrm{P}(U)$ ve $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{P}(U)$ koşullarını gerçekleyen $\mathcal{P}(U)$ ailesine kümeler örgüsü adı verilir. Bir $\mathcal{P}(U)$ kümeler örgüsünde $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(U)$ için $X_1 \vee X_2 = X_1 \cup X_2$, $X_1 \wedge X_2 = X_1 \cap X_2$ olarak tanımlanır (Özer vd., 1994).

Tanım 2.14 $R \subseteq U \times U$ kısmen sıralama bağıntısı bir örgü olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan R örgüsüne Boole cebiri adı verilir (Özer vd., 1994).

BC1: $\exists\, 0 \in U \quad \exists\, 1 \in U \quad \forall x \in U \; [x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x]$,

BC2: $\forall x \in U \;\; \exists\, x^* \in U \;\; [\, x \wedge x^* = 0,\; x \vee x^* = 1]$,

BC3: $\forall x, y, z \in U \;\; [\, x \vee (\, y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),\; x \wedge (\, y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,]$.

Örnek 2.4 $\mathcal{P}(U)$ kümesi üzerinde verilen $B(U) = (\, \mathcal{P}(U)\,, \cup,\, \cap,\, U \setminus X, \emptyset, U)$ altılısı bir Boole cebiridir. $\cup$ ve $\cap$ ikili işlemleri $\mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$ üzerinde, sırasıyla, küme birleşimi ve kesişimini ifade etmektedir. $U \setminus X$ tekli işlemi ise $\mathcal{P}(U)$ üzerindeki tümlemeye karşılık gelmektedir (Novak, 1999).

Örnek 2.5 Önermeler cebiri veya ($\vee$), ve ($\wedge$), değil ($\sim$) işlemlerine göre bir Boole cebiridir ve $B(L) = (\{0,1\}, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ altılısı ile gösterilir. Burada 0 öğesi daima Y (yanlış) değerlerini alan tüm geçersiz önerme ve 1 öğesi daima D (doğru) değerlerini alan tüm geçerli önermedir (Novak, 1999).

Bir $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesinden $V = \{y_1, y_2, \dots, x_n\}$ kümesine bir R bağıntısını göstermenin bir yolu da; uygulamalarda büyük kolaylık sağlaması bakımından matris kavramından yararlanmaktır. Bunun için R bağıntısına $i = 1,2, \dots, m\ ve\ j = 1,2, \dots, n$ olmak üzere, aşağıda tanımlandığı gibi $m \times n$ tipinde bir $A_R = [a_{ij}]$ matrisi karşılık getirilir. $a_{ij} \in \{0,1\}$ olmak üzere

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in R\ ise \\ 0, & (x_i, x_j) \notin R\ ise \end{cases}$$

dir. $A_R = [a_{ij}]$ matrisine Boole matrisi adı verilir (Özer vd., 1994).

Örnek 2.6 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesinden $V = \{1,2,3,4,5\}$ kümesine bir R bağıntısı $R = \{(a, 2), (a, 5), (b, 3), (b, 4), (c, 2), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 3)\}$ olarak tanımlansın. R bağıntısına karşılık gelen Boole matrisi

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Özel olarak bir $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi üzerindeki bir R bağıntısına $i, j = 1,2, \dots, m$ olmak üzere, $m \times m$ tipinde, yani bir $A_R = [a_{ij}]$ kare matrisi karşılık gelir.

Tanım 2.15 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi üzerinde tanımlanan R bağıntısına karşılık getirilen matris $A_R = [a_{ij}]_{m \times m}$ olsun. $R \circ R = R^2$ bileşke bağıntısına karşılık gelen $A_R \cdot A_R = A_{R^2} = [c_{ij}]_{m \times m}$ matrisi Boole çarpımı olarak adlandırılır ve $c_{ij} = \vee_{k=1}^{m} (a_{ik} \wedge b_{kj})$,

$i, j = 1,2, \ldots, m$ eşitliği ile tanımlanır. Formülde kullanılan $\vee$ ve $\wedge$ sembolleri, önermeler cebiri $B(L)$ de yer alan ikili işlemleri ifade etmektedir (Ma, 2018).

Örnek 2.7 $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ bağıntısı verilsin. $R \circ R = R^2$ bileşke bağıntısına karşılık gelen Boole çarpımını bulalım. Öncelikle R bağıntısına karşılık gelen matrisi yazalım.

$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir ve $R^2 = A_R \cdot A_R = A_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

olarak bulunur.

Pawlak kaba küme teorisinin temeli özel bir bağıntı türü olan denklik bağıntısıyla yakından ilişkilidir.

Tanım 2.16 U kümesi üzerindeki bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı olarak adlandırılır.

Tanım 2.17 U kümesi üzerinde R bir denklik bağıntısı ve bir $x \in U$ elemanı verilsin. U kümesi içinde R bağıntısına göre x elemanı ile ilişkili olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye x in denklik sınıfı denir ve

$$[x] = \{y \in U : xRy\}$$

olarak ifade edilir.

U kümesi üzerinde R denklik bağıntısının denklik sınıflarından oluşan kümeler ailesine bölüm kümesi denir ve

$$U/R = \{[x] : x \in U\}$$

şeklinde gösterilir (Özer vd., 2009).

U kümesi üzerinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Verilen tanımdan $[x]$ denklik sınıfının önemli iki rolü üstlendiği görülmektedir. Birincisi U nun bir altkümesi olması, ikincisi ise U/R nin bir elemanı olmasıdır.

Önerme 2.2 R, U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bölüm kümesi U/R, U kümesinin bir ayrışımıdır (Özer vd., 2009).

Önerme 2.3 Bir denklik bağıntısının farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır (Özer vd., 2009).

Önerme 2.4 $\mathcal{A} = \{X_i\}_{i\in I}$ küme ailesi U nun bir ayrışımı olsun. X_i kümelerinden her biri birer denklik sınıfı olacak biçimde U üzerinde bir denklik bağıntısı vardır (Özer vd., 2009).

Örnek 2.8 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesinin bir ayrışımı $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c\}$, $X_3 = \{d\}$ olarak verilsin. O halde her bir ayrışım birer denklik sınıfı olacak biçimde U kümesi üzerinde R denklik bağıntısı $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ olarak elde edilir. Ayrıca $[a] = [b] = X_1,\ [c] = X_2,\ [d] = X_3$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.18 U boş kümeden farklı bir küme ve $\tau \subseteq \mathcal{P}(U)$ ailesi T_1, T_2, T_3 aksiyomlarını sağlıyorsa τ ailesine, U kümesi üzerinde topoloji ve (U, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.
T_1 : $\emptyset, U \in \tau$,
T_2 : $\forall\, G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,
T_3 : $\forall\, \{G_i\}_{i\in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$.
Bir (U, τ) topolojik uzayında τ ailesinin her elemanına açık küme adı verilir (Bülbül, 2004).

Örnek 2.9 $U \neq \emptyset$ olmak üzere, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(U)$ topolojisine U üzerinde ayrık (discrete) topoloji, $\tau_{ind} = \{U, \emptyset\}$ topolojisine de ayrık olmayan (indiscrete) topoloji denir.

Tanım 2.19 (U, τ) bir topolojik uzay ve $F \subseteq U$ olsun. Eğer $U \setminus F \in \tau$ ise, F kümesine τ topolojisine göre kapalı küme adı verilir. Bir topolojik uzayın kümeleri hem açık hem de kapalı oluyorsa kaçık (clopen) küme, kaçık kümelerden oluşan aileye ise kaçık topoloji denir (Bülbül, 2004).

Örnek 2.10 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\tau = \{\, U, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}\}$ ailesi ile (U, τ) bir kaçık topoloji olur.

Tanım 2.20 U kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Eğer τ_1 topolojisine göre açık olan her küme τ_2 topolojisine göre de açık ise τ_1 topolojisine τ_2 topolojisinden daha kaba veya τ_2 topolojisine τ_1 topolojisinden daha incedir denir. Bu durumu ifade etmek için $\tau_1 \subseteq \tau_2$ gösterimi kullanılır (Bülbül, 2004).

Bir U kümesi üzerindeki bütün topolojilerin ailesi "⊆" ince olma bağıntısı ile donatıldığında bir kısmen sıralama bağıntısı oluşturur. Bu bağıntıya göre τ_{dis} ayrık topoloji en ince topoloji, ayrık olmayan topoloji τ_{ind} ise en kaba topolojidir. U kümesi üzerinde tanımlanan bütün diğer topolojiler τ_{dis} ve τ_{ind} arasında yer alırlar.

Tanım 2.21 (U, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. Eğer her açık küme, aşağıdaki gibi $\mathcal{B}$ ailesinin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa,

$$\forall G \in \tau \text{ için } \exists\, \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B} \text{ ö.}k.\ G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} B$$

bu $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisi için bir taban adı verilir (Bülbül, 2004).

Önerme 2.5 U bir küme ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(U)$ olsun. $\mathcal{B}$ ailesinin U üzerindeki bir topolojinin tabanı olabilmesi için gerek ve yeter şart,

i. $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, ve
ii. $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $\forall x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists\, B_x \in \mathcal{B}$ ö.k. $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ sağlanmasıdır (Bülbül, 2004).

Tanım 2.22 (U, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subseteq \tau$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir taban oluşturuyorsa bu $\mathcal{S}$ ailesine τ topolojisinin bir alttabanı denir (Bülbül, 2004).

Tanım 2.23 (U, τ) bir topolojik uzay, $x \in U$ ve $X \subseteq U$ olsun. Eğer $x \in G \subseteq X$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, X altkümesine bu uzayda x noktasının bir komşuluğu denir. $x \in X$ noktasının τ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{N}(x)$ ile gösterilir ve bu aile komşuluk ailesi ya da komşuluk sistemi olarak adlandırılır. Bir noktayı içeren her açık küme o noktanın komşuluğudur (Bülbül, 2004).

Önerme 2.6 (U, τ) bir topolojik uzay ve $x \in U$ olsun. $\mathcal{N}(x)$ komşuluk ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. N_1: $X \in \mathcal{N}(x)$ ise $x \in X$ dir.
   N_2: $X \in \mathcal{N}(x)$ ve $X \subseteq Y$ ise $Y \in \mathcal{N}(x)$ dir.

N3: $X, Y \in \mathcal{N}(x)$ ise $X \cap Y \in \mathcal{N}(x)$ dir.

N4: $X \in \mathcal{N}(x)$ ise öyle bir $Y \in \mathcal{N}(x)$ vardır ki her $y \in Y$ $için$ $X \in \mathcal{N}(y)$ dir.

ii. $G \subseteq U$ ise $G \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in G \;\; \exists X \in \mathcal{N}(x)$ için $x \in X \subseteq G$ sağlanır.

Tersine olarak, $U \neq \emptyset$ bir küme ve her $x \in U$ için bir $\emptyset \neq \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{P}(U)$ altküme ailesi, N1, N1, N2, N3 ve N4 koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda U kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, her $x \in U$ için bu $\mathcal{N}_x$ ailesi, o topoloji için, x noktasının komşuluk ailesini oluşturur (Bülbül, 2004).

Örnek 2.11 $U = \{a. b, c, d\}$ kümesi verilsin ve $x = a, b, c, d$ için $\mathcal{N}(x)$ aileleri

$\mathcal{N}(a) = \{U, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$,

$\mathcal{N}(b) = \{U, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$,

$\mathcal{N}(c) = \{U, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$,

$\mathcal{N}(d) = \{U, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

olarak tanımlanmış olsun. Verilen komşuluk ailelerinin Önerme 2.6 nın koşullarını sağlandığını görmek kolaydır. Böylece $\tau = \{X \in \mathcal{P}(U) \colon x \in X \Longrightarrow X \in \mathcal{N}(x)\} = \{\emptyset, U, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ biçiminde aranan topoloji elde edilir.

Tanım 2.24 (U, τ) bir topolojik uzay, $X \subseteq U$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının uygun bir komşuluğu X kümesinin içinde kalıyorsa, bu x noktasına X in bir iç noktası denir.

$$int(X) := \{x \in U : \exists\, Y \in \mathcal{N}(x) \text{ ö}.k.\; x \in Y \subseteq X\}$$

kümesine de X in içi ya da çekirdeği adı verilir (Bülbül, 2004).

Önerme 2.7 (U, τ) bir topolojik uzay ve $X \subseteq U$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Yüksel, 2015).

i. $int(X) = \cup \{G : G \subseteq X \; ve \; G \in \tau\}$,

ii. $X \in \tau \Leftrightarrow X = int(X)$.

Önerme 2.8 (U, τ) bir topolojik uzay ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Yüksel, 2015).

i. $int(U) = U, int(\emptyset) = \emptyset$,

ii. $int(int(X)) = int(X)$,

iii. $X \subseteq Y \implies int(X) \subseteq int(Y)$,

iv. $int(X) \cup int(Y) \subseteq int(X \cup Y)$,

v. $int(X) \cap int(Y) = int(X \cap Y)$.

Tanım 2.25 U herhangi bir küme ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen özellikleri sağlayan $int : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ dönüşümüne iç operatörü adı verilir (Bülbül, 2004).

i. $int(U) = U$,

ii. $int(X \cap Y) = int(X) \cap int(Y)$,

iii. $int(X) \subseteq X$,

iv. $int(int(X)) = int(X)$.

Önerme 2.9 (U, τ) bir topolojik uzay ve $\psi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, $\psi(X) \coloneqq int(X)$ olarak tanımlansın. ψ dönüşümü Tanım 2.25 de verilen iç operatörü özelliklerine sahiptir. Bunlardan başka, herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesi için

$$X \text{ açıktır } \iff \psi(X) = X$$

dir.

Tersine olarak, U herhangi bir küme ve $\psi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, iç operatörü özelliklerini sağlayacak şekilde verilen bir dönüşüm olsun. Bu durumda U kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesinin o topolojiye göre içi $int(X) = \psi(X)$ dir (Bülbül, 2004).

Örnek 2.12 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin. $\psi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ dönüşümü Tablo 2.1 de verildiği gibi tanımlansın.

