T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Hülya AKDEMİR

BURDUR, 2019

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN KONFORM STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Hülya AKDEMİR

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2019

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Hülya AKDEMİR tarafından **Doç. Dr. Hüseyin TUNA** yönetiminde hazırlanan **"Kesirli Mertebeden Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 11/06 /2019

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU (Başkan)
Süleyman Demirel Üniversitesi..(İmza)

Doç. Dr. Hüseyin TUNA (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi...(İmza)

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet UC (Jüri Üyesi)
Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi ....(İmza)

ONAY

Bu Tez, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ____________ Tarih ve ________ Sayılı Kararı ile Kabul Edilmiştir.

(İmza)
Prof. Dr. Ayşe Gül MUTLU GÜLMEMİŞ
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Kesirli Mertebeden Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11/06/2019

Hülya AKDEMİR

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

0508-YL-18 no`lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Haziran, 2019 **Hülya AKDEMİR**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T_α	: Konform Kesirli Türev
T_α^a	: Konform Soldan Kesirli Türev
${}_{\alpha}^{b}T$	: Konform Soldan Kesirli Türev
I_α	: Konform Kesirli İntegral
I_α^a	: Konform Soldan Kesirli İntegral
${}_{\alpha}^{b}I$	: Konform Sağdan Kesirli İntegral
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$W_\alpha[f,g]$	: f ile g Çözümlerinin Wronskian’ı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Kesirli Mertebeden Konform Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri

Hülya AKDEMİR

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Haziran, 2019

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, kesirli mertebeden kalkulüsün temel tanım ve özellikleri verildi.

Son olarak, kesirli mertebeden konform Sturm-Liouville operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: konform kesirli kalkulüs**,** Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları

Hazırlanan bu Yüksek Lisans tezi Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü (BAP) tarafından 0508-YL-18 proje numarası ile desteklenmiştir.

SUMMARY

M. Sc. Thesis
Extensions of Fractional Order Conformable Sturm-Liouville Operator

Hülya AKDEMİR

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Hüseyin TUNA

June, 2019

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, basic definitions and properties of conformable fractional calculus are given.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self adjoint and other extensions of conformable fractional Sturm-Liouville operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: conformable fractional calculus, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions

The present M.Sc. Thesis was supported by Burdur Mehmet Akif Ersoy University Scientific Research Projects Coordination Under the Project number of 0508-YL-18.

1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden kalkulüs bilimin teorik ve uygulamalı alanlarında ve mühendislikteki araştırmacılarının yakın zamanlarda çok ilgisini çekmeye başlamıştır. Kesirli mertebe kavramı keyfi mertebeden türev ve integrali ifade eder. Bu kesirli mertebeden türev kavramı ilk olarak L'Hospital'in Leibniz'e sorduğu $n = 1/2$ için $\frac{d^n f}{dx^n}$ ne demektir sorusuyla literatüre girmiştir. O zamandan günümüze pek çok araştırmacı kesirli mertebeden türe tanımını ortaya koymuştur. Bunlardan en popüler olanları,

1. Riemann-Liouville $\alpha \in [n-1, n)$ için f'nin α mertebeden türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx,$$

2. Caputo $\alpha \in [n-1, n)$ için f'nin α mertebeden türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx,$$

dir. Bu tanımlardaki kesirli mertebeden türevlerin bildiğimiz adi türevin belli başlı özelliklerini (iki fonksiyonun çarpımını türevi, bölümünün türevi, bileşke fonksiyonlar için zincir kuralı gibi) sağlamaması matematikçileri yeni kesirli mertebeden türev tanımı arayışına itmiştir. Bu amaçla Khalil ve arkadaşları (Khalil, vd., 2014) konform kesirli türev ve konform kesirli integrali tanımlamışlardır. Yaptıkları bu tanımlama bilinen adi türevdeki limit formuna dayanmaktadır. Konform kesirli mertebe türev için adi türevin temel özellikleri (çarpımın türevi, toplamın türevi, bölümün türevi, ortalama değer teoremi, Rolle teoremi) ispatlamışlardır. Daha sonra Abdeljawad (Abdeljawad, 2015) bu yeni konform kesirli mertebeden kalkulüs teoresini geliştirerek zincir kuralı, üstel fonksiyonlar, gronwall eşitliği, kısmi integrasyon, Taylor kuvvet serisi açılımı, Laplace dönüşümünün konform kesirli kalkulüs versiyonlarını vermiştir. Anderson ve Ulness (Anderson ve Ulness,2015) konform kesirli türev kavramını biraz daha genelleştirerek birim operatörü içeren bir yapı ortaya koymuştur.

