T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Gizem AYRAK

BURDUR, 2019

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Gizem AYRAK

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2019

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Gizem AYRAK tarafından Doç. Dr. Hüseyin TUNA yönetiminde hazırlanan **"Zaman Skalası Üzerinde Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 11/06/2019

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU (Başkan)
Süleyman Demirel Üniversitesi..(İmza)

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi..(İmza)

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi ....(İmza)

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)

....
Prof. Dr. Ayşe Gül Mutlu Gülmemiş

Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Zaman Skalası Üzerinde Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri"** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11 / 06 / 2019

(İmza)

Gizem AYRAK

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Hüseyin TUNA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Haziran, 2019 **Gizem AYRAK**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİN

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{T}$	: Zaman Skalası
σ	: İleri Sıçrama Operatörü
ρ	: Geri Sıçrama Operatörü
T_{α}	: α. Konform Kesirli Mertebeden Türev
$\int$	: İntegral
T^{Δ}	: Delta Türev
T^{∇}	: Nabla Türev
C_{rd}	: Sağdan yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
C_{ld}	: Soldan yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{CFD}$	: Konform Kesirli Diferansiyellenebilir Küme

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Zaman Skalası Üzerinde Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri

Gizem AYRAK

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Haziran, 2019

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde kesirli mertebeden kalkulüsün temel tanım ve özellikleri verildi.

Son olarak, zaman skalası üzerinde kesirli mertebeden konform Sturm-Liouville operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: zaman skalası, konform kesirli kalkulüs, Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları

SUMMARY

M. Sc. Thesis

The Extensions of Comformable Sturm-Liouville Operators On Time Scales

Gizem AYRAK

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Doç. Dr. Hüseyin TUNA

June, 2019

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the study are given.

In the third section, basic definitions and properties of conformable fractional calculus on time scales are given.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self adjoint and other extensions of conformable fractional Sturm-Liouville operator on time scales is given in terms of boundaryconditions.

Keywords: time scales, conformable fractional calculus, Sturm-Liouville operator ,symmetric operators, self adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions

1. GİRİŞ

Zaman skalası teorisi ilk defa 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezinden ortaya çıkmıştır (Hilger,1988). Bu teorinin amacı diskret kalkülüs ile sürekli kalkülüsü tek bir teori çatısı altında birleştirmektir. Bu teoriyle diferansiyel denklemler teorisi ile fark denklemler teorisi birleştirilmiştir. Bu teorinin pek çok önemli uygulamaları vardır. Örneğin, ısı transferi çalışmalarında, böcek popülasyon modellerinde, borsa ve sinirsel ağ modellerinde bu konudan yararlanılır. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi için Bohner ve Peterson'un (Bohner ve Peterson, 2001, 2003) çalışmalarına bakılabilir.

Kesirli mertebeden kalkülüs günümüzde uygulamalı matematiğin yoğun çalışılan alanlarından biridir. Kesirli mertebeden türevin pek çok tanımı literatürde bulunmaktadır. Bunlardan bazıları Riemann Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov vb. Fakat verilen bu tanımlarda adi türevin bazı temel özellikleri (iki fonksiyonun çarpımının türevi, zincir kuralı gibi) kaybolduğundan matematikçiler yeni kesirli mertebeden türev tanımı arayışına girmiştir. Yakın zamanlarda Khalil ve arkadaşları (Khalil vd, 2014) yaptıkları çalışmada konform kesirli mertebeden türev ve konform kesirli integrali tanımlamışlardır. Bu çalışmalarında konform kesirli mertebe türev tanımının adi türeve paralel olarak çarpım kuralı, bölüm kuralı vb özellikleri sağladığını göstermişlerdir. Daha sonra Abdeljawad (Abdeljawad, 2015) konform kesirli mertebe türev teorisini geliştirerek zincir kuralı, üstel fonksiyonların türevi, kısmi integrasyon, Taylor kuvvet serisi açılımları, Laplace dönüşümlerinin konform kesirli mertebe versiyonunu ispatlamıştır.

Al-Refai ve Abdeljawad (Al-Refai ve Abdeljawad, 2017) konform Sturm Liouville özdeğer problemi için temel sonuçları (özdeğerlerin reelliği, basitliği, farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonalliği vb) vermiştir.

Allahverdiev ve arkadaşları (Allahverdiev vd., 2019) yaptıkları çalışmada konform Sturm Liouville problemi için varlık ve teklik teoremleri vermişlerdir. Probleme karşılık gelen Green fonksiyonunu kurarak öz fonksiyon açılımlarını da vermişlerdir.

Benkhettou ve arkadaşları (Benkhettou vd,2016) yaptıkları çalışmada konform kesirli mertebeden kalkülüsü zaman skalaları üzerine taşımışlardır. Zaman skalası üzerinde konform kesirli mertebeden türevin temel kavramlarını ispatlamışlardır.

Benzer tanımlar Zhao ve Li (Zhao ve Li, 2016) tarafından da verilmiştir.Daha sonra Zhao ve arkadaşları (Zhao vd, 2016) Benkhettou ve arkadaşlarının çalışmalarını genişleterek zaman skalaları üzerinde birim operatöre sahip konform delta türev kavramını vermiştir. Gülşen ve arkadaşları (Gülşen vd, 2018) zaman skalası üzerinde konform Sturm Liouville denklemi için çözümlerin varlığını garantileyen bazı koşullar vermiştir.

Simetrik operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili temel sonuçlar J. von Neumann (Von Neumann, 1929), tarafından elde edilmiştir. J. von Neumann bu çalışmasında hangi koşullarda simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl olacağını göstermiştir. Rellich (Rellich,1951), Krein (Krein,1947-1952), Vishik (Vishik,1952), Birman (Birman,1956), Phillips (Phillips,1959), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır.

Rofe-Beketov (Rofe-Beketov,1969) ilk olarak lineer bağıntıları kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesini elde etmiştir. Bu metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk vd, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984) ve Kholkin (Kholkin, 1981) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk vd, 1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bkz.: Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk vd, 1989).

Bu tez çalışmasında, zaman skalaları üzerinde konform Sturm Liouville denklemi için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri verildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 2.1. $V \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{K}$ herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa *V*' ye $\mathbb{K}$ üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

a) (*V*,+) Cebirsel yapısı değişmeli gruptur. Yani,

i. $\forall u,v \epsilon V$, $u+v \epsilon V'$dir.

ii. $\forall u,v,k \epsilon V$, $u+(v+k)=(u+v)+k$' dir.

iii. $\forall u \epsilon V$, $u+0=0+u= u \epsilon V$olacak şekilde bir tek $0 \epsilon V$vardır.

iv. $\forall u,v \epsilon V$, $u+(-u)=(-u)+u=0$ olacak şekilde bir tek $-u \epsilon V$vardır.

v. $\forall u,v \epsilon V$, $u+v=v+u$' dır.

b) $u,v,\epsilon V$ve $\theta, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $\theta u \in K$'dir

ii. $\theta(u+v) = \theta u + \theta v$'dir.

iii. $(\theta + \beta)u = \theta u + \beta u$'dir

iv. $(\theta\beta)u = \theta(\beta u)$' dir.

v. $\forall u \in V$, $1V=V$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır. Burada 1, $\mathbb{K}$ cisminin birim elemanıdır.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ olması halinde V'ye reel lineer uzay $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması halinde V' ye kompleks lineer uzay denir (Bozkurt ve Türen, 2000).

Tanım 2.2. Lineer uzaylarda tanımlı olan dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.3. *U*, bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u,v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (*u*,*v*) ile gösterilen kompleks sayısına *u* ve *v* elemanlarının *iç çarpımı* ve *U* lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

i. $(u,u) \geq 0; (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii. $(u,v) = \overline{(v,u)}$

iii. $(\lambda u,v) = \lambda(u,v)$

iv. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.4. $(U,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. *u* vektörünün normu,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} = \left(\sum_{j=i}^{\infty} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(U,(.,.))$iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.5. Bir $(U,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2}$$

normuna göre tam ise, yani $(U,(.,.))$içindeki her Cauchy dizisi *U'* nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.6. Bir U iç çarpım uzayı

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

ifadesi bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur.
Sayılabilir, tam ortonormal sistem içeren bir iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve genellikle *H* ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.7. *K* , *H* Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı $(K \subseteq H)$olsun.

$T: K \subseteq H \to H$ dönüşümü, her $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{C}$ ve her $u, v \; \epsilon \; K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$$

eşitliğini sağlanıyorsa, *T* dönüşümüne lineer operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.8. H Hilbert uzayının bir alt kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir L lineer operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise L , H üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. Tüm H uzayında tanımlanıp aşağıdaki koşulları sağlayan L fonksiyoneline sınırlı lineer fonksiyonel denir.

1) $u, v \in H \; ve \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için, $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \; dir.$
2) Her $u \in H$ ve bir k sabiti için, $|L(u)| \leq k\|u\| \; dir.$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.9. H Hilbert uzayı üzerinnde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin.
Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.
T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|$$

eşitliği ile de hesaplanabilir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.10. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^{*}t)$$

eşitliğini saplayan T^{*} operatörüne T' nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in$ H vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^{*})$ ile gösterilir.

T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

1. $(T^*)^* = T$
2. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
3. $(T + L)^* = T^* + L^*$
4. $(T)^* = L^* T^*$
5. $\|T^*\| = \|T\| \ \ (T\ sınırlı\ iken)$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.11. $T^* = T$ ise, T' ye *kendine eş operatör* adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.12. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\mathrm{lm}(Th, h) \geq 0$$

ise, T lineer operatörüne *dissipatif (dissipative) operatör* denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.13. Reel (Gerçel) sayıların keyfi boş olmayan kapalı alt kümelerine zaman skalası denir. Zaman skalası T ile gösterilir.(Bohner ve Peterson, 2001, 2003)

Örnek 2.1. Reel (Gerçel) sayılar ($\mathbb{R}$),Tam sayılar ($\mathbb{Z}$), Doğal sayılar ($\mathbb{N}$)ve [2,5] kapalı alt aralığı bir zaman skalasına örnek oluştururken Rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$), İrrasyonel sayılar ($\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$), Kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) ve (1,3) açık aralığı zaman skalasına örnek oluşturmazlar.

Tanım 2.14. $t\epsilon T$ olmak üzere $\sigma: T \to T$ operatörü ileri sıçrama operatörüdür ve

$$\sigma(t) = \sup\{s\epsilon T: s > t\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.15. $t \in T$ olmak üzere; $\rho: T \to T$ operatörü geri sıçrama operatörüdür ve

$\rho(t) = \sup\{s\epsilon T: s < T\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.16. Graininess fonksiyonları $\mu, \vartheta: T \to (0, \infty)$, $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ve $\vartheta(t) = t - \rho(t)$, $\forall t \in T$ ile tanımlanır.

Tanım 2.17. $t \in T$ olsun. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise t ye sol yayılmış nokta denir. Eğer $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in T$ noktasına ayrık(izole) nokta denir.

Tanım 2.18. $t \in T$ olsun. Eğer $t < supT$ ve $\sigma(t) = t$ ise t ye sağ yoğun nokta, $t > infT$ ve $\rho(t) = t$ ise t ye sol yoğun nokta denir.

Tanım 2.19. T zaman skalası sol yayılmış maksimum değer M' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi $T^K = T - \{M\}$ dir. Diğer durumda $T^K = T$ şeklindedir.
T zaman skalası sağ yayılmış maksimum değer m' ye sahip ise, türevlenebilirlik bölgesi $T_K = T - \{m\}$ dir. Diğer durumda $T_K = T$ şeklindedir.