Tablo 2.1. İç operatörü değer tablosu

$\psi(\emptyset) = \emptyset$	$\psi(\{a\}) = \emptyset$	$\psi(\{b\}) = \emptyset$	$\psi(\{c\}) = \emptyset$
$\psi(\{d\}) = \emptyset$	$\psi(\{a, b\}) = \{a, b\}$	$\psi(\{a, c\}) = \emptyset$	$\psi(\{a, d\}) = \emptyset$
$\psi(\{b, c\}) = \emptyset$	$\psi(\{b, d\}) = \emptyset$	$\psi(\{c, d\}) = \emptyset$	$\psi(\{a, b, c)\} = \{a, b, c\}$
$\psi(\{a, b, d\}) = \{a, b, d\}$	$\psi(\{a, c, d\}) = \emptyset$	$\psi(\{b, c, d\}) = \emptyset$	$\psi(U) = U$

ψ dönüşümünün Tanım 2.25 de verilen iç operatörü olma özelliklerini sağladığı kolaylıkla görülür. O halde Önerme 2.9 gereğince $\tau = \{X \subseteq U : \quad int(X) = \psi(X) = X\} = \{U, \emptyset, \{a, b, d\}, \{a, b, c], \{a, b\}\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.26 (U, τ) bir topolojik uzay, $X \subseteq U$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunun X ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına X kümesinin bir değme noktası denir. $cl(X) := \{ x \in U : \forall Y \in \mathcal{N}(x)\ için\ X \cap Y \neq \emptyset\}$ kümesine de X in kapanışı adı verilir (Bülbül, 2004).

Önerme 2.10 (U, τ) bir topolojik uzay ve $X \subseteq U$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Yüksel, 2015).

i. $cl(X) = \cap \{F : X \subseteq F\ ve\ F\ kapalı\}$,

ii. $X\ kümesi\ kapalıdır \Leftrightarrow X = cl(X)$.

Tanım 2.27 U herhangi bir küme ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen özellikleri sağlayan $cl : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ dönüşümüne kapanış operatörü adı verilir (Bülbül, 2004).

i. $cl(\emptyset) = \emptyset$,

ii. $cl(X \cup Y) = cl(X) \cup cl(Y)$,

iii. $X \subseteq cl(X)$,

iv. $cl(cl(X)) = X$.

Tanım 2.28 $\mathcal{P}(U)$ üzerinde $L : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ ve $H : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ operatörleri verilsin. L ve H operatörleri, her $X \subseteq U$ altkümesi için

i. $L(X) = U \setminus (H(U \setminus X))$

ii. $H(X) = U \setminus (L(U \setminus X))$

eşitliklerini sağlıyorsa dual operatör olarak adlandırılır. L ve H operatörleri dual ise, (L, H) ikilisine bir dual çift adı verilir (Yao, 1996).

Aşağıda verilen önerme; iç ve kapanış operatörlerinin $U \setminus X$ tümleme işlemine göre dual operatörler olduğunu ya da aralarında dualite ilişkisinin bulunduğunu ifade etmesi bakımından önemlidir.

Önerme 2.11 Bir (U, τ) bir topolojik uzayı ve $X \subseteq U$ altkümesi verilsin. Bu durumda;

i. $cl(X) = U \setminus (int(U \setminus X))$

ii. $int(X) = U \setminus (cl(U \setminus X))$

eşitlikleri sağlanır (Yüksel, 2015).

Önerme 2.12 (U, τ) bir topolojik uzay ve $\varphi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, $\varphi(X) \coloneqq cl(X)$ olarak tanımlansın. φ dönüşümü Tanım 2.27 de verilen kapanış operatörü özelliklerine sahiptir. Bunlardan başka, herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesi için $X\ kapalıdır \iff \varphi(X) = X$ dir.

Tersine olarak, U herhangi bir küme ve $\varphi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, kapanış operatörü özelliklerini sağlayacak şekilde verilen bir dönüşüm olsun. Bu durumda U kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesinin o topolojiye göre kapanışı $cl(X) = \varphi(X)$ dir (Bülbül, 2004).

Örnek 2.13 $U = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere, $\varphi : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ dönüşümü Tablo 2.2 de veriliyor.

Tablo 2.2. Kapanış operatörü değer tablosu

$\varphi(\emptyset) = \emptyset$	$\varphi(\{a\}) = U$	$\varphi(\{b\}) = U$	$\varphi(\{c\}) = \{c\}$
$\varphi(\{d\}) = \{d\}$	$\varphi(\{a, b\}) = U$	$\varphi(\{a, c\}) = U$	$\varphi(\{a, d\}) = U$
$\varphi(\{b, c\}) = U$	$\varphi(\{b, d\}) = U$	$\varphi(\{c, d\}) = \{c, d\}$	$\varphi(\{a, b, c\}) = U$
$\varphi(\{a, b, d\}) = U$	$\varphi(\{a, c, d\}) = U$	$\varphi(\{b, c, d\}) = U$	$\varphi(U) = U$

φ dönüşümünün bir kapanış operatörü olduğu Tanım 2.27 den hemen görülür. O halde ;

$\tau = \{X \subseteq U : cl(X) = \varphi(X) = X\} = \{U, \emptyset, \{c\}, \{d], \{c, d\}\}$

altküme ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir ve τ ailesi bu topolojinin kapalı kümelerinden oluşur.

Tanım 2.29 (U, τ) bir topolojik uzay, $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin tümleyeninin iç noktasına X kümesinin dış noktası denir.

$$ext(X) \coloneqq int(U \setminus X)$$

kümesine de X in dışı adı verilir (Yüksel, 2004).

Tanım 2.30 (U,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $X \subseteq U$ altkümesi ve $x \in X$ verilsin. Eğer x noktasının her komşuluğunun hem X ve hem de $U \setminus X$ ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına X kümesinin sınırı denir.

$$bnd(X) := \{x \in U : \forall Y \in \mathcal{N}(x) \; için \; X \cap Y \neq \emptyset \; ve \; Y \cap (U \setminus X) \neq \emptyset\}$$

kümesine de X in sınırı adı verilir (Bülbül, 2004).

Aşağıda verilen önermeler bir topolojik uzayda, bir kümenin içi, kapanışı ve sınırı kavramları arasındaki ilişkileri ifade etmektedir.

Önerme 2.13 (U,τ) bir topolojik uzay ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır (Yüksel, 2015).

i. $bnd(\emptyset) = \emptyset$,
ii. $bnd(X) = bnd(U \setminus X)$,
iii. $bnd(X) = cl(X) \cap cl(U \setminus X)$,
iv. $bnd(X) = cl(X) \setminus int(X)$,
v. $bnd(bnd(X)) \subseteq bnd(X)$.

Önerme 2.14 (U,τ) topolojik uzayı ve $X \subseteq U$ altkümesi verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Yüksel, 2015).

i. $cl(X) = int(X) \cup bnd(X)$,
ii. $U = int(U \setminus X) \cup int(X) \cup bnd(X)$,
iii. $int(X) = X \cap \big(U \setminus bnd(X)\big)$.

Genel topolojinin ilgilendiği önemli konulardan biri de düzgün yapılardır. Çalışmanın hedefleri doğrultusunda ileride gereksinme duyacağımız düzgün yapı kavramının tanımını verelim.

Tanım 2.31 $U \times U$ çarpım kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan her $\mathfrak{D}$ ailesine U üzerinde bir düzgün yapı denir (Bülbül, 2004).

i. Her $D \in \mathfrak{D}$ için $\Delta_U \subseteq D$ dir.
ii. Her $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ için $D_1 \cap D_2 \in \mathfrak{D}$ dir.
iii. Her $D \in \mathfrak{D}$ için $E \circ E \subseteq D$ olacak şekilde bir $E \in \mathfrak{D}$ vardır.
iv. Her $D \in \mathfrak{D}$ için $E^{-1} \subseteq D$ olacak şekilde bir $E \in \mathfrak{D}$ vardır.
v. $D \in \mathfrak{D}$ ve $D \subseteq E$ ise $E \in \mathfrak{D}$ dir.

$\mathfrak{D}$, U kümesi üzerinde bir düzgün yapı olmak üzere $(X, \mathfrak{D})$ ikilisine bir düzgün uzay adı verilir. Bir U kümesi üzerinde verilen her düzgün yapı U üzerinde bir topoloji üretir.

U kümesi üzerinde bir D denklik bağıntısı verildiğinde, $\mathfrak{D} = \{R : R \subseteq U \times U, D \subseteq R\}$ olarak tanımlanan alt aile U kümesi için bir düzgün yapı belirler. Bu düzgün yapıdan üretilen topolojik uzay ile kaçık topoloji çakışır (Vlach, 2008).

Örnek 2.14 a) $U \times U$ çarpım kümesinin Δ_U yu içeren bütün altkümelerinin
$\mathfrak{D} = \{ R \subseteq U \times U : \Delta_U \subseteq R\}$ ailesi U üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya ayrık düzgün yapı adı verilir.
b) $\mathfrak{D} = \{U \times U\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya ayrık olmayan düzgün yapı adı verilir (Bülbül, 2004).

3. BİLGİ SİSTEMLERİ VE KABA KÜMELER

Pawlak kaba küme yaklaşımının başlangıcı bilgi sistemleridir. Bir bilgi sistemi; nesneler kümesi ile özelliklerden oluşan küme arasındaki ilişkinin bir tabloyla ifade edilmesidir. Örneğin; nesneler kümesi hastalardan, özellikler kümesi de her bir hastanın bir uzman doktor tarafından gözlenen veya ölçülebilen belirtilerinden oluşabilir. Beklenen oluşturulan bir bilgi sisteminden sonuç ya da karar elde edilmesidir. Bu durum bizleri karar sistemleri olarak adlandırılan yapılara götürür.

3.1. Bilgi ve Karar Sistemleri

Tanım 3.1.1 Nesnelerin sonlu bir kümesi U ve özelliklerin sonlu bir kümesi V olmak üzere $S = (U, V)$ ikilisine bir bilgi sistemi adı verilir. Bir $S = (U, V)$ bilgi sisteminde V_a, $a \in V$ özelliği için bir değer kümesi olmak üzere, her bir nesneye V_a kümesinden bir değer karşılık getiren bir f_a fonksiyonuna bilgi fonksiyonu adı verilir ve

$$f_a : U \to V_a$$
$$x \mapsto f_a(x)$$

biçiminde gösterilir (Pawlak, 1982).

Tanım 3.1.2 $S = (U, V)$ bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. U kümesi üzerinde tanımlanan $IND(B) = \{(x_1, x_2) \in U \times U : \forall a \in B , f_a(x_1) = f_a(x_2)\}$ bağıntısına B-ayırt edilemezlik bağıntısı adı verilir (Pawlak, 1982).

$IND(B)$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur. O halde U nesneler kümesinin herhangi iki elemanının B-ayırt edilemez olması; B altkümesi üzerinde aynı özellik değerine sahip olmasıyla tanımlanır (Pawlak, 1982; Bayhan ve Şen, 2018).

Örnek 3.1.1

Tablo 3.1. Bilgi sistemi

Nesneler	Yaş (YŞ)	Yürüme Performansı (YP)
x_1	16-30	50
x_2	16-30	0
x_3	31-45	1-25
x_4	31-45	1-25
x_5	46-60	26-49
x_6	16-30	26-49
x_7	46-60	26-49

Verilen $S = (U, V)$ bilgi sisteminde $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ nesneler kümesi hastaları ve $V = \{YŞ, YP\}$ nesnelere ait özellikler kümesini göstermektedir. Tablo 3.1 de yer alan $S = (U, V)$ bilgi sisteminin özellikler kümesinin boş olmayan bütün altkümeleri $B_1 = \{YŞ, YP\}, B_2 = \{YŞ\}$ ve $B_3 = \{YP\}$ dir. Her bir altkümeye karşılık gelen ayrışımlar ya da ayırt edilemezlik bağıntıları aşağıda verilmiştir (Suraj, 2004).

$$IND(B_1) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_6\}, \{x_5, x_7\}\},$$
$$IND(B_2) = \{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\},$$
$$IND(B_3) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7\}\}.$$

Tanım 3.1.3 Bir karar sistemi ya da tablosu $d \notin V$ bir karar özelliği olmak üzere $S = (U, V \cup \{d\})$ ikilisi olarak tanımlanan bir bilgi sistemidir. Bir $S = (U, V \cup \{d\})$ karar sisteminde V kümesine koşul özellikleri ya da koşullar adı verilir. Ayrıca karar özellikleri çeşitli değerler alabilir (Suraj, 2004).

Örnek 3.1.2 Aşağıda Tablo 3.2 de bir karar sistemi verilmiştir. Verilen karar sisteminin Örnek 3.1.1 de verilen bilgi sistemine ait tabloya yürüyebilme durumunu ifade eden bir sütunun eklenmesiyle elde edilmiştir. Karar özelliği burada yürüyebilme durumu ve bu özelliğe karşı gelen değer kümesi $\{\text{Evet}, \text{Hayır}\}$ ya da kısaca $\{E, H\}$ dir. Yürüyebilme durumu "E" olan hastaların kümesi $X = \{x \in U : YD(x) = E\}$ ile yürüyebilme durumu

“H” olan hastaların kümesini $Z = \{x \in U : YD(x) = H\}$ gösterelim. Tablo 3.2 den yararlanarak $X = \{x_1, x_4, x_6\}$ ve $Z = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$ bulunur (Suraj, 2004).

Tablo 3.2. Karar sistemi

Nesneler	Yaş (YŞ)	Yürüme Performansı (YP)	Yürüyebilme Durumu (YD)
x_1	16-30	50	E
x_2	16-30	0	H
x_3	31-45	1-25	H
x_4	31-45	1-25	E
x_5	46-60	26-49	H
x_6	16-30	26-49	E
x_7	46-60	26-49	H

3.2. Kaba Kümeler

Bir bilgi sistemi ve özelliklerin bir B altkümesi verildiğinde, B-ayırt edilemezlik olarak tanımlanan $IND(B)$ nin U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturduğu bilinmektedir. B-ayırt edilemezlik bağıntısının denklik sınıfları U kümesinin bir ayrışımını oluşturur ve ayrışıma ait her küme B kümesinin elemanları ile kesin olarak belirlenebilir. Ayrıca herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesi, B-ayırt edilemezlik denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa kesin olarak belirlenebilir ya da tanımlanabilirdir. Bir bilgi sisteminde bu türde olmayan kümeleri belirlemek için farklı bir yaklaşıma gereksinme vardır. Bu sorunun çözümü için alt ve üst yaklaşım kavramları temel alınır.