Örnek 2.2. Eğer $T = R$ ise $\sigma(t) = \rho(t) = t$ ve $\mu(t) = \nu(t) = 0$ dır. $t = hz$ ise, $\sigma(t) = t + h$, $\rho(t) = t - h$ ve $\mu(t) = \nu(t) = h$ dır. Diğer yandan $T = K_q$ ise $\sigma(t) = q^t$, $\rho(t) = q^{-1}t$, $\mu(t) = (q-1)t$ ve $\nu(t) = (1 - q^{-1})t$ olur.

Sola dağılmış maksimal nokta hariç t nin elemanlarından oluşan kümeyi T^K ile gösterelim. Benzer şekilde, sağa dağılmış minimal nokta çıkartılarak oluşturulan kümeye T_K ile gösterelim.
Yukarıda verilen ikinci ve üçüncü tanımda

$\inf\emptyset = \sup\mathbb{T}$ dir ($\sigma(t) = t$ olur, eğer $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir maksimum t ye sahipse) ve

$\sup\emptyset = \inf\mathbb{T}$ dir ($\rho(t) = t$ olur, eğer $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir minimum t ye sahipse).

Tanım 2.20. $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı ileri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

şeklinde ifade edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.21. $\upsilon: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı geri sıçrama fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\upsilon(t) = t - \rho(t)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.22. Eğer $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$' ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$'ye soldan yayılmış nokta denir. Eğer

$$\rho(t) < t < \sigma(t)$$

ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına ayrık(izole) nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.23. Eğer $t < sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ' ye sağdan yoğun nokta, $t > inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ 'ye soldan yoğun nokta denir. Eğer $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ 'ye hem sağ hem de sol yoğun nokta denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.3.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise en az bir $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

olur. Yani her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t$ ve $\rho(t) = t$ olur ki$t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Ayrıca her

$t \in \mathbb{R}$ $\mu(t) \equiv \upsilon(t) \equiv 0$ olur.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise en az bir $t \in \mathbb{Z}$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \dots\} = t+1$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{t-1, t-2, \dots\} = t-1$$

olur. Yani her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t+1$ ve $\rho(t) = t-1$ olur ki $t \in \mathbb{Z}$ noktası ayrık(izole) nokta olur. Ayrıca her $t \in \mathbb{Z}$ $\mu(t) \equiv \upsilon(t) \equiv 1$ olur.

Eğer $\mathbb{T} = \{2^n: n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ise $\sigma(2^n) = 2^{n+1}, \sigma(t) = 2t$ olur.

Benzer şekilde $\rho(2^n) = 2^{n-1}, \rho(t) = \frac{t}{2}$ olur.
Burada herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ noktası ayrık(izole) noktadır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.24. $\mathbb{T}$ zaman skalası soldan yayılmış maksimum değer M' ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklindedir.

$\mathbb{T}$ zaman skalası sağdan yayılmış minimum değer m ye sahip ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}_K = \mathbb{T} - \{m\}$ dir. Diğer durumlarda $\mathbb{T}_K = \mathbb{T}$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.25. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde $f^\rho: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $f^\rho(t) = f(\rho(t))$ şeklinde tanımlıdır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.26. $U \subset \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\delta > 0$ için, $U(t) = \{s \in \mathbb{T}: |s - t| < \delta\}$

biçiminde tanımlanan U(t) kümesine t' nin δ-komşuluğu denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.27. $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $t \in U(t_0)$ için,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu varsa $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.28. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^Δ türevi her $s \in U$ için

$$\left|f\big(\sigma(t) - f(s)\big) - f^\Delta(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^Δ türevine delta(Hilger) türevi denir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^K$ için f fonksiyonu f^Δ türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}^K$ kümesine delta(Hilger) türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.29. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ için t noktasının $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda f^∇ türevi

$$\forall s \in U \text{ için, } \left|f\big(\rho(t) - f(s)\big) - f^\nabla(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|$$

şeklinde tanımlanır. Burada f^∇ türevine nabla türevi denir.

Eğer her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}_{\mathrm{K}}$ için f fonksiyonu f^{∇} türevlenebiliyorsa $\mathbb{T}_{\mathrm{K}}$ kümesine nabla türevlenebilirdir denir. Yani

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f\big(\rho(t)\big)}{s - \rho(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{T}^{\mathrm{K}} = \mathbb{T}$ olduğundan her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ için

$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(t)$ olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^{\Delta} = f'$ şeklindedir.

Benzer şekilde

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f^{\nabla} = f'$ şeklindedir

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\mathbb{T}^{\mathrm{K}} = \mathbb{T}$ olduğundan $\forall \mathrm{t} \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{\sigma(t) \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{f(t+1)-f(t)}{(t+1)-t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\Delta} = \Delta f$ şeklindedir.
Benzer şekilde

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{\rho(t) \to t} \frac{f(t)-f\big(\rho(t)\big)}{t-\rho(t)} = \frac{f(t)-f(t-1)}{t-(t-1)} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

olur. Yani $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\nabla} = \nabla f$ şeklindedir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.4.

i. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ olur. Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ bir sabittir. $\forall \varepsilon > 0$ ve her $\mathrm{s} \in \mathbb{T}$ için,

$\left|f\big(\sigma(t) - f(s)\big) - 0(\sigma(t) - s)\right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|.$

Benzer şekilde $f^{\nabla} \equiv 0$ olur.

ii. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 1$ olur.
$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall s \in \mathbb{T}$ için,

$$\left|f\big(\sigma(t) - f(s)\big) - 1(\sigma(t) - s)\right| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

ifadesi doğrudur. Benzer şekilde $f^{\nabla} \equiv 1$ olur (Bohner and Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.5.

i. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ ise

$f^{\Delta}(t) = 2t = t + \sigma(t)$ şeklinde olur.

Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = 2t = t + \rho(t)$ olur.

ii. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \sqrt{t}$ ise

$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{\sigma(t)}}$ şeklinde olur.

Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{\rho(t)}}$ olur (Bohner and Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.1. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{K}$ olsun. O zaman aşağıdaki iddialar doğrudur:

i. Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirse t noktasında süreklidir.

ii. Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağdan yayılmış ise f fonksiyonu, t noktasında Δ türevlenebilirdir:

$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$.

iii. Eğer t sağdan yoğun ise f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirdir:

$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$.

iv. Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebiliyor ise

$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$ yazılır (Bohner and Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.2. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $\mathrm{t} \in \mathbb{T}_{\mathrm{K}}$ olsun. O zaman aşağıdaki iddialar doğrudur:

i. Eğer f fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebilirse t noktasında süreklidir.

ii. Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t soldan yayılmış ise f fonksiyonu, t noktasında ∇ türevlenebilirdir:

$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t)-f(\rho(t))}{\upsilon(t)}$ dir.

iii. Eğer t soldan yoğun ise f fonksiyonu t de ∇ türevlenebilirdir:

$f^{\nabla}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ dir.

iv. Eğer f fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebiliyor ise

$f(\rho(t)) = f(t) + \upsilon(t)f^{\nabla}(t)$ yazılır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.3. $f, g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ için Δ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ şeklinde olup $f + g$ fonksiyonu da t de Δ türevlenebilirdir.

ii. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$ şeklinde olup αf fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

iii. $f.g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f.g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

şeklinde olup $f.g$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

iv. Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(\mathrm{t}) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

şeklinde olup $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir.

v. Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(\mathrm{t}) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklinde olup $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.4. $f, g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar ve her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}_{\mathrm{K}}$ için ∇ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(f + g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

şeklinde olup $f + g$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

ii. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t)$ şeklinde olup αf fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

iii. $f.g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(f.g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f\big(\rho(t)\big)g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g\big(\rho(t)\big)$$

şeklinde olup $f.g$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

iv. Eğer $f(t)f\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(\mathrm{t}) = \frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f\big(\rho(t)\big)}$$

şeklinde olup $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir.

v. Eğer $g(t)g\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(\mathrm{t}) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\rho(t)\big)}$$

şeklinde olup $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında ∇ türevlenebilirdir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.30. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}^{\mathrm{K}^2} = (\mathbb{T}^{\mathrm{K}})^{\mathrm{K}}$ üzerinde ikinci mertebeden delta (Hilger) türevi

$f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{\mathrm{K}^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır.

n. mertebeden delta (Higher) türevi $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{\mathrm{K}^{\mathrm{n}}} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\sigma^2(t) = \sigma\big(\sigma(t)\big)$ ve $\rho^2(t) = \rho\big(\rho(t)\big)$ olmak üzere, her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}_0$ için

$\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ şeklinde olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.6. $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$ nin ikinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned}((fg)^\Delta)^\Delta &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta \\ &= f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta^\sigma} g^\Delta + f^{\sigma^\Delta} g^\Delta + f^{\sigma^\sigma} g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta} g + \left(f^{\Delta^\sigma} + f^{\sigma^\Delta}\right) g^\Delta + f^{\sigma^\sigma} g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $f^{\Delta^\sigma} = f^{\Delta\sigma}$ dır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.7. Zaman skalası olarak $\mathrm{h} > 0$ için $\mathbb{T} = \mathrm{h}\mathbb{Z} = \{\mathrm{hk} : \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için,

$\sigma(\mathrm{t}) = \inf\{\mathrm{s} \in \mathbb{T} : \mathrm{s} > t\} = \inf\{\mathrm{t} + \mathrm{nh} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} = \mathrm{t} + \mathrm{h}$

$\rho(\mathrm{t}) = \sup\{\mathrm{s} \in \mathbb{T} : \mathrm{s} < t\} = \sup\{\mathrm{t} - \mathrm{nh} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} = \mathrm{t} - \mathrm{h}$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = h$ ve $\upsilon(t) = t - \rho(t) = h$ elde edilir.

$f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için,

$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ türevine sahiptir.

İkinci mertebeden türev ise,

$$\begin{aligned}f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^\Delta(t+h) - f^\Delta(t)}{(t+h) - t} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}\end{aligned}$$

$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$
$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

şeklindedir.

Bu şekilde genelleştirilirse $f^{\Delta^n}(t)$ şu şekilde hesaplanabilir:

$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+kh)$ (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.31. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$' deki sağdan yoğun noktalarda sağdan, soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli fonksiyon denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.32. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sağdan yoğun noktalarda sürekli ve soldan yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona sağdan yoğun sürekli ya da rd-sürekli fonksiyon denir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd} := C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi rd-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd}^1 := C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.33. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$' deki soldan yoğun noktalarda sürekli ve sağdan yoğun noktalarda sağdan limiti varsa bu fonksiyona sol yoğun sürekli ya da ld-sürekli fonksiyon denir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{ld} := C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir olmak üzere türevi ld-sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{ld}^1 := C_{ld}^1(\mathbb{T}) = C_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.5. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i. f sürekli ise rd-süreklidir.

ii. f rd-sürekli ise düzenlidir.

iii. İleri sıçrama operatörü σ rd-süreklidir.

iv. f düzenli ya da rd-sürekli ise f^{σ} fonksiyonu da düzenli ya da rd-süreklidir.

v. f sürekli olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli ya da rd-sürekli ise $f \circ g$ fonksiyonu da bu özelliğe sahiptir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.6. Kompakt aralık üzerinde her düzenli fonksiyon sınırlıdır.

İspat: $f: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Her $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için,

$|f(t_n)| > 0$ ve $t_n \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\{t_n: \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subset [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

olduğundan bir $\{t_{n_k}\}_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisi vardır.