Tanım 3.2.1 U kümesi üzerinde bir R denklik bağıntısı olsun. (U, R) ikilisine Pawlak yaklaşım uzayı veya kısaca Pawlak uzayı adı verilir (Pawlak, 1982).

Tanım 3.2.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\underline{apr} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U), \underline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \subseteq X\}$$

olarak tanımlanan $\underline{apr}$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü, $\underline{apr}(X)$ kümesine de X in alt yaklaşımı denir. $\underline{apr}(X)$ kümesi kesinlikle X kümesine ait nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

Tanım 3.2.3 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$\overline{apr} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U), \overline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \cap X \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan $\overline{apr}$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü, $\overline{apr}(X)$ kümesine de X in üst yaklaşımı denir. $\overline{apr}(X)$ kümesi X kümesinde olması muhtemel nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982).

$\mathcal{P}(U)$ kümesi üzerinde bilinen kesişim, birleşim ve tümleme işlemleri $(\mathcal{P}(U), \cap, \cup, U\backslash X)$ gösterimi ile kümeler cebiri oluşturur. Kümeler cebirine alt yaklaşım ve üst yaklaşım operatörleri eklenerek kaba kümeler cebiri adı verilen $(\mathcal{P}(U), \cap, \cup, U\backslash X, \underline{apr}, \overline{apr})$ genişletilmiş yapı elde edilir (Yao, 1996).

Önerme 3.2.1 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Pawlak, 1982).

i. $\underline{apr}(X) = \bigcup\{[x] \in U/R : [x] \subseteq X\}$.
ii. $\overline{apr}(X) = \bigcup\{[x] \in U/R : [x] \cap X \neq \emptyset\}$.

Önerme 3.2.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir. (Pawlak, 1982).

i. X kümesi tanımlanabilirdir,
ii. $\underline{apr}(X) = \overline{apr}(X).$,

Önerme 3.2.3 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun (Pawlak, 1982).

i. $\underline{apr}(X)$ kümesi X kümesinin kapsadığı en büyük tanımlanabilir kümedir.
ii. $\overline{apr}(X)$ kümesi X kümesini kapsayan en küçük tanımlanabilir kümedir.

Örnek 3.2.1 $S = (U, V)$ bilgi sistemi Örnek 3.1.1 de verildiği gibi olsun. $X = \{x_1, x_4, x_6\} \subseteq U$ altkümesinin $B_1 = \{YŞ, YP\}$ koşul özelliklerine göre alt ve üst yaklaşımları, sırasıyla, $\underline{apr}\,(X) = \{x_1, x_6\}$ ve $\overline{apr}\,(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$ olarak bulunur. O halde $\underline{apr}\,(X) \neq \overline{apr}\,(X)$ olduğundan $X = \{x_1, x_4, x_6\}$ altkümesi $B_1 = \{YŞ, YP\}$ koşul özelliklerine bağlı olarak tanımlanabilir değil yani kabadır. Şimdi $X = \{x_1, x_2\} \subseteq U$ altkümesini ele alalım. $B_1 = \{YŞ, YP\}$ koşul özelliklerine göre alt ve üst yaklaşımları $\underline{apr}\,(X) = \{x_1, x_2\} = \overline{apr}\,(X)$ dir O halde $X = \{x_1, x_2\}$ altkümesi $B_1 = \{YŞ, YP\}$ koşul özelliklerine bağlı olarak tanımlanabilirdir.

Tanım 3.2.4 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$$BND(X) = \overline{apr}\,(X) \setminus \underline{apr}\,(X)$$

kümesine X in sınır bölgesi denir. Bir kümenin sınırı evrensel kümenin kararsız bölgesidir. Bir başka ifade ile X kümesinde veya $U \setminus X$ kümesinde olduğu kesin olarak bilinemeyen öğelerden meydana gelir (Pawlak, 1982).

Not: Bir kümenin sınır bölgesi boş küme değil ise kabadır. Aksi durumda kesin ya da tanımlanabilir kümedir.

Tanım 3.2.5 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin pozitif bölgesi ve negatif bölgesi sırasıyla, aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$POS(X) = \underline{apr}\,(X),$$

$$NEG(X) = U \setminus \overline{apr}\,(X).$$

Tanımdan anlaşılacağı gibi, bir X kümesinin pozitif bölgesi kesinlikle X kümesine ait öğelerden oluşmasına karşın, negatif bölgesi kesinlikle X kümesine ait olmayan öğelerden oluşur (Pawlak, 1991).

Örnek 3.2.2 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesinin bir ayrışımı $U/R = \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\}\}$ ailesi olmak üzere, bir (U, R) Pawlak uzayı ve $X = \{x_3, x_4, x_5\}$ alt kümesi verilsin. X kümesinin sınırını, pozitif ve negatif bölgelerini belirleyelim. $\underline{apr}\,(X) = \{x_5\}$ ve $\overline{apr}\,(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$ bulunur. O halde (U, R) Pawlak uzayı için istenen $BND(X) = \{x_1, x_3, x_4\}$, $POS(X) = \{x_5\}$ ve $NEG(X) = \{x_2\}$

kümeleri elde edilir. X kümesinin sınır bölgesi boş küme olmadığından kaba olduğunu ifade edebiliriz.

Bir (U, R) Pawlak uzayının alt ve üst yaklaşım operatörlerinin önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.2.4 Bir (U, R) Pawlak uzayında $X, Y \subseteq U$ alt kümeleri verilsin. Alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı temel özellikler şunlardır (Pawlak, 1991).

i. $\underline{apr}\,(X) \subseteq X \subseteq \overline{apr}\,(X)$,

ii. $\underline{apr}\,(\emptyset) = \overline{apr}\,(\emptyset) = \emptyset\,, \underline{apr}\,(U) = \overline{apr}\,(U) = U$,

iii. $\overline{apr}\,(X \cup Y) = \overline{apr}\,(X) \cup \overline{apr}(\,Y)$,

iv. $\underline{apr}\,(X \cap Y) = \underline{apr}\,(X) \cap \underline{apr}(Y)$,

v. $X \subseteq Y \; ise \; \underline{apr}\,(X) \subseteq \underline{apr}\,(Y) \; ve \; \overline{apr}\,(X) \subseteq \overline{apr}\,(Y)$,

vi. $\underline{apr}\,(X \cup Y) \supseteq \underline{apr}\,(X) \cup \underline{apr}\,(Y)$,

vii. $\overline{apr}\,(X \cap Y) \subseteq \overline{apr}\,(X) \cap \overline{apr}\,(Y)$,

viii. $\underline{apr}\,(U \setminus X) = U \setminus \overline{apr}\,(X)$,

ix. $\overline{apr}\,(U \setminus X) = U \setminus \underline{apr}\,(X)$,

x. $\underline{apr}(\underline{apr}(X)) = \overline{apr}\,(\underline{apr}(X)) = \underline{apr}(X)$,

xi. $\overline{apr}\,\left(\overline{apr}\,(X)\right) = \underline{apr}\,\left(\overline{apr}\,(X)\right) = \overline{apr}\,(X)$.

Bir (U, R) Pawlak uzayında alt ve üst yaklaşım operatörlerinin Önerme 3.2.4 de verilen özelliklerinin yorumlarını eklemekte yarar görülmektedir. Özellik (i), herhangi bir kümenin kendisinin alt ve üst yaklaşımları arasında olduğunu ifade etmektedir. Özellik (ii), yaklaşım operatörlerinin $\mathcal{P}(U)$ kuvvet kümesine ait boş küme (minimum eleman) ve evrensel küme (maksimum eleman) olmak üzere iki uç elemanda çakıştığını göstermesi bakımından ilginçtir. Bu özellik için aynı zamanda boş ve evrensel kümenin tanımlanabilir oluşuna karşılık geldiği de söylenebilir. Üst yaklaşım operatörünün küme birleşimi işlemine, alt yaklaşım operatörünün ise küme kesişimi işlemine dağıldığı, sırasıyla özellikler (iii) ve (iv) de verilmiştir. Özellik (v), alt ve üst yaklaşım operatörlerinin monoton ya da kapsamayı koruduğunu belirtmektedir. Alt yaklaşımın küme birleşimine, üst yaklaşımı ise küme kesişimi işlemine zayıf dağıldığı, sırasıyla, özellik (vi) ve (vii) de verilmiştir. Özellik (viii) ve (ix) alt ve üst yaklaşım operatörlerinin küme tümleme işlemine göre dual operatörler olduğunu ya da dual çift oluşturduğunu gösterir. Son iki özellik ise, yaklaşım operatörlerinin arka arkaya uygulanmasıyla en az bir kez uygulanmasıyla elde edilen sonuçların eşit olduğunu, başka bir deyişle her iki yaklaşım operatörünün idempotent olmasını ifade etmektedir.

3.3 Belirsizliğin Ölçümü ve Kaba Üyelik Fonksiyonu

Bir Pawlak yaklaşım uzayında bir kümenin kaba olması, kümenin sınırının boş kümeden farklı olmasıyla karakterize edilmektedir. Kümenin sınırının boş küme olması ise kümenin tanımlanabilir olmasını ifade etmektedir. Sınır kümesinin eleman sayısı arttıkça, kümenin kesin olarak belirlenen eleman sayısı azalacaktır. Bu durum kümenin elemanlarına ait bilginin belirsizliğinin derecesinin artmasına neden olacaktır.

Tanım 3.3.1 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $\emptyset \neq X \subseteq U$ olsun.

$$\alpha(X) = \frac{\left|\underline{apr}\ (X)\right|}{\left|\overline{apr}\ (X)\right|}$$

eşitliği ile tanımlanan $\alpha(X)$ sayısına, X kümesinin tamlık ölçüsü denir (Pawlak, 1991). Tamlık ölçüsü tanımından elde edilen bazı özellikler aşağıda verilmiştir (Pawlak, 1991; Lashin, 2005).

i. $0 \leq \alpha(X) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır.
ii. $\alpha(X)$ sayısı 1 e ne kadar yakınsa, X kümesinin tamlığı ya da bilinirliği o ölçüde fazla olacaktır.
iii. Eğer $\alpha(X) = 1$ ise, X kümesi tanımlanabilirdir.
iv. Eğer $\alpha(X) < 1$ ise, X kümesi kabadır.
v. X kümesinin belirsizliğinin ölçüsü $\pi(X) = 1 - \alpha(X)$ ile verilir.

Örnek 3.3.1 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesi ile $X = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ altkümesi verilsin. U kümesinin bir ayrışımı

$$U\ /\ R = \{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$$

olmak üzere (U, R) Pawlak uzayını düşünelim. X kümesinin alt yaklaşımı $\underline{apr}\ (X) = \{x_1, x_3, x_6\}$, üst yaklaşımı $\overline{apr}\ (X) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$ dir. X kümesinin tamlık ölçüsü $\alpha(\mathrm{X}) = \frac{\left|\underline{\mathrm{apr}}\ (\mathrm{X})\right|}{\left|\overline{\mathrm{apr}}\ (\mathrm{X})\right|} = \frac{3}{5} < 1$ olduğundan X kümesi verilen ayrışıma göre bir kaba kümedir. Aynı

X kümesinin belirsizliğinin ölçüsü ise, $\pi(X) = \frac{2}{5}$ dir. $Y = \{x_3, x_4, x_6\}$ altkümesi için $\alpha(Y) = 1$ olduğundan, Y kümesi tanımlanabilirdir.

Tanım 3.3.2 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

i. $\underline{apr}\,(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{apr}\,(X) \neq U :\Leftrightarrow X$ kabaca tanımlanabilir.

ii. $\underline{apr}\,(X) = \emptyset$ ve $\overline{apr}\,(X) \neq U :\Leftrightarrow X$ içsel tanımlanabilir değildir.

iii. $\underline{apr}\,(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{apr}\,(X) = U :\Leftrightarrow X$ dışsal tanımlanabilir değildir.

iv. $\underline{apr}\,(X) = \emptyset$ ve $\overline{apr}\,(X) = U :\Leftrightarrow X$ tamamen tanımlanabilir değildir. (Pawlak, 1991).

Örnek 3.3.2 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesinin bir ayrışımı Örnek 3.3.1 de verildiği gibi olsun. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ kümesinin alt yaklaşımı $\underline{apr}\,(X) \neq \emptyset$ ve üst yaklaşımı $\overline{apr}\,(X) \neq U$ olduğundan Tanım 3.3.2 ye göre X kabaca tanımlanabilirdir.

Tanım 3.3.3 (U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Herhangi bir $x \in U$ elemanı için alt ve üst yaklaşım kümelerinin elemanı olup olmaması, μ kaba üyelik fonksiyonu ile incelenebilir. Kaba üyelik fonksiyonu $x \in U$ olmak üzere;

$$\mu_X : U \to [0,1], \qquad \mu_X(x) = \frac{|\,[x] \cap X\,|}{|\,[x]\,|}$$

biçiminde tanımlanır.

Kaba üyelik fonksiyonu ile koşullu olasılık arasındaki benzerlik kolayca görülür. $\mu_X(x)$ değeri herhangi bir x elemanının X kümesine ait olma olasılığı ya da derecesi olarak yorumlanır. Kaba üyelik fonksiyonu, bir $X \subseteq U$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları ile sınır bölgesini tanımlamak için kullanılabilir (Lashin, 2005; Pawlak, 1991):

$$\underline{apr}\,(X) = \{x \in U : \mu_X(x) = 1\},$$
$$\overline{apr}\,(X) = \{x \in U : \mu_X(x) > 0\},$$
$$BND(X) = \{x \in U : 0 < \mu_X(x) < 1\}.$$

Kaba üyelik fonksiyonu aşağıda verilen özelliklere sahiptir (Lashin, 2005; Pawlak 1991).

i. $\mu_X(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \underline{apr}\,(X) = POS(X),$

ii. $\mu_X(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U \setminus \overline{apr}\,(X) = NEG(X),$

iii. $0 < \mu_X(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \overline{apr}(X) \setminus \underline{apr}(X) = BND(X)$,

iv. $\mu_{U \setminus X}(x) = 1 - \mu_X(x), \forall x \in U$.

Örnek 3.3.3 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesinin bir ayrışımı $U / R = \{\{x_1\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_6\}\}$ olsun. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ kümesinin alt yaklaşımı $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_3, x_6\}$, üst yaklaşımı $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$ olduğu Örnek 3.3.1 de bulunmuştu. Şimdi U kümesinin elemanlarını kaba üyelik fonksiyonuna göre karakterize edelim. $\mu_X(x_1) = \mu_X(x_3) = \mu_X(x_6) = 1$ olduğundan $x_1, x_3, x_6 \in \underline{apr}(X)$ dir. $\mu_X(x_2) = \frac{1}{2} = \mu_X(x_5)$ ve $x_2, x_5 \in BND(X)$ dir. Son olarak $\mu_X(x_4) = 0$ olur ve $x_4 \in NEG(X)$ bulunur.

3.4. Topolojik Uzaylarda Kaba Küme Teorisi

Bu bölümde, Pawlak yaklaşım uzayı ile topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Topolojik uzay, Tanım 2.18 de verilen özellikleri sağlayan kümeler ailesidir ve bu aileye ait her öğe açık küme olarak adlandırılır. Matematiğin önemli alanlarından biri olan topoloji, hem geometri ile analiz alanlarını içeren hem de bilgi sistemleri ile kaba kümeleri araştırmak için önemli bir matematiksel araçtır (Bayhan ve Şen, 2018). Kaba küme teorisinin temel kavramlarının bazı topolojik kavramlarla olan benzerliğinden hareketle kaba kümeler ile topoloji arasında ilişki kurulmuştur (Vlach, 2008). Bir küme verildiğinde, bu kümenin herhangi bir ayrışımı o küme üzerindeki bir topolojinin tabanıdır. Aynı zamanda ayrışımdan yola çıkılarak denklik bağıntısına geçiş yapılabilir. Kaba küme teorisindeki topolojik uzayın referansı R denklik bağıntısının denklik sınıflarınca oluşturulan Pawlak yaklaşım uzayıdır. Bu topolojiye kaçık topoloji denir. Kaçık topolojinin açıkları aynı zamanda kapalı kümelerdir. Kaçık topolojiye dijital geometride yarı-ayrık topoloji denir. Kaçık topolojinin iç ve kapanış operatörleri ile Pawlak yaklaşım uzayındaki alt ve üst yaklaşım operatörleri aynıdır. Gerçekten R, U kümesi üzerinde denklik bağıntısı olmak üzere (U, R) Pawlak yaklaşım uzayı ile (U, τ) topolojik uzayı çakışır. Böylece,

$$X \subseteq U \text{ için } \underline{apr}(X) = int(X), \overline{apr}(X) = cl(X)$$

eşitlikleri verilebilir. Ayrıca bu tanımlar Pawlak'ın orijinal kaba küme tanımına uygundur (Allam, 2008).

Bir (U, R) Pawlak uzayında herhangi bir X kümesi ya tanımlanabilirdir ($BND(X) = \emptyset$) ya da kabadır ($BND(X) \neq \emptyset$).

Bir (U, τ) topolojik uzayı için herhangi bir X kümesinin tanımlanabilirliğinin dört türü bulunmaktadır (Lashin vd., 2005).

i. X tamamen tanımlanabilir :⇔ $cl(X) = X = int(X)$,

ii. X içsel olarak tanımlanabilir :⇔ $X = int(X),\ X \neq cl(X)$,

iii. X dışsal olarak tanımlanabilir :⇔ $X \neq int(X),\ X = cl(X)$,

iv. X tanımlanabilir değildir :⇔ $X \neq int(X),\ X \neq cl(X)$.

(U, R) bir Pawlak uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. (U, R) Pawlak uzayından elde edilen topolojik uzayı (U, τ_p) ile gösterelim. Bu durumda X kümesinin tanımlanabilir olması ile tamamen tanımlanabilir olması aynı anlamda kullanılmaktadır. Bir X kümesinin (U, R) pawlak uzayındaki sınırı $BND(X)$, herhangi bir (U, τ) topolojik uzayındaki sınırı $bnd(X)$ ile gösterilir. $\tau_p = \tau$ ise $bnd(X) = BND(X)$ dir.

Önerme 3.4.1 (U, τ) ve (U, τ') Pawlak uzayları, $X \subseteq U$ ve $\tau \subseteq \tau'$olsun. Eğer X kümesi (U, τ) uzayında tanımlanabilir ise (U, τ') uzayında da tanımlanabilirdir (Lashin vd., 2005).

Kanıt: X kümesi τ da bir tanımlanabilir olsun. O zaman $BND_\tau(X)$=$\emptyset$ dır. Ayrıca $\tau \subseteq \tau'$ olduğundan $BND_{\tau'}(X) \subseteq BND_\tau(X)$ kapsaması gereğince $BND_{\tau'}(X) \subseteq \emptyset$ dir. Bu ise X kümesinin τ′ de tanımlanabilir olduğunu gösterir.

NOT: Önerme 3.4.1 e göre $\tau \subseteq \tau'$ ise, X kümesinin τ da tanımlanabilir olması τ’ de de tanımlanabilir olmasını gerektirir. Ancak τ’ de tanımlanabilir olan bir X kümesi τ da tanımlanabilir olmayabilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.4.1 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde τ ve τ’ topolojileri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\tau = \{U, \emptyset\}, \qquad \tau' = \{U, \emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}\}$$

$X = \{b, c, d\}$ kümesini inceleyelim. $\tau \subseteq \tau'$ olduğu açıktır. $BND_{\tau'}(X) = cl(X) \setminus int(X) = \{b, c, d\} \setminus \{b, c, d\} = \emptyset$ dir. O halde X kümesi τ' topolojisine göre tanımlanabilirdir. $BND_\tau(X) = cl(X) \setminus int(X) = U \setminus \emptyset = U$ olduğundan X kümesi, τ topolojisine göre tanımlanabilir değildir. Böylece $\tau \subseteq \tau'$ için (U, τ') uzayında tanımlanabilir olan bir küme (U, τ) uzayında tanımlanabilir olmayabilir.

Pawlak uzayında kaba üyelik fonksiyonunun tanımı denklik sınıfları kullanılarak Tanım 3.3.3 de verildi. Aşağıda verilen tanım bu kavramı topolojik uzaya genişletmektedir.

Tanım 3.4.1 (U, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$ ailesi τ topolojisinin bir tabanı ve $X \subseteq U$ olsun. Buna göre kaba üyelik fonksiyonu $\mu_X^\tau(x) = \frac{|\{\cap B_x\} \cap X|}{|\cap B_x|}$, $B_x \in \mathcal{B}$, $x \in U$ şeklinde ifade edilir. (Lashin vd., 2005).

Örnek 3.4.2 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde bir (U, τ) topolojik uzayı ve τ topolojisinin bir $\mathcal{B}$ tabanı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{B} = \{\{2\}, \{3\}, \{0, 1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

$X = \{2, 4, 5\}$ kümesinin içi ve kapanışını Tanım 3.4.1 de verilen kaba üyelik fonksiyonunu kullanarak bulalım.

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ ailesi taban olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının keyfi birleşimi τ topolojisinin açıklarını verir. τ ailesini belirleyelim.

$\tau = \{\{2\}, \{3\}, \{0, 1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{0, 1, 2, 3, 5\}, \{0, 1, 2, 3, 4\},$ $\{0, 1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, U, \emptyset\}$ dir.

Şimdi $\mathcal{B}$ tabanı yardımıyla $X = \{2, 4, 5\}$ kümesini inceleyelim. $\mu_X^\tau(0) = \frac{|\{0,1,2\} \cap X\}|}{|\{0,1,2\}|} = \frac{|\{2\}|}{3} = \frac{1}{3}$ bulunur. Ayrıca $0 \notin int(X)$ ve $0 \notin cl(X)$ olduğu bulunur. Bu şekilde devam edilerek, $\mu_X^\tau(1) = \frac{1}{3}$, $\mu_X^\tau(2) = 1$, $\mu_X^\tau(3) = 0$, $\mu_X^\tau(4) = \frac{2}{3}$ ve $\mu_X^\tau(5) = \frac{1}{3}$ elde edilir.

Böylece $int(X) = \{2\}$, $cl(X) = \{1, 2, 4, 5\}$ kümeleri bulunur. Sonuç olarak $int(X)$ ve $cl(X)$ kümelerini μ_X^τ kaba üyelik fonksiyonu ve $\mathcal{B}$ tabanı kullanarak elde edilir. Bu sonuçlar ile τ topolojisini kullanarak bulunan sonuçlar aynıdır (Lashin vd., 2005).

3.5. Bilgi Tabanı

Tanım 3.5.1 U kümesi üzerindeki denklik bağıntıların bir ailesi $\mathfrak{B} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ olmak üzere, $(U, \mathfrak{B})$ ikilisine Pawlak bilgi tabanı adı verilir. $\mathfrak{B}$ bağıntıların herhangi bir ailesinden oluşuyorsa, genelleştirilmiş bilgi tabanı olarak adlandırılır. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{B}$ alt ailesi verilsin ve $R \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_{\{R\}}$ ye R bağıntısından elde edilen taban adı verilir. (Lashin, 2005; Lin 1998).

Tanım 3.5.2 $(U, \mathfrak{B})$ genelleştirilmiş bir bilgi tabanı olsun.

(a) $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{B}$ alt ailesi ve $R \in \mathcal{H}$ için $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \mathcal{B}_{\mathcal{H} \setminus \{R\}}$ ise, R bağıntısına vazgeçilebilir, aksi durumda vazgeçilmezdir denir.

(b) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ kümesi için

i. $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$,

ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R\})}$, $\forall R \in \mathcal{F}$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ kümesine $\mathcal{H}$ kümesinin minimal indirgenmesi denir ve $Red(\mathcal{H}) = \mathcal{F}$ ile gösterilir.

(c) $\mathcal{H}$ kümesinin tüm vazgeçilemez elemanlarının kümesine $\mathcal{H}$ nin çekirdeği denir ve $Core\ (\mathcal{H})$ ile gösterilir (Lashin vd., 2005).

Örnek 3.5.1 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlanan bağıntıların bir ailesi $\mathcal{H} = \{R_1, R_2, R_3\}$ olsun. $(U, \mathcal{H})$ genelleştirilmiş bilgi tabanının indirgemelerini belirleyelim (Lashin vd., 2005).

R_1 , R_2 ve R_3 bağıntılarının alt tabanları sırasıyla,

$\mathcal{S}_{R_1} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}\}$, $\mathcal{S}_{R_2} = \big\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\big\}$ ve $\mathcal{S}_{R_3} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ olarak verilsin. $(U, \mathcal{H})$ genelleştirilmiş bilgi tabanının alt tabanı $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4,5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ ailesidir.

Alt tabanlarının arakesitlerini alarak $\mathcal{B}$ tabanlarını elde edelim.

$\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

$\mathcal{S}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_1\})} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{4, 5\}\}$

$\mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_1\})} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

$\mathcal{B}_{\mathcal{H}} \neq \mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_1\})}$ olduğundan $R_1 \in \mathcal{H}$ vazgeçilmezdir.

$\mathcal{S}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_2\})} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}\}$

$\mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_2\})} = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{4\}, \{4, 5\}\}$ buradan

$\mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_2\})} \neq \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ olduğundan $R_2 \in \mathcal{H}$ vazgeçilmezdir.

$\mathcal{S}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_3\})} = \{\{1,2\},\{2,3,4\},\{4,5\},\{1,2,3\},\{3,4\},\{5\}\}$

$\mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_3\})} = \{\{1,2\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ buradan

$\mathcal{B}_{(\mathcal{H}\setminus\{R_3\})} = \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ olduğundan $R_3 \in \mathcal{H}$ vazgeçilebilirdir.

Böylece $Red(\mathcal{H}) = \{R_1, R_2\}$ ve $Core(\mathcal{H}) = \{R_1, R_2\}$ olarak bulunur.

3.6. Kaba Topoloji

Bu bölümde Pawlak alt ve üst yaklaşımları kullanarak kaba topoloji adı verilen yeni bir topoloji incelenecektir.

Önerme 3.6.1 U nesnelerin sonlu bir kümesi ve R, U üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Buna göre herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesi için

$$\tau_R = \left\{U, \emptyset, \underline{apr}(X), \overline{apr}(X), BND(X)\right\}$$

küme ailesi U üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X kümesine göre kaba topoloji adı verilir (Thivagar vd., 2012).

Kanıt: T_1: $U \in \tau_R$ ve $\emptyset \in \tau_R$ olduğu τ_R nin tanımından açıktır.

T_2: $\underline{apr}(X) \cap BND(X) = \emptyset \in \tau_R$, $\overline{apr}(X) \cap BND(X) = BND(X) \in \tau_R$ ve

$\underline{apr}(X) \cap \overline{apr}(X) = \underline{apr}(X) \in \tau_R$ dir.

T_3: $\underline{apr}(X) \subseteq \overline{apr}(X)$ olduğundan $\underline{apr}(X) \cup \overline{apr}(X) = \overline{apr}(X) \in \tau_R$,

$\overline{apr}(X) \cup BND(X) = \overline{apr}(X) \in \tau_R$ ve $\underline{apr}(X) \cup BND(X) = \overline{apr}(X) \in \tau_R$ dir.

Böylece τ_R ailesi bir topolojidir.

Örnek 3.6.1 $U = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin bir ayrışımı $U \setminus R = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\}\}$ olarak verilsin. $X = \{a,c,d\}$ altkümesi için $\underline{apr}(X) = \{c,d\}$, $\overline{apr}(X) = \{a,b,c,d\}$ ve $BND(X) = \{a,b\}$ dir. Böylece kaba topoloji $\tau_R = \{U, \emptyset, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b\}\}$ ailesidir.