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_k} = t_0 \quad t_0 \in [a, b] \ ve \ \{t_n: \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T} \tag{2.1}$$

ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ dir. (2.1) den dolayı t_0 ayrık (izole) nokta değildir ve t_0 aşağıdan ya da yukarıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her bir durum için $t \to t_0$ iken $f(t)$ nin limiti düzenlilikten dolayı sonlu olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.34. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $D \subset \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ olmak üzere $\mathbb{T}^{\mathrm{K}} \backslash \mathrm{D}$ ve $\mathbb{T}$ nin sağdan yayılımlı elemanlarını kapsayan ve $\forall \mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için f türevlenebilir ise D ile ön türevlenebilir denir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.7. (Ortalama Değer Teoremi): f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde reel değerli D ile ön türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman her $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$ için

$\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq g^{\Delta}(t)$ olur.

Ayrıca her $s, r \in \mathbb{T}$ ve $s \leq r$ için,

$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$ olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Sonuç 2.1. f ve g fonksiyonları D ile ön türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

i. Eğer U, $s, r \in \mathbb{T}$ noktaları ile kompakt aralık ise

$|f(s) - f(r)| \leq \sup_{t \in U^K \cap D}\{|f^{\Delta}(t)|\}|s - r|$ olur.

ii. Eğer her $t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

iii. Eğer her $t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $g(t) = f(t) + C$ olur. Burada C bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.35. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^K$ üzerinde delta (Hilger) türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^K$ için $F^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun delta-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer f fonksiyonun Δ-anti türevi varsa f fonksiyonuna Δ-integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere, $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.36. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Eğer $F: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_K$ üzerinde nabla türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}_K$ için $F^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla-anti türevi veya ilkeli denir.

Eğer f fonksiyonun ∇-anti türevi varsa f fonksiyonuna ∇- integrallenebilir fonksiyon denir.

$a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere, $\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.8. Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.9. Eğer $f \in C_{rd}$ ve t $\in \mathbb{T}^{\mathrm{K}}$ ise,

$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t = \mu(t)f(t)$ olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

İspat: Teorem 2.8 gereğince *f* fonksiyonunun *F* anti-türevi vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= \mu(t)F^{\Delta}(t) \\ &= \mu(t)f(t) \end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.10. Her ld-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.11. Eğer $f \in C_{ld}$ ve t $\in \mathbb{T}_{\mathrm{K}}$ ise,

$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla t = \upsilon(t)f(t)$ olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

İspat: Teorem 2.10. gereğince *f* fonksiyonunun *F* anti-türevi vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla t &= F(\rho(t)) - F(t) \\ &= \upsilon(t)F^{\Delta}(t) \\ &= \upsilon(t)f(t) \end{aligned}$$

elde edilir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.8. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ ise,

$\int a^t \Delta(t)$ integralini hesaplayalım.

$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t$ olduğundan,

$\int a^t \Delta(t) = \frac{a^t}{a-1} + C$ elde edilir.

Burada *C* bir sabittir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.9. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i. Eğer

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$

şeklinde hesaplanır.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iii. Eğer $[a, b\,]$ aralığı ayrık noktalar içeriyorsa ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a<b \\ 0 & , \quad a=b \\ -\sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & , \quad a>b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathrm{h}\mathbb{Z} = \{\mathrm{hk}: \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$ ve $\mathrm{h} > 0$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & , \quad a<b \\ 0 & , \quad a=b \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & , \quad a>b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.12. Eğer $f^{\Delta} \geq 0$ ise f azalan değildir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

İspat: $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $f^{\Delta} \geq 0$ ve $s, \mathrm{t} \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. O zaman

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau \geq f(s)$$

olur. Dolayısıyla f artan değildir (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.13. Eğer $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise,

i. $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t,$

ii. $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t,$

iii. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t,$

iv. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t,$

v. $\int_a^b f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t,$

vi. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t,$

vii. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0,$

viii. Eğer $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise,

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t,$$

ix. Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise,

$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$ olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Teorem 2.14. Eğer $\mathrm{a, b, c} \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{ld}$ ise,

i. $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t,$

ii. $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\nabla t = \alpha \int_a^b f(t)\nabla t,$

iii. $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t,$

iv. $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t,$

v. $\int_a^b f\big(\rho(t)\big)g^{\nabla}\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t,$

vi. $\int_a^b f(t)g^{\nabla}\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(\rho(t))\nabla t,$

vii. $\int_a^a f(t)\nabla t = 0,$

viii. Eğer $[a, b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise,

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \leq \int_a^b g(t)\nabla t,$$

ix. Eğer $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise,

$\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$ olur (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Örnek 2.10. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{ld}$ olsun. O zaman,

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$ şeklinde hesaplanır.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^{b} f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t=b+1}^{a} f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

iii. Eğer $[a, b\,]$ aralığı ayrık noktalar içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in(a,b]} \upsilon(t)f(t) & , \quad a < b \\ 0 & , \quad a = b \\ -\sum_{t\in(a,b]} \upsilon(t)f(t) & , \quad a > b \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır (Bohner ve Peterson 2001, 2003).

Tanım 2.37. Simetrik bir A operatörünün uygun bir simetrik genişlemesi yoksa, A operatörüne maksimaldir denir (Naimark, 1968).

Kendine eş (Self-adjoint) her A operatörü maksimal simetrik bir operatördür.

Tanım 2.38. A, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve λ keyfi bir kompleks sayı olsun. R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$, sırasıyla $(A-\lambda I)$ ve $\left(A-\bar{\lambda} I\right)$ operatörlerinin değer kümeleri olmak üzere,
$N_\lambda = H \ominus R_\lambda$ ve $N_{\bar{\lambda}} = H \ominus R_{\bar{\lambda}}$ uzaylarına, A operatörünün defekt uzayları denir.

N_λ ve $N_{\bar{\lambda}}$ defekt uzayları, sırasıyla, λ ve $\bar{\lambda}$ özdeğerlerine ait A^*operatörünün çözümlerinin uzaylarıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.39. $m = dimN_\lambda$. ve $n = dimN_{\bar{\lambda}}$ $(\Im\lambda > 0)$ olmak üzere (m, n) ikilisi, A operatörünün indis defekti olarak tanımlanır (Naimark, 1968).

Tanım 2.40. *A* lineer operatörünün *D(A)* tanım kümesi *H* Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $f \in D(A)$ için

$$\Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.2}$$

ise, A lineer operatörüne disipatif (dissipative) operatör denir. Her $f \in D(A)$ için

$$\Im(Af, f) \leq 0 \tag{2.3}$$

ise, A lineer operatörüne akretif (acceretive) operatör denir (Gorbachuc ve Gorbachuk, 1991).
A lineer operatörüne akretif (acceretive) operatördür ancak ve ancak A disipatif (dissipative) operatördür.

Eğer A disipatif (akretif) operatörü kendinden farklı disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif (akretif) operatör denir.

Disipatif operatörler daima kapanabilir. Disipatif operatörlerin kapanışı da disipatifdir. Maksimal disipatif operatörler daima kapalıdır.

Teorem 2.15. Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif A operatörü maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $\Im\lambda < 0$ için,

$R(A-\lambda I)=H$ olmasıdır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: . A kapalı disipatif operatör, $Im\lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A-\lambda I)=H$ kapalıdır. (2.1) eşitsizliğinden

$Im((A-\lambda I)f,f) \geq -Im\lambda(f,f)$ dir. Fakat

$Im((A-\lambda I)f,f) \leq \|(A-\lambda I)f\|\|f\| - Im\lambda \leq \|(A-\lambda I)f\|$

dir. Buradan $R(A-\lambda I)=H$ kapalıdır. Şimdi iki durum oluşabilir:

1) $Im\lambda < 0$ için $R(A-\lambda I)=H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif $\tilde{A}$ genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A}-\lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan

$Im(\tilde{A}f_0, f_0) = Im\lambda(f_0, f_0)$ olur ki bu $\widetilde{A}$ nın disipatifliği ile çelişir.

2) $R(A-\lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahiptir ve bu genişleme şu şekilde inşa edilir:

$N = H \ominus R(A-\lambda I), D_{\tilde{A}} = D_A + N,$

$\tilde{A}(f+u) = Af + \bar{\lambda}u, f \in D_A, u \in N$

olarak tanımlayalım. $\tilde{A}$ operatörü doğru tanımlanır: $f+u=0$ ise,

$(Af,f) = (Au,u) = (u,\lambda u) = \lambda(u,u)$

dir. $Im(Af,f) \leq 0$ ise $u=0, f=0$ olur. $\tilde{A}$ operatörü disipatiftir:

$\left(\tilde{A}(f+u), f+u\right) = (Af,f) + \bar{\lambda}(u,u) + (Af,u) + \bar{\lambda}(u,f)$

$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^{*}u) + \bar{\lambda}(u, f)$

$=(Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f)$

Buradan

$Im(\tilde{A}(f + u), f + u) = Im(Af, f) + Im\bar{\lambda}(u, u) \geq 0.$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi $\tilde{A}$ operatörü maksimal disipatiftir. Teorem 2.15 den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir. Teorem 2.15 den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır. A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

Teorem 2.16. $\tilde{A}$ operatörü A simetrik operatörünün disipatif (akretif) genişlemesi olsun. O zaman $\tilde{A} \subset A^{*}$ dır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: Farz edelim ki $\tilde{A} \supset A$ disipatif bir genişleme olsun. Teorem 2.15 ile $\tilde{A}$ operatörünü maksimal disipatif kabul edelim.

$$B = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \tilde{B} = \left(\tilde{A} - iI\right)\left(\tilde{A} + iI\right)^{-1} \qquad (2.4)$$

operatörlerini alalım. $-i$ disipatif (simetrik) operatörün özdeğerin olamayacağından (2.4) anlamlıdır. B operatörü $R(A + iI)$ uzayını $R(A - iI)$ uzayına izometrik olarak resmeder.

Eğer $f \in R(A + iI)$, yani $f = (A + iI)g, g \in D_A$ ise,

$\|Bf\|^2 = \|(A - iI)g\|^2 = \big((A - iI)g, (A - iI)\big)$
$= (Ag, Ag) - i(g - Ag) + i(Ag, g) + (g, g)$

$\|f\|^2 = \|(A+iI)g\|^2 = \big((A+iI)g, (A+iI)\big)$
$= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g)$ dir.

$(g, Ag) = (Ag, g)$ ise $\|Bf\| = \|f\|$

dir. Benzer şekilde $\tilde{B}$ operatörünün bir büzülme operatörü olduğu gösterilir. (2.4) ifadesinden
$A = -i(B+I)(B-I)^{-1}, \tilde{A} = -i(\tilde{B}+I)(\tilde{B}-I)^{-1}$

dir. Açıktır ki $\widetilde{B}$ operatörü B operatörünün genişlemesidir. $u \in N_{-i}$ olsun. O zaman $u \perp D_B$ dir. $v \in D_B, \xi \in \mathbb{C}$ için,

$$\|\xi v + u\|^2 - \left\|\tilde{B}(\xi v + u)\right\|^2 \geq 0 \tag{2.5}$$

dir.

$\|\tilde{B}v\| = \|Bv\| = \|v\|$

olduğunu hesaba katarsak (2.5) den

$\|u\|^2 - \|\tilde{B}u\|^2 - 2Re(\xi(\tilde{B}v, \tilde{B}v)) \geq 0$

elde edilir. ξ keyfi olduğundan

$\big(\tilde{B}v, \tilde{B}v\big) = 0$

olur. Böylece *her* $v \in D_B$ için $\widetilde{B}_u \perp \widetilde{B}_v = Bv$ dir. Yani

$\widetilde{B}_u \perp R(A - iI), \widetilde{B}_u \in N_i$

buradan da C, N_{-i} den N_i ye büzülme operatörü olmak üzere $\tilde{B} = B \oplus C.$ $g \in D_{\tilde{A}}$ olsun.