Önerme 3.6.2 τ_R , U üzerinde bir kaba topoloji ise $\mathcal{B} = \left\{U, \underline{apr}(X), BND(X)\right\}$ küme ailesi τ_R nin bir tabanıdır (Thivagar vd., 2012).

Kanıt: i) $\bigcup_{X\in\mathcal{B}} X = U$.

ii) $\mathcal{B}$ nin U ve $\underline{apr}(X)$ kümeleri için $W = \underline{apr}(X)$ olsun. Bu durumda $U \cap \underline{apr}(X) = \underline{apr}(X)$ olduğundan $W \subseteq U \cap \underline{apr}(X)$ dir. Böylece her $x \in W$ elemanı $U \cap \underline{apr}(X)$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer $\mathcal{B}$ den U ve $BND(X)$ kümelerini alırsak $W = BND(X)$ için $W \subseteq U \cap BND(X)$ olur. Ayrıca $\underline{apr}(X)$ ve $BND(X)$ kümeleri için $\underline{apr}(X) \cap BND(X) = \emptyset$ dir. Böylece $\mathcal{B}$ ailesi, τ_R için bir tabandır.

Örnek 3.6.2 Diyabet, metabolizmanın yeterli miktarda insülin üretmediği için sürekli kan şekerinin yüksek olduğu metabolik bir hastalıktır. Diyabetin belirtileri arasında, yüksek kan şekeri, sık idrara çıkma, kilo kaybı ve artan açlık sayılabilir. Aşağıda 6 hasta hakkında bilgi veren bir karar sistemi kaba topoloji ile incelenecektir (Thivagar vd., 2012).

Nesneler kümesi $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, sık idrara çıkma (F), kilo kaybı (W) ve artan açlık (H) özelliklerinin kümesi $V = \{F, W, H\}$ olsun. $D(x)$ diyabet durumunu belirtsin. Örneğin x_1 hastasının diyabetli olması $D(x_1)$ =E biçiminde ifade edilebilir. Diyabet teşhisi konan hasta grubunu $X = \{x \in U : D(x) = E\}$ kümesi ile gösterelim. Tablo 3.3 e göre $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ dir. Tanım 3.1.2 den anlaşılacağı gibi U üzerinde bir $IND(V)$ ayırt edilemezlik bağıntısı tanımlanabilir. Aşağıdaki tablodan kolayca $IND(V) = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$ ayrışımı bulunur.

Tablo 3.3. Diyabet hastalığı ile ilgili karar tablosu

Hastalar	Sık İdrara Çıkma (F)	Kilo Kaybı (W)	Artan Açlık (H)	**DİYABET** $(\boldsymbol{D})$
x_1	E	E	H	**E**
x_2	E	H	E	**E**
x_3	E	H	H	**E**
x_4	H	E	E	**H**
x_5	H	E	H	**H**
x_6	H	H	E	**H**

X kümesi için $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $BND(X) = \emptyset$ bulunur. Böylece U üzerindeki kaba topoloji $\tau_V = \{U, \emptyset, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ ve tabanı ise

$\mathcal{B}_V = \{U, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ olarak bulunur. Şimdi; kilo kaybı (W) ve artan açlık (H) özelliklerine göre $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesini inceleyelim. O zaman, $IND(V \backslash \{F\}) = \{\{x_1, x_5\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_2, x_6\}\}$ olarak bulunur. $\underline{apr}(X) = \{x_3\}$, $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$ dir. Buradan $\tau_{V \backslash \{F\}} = \{U, \emptyset, \{x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\}\}$
ve $\mathcal{B}_{V \backslash \{F\}} = \{U, \{x_3\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\}\} \neq \mathcal{B}_V$ olduğundan (F) özelliği vazgeçilmezdir.

Kilo Kaybı (W) özelliğini özellikler kümesinden çıkaralım. $IND(V \backslash \{W\}) = \{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_6\}, \{x_5\}\}$ elde edilir. Buradan $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ bulunur. Böylece $\tau_{V \backslash \{W\}} = \{U, \emptyset, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ ve $\mathcal{B}_{V \backslash \{W\}} = \big\{U, \{x_1, x_2, x_3\}\big\} = \mathcal{B}_V$ olduğundan Kilo Kaybı (W) özelliğinin vazgeçilebilir olduğu elde edilir. Şimdi özellikler kümesinde artan açlık (H) özelliğini çıkaralım. Böylece $IND(V \backslash \{H\}) = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_6\}\}$ elde edilir. Buradan $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ bulunur. Böylece $\tau_{V \backslash \{H\}} = \tau_V$ ve $\mathcal{B}_{V \backslash \{H\}} = \big\{U, \{x_1, x_2, x_3\}\big\} = \mathcal{B}_V$ olduğundan artan açlık (H) özelliği vazgeçilebilirdir. Sonuç olarak $CORE(V) = \{F\}$ dir.

Örnek 3.6.3 Bu örneğimizde insanlara sivrisineklerden bulaşan Chikungunya hastalığını ele alacağız. Son yıllarda artış gösteren bu hastalık ateş ve şiddetli eklem ağrılarına neden olur. Diğer belirtiler arasında kas ağrısı, baş ağrısı ve bulantı bulunur. Şimdi 8 hasta hakkında bilgi veren aşağıdaki karar tablosunu inceleyelim (Thivagar vd., 2012).

Tablo 3.4. Chikungunya hastalığı ile ilgili karar tablosu

Hastalar	Eklem ağrısı (J)	Baş ağrısı (H)	Mide bulantısı (N)	Ateş (T)	**Chikungunya (C)**
x_1	E	E	E	Yüksek	**E**
x_2	E	H	H	Yüksek	**H**
x_3	E	H	H	Yüksek	**E**
x_4	H	H	H	Çok yüksek	**H**
x_5	H	E	E	Yüksek	**H**
x_6	E	E	H	Çok yüksek	**E**
x_7	E	E	H	Normal	**H**
x_8	E	E	H	Çok yüksek	**E**

Nesneler kümesi $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, eklem ağrısı (J), baş ağrısı (H), mide bulantısı (N) ve ateş (T) özelliklerinin kümesi $V = \{J, H, N, T\}$ olsun. Chikungunya teşhisi konulan hastaların kümesi $X = \{x \in U : C(x) = Evet\} = \{x_1, x_3, x_6, x_8\}$ dir. Karar tablosundan kolaylıkla $IND(V) = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6, x_8\}, \{x_7\}\}$ elde edilir. Buna göre; $\underline{apr}(X) = \{x_1, x_6, x_8\}$, $\overline{apr}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$ ve $BND(X) = \{x_2, x_3\}$ bulunur.

Böylece U üzerindeki kaba topoloji $\tau_V = \{U, \emptyset, \{x_1, x_6, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}, \{x_2, x_3\}\}$ ve tabanı $\mathcal{B}_V = \left\{U, \{x_1, x_6, x_8\}, \{x_2, x_3\}\right\}$ ailesidir. Örnek 3.6.2 deki işlemler uygulanırsa $CORE(V) = \{J, T\}$ elde edilir. Böylece baş ağrısı (H) ve mide bulantısı (N) belirtileri sınıflandırmada vazgeçilebilir özelliklerdir.

4. GENELEŞTİRİLMİŞ KABA KÜMELER

Pawlak kaba küme yaklaşımının temeli denklik bağıntısına dayanır. Denklik bağıntısı olma güçlü bir koşul olduğu için uygulamalarda sınırlayıcı olabilmektedir. Pawlak kaba küme yaklaşımında denklik bağıntısı yerine, daha zayıf özellikleri sağlayan çeşitli türlerde bağıntılarla çalışılması daha elverişli ve verimli sonuçlar vermektedir. Bu düşüncelerin sonucunda, kaba kümelerin genelleştirilmesi yolu açılmıştır (Zhu 2007a, 2007b). Bu bölümde, denklik bağıntısı olması gerekmeyen herhangi bir bağıntıdan indirgenen genelleştirilmiş kaba küme kavramı verilerek topolojik özellikleri incelenecektir. Ayrıca, aksi belirtilmedikçe U evrensel kümesi için sonlu olma varsayımı kullanılmayacaktır.

4.1. Genelleştirilmiş Kaba Kümeler ve Topolojik Özellikleri

Denklik bağıntısı olma koşulu zayıflatılarak genelleştirilmiş kaba küme yaklaşımları elde edilir. İlk olarak genelleştirilmiş yaklaşım uzayını ve ardından denklik sınıfı yerini alacak olan ardıl komşuluk kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 4.1.1 R, U kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere (U, R) ikilisine genelleştirilmiş yaklaşım uzayı denir (Yu ve Zhan, 2014).

Tanım 4.1.2 R , U kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun.

$$R_s(x) = \{y \in U : (x, y) \in R\}$$

kümesine, x noktasının ardıl komşuluğu denir. Bu tanıma göre, R bir denklik bağıntısı olduğunda x in denklik sınıfı $[x]$ ile ardıl komşuluğu $R_s(x)$ çakışır, yani $[x] = R_s(x)$ eşitliği sağlanır (Yu ve Zhan, 2014).

Tanım 4.1.3 (U, R) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$\underline{R} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U), \underline{R}(X) = \{x \in U : R_s(x) \subseteq X\}$

olarak tanımlanan $\underline{R}$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü, $\underline{R}(X)$ kümesine de X in alt yaklaşımı denir (Yu ve Zhan, 2014).

Tanım 4.1.4 (U, R) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun.

$\overline{R} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$, $\overline{R}(X) = \{x \in U : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\}$

ile verilen $\overline{R}$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü, $\overline{R}(X)$ kümesine de X in üst yaklaşımı adları verilir (Yu ve Zhan, 2014).

Genelleştirilmiş yaklaşım uzayında verilen alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı temel özellikler aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.1.1 (U, R) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı ve $X, Y \subseteq U$ olsun. $\underline{R}$ ve $\overline{R}$ operatörleri için aşağıdaki özellikler vardır (Yu ve Zhan, 2014).

i. $\underline{R}(X) = U \backslash (\overline{R}(U \setminus X)), \overline{R}(X) = U \backslash (\underline{R}(U \backslash X))$,

ii. $\overline{R}(\emptyset) = \emptyset$, $\underline{R}(U) = U$,

iii. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y), \overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$,

iv. $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y), \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$,

v. $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y), \overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$.

Yukarıda (i) de verilen eşitlikler; $\underline{R}$ alt yaklaşım operatörü ile $\overline{R}$ üst yaklaşım operatörünün dual olduklarını ifade etmektedir.

Tanım 4.1.5 U kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin. Eğer her $x \in U$ için $(x, y) \in R$ olacak biçimde bir $y \in U$ öğesi bulunabiliyorsa, R ye serial bağıntı adı verilir.

Örnek 4.1.1 $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde R_1, R_2 ve R_3 bağıntıları aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$R_1 = \{(a, a), (c, c), (d, d), (b, a), (d, e), (e, d)\}$$
$$R_2 = \{(a, a), (b, a), (a, b), (d, a), (e, c), (d.e)\}$$
$$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

R_1 serial bağıntıdır ancak R_2 bağıntısı serial değildir. R_3 bağıntısı yansımalı olduğundan serialdir. Ancak serial bir bağıntının yansımalı olması gerekmez. Gerçekten, R_1 bağıntısı serial olmasına karşın yansımalı değildir.

Önerme 4.1.2 (U, R) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı olsun. Aşağıda verilen (a) ve (b) önermeleri denktir (Yu ve Zhan, 2014).

(a) R serial bağıntıdır.

(b) Her $X \subseteq U$ için

i. $\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$

ii. $\underline{R}(\emptyset) = \emptyset$

iii. $\overline{R}(U) = U$

özellikleri sağlanır.

Teorem 4.1.1 (U, R) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı ve R bağıntısı serial olsun. Bu durumda

$$\vartheta = \{X \subseteq U: \underline{R}(X) = \overline{R}(X)\}$$

olarak tanımlanan ϑ ailesi, U üzerinde bir topolojidir (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: ϑ ailesinin topoloji olma özelliklerini sağladığını gösterelim.

T_1: $\underline{R}(\emptyset) = \{x \in U : R_s(x) \subseteq \emptyset\} = \emptyset$ ve $\overline{R}(\emptyset) = \{x \in U : R_s(x) \cap \emptyset \neq \emptyset\}=\emptyset$ olduğundan $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset)$ dir. O halde $\emptyset \in \vartheta$ dir. Önerme 4.1.1 (ii) ve Önerme 4.1.2 gereğince $\underline{R}(U) = U = \overline{R}(U)$ eşitliği sağlanır. O halde $U \in \vartheta$ dir.

T2: $X, Y \in \vartheta$ olsun. O halde $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$ ve $\underline{R}(Y) = \overline{R(Y)}$ dir. Önerme 4.1.1 (v) gereğince $\underline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X \cap Y)$ dir. Yine Önerme 4.1.1 (v) ile (iii), varsayımla birleştirilerek $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) = \underline{R}(X \cap Y)$ bulunur. Böylece $\underline{R}(X \cap Y) = \overline{R}(X \cap Y)$ eşitliği elde edilerek $X \cap Y \in \vartheta$ sağlanır.

T3: I herhangi bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $X_i \in \vartheta$ olsun. O halde $\underline{R}(X_i) = \overline{R}(X_i)$ dir. Önerme 4.1.1 den, $\overline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \overline{R}(X_i) = \bigcup_{i \in I} \underline{R}(X_i) \subseteq \underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ kapsaması elde edilir. Bu bilgiye ek olarak, Önerme 4.1.2 kullanılarak $\underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i) \subseteq \overline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ kapsamanın diğer yönü bulunur. Böylece $\underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \overline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ eşitliğine ve $\bigcup_{i \in I} X_i \in \vartheta$ olduğu sonucuna varılır. Sonuç olarak ϑ ailesinin U kümesi üzerinde bir topoloji olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.2 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, b)\}$ serial bağıntısı verilsin. R bağıntısından elde edilen topolojiyi bulalım.

Ardıl komşulukları yazalım;

$R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{a, b\}$, $R_s(c) = \{b\}$ dir.