$f = (\widetilde{A} + iI)g$

$\tilde{B}f = (\tilde{A} \; - iI)g$

olur. Son iki eşitlikten $f_1 \in R(A + iI), f_2 \in N_{-i}$ olmak üzere

$$g = \frac{1}{2i}\left(f - \tilde{B}f\right) = \frac{1}{2i}(f^1 + f^2 - Bf^1 - Cf^2)$$
$$= \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f_2 - Cf_2)$$

dir. B operatörünün tanımından $f_1 - Bf_1 \in D_A . f_2 - Cf_2 \in N_{-i} \oplus N_i$. Buradan $g \in D_{A^*}$ ve

$$A^* g = \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f^2 + Cf^2{}_2$$
$$=\frac{1}{2}(f_1 + Bf_1) + \frac{1}{2}(f_2 + Cf_2)$$

dir. Diğer taraftan $\tilde{A}g = \; A^* g$ dir.

Tanım 2.41. H bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine lineer bağıntı denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in genişlemesi denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.42. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için
$Im(x', x) \geq 0, (\, sırasıyla, Im(x', x) \leq 0, Im(x', x) = 0)$
oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatifdir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eştir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\},$$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının Cayley dönüşümü denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır.

Eğer $\{x,x'\} \in \theta, \{y,y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$\{x-y, x'-y'\} \in \theta, x'-y' = -i(x-y)$

olur. Diğer taraftan

$0 \leq Im(x'-y', x-y) = Im(-i(x-y), x-y) = -\|x-y\|^2$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$\|U_\theta(x'+ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x',x)$

$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x',x)$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta(x'+ix)\| \leq \|x'+ix\|, \{x,x'\} \in \theta \tag{2.6}$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (2.6) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.17. K, H bir hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K-I)x' + i(K+I)x = 0 \tag{2.7}$$

$$(K-I)x' - i(K+I)x = 0 \tag{2.8}$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (2.7), (2.8) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (2.7) ifadesindeki ((2.7) deki) K operatörü izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (2.7) veya (2.8) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat: (2.42) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.

$K(x' + ix) = x' - ix$

$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$

$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x)$.

Sonuncu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4Im(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \qquad (2.9)$$

olur. Böylece θ bağıntısı disipatiftir. $u \in H$ için

$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$

tanımlayalım. O zaman $\{x, x'\} \in \theta$, $x' + ix = u, x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H, U_\theta = K$ olduğunu gösterir. θ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\widetilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur . Bu ise ancak $U_{\widetilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\widetilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir. θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, U_θ da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dır. Bunu ispatlayalım: Tersini kabul edelim. U_θ ,$\overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise U_θ, $H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ, H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (2.7) eşitliğine karşılık gelen $\widetilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\widetilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\widetilde{\theta} \supset \theta$ dır. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\widetilde{\theta} = \theta, U_{\widetilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ, H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından her $\{x, x'\} \in \theta$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \qquad (2.10)$$

dır. Daha önceden belirttiğimiz gibi (2.9) maksimal disipatif $\widetilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\widetilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (2.7) ile belirlenir. (2.8) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır. θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{\{-x, x'\}: \{x, x'\}\} \in \theta \tag{2.11}$$

bağıntısı maksimal disipatifdir. Gösterdik ki

$\{x, x'\} \in \theta_1 \ (veya\ \{-x, x'\} \in \theta) \ \Leftrightarrow \ (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$

dir. Tersi de benzer şekilde gösterilir. Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$$
$$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$$

eşitlikleri denktir.

$K_1K_2(x' - ix) = x' + ix, K_2K_1(x' + ix)K_2K_1(x' + ix)$

elde edilir.

$$\{x' + ix | \{x, x'\} \in \theta\} = \{x' - ix | \{x, x'\} \in \theta\} = H$$

olduğundan

$$K_1K_2 = K_2K_1 = I$$

olur, yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersi aşikardı

Tanım 2.42. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2 : \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{K}$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ için,

$(A^*f, g) - (f, A^*) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$

ii. Keyfi $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathrm{K}$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ vektörü vardır; şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.18. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $dimK = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} = \mathrm{D}_\mathrm{A} \oplus \mathrm{N}_\mathrm{i} \oplus \mathrm{N}_{-\mathrm{i}} \quad (2.12)$$

idi. $\mathrm{P}_{-\mathrm{i}}, P_i : \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}, \mathrm{N}_\mathrm{i}$ izdüşüm operatörleri olsun. $dim\mathrm{N}_{-\mathrm{i}} = dim\mathrm{N}_\mathrm{i}$ olduğundan $\mathrm{N}_\mathrm{i} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ izometrik bir dönüşüm vardır. Bunu U ile gösterelim. $K = \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$$\Gamma_1 = \mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + UP_i, \Gamma_2 = -i\mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + iUP_i$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin A operatörünün sınır değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (2.12) ifadesinden $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ ise

$$f = f_0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{f} + P_i f, g = g_0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{g} + P_i g, f_0, g_0 \in \mathrm{D}_\mathrm{A}$$

dir.

$$\mathrm{A}^* P_i = -iP_i, \mathrm{A}^* P_{-i} = -iP_{-i}$$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$$(\mathrm{A}^* f, g) - (f, \mathrm{A}^* g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$$(\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır. $F_1, F_2 \in K, f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ alalım.

$$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$$

$$f_{-i} = \frac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_i, f_i = \frac{1}{2i}U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$$

olsun. O zaman $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olur.

Teorem 2.19. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.13)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.14)$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (2.13) ve (2.14)

koşulunu sağlayan $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (2.13) , (2.14) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (2.13), (2.14) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere
$(cosC)\Gamma_2 f - (sinC)\Gamma_1 f = 0$
koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \qquad (2.15)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \qquad (2.16)$$

koşulu ile verilir. Burada K $o$peratörü $f \in D_K$ için

$$\|K_f\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.15), (2.16) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat:$\tilde{A}$, A operatörünün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Teorem 2.18 ile $\tilde{A} \subset A^*$ dır. $(K, \Gamma_1, \Gamma_2), A$ operatörünün sınır değer uzayı olmak üzere

$$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden θ, K da disipatif bağıntıdır. Eğer $\tilde{\theta} \supset \theta$ ve θ disipatif bağıntı ise $\tilde{\tilde{A}}$, A^* operatörünün $\mathrm{D}_{\tilde{\tilde{A}}}$={f∈$\mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$}:$\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \tilde{\theta}\}$ kümesinin kısıtlaması olarak tanımlanan $\tilde{\tilde{A}}$ operatörünün disipatif genişlemesidir. Buradan $\tilde{\tilde{A}}$ =$\tilde{A}$. Eğer $\{x, x'\} \in \theta$ ise belli bir $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$, için $x = \Gamma_2 f, x' = \Gamma_1 f$, olur. Burada $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$, ve $f \in D_{\tilde{A}.}$, yani, $\{x, x' \in \theta$. Böylece $\tilde{\theta} = \theta$ ve θ maksimal disipatif bağıntıdır. Teorem 2.17 den istenen sonuçlar elde edilir.

Farz edelim ki $\tilde{A}, A^*$ operatörünün (2.13) koşulunu sağlayan vektörlerin $D_{\tilde{A}}$ kümesine kısıtlaması olsun.

$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{A}}\}$

ele alalım. Teorem 2.17 ye göre θ bağıntısı maksimal disipatiftir. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden $\tilde{A}$ disipatiftir.

Farz edelim ki $\tilde{\tilde{A}}$ operatörü $\tilde{A}$ operatörünün disipatif genişlemesi olsun.

$\tilde{\theta} = \left\{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}: f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}\right\}$ dır. $\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi olduğundan $\tilde{\theta}$=θ dır. Eğer $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$ ise $g \in D_{\tilde{A}.}$ için $\Gamma_2 f = \Gamma_1 g, \Gamma_2 f = \Gamma_2 g$. Bu ise $f - g \in D_{AA}$, buradan f∈ $D_{\tilde{A}.}$ Böylece $\tilde{A}$=$\tilde{\tilde{A}}$ ve $\tilde{A}$ maksimal disipatiftir.

3. KONFORM KESİRLİ TÜREV

$\mathbb{T}$ zaman skalası $t \in \mathbb{T}$ ve $\delta > 0$ olsun. t'nin δ komşuluğunu $V_t :=]t-\delta, t+\delta[\cap \mathbb{T}$ olarak tanımlayacağız. Yeni bir kavram olan keyfi zaman skalalarında tanımlanan fonksiyonlar için $\alpha \in]0,1]$ aralığında benzer kesirli türevleri tanıtarak başlayacağız.

Tanım 3.1. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}^K$ ve $\alpha \in]0,1]$ olsun.$t > 0$ için öyle bir $T_\alpha(f)(t)$ sayısı tanımlayalım ki herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde t 'nin $V_t \subset \mathbb{T}$ δ komşuluğu $(\delta > 0)$ vardır öyle ki

$$\forall s \in V_t \text{ için, } \left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \tag{3.1}$$

olur. $T_\alpha(f)(t), t$'de f'nin α. mertebeden konform kesirli türevi olarak adlandırılır.
$t = 0$ için, konform kesirli türevi

$T_\alpha(f)(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} T_\alpha(f)(t)$ olarak tanımlanır. (Benkhettou vd, 2015)

Uyarı 3.1. Tanım 3.1'den $\alpha = 1$ alınırsa zaman skalasının delta türevi elde edilir.
$\alpha = 0$ mertebeden konform kesirli türevi $T_0(f) = f$ operatörüyle tanımlayacağız.

Uyarı 3.2. Çalışma boyunca $[f(t)]^\alpha = T_\alpha(f)(t)$ notasyonunu kullanacağız.

Teorem 3.1. $\alpha \in]0,1]$ ve $\mathbb{T}$ zaman skalası olsun. Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. f, t noktasında $(t > 0)$ için α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirse o zaman f , t noktasında süreklidir.

ii. f, t de sürekli ve t sağdan dağınık ise, o zaman f, t'de α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}$ dır.

iii. t sağdan yoğun ise, o zaman f, t'de α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak $\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}$ limiti sonlu bir sayı ise bu durumda

$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}$ dır.

iv. f, t'de $\alpha.$ mertebeden kesirli diferansiyellenebilirse o zaman

$$f(\sigma(t)) = f(t) + (\mu(t))t^{1-\alpha}T_\alpha(f)(t)$$

dır (Benkhettou, 2015).

İspat:

i. t'de f'nin konform kesirli diferansiyellenebildiğini varsayalım. O halde t'nin V_t komşuluğu vardır öyle ki

$$s \in V_t, \left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|.$$

Bu yüzden $\forall s \in V_t \cap]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ için,

$$|f(t) - f(s)| \leq \left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]t^{\alpha-1}\right|$$
$$+\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(t)\right]\right| + \left|f^{(\alpha)}(t)\right|\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]\right||t^{\alpha-1}|$$

Dır ve t sağdan yoğun nokta olduğundan

$$|f(t) - f(s)| \leq \left|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - s]^\alpha\right| + \left|f^{(\alpha)}(t)[t - s]^\alpha\right|$$

$$\leq \varepsilon\delta|t^{\alpha-1}||T_\alpha(f)(t)|\delta$$

elde edilir.
$s \to t$ iken ($t > 0$) $\delta \to 0$ olduğunda f'nin t'deki sürekliliği elde edilir.

ii. f, t'de sürekli olsun ve t sağdan dağılmış olsun. Süreklilik aracılığıyla

$$\lim_{s\to t}\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s}t^{1-\alpha} = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\sigma(t) - t}t^{1-\alpha} = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}$$

elde edilir. Bu yüzden $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in]0,1]$ verildiğinde t'nin bir V_t komşuluğu vardır öyle ki

$\forall s \in V_t$ için, $\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}\right| \leq \varepsilon$

olur. Buradan $\forall s \in V_t$ için,

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

bulunur. Tanım 3.1 den (3.1) eşitliği elde edilir.

f'in t'de α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım ve t sağdan yoğun olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman f, t'de α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilir olduğundan burada t'nin V_t komşuluğu vardır öyle ki

$$\forall s \in V_t, \left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \qquad (3.2)$$

Çünkü $\sigma(t) = t$'dir.

$$s \neq t, \forall s \in V_t, \left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)\right| \leq \varepsilon$$

olur. Buradan (3.2)'nin eşitliği elde edilir. (3.2)'nin eşitliğinin sağ tarafındaki limit var ve L' ye eşit olsun. t sağdan yoğun olsun. O zaman V_t var olsun öyle ki

$\forall s \in V_t$ için, $\left|(f(t) - f(s))t^{1-\alpha} - L(t - s)\right| \leq \varepsilon|t - s|$

sağlanır. t sağdan yoğun olduğundan

$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - L(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$ elde edilir.

Bu formülde bize f fonksiyonunun t noktasında α mertebeden konform kesirli

diferansiyellenebilir olduğunu ve $T_\alpha(f)(t) = L$ olduğunu verir.

iii. t sağdan yoğun ise $\sigma(t) = t$, o zaman $\mu(t) = 0$ ve

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)T_\alpha(f)(t)t^{1-\alpha}.$$

Bununla birlikte t sağdan dağınık ise $\sigma(t) > t$ o zaman (iii) gereğince

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)t^{1-\alpha}\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha} = f(t) + (\mu(t))^{\alpha-1}T_\alpha(f)(t)$$

elde edilir.

Uyarı 3.3. $\mathbb{T}$ zaman skalasında, reel sayılardan indirgenen topolojiden dolayı f fonksiyonunu keyfi $t \in \mathbb{T}$ izole noktasında her zaman süreklidir.

Örnek 3.1. $h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} := \{hk: k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. O zaman

$\forall t \in \mathbb{T}, \sigma(t) = t + h$ ve $\mu(t) = h$'dır.

$f: t \in \mathbb{T} \to t^2 \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$T_\alpha(f)(t) = (t^2)^\alpha = (2t + h)t^{1-\alpha}$ olur (Benkhettou, 2015).

Örnek 3.2. $q > 1$ ve $q^\mathbb{Z} := \{q^k: k \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \overline{q^\mathbb{Z} :=}\ q^\mathbb{Z} \cup \{0\}$ olsun. Bu zaman skalasında

$$\sigma(t) = \begin{cases} qt, & t \neq 0 \ ise, \\ 0, & t = 0 \ ise, \end{cases} \text{ ve } \mu(t) = \begin{cases} (q-1)t, & t \neq 0 \ ise, \\ 0, & t = 0 \ ise, \end{cases}$$

dır (Benkhettou, 2015).

Burada $0, \mathbb{T}$'de sağdan yoğun minimum ve t deki diğer bütün noktalar izoledir. Örnek 3.1'deki fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$T_\alpha(f)(t) = (t^2)^\alpha = \begin{cases} (q+1)t^{2-\alpha}, & t \neq 0 \ ise, \\ 0, & t = 0 \ ise, \end{cases}$$

elde edilir (Benkhettou, 2015).

Örnek 3.3. $q > 1$ ve $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} := \{q^n: n \in \mathbb{N}\}$ olsun.

$\forall t \in \mathbb{T}$ için, $\sigma(t) = q(t)$ ve $\mu(t) = (q-1)t$ dır.

$f: t \in \mathbb{T} \to \log(t) \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$\forall t \in \mathbb{T}$ için, $T_\alpha(f)(t) = (\log(t))^\alpha = \frac{\log(q)}{(q-1)t^\alpha}$

elde edilir (Benkhettou, 2015).

Önerme 3.1. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}, c \in \mathbb{R}$ için, $f(t) = c$ ile tanımlansın. O zaman

$T_\alpha(f)(t) = (c)^{(\alpha)} = 0$ dır (Benkhettou, 2015).

İspat: t sağdan dağılmış ise, o zaman Teorem 3.1'in (ii) öncülü gereği

$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = 0$

dır. Aksi taktirde t sağdan yoğun ve Teorem 3.1'in (iii) öncülü gereği

$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \to t} \frac{c-c}{t-s} t^{1-\alpha} = 0$ dır.

Önerme 3.2. Tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}, f(t) = t$ şeklinde tanımlanırsa o zaman

$T_\alpha(f)(t) = t^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \; ise, \\ 1, & \alpha = 1 \; ise, \end{cases}$

dır (Benkhettou, 2015).

İspat: Teorem 2.1'in (iv) öncülü gereği

$\sigma(t) = t + \mu(t) t^{\alpha-1} T_\alpha(f)(t),\ \mu(t) = \mu(t) t^{\alpha-1} T_\alpha(f)(t)$ elde edilir.

$\mu(t) \neq 0$ ise, $T_\alpha(f)(t) = t^{\alpha-1}$ ve istenilen ilişki kanıtlanır.

Farz edelim ki $\mu(t) = 0$ yani $\sigma(t) = t$ olsun. Bu durumda t sağdan yoğun Teorem 3.1'in (iii) öncülü gereği

$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \to t} \frac{t-s}{t-s} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}$ dır.

Bu yüzden $\alpha = 1$ ise o zaman $T_\alpha(f)(t) = 1$, $0 < \alpha < 1$ ise $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}$ dır.

Sonuç 3.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $t \in \mathbb{R}$ noktasında α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak $\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$ limiti vardır ve sonlu bir sayıdır. Bu durumda

$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$ dır (Benkhettou, 2015).

İspat:
Burada $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğundan tüm noktalar sağdan yoğundur. Sonuç Teorem 3.1'in (iii) öncülünden sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2. $h > 0$ olsun. $f: h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, o zaman $f, t \in h\mathbb{Z}$ için, α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilirdir ve

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} t^{1-\alpha}$$

dır (Benkhettou, 2015).

İspat: Burada $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ve tüm noktalar sağdan dağınıktır. Sonuç Teorem 3.1'in (iii) öncülünü takip eder.

Örnek 3.4. $a, b > 0$ olsun ve $P_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a]$ zaman skalasını göz önüne alalım. O zaman

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a] \; ise \\ t+b, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\} \; ise' \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}[k(a+b), k(a+b)+a] \; ise, \\ b, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k(a+b)+a\} \; ise, \end{cases}$$

dır.

$f\colon P_{a,b} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\alpha \in]0,1]$ olsun. Teorem 3.1'den $P_{a,b}$ üzerinde f fonksiyonunun α mertebeden konform kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \begin{cases} \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a]\ ise, \\ \frac{f(t)-f(s)}{b} t^{1-\alpha}, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\}\ ise, \end{cases}$$

ile verilir. (Benkhettou, 2015)

Teorem 3.2. $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}, \alpha.$ mertebeden sürekli konform kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman

i. $f + g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha(f+g) = T_\alpha(f) + T_\alpha(g)$ dır.

ii. Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\lambda f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha(f)$ dır.

iii. f ve g sürekli ise çarpımları da $fg\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha(fg) = T_\alpha(f)g + (f \circ \sigma)T_\alpha(g) = T_\alpha(f)(g \circ \sigma) + fT_\alpha(g)$ dır.

iv. f sürekli ise, $\frac{1}{f}$ konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{T_\alpha(f)}{f(f\circ\sigma)}, f(t)f(\sigma(t)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}^K$ dır.

v. f ve g sürekli fonksiyonlar ise $\frac{f}{g}$ konform kesirli diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = -\frac{T_\alpha(f)g - fT_\alpha(g)}{g(g\circ\sigma)}, g(t)g(\sigma(t)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}^K$ geçerlidir (Benkhettou, 2015).

İspat: $\alpha \in]0,1]$ olsun ve $t \in \mathbb{T}^K$ için f ve g konform kesirli diferansiyellenebilir olsun.

i. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t'nin komşuluğunda olan V_t ve U_t vardır.

$\forall s \in V_t$ için, $\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - s|$

ve

$\forall s \in U_t$ için, $\left|\left[g\big(\sigma(t)\big) - g(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(g)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$.

$W_t = V_t \cap U_t$ olsun. O zaman $\forall s \in W_t$ için,

$$\left|\left[(f+g)\big(\sigma(t)\big) - (f+g)(s)\right]t^{1-\alpha} - [T_\alpha(f)(t) + T_\alpha(g)(t)][\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

dır. Bu yüzden $f + g, t$'de konform diferansiyellenebilir ve

$T_\alpha(f + g)(t) = T_\alpha(f)(t) + T_\alpha(g)(t)$ dır.

ii. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t'nin V_t komşuluğundaki tüm s'ler için,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

dır. Buradan $\forall s \in V_t$ için,

$$\left|\left[(\lambda f)\big(\sigma(t)\big) - (\lambda f)(s)\right]t^{1-\alpha} - \lambda T_\alpha(f)(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\lambda||\sigma(t) - s|$$

bulunur. Bu yüzden $\lambda f, t$'de $T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha(f)$'dır.

iii. t sağdan yoğun ise, o zaman

$$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{s\to t}\left[\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]g(t) + \lim_{s\to t}\left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]f(s)$$

$$= T_\alpha(f)(t)g(t) + T_\alpha(g)(t)f(t)$$

$$= T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t)) + T_\alpha(g)(t)f(t).$$

t sağdan dağılmış ise,

$$T_\alpha(fg)(t) = \left[\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}\right] g\big(\sigma(t)\big) + \left[\frac{g\big(\sigma(t)\big) - g(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}\right] f(t)$$

$$= T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t)) + f(t)T_\alpha(g)(t).$$

f ve g fonksiyonlarının rolleri değiştirilerek diğer çarpım kuralı elde edilir. Önerme 3.1 ve (iii) öncülünden olduğunu biliyoruz.

$T_\alpha\left(f\frac{1}{f}\right) = 1^\alpha = 0$ elde edilir. Buradan

$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t)f\big(\sigma(t)\big) + T_\alpha(f)(t)\frac{1}{f(t)} = 0$ elde edilir.

$f(\sigma(t)) \neq 0$ varsaydığımız için, $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t) = -\frac{T_\alpha(f)(t)}{f(t)f\big(\sigma(t)\big)}$ dır.

iv. (ii) ve (iv)'den elde ettiklerimizi kullanırsak

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) = T_\alpha\left(f\frac{1}{g}\right)(t)$$

$$= f(t)T_\alpha\left(\frac{1}{g}\right)(t) + T_\alpha(f)(t)\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)}$$

$= \frac{T_\alpha(f)(t)g(t) - f(t)T_\alpha(g)(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$ bulunur.

Teorem 3.3. c bir sabit, $m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in]0,1]$ olsun.

i. $f(t) = (t-c)^m$ ise, o zaman

$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-p} (t-c)^p$ dır.

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-c)m}$ ve $(t-c)(\sigma(t)-c) \neq 0$ ise, o zaman

$T_\alpha(g)(t) = -t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-c)^{m+p}(t-c)^{m-p}}$ dır (Benkhettou, 2015).