Tablo 4.1. Yaklaşım kümeleri

$P(U)$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	U	$\emptyset$
$\underline{R}(X)$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$	U	$\emptyset$	$\{c\}$	U	$\emptyset$
$\overline{R}(X)$	$\{a, b\}$	U	$\emptyset$	U	$\{a, b\}$	U	U	$\emptyset$

U nun alt kümelerinden alt ve üst yaklaşımları eşit olanların ϑ =$\{\emptyset\ , U\ , \{c\}\ , \{a, b\}\ \}$ ailesi bir topolojidir (Yu ve Zhan, 2014).

Önerme 4.1.3 R, U kümesi üzerinde yansımalı bir bağıntı olsun. $X, Y \subseteq U$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır (Kondo, 2006).

i. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$,

ii. $X \subseteq Y \Longrightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$,

iii. $\underline{R}(U \backslash X) = U \backslash (\overline{R}(X))$.

Önerme 4.1.4 R, U kümesi üzerinde yansımalı bir bağıntı olsun.

$$\vartheta_y = \{X \subseteq U : \underline{R}(X) = X\}$$

ailesi U üzerinde bir topolojidir. ϑ_y ailesine R yansımalı bağıntısından elde edilen topoloji denir (Kondo, 2006).

Kanıt: T_1: $\emptyset\ , U \in \vartheta_y$ olduğu açıktır.

T_2: $X\ , Y \in \vartheta_y$ olsun. Öneme 4.1.3 (i) den $\underline{R}(X \cap Y) \subseteq X \cap Y$ dir. Ayrıca $\underline{R}(X) = X$ ve $\underline{R}(Y) = Y$ olduğundan $X \cap Y = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) = \underline{R}(X \cap Y)$ dir. Böylece $X \cap Y \in \vartheta_y$ dir.

T_3: Her $i \in I$ için $X_i \in \vartheta_y$ olsun. $\bigcup_{i \in I} X_i \in T(R)$ olduğunu gösterelim. $\underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ olduğu açıktır. Şimdi kapsamanın diğer yönü olan $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ ifadesini doğrulayalım. Bir $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ alalım. O halde $x \in X_{i_0} = \underline{R}(X_{i_0})$ olacak biçiminde bir $i_0 \in I$ vardır. R bağıntısı yansımalı olduğundan, her $y \in R$ için xRy dir. $\underline{R}(X_{i_0}) = \{x: R_s(x) \subseteq X_{i_0}\}$, yani $y \in X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ dir. Buradan $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ olur. Böylece $\bigcup_{i \in I} X_i = \underline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ eşitliğine ulaşılır ve $\bigcup_{i \in I} X_i \in \vartheta_y$ dir. Sonuç olarak ϑ_y ailesi bir topolojidir.

Önerme 4.1.5 R , U kümesi üzerinde yansımalı ve geçişli bir bağıntı olsun. Bu durumda $\underline{R}$ bir iç operatörü ve $\overline{R}$ bir kapanış operatörüdür (Yao, 1998).

Örnek 4.1.3 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde yansımalı ve geçişli bir R bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, b), (a, b)\}$$

Ardıl komşuluklar;

$R_s(a) = \{a, b, c\}$, $R_s(b) = \{b\}$, $R_s(c) = \{b, c\}$ olarak bulunur.

Tablo 4.2. Yaklaşım kümeleri

$P(U)$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	U	$\emptyset$
$\underline{R}(X)$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	U	$\emptyset$
$int(X)$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	U	$\emptyset$
$\tau = \{ \emptyset , U , \{b\}, \{b, c\}\}$								
$\overline{R}(X)$	$\{a\}$	U	$\{a, c\}$	U	$\{a, c\}$	U	U	$\emptyset$
$cl(X)$	$\{a\}$	U	$\{a, c\}$	U	$\{a, c\}$	U	U	$\emptyset$

Önerme 4.1.3 deki eşitlikler Tablo 4.2 de görülebilir.

Sonuç olarak, yansımalı ve geçişli bir R bağıntısı ile üretilen alt ve üst yaklaşım operatörleri tam olarak bir topolojinin sırasıyla iç ve kapanış operatörlerine karşılık gelmektedir. Ancak R bağıntısı yansımalı olarak ele alındığında, alt ve üst yaklaşım operatörleri $\vartheta_y = \{X \subseteq U : \underline{R}(X) = X\}$ topolojisi için iç operatörü ve kapanış operatörü olmayabilir. Bu durumu somut olarak aşağıda verilen örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 4.1.4 $U = \{a, b, c\}$ olarak verilsin. U kümesi üzerinde tanımlı yansımalı olan bir bağıntı $R = \Delta_U \cup \{(a, b), (b, c)\}$ olsun.

Ardıl komşuluklar;

$R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{b, c\}$, $R_s(c) = \{c\}$ olarak bulunur.

Tablo 4.3. Yaklaşım kümeleri

$P(U)$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	U	$\emptyset$
$\underline{R}(X)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	U	$\emptyset$
$\overline{R}(X)$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	U	U	U	$\emptyset$

Buna göre verilen bilgiler kullanılarak $\vartheta_y = \{\emptyset, U, \{c\}, \{b,c\}\}$ topolojisi elde edilir. Şimdi $X = \{a,b\}$ kümesinin ϑ_y topolojisine göre içini ve kapanışını bulalım. $int(X) = \emptyset$ ve $cl(X) = \{a,b,c\}$ dir. Böylece $\underline{R}(X) \neq int(X)$ ve $\overline{R}(X) \neq cl(X)$ olduğu görülür.

Tanım 4.1.6 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. U kümesinde R bağıntısını içeren en küçük geçişli bağıntıya R nin geçişli kapanışı denir ve $t(R)$ ile gösterilir. R bağıntısını içeren en küçük denklik bağıntısına da R nin denklik kapanışı denir ve $e(R)$ ile gösterilir (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.1.2 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olmak üzere, R nin geçişli kapanışı $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup ....$ dir (Pei ve Xu, 2007).

Örnek 4.1.5 $U = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a,a),(a,b),(b,c)\}$ bağıntısı verilsin. R nin bir denklik bağıntısı olmadığı kolayca görülür. R nin geçişli kapanışını belirleyelim. Öncelikle R ye karşılık gelen A_R matrisini oluşturalım.

$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Bir sonraki adımda R^2 bağıntısı

$$R^2 = A_R \cdot A_R = A_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b)\}$$

ve R^3 bağıntısı

$$R^3 = A_{R^2} \cdot A_R = A_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)\}$$

olarak hesaplanır. $R \subseteq R^3$ olduğu görülür. Ayrıca $R^3 = R^4 = \cdots = R^n$ eşitlikleri kolayca görülür. O halde, R^3 bağıntısı $R \subseteq R^3$ koşulunu sağlayan en küçük geçişli bağıntıdır. R bağıntısının geçişli kapanışı $t(R) = R^3$ tür.

Teorem 4.1.3 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısının geçişli kapanışı $t(R)$ olmak üzere $R \subseteq t(R)$ dir (Pei ve Xu, 2007).

Kanıt: $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup ....$ olduğundan birleşim kümesinin tanımından $R \subseteq R^1 \cup R^2 \cup$ .... dir. Böylece $R \subseteq t(R)$ kapsaması sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.1 U kümesi üzerinde tanımlanan R_1 ve R_2 bağıntıları verilsin.
$x \in U$ ve $X \subseteq U$ olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir (Pei vd., 2011).

i. $R_1 \subseteq R_2$,
ii. $(R_1)_s(x) \subseteq (R_2)_s(x)$,
iii. $\underline{R_1}(X) \supseteq \underline{R_2}(X)$,
iv. $\overline{R_1}(X) \subseteq \overline{R_2}(X)$.

Teorem 4.1.4 R, U kümesi üzerinde yansımalı bir bağıntı ise, $t(R)$ bağıntısı da U kümesi üzerinde yansımalı bir bağıntıdır (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: R, U kümesi üzerinde bir yansımalı bir bağıntı olsun. Teorem 4.1.3 den $R \subseteq t(R)$ dir. O halde $t(R)$ bağıntısının yansımalı olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 4.1.2 U kümesi üzerinde bağıntıların bir ailesi $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ olsun. Her $x \in U$ $için$ $(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i)_s(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(R_i)_s(x)$ eşitliği sağlanır (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: Ardıl komşuluk tanımını kullanılarak aşağıdaki eşdeğerlikler yazılır ve istenen eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} y \in (\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i)_s(x) &\Leftrightarrow (x,y) \in \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \text{ için } (x,y) \in R_i \\ &\Leftrightarrow \exists\ i \text{ için } y \in (R_i)_s(x) \\ &\Leftrightarrow y \in \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(R_i)_s(x) \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 4.1.3 U kümesi üzerinde bağıntıların bir ailesi $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ olsun. Her $X \subseteq U$ için $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{R_i}(X)$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: Her i için $R_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ sağlanır ve Yardımcı Teorem 4.1.1 den $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}(X) \subseteq \underline{R_i}(X)$ dir. Böylece $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}(X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{R_i}(X)$ olur. Diğer yandan her i için $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{R_i}(X)$ ise $x \in \underline{R_i}(X)$ dir. Böylece $(R_i)_s(x) \subseteq X$ olur. Yani $\bigcup_{i=1}^{\infty}(R_i)_s(x) \subseteq X$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.2 den $(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i)_s(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(R_i)_s(x) \subseteq X$ elde edilir. Böylece $x \in \underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}(X)$ dir. Sonuç olarak $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i}(X) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \underline{R_i}(X)$ eşitliğine ulaşılarak kanıt tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.4 U üzerinde R_1 ve R_2 bağıntıları verilsin. Her $X \subseteq U$ için $\underline{R_1 \circ R_2}(X) = \underline{R_1}\left(\underline{R_2}(X)\right)$ eşitliği vardır (Pei ve Xu, 2007).

Kanıt: $R = R_1 \circ R_2$ olsun. Kanıt için $\underline{R}(X) = \underline{R_1 \circ R_2}(X) = \{x: R_s(X) \subseteq X\} = \{x: (R_2)_s((R_1)_s(x)) \subseteq X\}$ eşitliği kullanılacaktır.
İlk olarak $x \in \underline{R}(X)$ olsun. O halde $(R_2)_s\big((R_1)_s(x)\big) \subseteq X$ dir. Böylece her $y \in (R_1)_s(x)$ için $(R_2)_s(y) \subseteq (R_2)_s\big((R_1)_s(x)\big) \subseteq X$ dir. Bu nedenle, $y \in \underline{R_2}(X)$, ve dahası $(R_1)_s(x) \subseteq \underline{R_2}(X)$ olur. Böylece $x \in \underline{R_1}\left(\underline{R_2}(X)\right)$ dir.

Tersine, eğer $x \in \underline{R_1}\left(\underline{R_2}(X)\right)$ ise $(R_1)_s(x) \subseteq (R_2)_s(x)$ dir. Böylece her $y \in (R_1)_s(x)$ için $y \in \underline{R_2}(X)$ sağlanır. Yani $(R_2)_s(y) \subseteq X$ dir. Ayrıca $(R_2)_s((R_1)_s(x)) \subseteq X$ dir. Yani $R_s(X) \subseteq X$. Böylece $x \in \underline{R}(X)$ bulunarak $\underline{R_1 \circ R_2}(X) = \underline{R_1}\left(\underline{R_2}(X)\right)$ eşitliğinin kanıtı tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.5 R, U üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde her $X \subseteq U$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{R}^n(X) = \underline{R}^{(n)}(X)$ eşitliği vardır. Burada $\underline{R}^{(n)}$, $\underline{R}$ nin n.basamaktan bileşkesini göstermektedir (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: Yardımcı Teorem 4.1.4 kullanılarak tümevarım yöntemi ile kolayca elde edilir,

Teorem 4.1.5 R, U kümesi üzerinde yansımalı bir bağıntı olsun. R bağıntısından elde edilen topoloji ile R nin geçişli kapanışından elde edilen topoloji aynıdır. Yani

$$\vartheta_y = \vartheta_{t(R)}$$

eşitliği vardır (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt: Yardımcı Teorem 4.1.3 ve Yardımcı Teorem 4.1.5 den herhangi bir $X \subseteq U$ için $\underline{t(R)}(X) = \underline{\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underline{R^n}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underline{R^{(n)}}(X) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}^{(2)}(X) \cap \ldots$ dir. Eğer $X \in \vartheta_y$ ise $\underline{R}(X) = X$ dir. Böylece $\underline{t(R)}(X) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}^{(2)}(X) \cap \ldots = X$ olur. Bu eşitlik bize $X \in \vartheta_{t(R)}$ olmasını verir. O halde $\vartheta_y \subseteq \vartheta_{t(R)}$ kapsaması sağlanır.

Kapsamanın tersini göstermek için $X \in \vartheta_{t(R)}$ alalım. O halde $\underline{t(R)}(X) = X$ dir ve $\underline{R}(X) \cap \underline{R}^{(2)}(X) \cap \ldots = X$ sağlanır. Böylece $X \subseteq \underline{R}(X)$ elde edilir. $\underline{R}(X) \subseteq X$ kapsaması açık olduğundan $\underline{R}(X) = X$ eşitliği bulunur. O halde $X \in \vartheta_y$ dir. Bu ise $\vartheta_{t(R)} \subseteq \vartheta_y$ demektir. Sonuç olarak istenen $\vartheta_y = \vartheta_{t(R)}$ elde edilir.

Örnek 4.1.6 $U = \{a, b, c\}$ olmak üzere $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ yansımalı bağıntısı verilsin. Örnek 4.1.4 de $\vartheta_y = \{\emptyset, U, \{c\}, \{b,c\}\}$ topolojisi elde edilmişti. Şimdi R nin geçişli kapanışından elde edilen $\vartheta_{t(R)}$ topolojisini oluşturalım. İlk olarak, R ye karşılık gelen A_R matrisi aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $t(R)$ geçişli kapanışını hesaplayalım.

$$R^2 = A_R \cdot A_R = A_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = A_{R^2} \cdot A_R = A_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^2$$

$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots = R^2$ dir. Böylece R yansımalı bağıntısının geçişli kapanışı $t(R) = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ elde edilir.