İspat:

i. Tümevarım metoduyla 1. Formülü ispatlayalım. $m = 1$ ise, o zaman Önerme 3.1 ve 3.2'den ve Teorem 3.2'nin (i)'sinden

$f(t) = t - c$ ve $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}$

olur. Şimdi $f(t) = (t-c)^m$ için,

$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} (\sigma(t)-c)^{m-1-p}(t-c)^p$

olsun. Teorem 3.2 nin (iii) öncülü kullanılarak.

$F(t) = (t-c)^{m+1}(t-c)f(t)$ sağlansın.

$$(F(t))^\alpha = T_\alpha(t-c)f\big(\sigma(t)\big) + T_\alpha(f)(t)(t-c) = t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m}(\sigma(t)-c)^{m-p}(t-c)^p$$

olur. Böylece tümevarımla (i) ispatlanır.

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-c)m} = \frac{1}{f(t)}$ olsun. Teorem 3.2'nin (iv)'ünden

$(t-c)(\sigma(t)-c) \neq 0$ sağlandığında

$$g^{(\alpha)}(t) = -\frac{T_\alpha(f)(t)}{f(t)f\big(\sigma(t)\big)} = -t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{(\sigma(t)-c)^{p-1}(t-c)^{m-p}}$$

olur.

Örnek 3.5. $\alpha \in]0,1]$ ve $f(t) = t^m$ olsun. O zaman

$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-p}\, t^p$ olur. t sağdan yoğun ise, o zaman

$T_\alpha(f)(t) = mt^{m-\alpha}$ olur. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\alpha = 1$ seçersek o zaman alışılmış türev

$T_1(f)(t) = mt^{m-1} = f'(1)$ elde edilir. (Benkhettou vd, 2015)

Örnek 3.6. $\alpha \in]0,1]$ ve $f(t) = \frac{1}{t^m}$ olsun. O zaman

$$T_\alpha(f)(t) = -t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{t^{p-m} \sigma(t)^{p-1}}$$

olur. t sağdan yoğun ise, o zaman

$$T_\alpha(f)(t) = -\frac{m}{t^{m+\alpha}}$$

olur. Üstelik $\alpha = 1$ olursa,

$T_1(f)(t) = -\frac{m}{t^{m+1}}$ elde edilir (Benkhettou vd, 2015).

Örnek 3.7. $f(t) = (t-1)^2$ ise, o zaman tüm $\alpha \in]0,1]$ için

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}[(\sigma(t)+1)^2 + (\sigma(t)+1)(t+1) + (t+1)^2]$$

bulunur. (Benkhettou vd, 2015)

Örnek 3.8. $\alpha \in (0,1)$ olsun. Öyle ki $\mathbb{T} = \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ ve $\sigma(t) = t+1$, $\mu(t) = 1$ olsun ve $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, f(t) = g(t) = t$ ile verilsin. O zaman
$T_\alpha(f)\big(g(t)\big)T_\alpha(g)(t) = t^{2(1-\alpha)}$ iken,

$T_\alpha(f \circ g)(t) \neq T_\alpha(f)\big(g(t)\big)T_\alpha(g)(t)$: $T_\alpha(f \circ g)(t) = t^{1-\alpha}$ dır. (Benkhettou vd, 2015)

Teorem 3.4. $\alpha \in]0,1]$ olsun. $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sürekli $t \in \mathbb{T}^K$ noktasında α. mertebeden konform kesirli diferansiyellenebilir olsun ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir olsun. O zaman $[t, \sigma(t)]$ gerçel aralığında c sayısı vardır öyle ki

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(c))T_\alpha(g)(t) \text{ dır.} \tag{3.3}$$

(Benkhettou, 2015)

İspat:

$t \in \mathbb{T}^K$ olsun. İlk olarak t sağdan dağılmış olsun. Bu durumda

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f\big(g(\sigma(t))\big) - f(g(t))}{\mu(t)} t^{1-\alpha}$$

dır. Eğer $g\big(\sigma(t)\big) = g(t)$ ise,

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = 0 \text{ ve } T_\alpha(g)(t) = 0$$

olur. Buradan $[t, \sigma(t)]$ aralığındaki keyfi c sayısı için sağlanr. Ortalama değer teoreminden $\xi \epsilon]\sigma(t), g(\sigma(t))[$ için,

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f\big(g(\sigma(t))\big) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = f'(\xi)T_\alpha(g)(t) \text{ dır.}$$

$g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sürekli olduğu için $c \in [t, \sigma(t)]$ öyle ki $g(c) = \xi$'dır. Şimdi t sağdan yoğun olsun. Bu durumda

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} . \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \text{ dır.}$$

Ortalama değer teoremi yardımıyla $\xi \epsilon]\sigma(t), g(\sigma(t))[$ vardır öyle ki

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \to t} \left\{ f'(\xi) \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right\} \text{ sağlanır.}$$

g'nin sürekliliğinden $\lim_{s\to t}\xi_s = g(t)$ elde edilir. O zaman

$$T_\alpha(f\circ g)(t) = f'(g(t))T_\alpha(g)(t)$$

olur. t sağdan yoğun olduğu için $c = t = \sigma(t)$ olur ve sonuç elde edilir.

Örnek 3.9. $\sigma(t) = 2t$ ve $\mu(t) = t$ için $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}$ olsun.

i. $f(t) = t^2$ ve $g(t) = t$ seçilsin. Teorem 3.4 gereğince $[t,\sigma(t)] = [t,2t]$ aralığında c değişkeni bulabiliriz öyle ki

$$T_\alpha(f\circ g)(t) = f'(g(c))T_\alpha(g)(t)$$

sağlanır. Teorem 2.1 gereğince

$T_\alpha(f\circ g)(t) = 3t^{1-\alpha}$ olur.

$T_\alpha(g)(t) = t^{1-\alpha}$ ve $f'\big(g(c)\big) = 2c$

(3.3) eşitliğinden $3t^{1-\alpha} = 2ct^{1-\alpha}$ ve böylece $c = \frac{3}{2}t \in [t,2t]$ olur.

ii. Şimdi $\forall t \in \mathbb{T}, f(t) = g(t) = t^2$ alalım.

$$15t^{4-\alpha} = T_\alpha(f\circ g)(t) = f'\big(g(c)\big)T_\alpha(g)(t) = 2c^2 3t^{2-\alpha}$$

elde ederiz. Bu yüzden

$c = \sqrt{\frac{5}{2}}t \in [t,2t]$ olur. (Benkhettou vd, 2015)

Tanım 3.2. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\alpha \in (n, n+1], n \in \mathbb{N}$ olsun ve $f, t \in \mathbb{T}^K$ noktasında n defa delta diferansiyellenebilir olsun. f'nin α. mertebeden konform kesirli türevini

$$T_\alpha(f)(t) \coloneqq T_{\alpha-n}(f^{\Delta^n})(t)$$

olarak tanımlayacağız. Notasyon olarak önceki gibi

$(f(t))^{(\alpha)} = T_\alpha(f)(t)$ kullanacağız. (Benkhettou, 2015).

Örnek 3.10. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z},\ h > 0,\ f(t) = t^3$ ve $\alpha = 2.1$ olsun. O zaman Tanım 3.2. gereği

$T_{2.1}(f) = T_{0.1}(f^{\Delta^2})$ alabiliriz.

$\sigma(t) = t + h$ ve $\mu(t) = h$ olduğu için,

$T_{2.1}(f)(t) = (t^3)^{(2.1)} = (6t + 6h)^{(0.1)}$

olur. Önerme 3.1 ve Teorem 3.2'deki (i) ve (ii) gereğince

$T_{2.1}(f)(t) = 6(t)^{(0.1)}$ elde edilir. Önerme 3.2 gereğincede $T_{2.1}(f)(t) = 6t^{(0.9)}$ olur.

(Benkhettou vd, 2015)

Teorem 3.5. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. O zaman

$T_\alpha(f)(t) = t^{1+n-\alpha} f^{\Delta^{1+n}}(t)$

dır (Benkhettou, 2015).

İspat: f fonksiyonu n defa delta türevlenebilir olsun. $\alpha \in (n, n+1]$ için $\beta \in (0,1]$ vardır öyle ki $\alpha = n + \beta$'dır. Tanım 3.2 gereği

$T_\alpha(f) = T_\beta\left(f^{\Delta^n}\right)$

dır. Yüksek mertebeden delta türevin tanımından ve Teorem 3.1'deki (ii) ve (iii)'den

$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\beta}\left(f^{\Delta^n}\right)^{\Delta}(t)$ dır.

Tanım 3.3. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ düzenli fonksiyon olsun. O zaman f'nin α $-$kesirli integrali

$0 < \alpha \leq 1$ için, $\int f(t)\Delta^{\alpha}t := \int f(t)t^{\alpha-1}\Delta t$

olarak tanımlanır. (Benkhettou vd, 2015)

Tanım 3.4. Farz edelim ki $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ düzenli fonksiyon olsun. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere α mertebeden f'nin ifade edilen belirsiz α $-$kesirli integrali

$F_{\alpha}(t) = \int f(t)\Delta^{\alpha}t$

olarak tanımlanır. O zaman Cauchy $\alpha -$ kesirli integrali

$\forall a, b \in \mathbb{T}, \displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t = F_{\alpha}(b) - F_{\alpha}(a)$

olarak tanımlayabiliriz. (Benkhettou vd, 2015)

Örnek 3.11. $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = t$ olsun. O zaman

$\int_1^{10^{\frac{2}{3}}} f(t)\Delta^{\alpha}t = 6$ dır. (Benkhettou vd, 2015)

Teorem 3.6. $\alpha \in (0,1]$ olsun. O zaman herhangi bir rd sürekli $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için öyle F_{α}:$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki

$\forall\, t \in \mathbb{T}^{K}, T_{\alpha}(F_{\alpha})(t) = f(t)$

sağlanır. F_{α} fonksiyonu f'nin söz konusu $\alpha -$ ilkelidir (Benkhettou vd, 2015).

İspat: $\alpha = 1$ durumunda Bohner ve Peterson'da (Boher, 2001) sağlanr. $\alpha \in (0,1)$ olsun. f'nin sağdan yoğun sürekli olduğunu varsayalım. Bohner ve Peterson'un (Bohner,2003) Teoremi 1.16 gereği f düzenlidir. O zaman

$F_\alpha(t) = \int f(t)\Delta^\alpha t,$

$\mathbb{T}^K$ üzerinde konform kesirli differansiyellenebilir. Teorem 3.6 ve Tanım (3.1)

$t \in \mathbb{T}^K, T_\alpha(F_\alpha)(t) = t^{1-\alpha}(F_\alpha(t))^\Delta = f(t)$ elde edilir.

Teorem 3.7. $\alpha \in (0,1], a, b, c, d \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ ve f, g rd sürekli iki fonksiyon olsun. O zaman,

i. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta^\alpha t = \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t + \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t.$

ii. $\int_a^b (\lambda f)(t)\Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t.$

iii. $\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\Delta^\alpha t.$

iv. $\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\Delta^\alpha t.$

v. $\int_a^a f(t)\Delta^\alpha t = 0.$

vi. $\forall t \in [a,b], g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$|f(t)| \leq g(t)$ ise, $\left|\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t.$

vi. $\forall t \in [a,b], f(t) > 0$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t \geq 0$. (Benkhettou vd, 2015).

İspat: Tanım 3.3 ve 3.4' ten elde edilir.

Teorem 3.8. $f: \mathbb{T}^K \to \mathbb{R}$ sağdan yoğun sürekli fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ ise,

$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^\alpha s = f(t)\mu(t)t^{\alpha-1}$ dır (Benkhettou vd, 2015).

İspat: f, $\mathbb{T}^{K}$'de sağdan yoğun sürekli fonksiyon olsun. O zaman f düzenli fonksiyondur. Tanım 3.4 ve Teorem 3.6 aracılığıyla, F_α, f'nin ilkeli vardır ki ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^\alpha s = F_\alpha(\sigma(t)) - F_\alpha(t) = T_\alpha(F_\alpha)\mu(t)t^{1-\alpha} = f(t)\mu(t)t^{1-\alpha}$$

sağlar.

Teorem 3.9. $\mathbb{T}$ zaman skalası, $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ olsun.
$\forall t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$ için, $T_\alpha(f)(t) \geq 0$ ise o zaman f fonksiyonu $[a,b] \cap \mathbb{T}$'de artan fonksiyondur. (Benkhettou vd, 2015)

İspat: $T_\alpha(f), [a,b] \cap \mathbb{T}$'de var olsun ve $\forall t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$ için $T_\alpha(f)(t) \geq 0$ olsun. O zaman Teorem 3.1'deki (i) gereği $T_\alpha(f), [a,b] \cap \mathbb{T}$'de süreklidir ve bu yüzden Teorem 3.7'nin (vii) öncülünden $a \leq s \leq t \leq b$ için,

$$\int_s^t T_\alpha f(\xi)\Delta^\alpha \xi \geq 0$$

olur. Tanım 3.24'ten

$$f(t) = f(s) + \int_s^t T_\alpha f(\xi)\Delta^\alpha \xi \geq f(s)$$

bulunur. Buraya kadar verilen tanımlarda

$$T_0(f^\Delta)(t) \neq f(t)$$

olmaktadır. Yani bu konform kesirli türev operatörü birim operatöre sahip değildir. Şimdi yeni bir $h(\alpha)$ konform fonksiyonu tanımlayarak zaman skalası üzerinde birim operatöre sahip konform delta kesirli türev tanımını verelim.

Tanım 3.5. $h(\alpha)$ sürekli bir fonksiyon ve

$$\lim_{\alpha \to 0^+} h(\alpha) = 1 \text{ ve } \lim_{\alpha \to 1^-} h(\alpha) = 1$$

olsun. $\mathbb{T}$ zaman skalası ve $\alpha\epsilon(0,1]$ olsun.$t \in T^k$ için $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu α mertebeden konform delta kesirli diferansiyellenebilirdir öyle ki $T_\alpha(f^\Delta)(t)$ vardır. $\forall\epsilon > 0$ için t nin U komşuluğu vardır öyle ki her $s \in U$ için,

$$\left|h(\alpha)f(t)\sigma(t) - s) + (1 - h(\alpha))(f^\sigma(t) - f(s))\sigma^{1-\alpha} - T_\alpha(f^\Delta)(t)(\sigma(t) - s\right|$$

$\leq \epsilon|\sigma(t) - s|$ dir.

$T_\alpha(f^\Delta)(t)$ ifadesini α mertebeden konform delta kesirli türev olarak adlandıracağız ve f tüm T^k için konform delta kesirli diferansiyellenebilir ise f ye konform delta kesirli diferansiyellenebilir diyeceğiz. T_k^k de α mertebeden konform delta kesirli diferansiyel $\mathfrak{CFD}$ olarak gösterilecek (Zhao, 2016).

Teorem 3.10. $\mathbb{T}$ zaman skalası , $t \in \mathbb{T}^k$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun.

i. $f \in \mathfrak{CFD}$ ise f, t de süreklidir.

ii. f,t de sürekli ve t sağdan dağılmış is o zaman $f \in \mathfrak{CFD}$ ile

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) = h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha))\frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)}\sigma^{1-\alpha}(t)$$

iii. f sağdan yoğun ise o zaman $f \in \mathfrak{CFD}$ ancak ve ancak

$\lim_{s\to t} h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha))\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}$

gibi sonlu bir sayı vardır. Bu durumda

$$T_\alpha(f^\Delta)(t) = \lim_{s\to t} h(\alpha)f(t) + (1 - h(\alpha))\frac{f(t) - f(s)}{t - s}t^{1-\alpha}$$

olur (Zhao, 2016).

Örnek 3.12. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlansın. O zaman

$T_\alpha(f^\Delta)(t) = h(\alpha)t + \big(1 - h(\alpha)\big)\sigma^{1-\alpha}(t)$

olur.$\alpha = 1$ ise o zaman

$T_\alpha(f^\Delta)(t) \equiv 1$ dir (Zhao, 2016).

Örnek 3.13. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $s \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$, $\left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ olarak tanımlansın. Teorem 3.10 (ii) gereği $f \in \mathfrak{CFD}$ ile

$T_\alpha(f^\Delta)(t) = h(\alpha)t^2 + (1 - h(\alpha))\left(2t + \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$ elde edilir. (Zhao, 2016)

Teorem 3.11. $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R} \in \mathfrak{CFD}$ olsun.O zaman

i. Herhangi λ_1, λ_2 sabitleri için $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \mathfrak{CFD}$ ile

$T_\alpha((\lambda_1 f + \lambda_2 g)^\Delta)(t) = \lambda_1 T_\alpha(f^\Delta)(t) + \lambda_2 T_\alpha(g^\Delta)(t)$ dir.

ii. f ve g sürekli ise o zaman $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R} \in \mathfrak{CFD}$ ile

$T_\alpha(fg)^\Delta(t) = T_\alpha(f^\Delta)(t)g^\sigma(t) + f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t) - h(\alpha)g(t)f^\sigma(t)$

$= T_\alpha(g^\Delta)(t)f^\sigma(t) + g(t)T_\alpha(f^\Delta)(t) - h(\alpha)g(t)f^\sigma(t)$

olur.

iii. $f\,(t)f^\sigma(t) \neq 0$ ise o zaman $\frac{1}{f} \in \mathfrak{CFD}$ ile

$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{T_\alpha(f^\Delta)(t)}{f(t)f^\sigma(t)} + \frac{h(\alpha)}{f(t)} + \frac{h(\alpha)}{f^\sigma(t)}$ olur.

iv. $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$ ise o zaman $\frac{f}{g} \in \mathfrak{CFD}$ ile

$$T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{T_{\alpha}(f^{\Delta})(t)g(t) - f(t)T_{\alpha}(g^{\Delta})(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} + h(\alpha)\frac{f(t)}{g(t)}$$

olur. (Zhao, 2016).

İspat :

(i) $\varepsilon > 0$ olsun.O zaman t nin U_1 ve U_2 komşulukları vardır öyle ki her $s \in U_1$ için

$$\left|\begin{matrix}\lambda_1 h(\alpha)f(t)(\sigma(t)-s) + \lambda_1\big(1-h(\alpha)\big)\big(f^{\sigma}(t)-f(s)\big)\sigma^{1-\alpha}(t) \\ -\lambda_1 T_{\alpha}(f^{\Delta})(t)(\sigma(t)-s)\end{matrix}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\lambda_1(\sigma(t)-s)|$$

ve her $s \in U_2$ için

$$\left|\begin{matrix}\lambda_2 h(\alpha)g(t)(\sigma(t)-s) + \lambda_2\big(1-h(\alpha)\big)\big(g^{\sigma}(t)-g(s)\big)\sigma^{1-\alpha}(t) \\ -\lambda_2 T_{\alpha}(g^{\Delta})(t)(\sigma(t)-s)\end{matrix}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\lambda_2(\sigma(t)-s)|$$

$U = U_1 \cap U_2$,$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ olsun. O zaman her $s \in U$ alalım.

$$\left|\begin{matrix}h(\alpha)\big(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\big)(\sigma(t)-s) + (1-h(\alpha)))(\lambda_1 f^{\sigma}(t) + \lambda_2 g^{\sigma}(t) - \lambda_1 f(s) \\ -\lambda_2 g(s)\sigma^{1-\alpha}(t) - (\lambda_1 T_{\alpha}(f^{\Delta}(t) + \lambda_2 T_{\alpha}(g^{\Delta})(t))(\sigma(t)-s)\end{matrix}\right|$$

$$\leq \big|\lambda_1 h(\alpha)f(t)(\sigma(t)-s) + \lambda_1\big(1-h(\alpha)\big)\big(f^{\sigma}(t)-f(s)\big)\sigma^{1-\alpha}(t) - \lambda_1 T_{\alpha}(f^{\Delta})(t)(\sigma(t)-s)\big|$$

$$+\big|\lambda_2 h(\alpha)g(t)(\sigma(t)-s) + \lambda_2\big(1-h(\alpha)\big)\big(g^{\sigma}(t)-g(s)\big)\sigma^{1-\alpha}(t) - \lambda_2 T_{\alpha}(g^{\Delta})(t)(\sigma(t)-s)\big|$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}|\lambda_1(\sigma(t)-s)| + \frac{\varepsilon}{2}|\lambda_2(\sigma(t)-s| \leq \varepsilon|\lambda(\sigma(t)-s)|$ dır.

Böylece

$$T_\alpha((\lambda_1 f + \lambda_2 g)^\Delta)(t) = \lambda_1 T_\alpha(f^\Delta)(t) + \lambda_2 T_\alpha(g^\Delta)(t)$$

elde edilir.

(ii) t sağdan dağılmış ise o zaman teorem 3.10 de (ii) den alalım.

$$T_\alpha(fg)^\Delta(t) = h(\alpha)f(t)g(t) + \big(1-h(\alpha)\big)\frac{f^\sigma(t)g^\sigma(t) - f(t)g(t)}{\mu(t)}\sigma^{1-\alpha}(t)$$

$$= h(\alpha)f(t)g^\sigma(t) + \big(1-h(\alpha)\big)\frac{f^\sigma(t)g^\sigma(t) - f(t)g^\sigma(t)}{\mu(t)}\sigma^{1-\alpha}(t) + h(\alpha)f(t)g(t)$$

$$+\big(1-h(\alpha)\big)\frac{f(t)g^\sigma(t) - f(t)g(t)}{\mu(t)}\sigma^{1-\alpha}(t) - h(\alpha)f(t)g^\sigma(t)$$

$$= T_\alpha(f^\Delta)(t)g^\sigma(t) + f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t) - h(\alpha)f(t)g^\sigma(t)$$

elde edilir. t sağdan yoğun ise o zaman 3.10 da (iii) alalım.

$$T_\alpha(fg)^\Delta(t) = \lim_{s\to t} h(\alpha)f(t)g(t) + (1-h(\alpha))\tfrac{f(t)g(t)-f(s)g(s)}{t-s}\sigma^{1-\alpha}(t)$$

$$= \lim_{s\to t} h(\alpha)f(t)g(t) + \big(1-h(\alpha)\big)\frac{f(t)g(t) - f(s)g(t)}{t-s}\sigma^{1-\alpha}(t)$$
$$+\lim_{s\to t} h(\alpha)f(s)g(t) + \big(1-h(\alpha)\big)\frac{f(s)g(t) - f(s)g(s)}{t-s}\sigma^{1-\alpha}(t) - \lim_{s\to t} h(\alpha)f(s)g(t)$$

$$= T_\alpha(f^\Delta)(t)g(t) + f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t) - h(\alpha)f(t)g(t)$$

$$= T_\alpha(f^\Delta)(t)g^\sigma(t) + f(t)T_\alpha(g^\Delta)(t) - h(\alpha)f(t)g^\sigma(t)$$

elde edilir.

(iii) $T_\alpha\left(f.\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = T_\alpha(1)^\Delta(t) = h(\alpha)$ dır.