Ardıl komşuluklar; $t(R)_s(a) = \{a,b,c\}$, $t(R)_s(b) = \{b,c\}$, $t(R)_s(c) = \{c\}$ olarak bulunur.

Tablo 4.4. Yaklaşım kümeleri

$\mathcal{P}(U)$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	U	$\emptyset$
$\underline{t(R)}(X)$	U	$\emptyset$	$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{b,c\}$	U	$\emptyset$

Elde edilen bilgiler bir araya getirildiğinde $\vartheta_{t(R)} = \{\emptyset, U, \{c\}, \{b,c\}\} = \vartheta_y$ eşitliği bulunur.

Teorem 4.1.6 R, U üzerinde simetrik bir bağıntı olsun. O halde $t(R)$ bir simetrik bağıntıdır (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt. İlk olarak R^2 nin simetrik bir bağıntı olduğunu gösterelim. Eğer $(x,z) \in R^2$ ise $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olacak şekilde bir $y \in U$ vardır. R bağıntısı simetrik olduğundan $(y, x) \in R$ ve $(z, y) \in R$ olur. Böylece $(z, x) \in R^2$ olur ve R^2 bağıntısı simetriktir. Daha sonra tümevarım yöntemi kullanılarak, her $k \in \mathbb{Z}^+$ için R^k nın simetrik olduğu kanıtlanabilir. Son olarak $t(R)$ nin simetrik olduğunu gösterelim. $Eğer$ $(x,y) \in t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$ ise, $(x,y) \in R^n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. R^n simetrik olduğundan $(y,x) \in R^n$ dir. Böylece $(y,x) \in t(R)$ elde edilir ve $t(R)$ simetriktir.

Teorem 4.1.7 R, yansımalı ve simetrik bir bağıntı ise, $e(R) = t(R)$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt. Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.1.6 dan $t(R)$ bir denklik bağıntısıdır. $R \subseteq t(R)$ olduğu açıktır. Eğer $R \subseteq S$ ve S denklik bağıntısı ise, S geçişli bağıntıdır. $t(R)$, R nin geçişli kapanışı ise, $t(R) = S$ dir. Böylece $e(R) = t(R)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.8 R yansımalı ve simetrik bağıntı olsun. O halde $\vartheta_y = \vartheta_{e(R)}$ eşitliği sağlanır (Yu ve Zhan, 2014).

Örnek 4.1.7 $U = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde bir R bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.
$R = \Delta_U \cup \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,a)\}$. R yansımalı ve simetrik bağıntıdır. Her $x \in U$ öğesinin ardıl komşulukları $R_s(a) = \{a,b,c\}$, $R_s(b) = \{a,b\}$, $R_s(c) = \{a,c\}$ ve $R_s(d) = \{d\}$ olarak bulunur. Ardıl komşuluklar yardımıyla, $\vartheta_y = \{X \subseteq U : \underline{R}(X) = X\} = \{\emptyset, \{a,b,c\}, \{d\}, U\}$ topolojisi elde edilir. R nin denklik kapanışı ise $e(R) = \Delta_U \cup$

$\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$ dir. Buna göre ardıl komşuluklar $e(R)_s(a) = \{a,b,c\}$, $e(R)_s(b) = \{a,b,c\}$, $e(R)_s(c) = \{a,b,c\}$ ve $e(R)_s(d) = \{d\}$ olur. $\vartheta_{e(R)} = \{X \subseteq U : e(R)(X) = X\} = \{\emptyset, \{a,b,c\}, \{d\}, U\}$ elde edilir. Böylece $\vartheta_y = \vartheta_{e(R)}$ eşitliği sağlanır (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.1.8 de R bağıntısının simetrik olması temel koşuldur, kaldırılamaz. R bağıntısı simetrik olmadığında Teorem 4.1.8 sağlanmaz.

Örnek 4.1.8 Örnek 4.1.4 ü tekrar ele alalım. Burada incelenen R bağıntısı simetrik değildir. Kolay bir hesaplamayla $e(R) = U \times U$ olduğu görülebilir. Böyle $e(R)(U) = U$ dir. Her $X \subseteq U$ ve $X \neq U$ için $e(R)(X) = \emptyset$ dir. Ayrıca $\vartheta_{e(R)} = \{U, \emptyset\}$ ve $\vartheta_y \neq \vartheta_{e(R)}$ dir. $e(R)$ denklik bağıntısı olduğundan, $\vartheta_{e(R)}$ kaçık topolojidir (Yu ve Zhan, 2014).

Sonuç 4.1.1 R, U kümesi üzerinde yansımalı ve simetrik bir bağıntı olsun. O halde ϑ_y kaçık topolojidir (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.1.9 R, U kümesi üzerinde yansımalı ve simetrik bir bağıntı olsun. int ve cl sırasıyla, ϑ_y nin iç ve kapanış operatörlerini göstersin. Bu durumda $int = \underline{e(R)}$ ve $cl = \overline{e(R)}$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

Sonuç 4.1.2 R, U kümesi üzerinde yansımalı ve simetrik bağıntı olsun. Her $X \subseteq U$ için $int(X) \subseteq \underline{R}(X)$ ve $\overline{R}(X) \subseteq cl(X)$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.1.10 R, U kümesi üzerinde yansımalı ve simetrik bir bağıntı olsun. O halde ϑ_y topolojisinden elde edilen bağıntı $R(\vartheta_y)$ ile R nin denklik kapanışı çakışır (Yu ve Zhan, 2014).

Örnek 4.1.9 Daha önce verilen Örnek 4.1.7 yi göz önüne alalım. $\vartheta_y = \{\emptyset, \{a,b,c\}, \{d\}, U\}$ ailesi kapalı kümelerden meydana gelmiştir. ϑ_y topolojisinin kapanış operatörü cl olmak üzere; $cl(\{a\}) = \{a,b,c\}$, $cl(\{b\}) = \{a,b,c\}$, $cl(\{c\}) = \{a,b,c\}$ ve $cl(\{d\}) = \{d\}$ elde edilir. Buradan $R(\vartheta_y) = \Delta_U \cup \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$ bağıntısı bulunur. Sonuç olarak $R(\vartheta_y) = e(R)$ eşitliği gösterilmiş olur (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.1.11 $R \subseteq U \times U$ bağıntısı yansımalı ve simetrik olsun.
$L_R = \{S \subseteq U \times U: S$ yansımalı, simetrik ve $\vartheta_y(S) = \vartheta_y(R)\}$
kümesi aşağıda verilen özellikleri sağlar.

i. $e(R) \in L_R$.
ii. $e(R)$ denklik kapanışı, kümeler üzerinde bilinen kapsama bağıntısına göre L_R nin en büyük elemanıdır (Yu ve Zhan, 2014).

Önerme 4.1.6 $S_1, S_2 \in L_R$ olsun. O halde $S_1 \circ S_2 \in L_R$ ve $S_1 \cup S_2 \in L_R$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

4.2. Eksik Bilgi Sistemleri ve Topolojik İndirgemesi

Bir bilgi sisteminin nesne ve özelliklerin bir araya getirildiği tablo ile verildiği bilinmektedir. Bazı araştırmalarda bir nesneye karşılık gelen özellik değeri bulunmayabilir. Bu durumda tabloda boşluk ya da boşluklar yer alabilir.

Tanım 4.2.1 Nesnelerin sonlu bir kümesi U ve özelliklerin sonlu bir kümesi V olmak üzere $S = (U, V)$ bilgi sistemi verilsin. V_a, $a \in V$ özelliği için bir değer kümesi olmak üzere, herhangi bir nesneye V_a kümesinden bir değer karşılık gelmemesi durumu söz konusu ise $S = (U, V)$ bilgi sistemine eksik bilgi sistemi ya da tam olmayan bilgi sistemi adı verilir. Bu durumu ifade etmek için bilgi sistemi tablosundaki eksik değerler " $*$ " sembolü ile gösterilir. Eksik olmayan $S = (U, V)$ bilgi sistemine eksiksizdir ya da tamdır denir (Pawlak, 1982).

$S = (U, V)$ bir eksik bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. U kümesi üzerinde
$SIM(B) = \{(x, y) \in U \times U : \forall a \in B, (f_a(x) = f_a(y)) \vee (f_a(x) = *) \vee (f_a(y) = *)\}$
ile $SIM(B)$ bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı yansıma ve simetri (tolerans) özelliklerini sağlar. O halde $SIM(B)$ bir tolerans bağıntısıdır ve $SIM(B) = \bigcap_{a \in B} SIM(\{a\})$ eşitliği sağlanır. $S_B(x) = \{y \in U : (x, y) \in SIM(B)\}$ kümesine $x \in U$ nesnesinin tolerans sınıfı denir. Bütün tolerans sınıflarının kümesi $U/SIM(B)$ ile gösterilir ve $U/SIM(B) = \{S_B(x) : x \in U\}$ ailesi genel olarak, U kümesinin bir ayrışımını oluşturmaz. Ancak U

kümesinin bir örtüsüdür. Başka bir deyişle, her $x \in U$ için $S_B(x) \neq \emptyset$ ve $\bigcup_{x \in U} S_B(x) = U$ sağlanır.

Tanım 4.2.2 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi, $B \subseteq V$ ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin alt yaklaşımı

$$\underline{B}(X) = \{x \in U : S_B(x) \subseteq X\}$$

ve üst yaklaşımı

$$\overline{B}(X) = \{x \in U : S_B(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanır (Yu ve Zhan, 2014).

Tanım 4.2.3 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun.

i. Eğer $SIM(B) = SIM(V)$ ise, B kümesine V nin tutarlı kümesi denir.
ii. Eğer B kümesi tutarlı ve B nin kendisinden başka tutarlı alt kümesi bulunmuyorsa, B kümesi V nin bir indirgemesi olarak adlandırılır.

$S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. $SIM(B)$ bağıntısı yansımalı ve simetrik olduğundan, U kümesi üzerinde bir topoloji belirler. Gerçekten $T\big(SIM(B)\big) = \big\{X \subseteq U : \underline{B}(X) = X\big\}$ ailesi bir topolojidir. Bu aile kısaca τ_B ile gösterilir (Yu ve Zhan, 2014).

Tanım 4.2.4 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun.

i. Eğer $\tau_B = \tau_V$ ise, B ye V nin topolojik tutarlı kümesi denir.
ii. Eğer B kümesi topolojik tutarlı ve B nin kendisinden farklı topolojik tutarlı alt kümesi bulunmuyorsa, B kümesi V nin topolojik indirgemesi olarak adlandırılır (Yu ve Zhan, 2014).

Yukarıda verilen Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 den kolayca görülebileceği gibi; B kümesi V nin bir indirgemesi ise, B kümesinin V nin topolojik bir indirgemesi olduğu sonucuna varılabilir. Ancak bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 4.2.1 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $V = \{F, Z\}$ olmak üzere, $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi Tablo 4.5 de verilmiştir (Yu ve Zhan, 2014).

Tablo 4.5. Eksik verili bilgi sistemi

Araba	Fiyat (F)	Boyut (Z)
1	Yüksek	Tam
2	Düşük	Tam
3	*	Kompakt
4	Yüksek	Tam
5	*	Tam
6	Düşük	Tam

Öncelikle her $x \in U$ için $S_V(x)$ kümelerini ya da tolerans sınıflarını belirleyelim. $S_V(1) = \{1,4,5\}$, $S_V(2) = \{2,5,6\}$, $S_V(3) = \{3\}$, $S_V(4) = \{1,4,5\}$, $S_V(5) = \{1,2,4,5,6\}$ ve $S_V(6) = \{2,5,6\}$ olur. Bütün tolerans sınıflarının kümesi ise, $U/SIM(V) = \big\{\{1,4,5\},\{2,5,6\},\{3\},\{1,2,4,5,6\}\big\}$ ailesidir. Şimdi $B = \{Z\}$ olarak alalım. Bu durumda $S_B(1) = \{1,2,4,5,6\}$, $S_B(2) = \{1,2,4,5,6\}$, $S_B(3) = \{3\}$, $S_B(4) = \{1,2,4,5,6\}$, $S_B(5) = \{1,2,4,5,6\}$ ve $S_B(6) = \{1,2,4,5,6\}$ kümeleri elde edilir. $B = \{Z\}$ kümesine göre $U/SIM(B) = \big\{\{1,2,4,5,6\},\{3\}\big\}$ olarak bulunur. $SIM(B) \neq SIM(V)$ olduğundan $B = \{Z\}$ kümesi V nin bir indirgemesi değildir. Ancak B, V özellikler kümesinin topolojik bir indirgemesidir. Gercekten, $\tau_B = \big\{X \subseteq U : \underline{B}(X) = X\big\} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2,4,5,6\}, U\}$ ve $\tau_V = \big\{X \subseteq U : \underline{V}(X) = X\big\} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2,4,5,6\}, U\}$ olduğu kolayca görülür. O halde $\tau_B = \tau_V$ ve $|B| = 1$ dir. Sonuç olarak B kümesi V nin bir topolojik indirgemesidir.

Teorem 4.2.1 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Yu ve Zhan, 2014).

i. B kümesi topolojik tutarlıdır.

ii. $e\big(SIM(B)\big) = e\big(SIM(V)\big)$.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) B kümesi topolojik tutarlı olsun. O halde $\tau_B = \tau_V$; yani $T\big(SIM(B)\big) = T\big(SIM(V)\big)$ sağlanır. $SIM(B)$ ve $SIM(V)$ bağıntıları yansımalı ve simetrik (tolerans) olduğundan Teorem 4.1.11 gereğince $e\big(SIM(B)\big) = e\big(SIM(V)\big)$ eşitliği elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $e(SIM(B)) = e(SIM(V))$ olsun. $\tau_B = T(SIM(B)) = T\left(e(SIM(B))\right) = T\left(e(SIM(V))\right) = T(SIM(V)) = \tau_V$ eşitliği elde edilir. O halde B kümesi topolojik tutarlıdır.

Sonuç 4.2.1 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir (Yu ve Zhan, 2014).

i. B topolojik bir indirgemedir.

ii. $e(SIM(B)) = e(SIM(V))$ ve her $C \subset B$ için $e(SIM(C)) \neq e(SIM(V))$ dir.