Böylece

$$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)f^{\sigma}(t)+T_\alpha(f^{\Delta})(t)\frac{1}{f(t)}-h(\alpha)\frac{f^{\sigma}(t)}{f(t)}=h(\alpha)$$

olur ve sonuç olarak

$$T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{T_\alpha(f^{\Delta})(t)}{f(t)f^{\sigma}(t)}+\frac{h(\alpha)}{f(t)}+\frac{h(\alpha)}{f^{\sigma}(t)}$$

elde edilir.

(iv) (ii) ve (iii) kullanalım.

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=f(t)T_\alpha\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)+T_\alpha(f^{\Delta})(t)\frac{1}{g^{\sigma}(t)}-h(\alpha)\frac{f(t)}{g^{\sigma}(t)}$$

$$=f(t)\left(-\frac{T_\alpha(g^{\Delta})(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)}+\frac{h(\alpha)}{g(t)}+\frac{h(\alpha)}{g^{\sigma}(t)}\right)+T_\alpha(f^{\Delta})(t)\frac{1}{g^{\sigma}(t)}-h(\alpha)\frac{f(t)}{g^{\sigma}(t)}$$

$$=\frac{T_\alpha(f^{\Delta})(t)g(t)-f(t)T_\alpha(g^{\Delta})(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)}+h(\alpha)\frac{f(t)}{g(t)}$$

elde edilir.

Örnek 3.14. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ $\{\sqrt{n:n\in\mathbb{N}_0}$ için $f(t)=\frac{1}{f}$ olarak tanımlanırsa teorem 3.10 (ii) den $f\in\mathfrak{CFD}$ ile

$$T_\alpha(f^{\Delta})(t)=\frac{h(\alpha)}{t}-(1-h(\alpha))\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}\right)^{-\alpha}$$

$$=\frac{h(\alpha)}{t}-(1-h(\alpha))\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^{-\alpha}$$

elde edilir. (Zhao, 2016).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde zaman skalası üzerinde konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörü ele alınmıştır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

Zaman skalası üzerinde konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville denklemden operatöre geçiş yapmak için, $\mathbb{T} = (\rho(a), b)$ olmak üzere,

$$(f, g) := \int_{\rho(a)}^{b} f(t)\overline{g(t)}\, \Delta^{\alpha}(t) \; f, g \in L^2_{\Delta,\alpha}\mathbb{T}$$

iç çarpımı yardımıyla $L^2_{\Delta,\alpha}\mathbb{T}$ Hilbert uzayını tanımlayalım (Gülşen, vd., 2017).

$p(x)$ ile $q(x)$ reel değerli sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinde konform kesirli $\Delta -$integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$ly = -T_{\alpha}(p(x)T_{\alpha}y) + q(x)y, L^2_{\Delta,\alpha}\mathbb{T} \tag{4.1}$$

Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım.
Şimdi maksimal ve minimal operatörün tanım kümelerini verelim,

$$D_{max} = \{y \in L^2_{\Delta,\alpha}\mathbb{T} : y \; ve \; (pT_{\alpha})(y), \mathbb{T} \; \text{üzerinde} \; mutlak \; sürekli \; ve \; l(y) \in L^2_{\Delta,\alpha}\mathbb{T}\}.$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max}: y(a) = (pT_{\alpha})(a) = 0, y(b) = (pT_{\alpha})(b) = 0\}.$$

$L_{max}y = ly$ ile D_{max} üzerinde L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım. Eğer L_{max} operatörü D_{min} kümesine kısıtlanırsa L_{min} minimal operatör elde edilir. $L_{min}{}^{*} = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür (Naimark,1968).

$\forall y, z \in D_{max}$ için, Green formülü;

$$(ly, z) - (y, lz) = p(x)z(x)T_{\alpha}\big(y(x)\big) - p(x)y(x)T_{\alpha}\big(z(x)\big)$$
$$= \Big[p(x)\Big(z(x)T_{\alpha}\big(y(x)\big) - y(x)T_{\alpha}\big(z(x)\big)\Big)\Big]_{\rho(a)}^{b}$$

$= [y,z](b) - [y,z](\rho(a))$

ile verilir. Burada

$$[y,z](x) = p(x)\left(z(x)T_\alpha\big(y(x)\big) - y(x)T_\alpha\big(z(x)\big)\right)$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.1. H hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2 : D(M^*) \to H$ lineer dönüşümler olsun.

1. $\forall f, g \in D(M^*)$ için $(M^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, M^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H$
2. Herhangi bir $F_1, F_2 \in H$ için bir $f \in D(M^*)$ vektörü vardır öyleki $\Gamma_1 f = F_1$ ve $\Gamma_2 f = F_2$ olur.

Koşullarını sağlayan (H, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne $\mathcal{H}$ hilbert uzayı üzerinde eşit indis defektli M kapalı simetrik operatörünün sınır değer uzayı denir.

Şimdi

$\varGamma_1, \varGamma_2 : D_{max} \to \mathbb{C}^2$,

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(\rho(a)) \\ y(b) \end{pmatrix}, \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} p(\rho(a))T_\alpha y(\rho(a)) \\ p(b)T_\alpha y(b) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.1. (4.2) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

İspat: $\forall y, z \in D_{max}$ için,

$(\varGamma_1 y - \varGamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\varGamma_2 y - \varGamma_1 z)_{\mathbb{C}^2}$

$$= \begin{pmatrix} p\big(\rho(a)\big), & p\big(\rho(a)\big)T_\alpha z\big(\rho(a)\big) \\ y(b) & p(b)T_\alpha z(b) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p\big(\rho(a)\big)T_\alpha y\big(\rho(a)\big) & -z\big(\rho(a)\big) \\ p(b)T_\alpha y(b) & , \quad z(b) \end{pmatrix}$$

$$= \left[-y\big(\rho(a)\big).\, p\big(\rho(a)\big)T_\alpha z\big(\rho(a)\big) + y(b).\, p(b)T_\alpha z(b)\right]$$

$$-[-p\big(\rho(a)\big)T_\alpha y\big(\rho(a)\big).\, z\big(\rho(a)\big) + p(b)T_\alpha y(b).\, z(b)$$

$= [y(b).p(b)T_\alpha z(b) - p(b)T_\alpha y(b).z(b)]$

$+[p(\rho(a))T_\alpha y(\rho(a)).z(\rho(a)) - y(\rho(a)).p(\rho(a))T_\alpha z(\rho(a))]$

$= [ypT_\alpha z - zpT_\alpha y]_{(b)} - [pyT_\alpha z - pzT_\alpha y]_{(\rho(a))}$

$= [y,z](b) - [y,z](\rho(a)) = (L_{max}y, z) - (y, L_{max}z)$

Green özdeşliği yardımıyla elde edildi. Böylelikle sınır değeri uzayının tanımının ilk koşulunu kanıtladık. Şimdi sınır değer uzayının tanımının ikinci koşulunu kanıtlayacağız.

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$y(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)v_1 + \alpha_3(t)u_2 + \alpha_4(t)v_2 \in H,$

vektör değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$\alpha_1^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_1}(a) = 0 \quad \alpha_1^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_1}(b) = 0$

$\alpha_2^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_2}(a) = 0 \quad \alpha_2^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_2}(b) = 0$

$\alpha_3^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_3}(a) = 0 \quad \alpha_3^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_3}(b) = 0$

$\alpha_4^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_4}(a) = 0 \quad \alpha_4^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_4}(b) = 0$

Bu durumda bu fonksiyon D_{max} kümesine aittir ve $\Gamma_1 y = u$, $\Gamma_2 y = v$ olduğu açıktır.

Sonuç 4.1. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise L_{min} operatörünün

$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \ldots (1)$
ve
$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \ldots (2)$

koşullarını sağlayan $y \in D_{max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla L_{min} operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine L_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (1) ve (2) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. Eğer (1) ve (2) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa L_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer üniter olursa L_{min} operatörünün kendine eş genişlemesini verir. L_{min} operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

Koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D(K)$ için,

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

Koşulunu sağlayan lineer operatördür.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, zaman skalası üzerinde konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörü ele alınmıştır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir. Bu çalışmanın devamı olarak zaman skalası üzerinde singüler durumda konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörünün genişlemeleri yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. *Journal Computer Application Mathematic*, 279, 57-66.

Allahverdiev, B.P., Tuna, H, Yalçinkaya, Y., 2019. Conformable fractional Sturm-Liouville equation. *Mathematical Methods Applied Sciences*, 42: 3508– 3526.

Benkhettou, N., Brito da Cruz, A.M.C., Torres, D.F.M., 2015. *A fractional calculus on arbitrary time scales: fractional differentiation and fractional integration*. Signal Process. 107, 230-237.

Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Mat. Sb.* 38, 431-450.

Bohner, M., Peterson, A., 2001. *Dynamic Equations on Time Scales*. Birkha¨user, Boston, MA.

Bohner, M., Peterson, A., 2003. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkha¨user, Boston, MA.

Bozkurt, D., Türen, B., 2000. *Lineer Cebir*, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V.I., 1984. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Naukova Dumka, Kiev (English transl. 1991, Birkhauser Verlag).

Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N. and Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, *Dokl.Akad .Nauk* SSSR 205,1029-1032; *English transl., Soviet Math. Dokl*. 13(1972), 1063-1067

Gorbachuk, M.L., Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrain. Mat. Zh.* 41, 1299-1312 (English transl. in *Ukrainian Math. J*. 41 (1989), 1117-1129).

Gorbachuk, V.I., Gorbachuk M.L., 1991. *Boundary Value Problems for Operator Diferential Equations,* Kluwer Academic Publishers, London.

Gülşen, T., Yılmaz, E.,Kemaloğlu, H., 2017. Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existence results on time scales

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal Computer Application Mathematic*, 264, 65--70.

Khol'kin, A. M., 1981. Self-adjoint boundary conditions at-infinity for a quasiregular system of even-order differential equations pp.174-183 in: Theory of operators in function spaces and its applications, *Naukova Dumka*, Kiev.

Kochubei, A. N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, Mat. Zametki 17, 41-48*; English Translation in Mathematical Notes*, 17, 25-28.

Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. *I, Mat*. Sb. 20, 431-495; II, Mat. Sb. 21,(1947), 365-404

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval (0,∞), *Akademi Nauk* SSSR Ser Mat. 16, 292-324 .

Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.

Naimark M. A., 1968. *Linear Differenital Operators*, Second ed. Nauka, Moscow English transl. of Örst ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.

Neumann, J. von., 1929. Allgemeine Eigenwertheorie Hermitischer Functional operatoren, *Mathematische Annalen, 102, 49-131*

Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', *Transactions American Mathematical Society* 90, 193-254; *Russian transl. İn Matematika* 6:4 (1962), 11-70.

Rellich, F., 1951. Halbbeschrankte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung' , *Mathematische Annalen*, 122, 343-368.

Rofe-Beketov, F.S. , 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, *Doklady Akademi Nauk* SSSR, 184, 1034-1037 (*English translet in Soviet Mathematics Doklady* 10 (1969), 188-192).

Tuna, H. , Allahverdiev, B. P. , Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16(1), 275-285, 2018.

Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', Trudy Moskov. *Mat. Obshch* 1, 187-246.

Zhao, D., You, X., Cheng, J., 2016. Remarks on comformable fractional derivative on time scale.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Gizem AYRAK

Doğum Yeri ve Yılı : Burdur /1992

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	:Uso Anadolu Lisesi	2007-2011
Lisans	:Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	2011-2015

Çalıştığı Kurum	Yıl
Arena Kurs Merkezi/Burdur (Öğretmen)	2016-2019