Kanıt. Tanım 4.2.4 ve Teorem 4.2.1 in bir sonucudur.

Örnek 4.2.2 Örnek 4.2.1 de verilen eksik bilgi sistemini düşünelim. Tablo 4.5 kullanılarak, kolayca $e(SIM(B)) = e(SIM(V)) = \{(i,j) : i,j = 1,2,4,5,6\} \cup \{(3,3)\}$ elde edilir. Ayrıca $U/e(SIM(B)) = U/e(SIM(V)) = \{\{1,2,4,5,6\},\{3\}\}$ olur. Sonuç 4.2.1 kullanılarak B kümesinin V nin bir topolojik indirgemesi olduğu görülür (Yu ve Zhan, 2014).

Teorem 4.2.1, Sonuç 4.2.1 ile Örnek 4.2.2 birlikte düşünüldüğünde; topolojik tutarlı küme özellik kümesinin bir altkümesidir ve orijinal sistemin ayırt edici gücünü korur. Bir topolojik indirgeme, minimal topolojik tutarlı kümedir. Başka bir değişle, topolojik indirgeme için, eksik bilgi sistemlerinin indirgemesinin genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Tanım 4.2.5 $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere, $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi olsun. $M(S)$ ile gösterilen $n \times n$ türündeki $[c_{i,j}]$ kare matrisine S nin ayırt edilebilirlik matrisi adı verilir ve her $1 \leq i,j \leq n$ için

$$c_{i,j} = \begin{cases} \{a \in V : x_j \notin S_a(x_i)\}, & x_j \notin [x_i]_V \ ise, \\ \emptyset, & x_j \in [x_i]_V \ ise, \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Tanımda yer alan $[x_i]_V = \{x_j \in U : (x_i, x_j) \in e(SIM(V))\}$ ve $S_a(x_i) = S_{\{a\}}(x_i)$ dir. $M(S)$ matrisi simetrik olduğundan, her $i = 1, \dots, n$ için $c_{i,i} = \emptyset$ dır. O halde

$M(S)$ matrisi sadece alt üçgenindeki öğeler tarafından temsil edilir; yani $1 \leq j < i \leq n$ ile $c_{i,j}$ öğelerinden oluşur (Yu ve Zhan, 2014).

Örnek 4.2.3 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $V = \{M, F, E\}$ olmak üzere, Tablo 4.6 da verilen eksik bilgi sistemi $S = (U, V)$ yi ele alalım. Kısalık sağlamak için matematik (M), fizik (F) ve edebiyat (E) ile gösterilmiştir (Yu ve Zhan, 2014)

Tablo 4.6. Eksik verili bilgi sistemi

Öğrenci	Matematik (M)	Fizik (F)	Edebiyat (E)
1	Orta	Kötü	Kötü
2	İyi	Orta	*
3	Orta	*	Orta
4	*	Orta	Orta
5	*	İyi	Kötü
6	İyi	Orta	Kötü

Tablo 4.6 nın analizi yapılarak $S_V(1) = \{1\}$, $S_V(2) = \{2,4,6\}, S_V(3) = \{3,4\}, S_V(4) = \{2,3,4\}, S_V(5) = \{5\}, S_V(6) = \{2,6\}$ elde edilir.

O halde $U/e\big(SIM(V)\big) = \big\{\{1\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{5\}\big\}$ dir. Ayrıca aşağıdaki bilgiler elde edilir:

$S_M(1) = S_M(3) = \{1, 3, 4, 5\}$, $S_M(2) = S_M(6) = \{2, 4, 5, 6\}, S_M(4) = S_M(5) = U$.

$S_F(1) = \{1, 3\}$, $S_F(2) = S_F(4) = S_F(6) = \{2, 3, 4, 6\}, S_F(3) = U, S_F(5) = \{3, 5\}$.

$S_E(1) = S_E(5) = S_E(6) = \{1, 2, 5, 6\}, S_E(2) = U, S_E(3) = S_E(4) = \{2, 3, 4\}$.

S eksik bilgi sisteminin ayırt edilebilirlik matrisi olan $M(S)$ aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$M(S) = \begin{bmatrix} \emptyset & & & & & \\ \{M, F\} & \emptyset & & & & \\ \{E\} & \emptyset & \emptyset & & & \\ \{F, E\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & & \\ \{F\} & \{F\} & \{E\} & \{F, E\} & \emptyset & \\ \{M, F\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{F\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

Yardımcı Teorem 4.2.1 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. Aşağıda verilen önermeler denktir (Yu ve Zhan, 2014).

i. $e\big(SIM(B)\big) = e\big(SIM(V)\big)$.

ii. $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $e\big(SIM(B)\big) = e\big(SIM(V)\big)$ olsun. O halde $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ dir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) İstenilen eşitliği kanıtlamak için $e\big(SIM(V)\big) \subseteq e\big(SIM(B)\big)$ ve $e\big(SIM(B)\big) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ kapsamalarını göstermeliyiz. $SIM(V) \subseteq \big(SIM(B)\big)$ olduğundan $e\big(SIM(V)\big) \subseteq e\big(SIM(B)\big)$ olur. Diğer kapsama için; eğer $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ ise, denklik kapanış tanımı kullanılarak $e\big(SIM(B)\big) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ elde edilir. Böylece $e\big(SIM(B)\big) = e\big(SIM(V)\big)$ elde edilerek kanıt tamamlanır.

Teorem 4.2.2 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Yu ve Zhan, 2014).

i. B topolojik tutarlıdır.

ii. $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, her $c_{i,j} \neq \emptyset$ için $B \cap c_{i,j} \neq \emptyset$ dir.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) B kümesinin topolojik tutarlı olduğunu varsayalım. Yardımcı Teorem 4.2.1 den $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ kapsaması vardır. $1 \leq i < j \leq n$ için $c_{i,j} \neq \emptyset$ olduğundan $(x_i, x_j) \notin e\big(SIM(V)\big)$ dir. Bu ise $(x_i, x_j) \notin SIM(B)$ olmasını ifade etmektedir. $SIM(B) = \bigcap_{a \in B} SIM(a)$ eşitliği gereğince, $(x_i, x_j) \notin SIM(a)$ olacak şekilde bir $a \in B$ öğesi vardır. Böylece $a \in c_{i,j}$ ve $B \cap c_{i,j} \neq \emptyset$ bulunarak istenen elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Yardımcı Teorem 4.2.1 den sadece $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Tersine $SIM(B) \nsubseteq e\big(SIM(V)\big)$ olduğunu varsayalım. O halde $(x_i, x_j) \in SIM(B)$ ancak $(x_i, x_j) \notin e\big(SIM(V)\big)$ olacak şekilde $x_i, x_j \in U$ ($1 \leq i < j \leq n$) vardır ve $c_{i,j} \neq \emptyset$ dir. Böylece $B \cap c_{i,j} \neq \emptyset$ elde edilir. $a \in B \cap c_{i,j}$ olsun. O halde $(x_i, x_j) \notin SIM(a)$ bulunur. $SIM(B) = \bigcap_{a \in B} SIM(a)$ olduğundan $(x_i, x_j) \notin SIM(B)$ elde edilir. Bu ise varsayım ile çelişir ve $SIM(B) \subseteq e\big(SIM(V)\big)$ kapsaması sağlanır. O halde B kümesi topolojik tutarlıdır.

Sonuç 4.2.2 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi ve $B \subseteq V$ olsun. B nin topolojik indirgeme olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, her $c_{ij} \neq \emptyset$ için $B \cap c_{ij} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir minimal altküme olmasıdır (Yu ve Zhan, 2014).

$S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi olsun. S nin tüm topolojik indirgemelerinin ailesi $Red(S)$ ile gösterilir. Bütün topolojik indirgemelerde elenemeyen ya da vazgeçilemeyen tüm öğelerin kümesine, S eksik bilgi sisteminin çekirdeği adı verilir ve $Core(S)$ ile gösterilir. S nin çekirdeği ile vazgeçilemez öğeler arasındaki ilişki $Core(S) = \bigcap Red(S)$ eşitliği ile verilir.

Teorem 4.2.3 $S = (U, V)$ eksik bir bilgi sistemi olsun. $a \in Core(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $c_{ij} = \{a\}$ olacak şekilde $1 \leq i < j \leq n$ var olmasıdır (Yu ve Zhan, 2014).

Kanıt. ($\Longrightarrow$): . $a \in Core(S)$ olsun. Tersine her $1 \leq i < j \leq n$ ve $a \in c_{ij}$ için $|c_{ij}| \geq 2$ olduğunu varsayalım. $B = \bigcup\{ c_{ij} \setminus \{a\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ olsun. O halde her $c_{ij} \neq \emptyset$ için $B \cap c_{ij} \neq \emptyset$ sağlanır. Teorem 4.2.2 den B kümesi topolojik tutarlıdır. Sonuç olarak, B nin topolojik indirgemesi olacak biçimde bir $C \subseteq B$ alt kümesi vardır. $a \notin B$ olduğu açıkça görülmektedir. $a \in Core(S)$ olduğundan, $a \in B$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $c_{ij} = \{a\}$ olacak şekilde $1 \leq i < j \leq n$ indisleri vardır.
($\Longleftarrow$): $c_{ij} = \{a\}$ olsun. O halde $(x_i, x_j) \notin e(SIM(V))$, $(x_i, x_j) \notin SIM(a)$ ve her $b \in V \setminus\{a\}$ için $(x_i, x_j) \in SIM(b)$ dir. Böylece $(x_i, x_j) \in SIM(V \setminus\{a\}) \subseteq e(SIM(V \setminus\{a\}))$ elde edilir. Bu aynı zamanda $e(SIM(V \setminus\{a\})) \neq e(SIM(V))$ olduğunu ifade eder ve $V \setminus\{a\}$ topolojik tutarlı küme değildir. Sonuç olarak $a \in Core(S)$ bulunur.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, Pawlak kaba küme teorisinin temel kavramları ile matematiğin önemli bir dalı olan topolojinin ortak noktaları üzerinde duruldu. Pawlak alt ve üst yaklaşım operatörlerinin topolojide sırasıyla, iç ve kapanış operatörlerine karşılık geldiği gösterildi.

Pawlak yaklaşım uzayının denklik bağıntısı üzerine kurulduğu, herhangi bir bağıntı alındığında genelleştirilmiş yaklaşım uzayı olarak bilinen yapının özellikleri topoloji yönüyle incelendi. Kaba topoloji ve topolojik indirgemelerin eksik bilgi sistemleri üzerindeki etkileri incelenerek topolojik tutarlılık ve çekirdek kavramları sunuldu.

KAYNAKLAR

Allam, A. A., Bakeir, M. Y., Abo-Tabl, E. A., 2008. Some methods for generating topologies by relations. *Malaysian Mathematical Sciences Society,* 31, 35-40.

Bayhan, S., Şen, M., 2018. Pawlak yaklaşım uzaylarının topolojik yapısı ve genelleştirilmiş kaba kümeler. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9, 305-315.

Bülbül, A., 2004. *Genel Topoloji,* Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Kondo, M., 2006. On the structure of generalized rough sets. *Information Sciences,* 176, 589–600.

Lashin, E., Kozae, A., Khadra, A. A., Medhat, T., 2005. Rough set theory for topological spaces. *International Journal of Approximate Reasoning,* 40 (12), 35–43.

Lin, T. Y., 1998. Granular computing on binary relation I: Data mining and neighborhood systems, in: Rough Sets In Knowledge Discovery, *Physica-Verlag,* pp. 107–121.

Ma, L., 2018. The investigations of covering rough sets by boolean matrices. *International Journal of Approximate Reasoning*, 100, 69-84.

Novak, V., 1999. *Mathematical principles of fuzzy logic*. Kluwer Academic Publishers, Norwell.

Özer, O., Çoker, D., Taş, K., 1994. *Soyut Matematik*. Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir.

Pawlak, Z., 1982. Rough sets. *Int. J. Comput. and Inf. Sci*. 11, 341–356.

Pawlak, Z., 1991. *Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Pei, D. and Xu, Z., 2007. Transformation of rough set models. *Knowledge-Based Systems,* 20, 745-751.

Pei, Z., Pei, D., Zheng, L., 2011.Topology vs generalized rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning,* 231-239.

Suraj, Z., 2004. An introduction to rough set theory and its applications. *ICENCO,* December 27-30, Cairo, Egypt, 1-39.

Thivagar, L. M., Richard, C., Paul R. N., 2012. Mathematical innovations of a modern topology in medical events. *International Journal of Information Science,* 2 (4), 33-36.

Vlach, M., 2008. Algebraic and topological aspects of rough set theory. *Fourth International Workshop on Computational Intelligence & Applications*, IEEE SMC Hiroshima Chapter, Hiroshima University, Japan, December 10-11.

Yao, Y. Y., 1996. Two views of the theory of rough sets in finite universes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 15, 291-317.

Yao, Y. Y., 1998. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators. *Information Sciences*, 111, 239–259.

Yao, Y. Y., 2003. On generalizing rough set theory. *Proc. Int. Conf. Rough Fuzzy Sets Data Mining Granular Computing*, 44-51.

Yu, H., Zhan, W., 2014. On the topological properties of generalized rough sets. *Information Sciences,* 263, 141-152.

Yüksel, Ş., 2015. *Genel Topoloji.* Eğitim Yayınevi, Konya.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

Zhu, W., 2007. Topological approaches to covering rough sets. *Information Sciences*, 177 (6), 1499–1508.

Zhu, W., 2007. Generalized rough sets based on relations. *Information Sciences*, 177 (22), 4997–5011.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mehmet ŞEN

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir 1978

<u>Eğitim Durumu</u>		<u>Yıl</u>
Lise	:İzmir Buca Lisesi	1995
Lisans	:Gazi Üniversitesi	2001

<u>Çalıştığı Kurum / Kurumlar</u>	<u>Yıl</u>
1- Millî Eğitim Bakanlığı	2001-

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

1- Bayhan, S, Şen, M. "Pawlak Yaklaşım Uzaylarının Topolojik Yapısı ve Genelleştirilmiş Kaba Kümeler". Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 9 (2018): 305-315.