Simetrik operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili ilk sonuçlar J. von Neumann (von Neumann, 1929) tarafından elde edilmiştir. J. von Neumann hangi koşullarda simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl olacağını göstermiştir. Rellich (Rellich, 1951), Krein (Krein, 1947, 1952), Vishik (Vishik, 1952), Birman (Birman, 1956), Phillips (Phillips, 1959) simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır. Lineer bağıntılar yardımıyla simetrik operatörlerin genişlemesiyle ilgili ilk sonuçlar Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) tarafından elde edildi. Bu metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984), Allahverdiev (Allahverdiev,1995, 2013, 2014, 2016, 2019) ve Kholkin (Kholkin, 1981) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk, vd., 1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bkz.: Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk, vd., 1989).

Bu tez çalışmasında, konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville denklemi ele alınmıştır. Bu denklem için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Lineer uzaylarda tanımlı olan dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.2. U, bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u,v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (u,v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı denir:

1. $(u,u) \geq 0; (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $(u,v) = \overline{(v,u)}$
3. $(\lambda u,v) = \lambda(u,v)$
4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilen bu özellikler gözönünde bulundurularak $(u,\lambda v) = \bar{\lambda}(u,v)$ ve $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.3. Bir $(U,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \tag{2.1}$$

normuna göre tam ise, yani $\big(U,(.,.)\big)$ içindeki her Cauchy dizisi U' nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.4. Bir U iç çarpım uzayı

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} \tag{2.2}$$

ifadesi bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olur.

Sayılabilir, tam ortonormal sistem içeren bir iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir ve genellikle H ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.5. Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir *T* lineer operatörü verilsin.

$\forall u \in H$ için, $\|Tu\| \leq k\|u\|$ (2.3)

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. Bu k sayılarının en küçüğüne *T* sınırlı operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Tu\| \qquad (2.4)$$

eşitliği ile de hesaplanabilir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.1.6. *H* bir Hilbert uzayı ve *T* bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, *T* nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, *H* Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \qquad (2.5)$$

eşitliğini saplayan T^* operatörüne T' nin eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in$ H vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

- **i.** $(T^*)^* = T$
- **ii.** $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
- **iii.** $(T + L)^* = T^* + L^*$
- **iv.** $(T)^* = L^*T^*$
- **v.** $\|T^*\| = \|T\|$ $(T\ sınırlı\ iken)$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. $T^* = T$ ise, *T'* ye kendine eş operatör adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.8. *A* lineer operatörünün *D(A)* tanım kümesi *H* Hilbert uzayında yoğun olmak üzere,

$$\forall f \in D(A), Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.6}$$

ise, A lineer operatörüne disipatif (dissipative) operatör denir.

$$\forall f \in D(A), Im(Af, f) \leq 0 \tag{2.7}$$

ise, A lineer operatörüne akretif(acceretive) operatör denir (Gorbachuc ve Gorbachuk, 1991).

A lineer operatörüne akretif(acceretive) operatördür ancak ve ancak A disipatif(dissipative) operatördür.

Eğer A disipatif(akretif) operatörü kendinden farklı disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif (akretif) operatör denir.

Disipatif operatörler daima kapanabilir. Disipatif operatörlerin kapanışı da disipatifdir. Maksimal disipatif operatörler daima kapalıdır.

2.2. Konform Kesirli Türevler

Tanım 2.2.1. Mertebesi $\alpha\epsilon(0,1)$ olmak üzere $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konform kesirli türevi

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \forall t > 0 \tag{2.8}$$

ile tanımlanır. Eğer f, $a > 0$ için $(0, a)$ aralığında *α-türevlenebilir* ve $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa, o zaman $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ ile tanımlanır (Khalil vd., 2014).

Bir fonksiyonu $\alpha = 0$ mertebeden türevi fonksiyonun kendisine eşit değildir. Gerçekten de

$$(T_0 f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f[t(1+\varepsilon)] - f(t)}{1+\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \text{ dir.}$$

Yukarıdaki denklemdeki birinci çarpan mertebesi 1 olan kuantum türeve karşılık gelir, ikinci çarpan ise ∞ gider (Ortigueira ve Tenreiro Machado, 2014).

Teorem 2.2.1. $\alpha \in (0,1]$, $t_0 > 0$ olsun. Eğer $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t_0 noktasında *α-türevlenebilirse* o halde t_0 noktasında f süreklidir (Khalil vd., 2014).

İspat: Öncelikle

$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon$ eşitliğinden

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon$$

elde edilir. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ olarak seçersek,

$$\lim_{h\to 0}[f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0).0$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$\lim_{h\to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$ bulunur. Yani t_0 noktasında f süreklidir.

Teorem 2.2.2. $\alpha \in (0,1]$ ve f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında *α-diferansiyellenebilir* olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \forall a, b \epsilon \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$.
3. $T_\alpha(\lambda) = 0$, her sabit fonksiyon $f(t) = \lambda$.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$.
6. Ayrıca f türevlenebilirse, o zaman $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.

(Khalil vd., 2014).

İspat: (1)-(3) özellikler tanımdan direk elde edilir. Önemli olanlardan (4) ve (6)'yı ispat edelim. Şimdi, sabit $t > 0$ için,

$$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} . g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$$

$= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha(g)(t)$ dir.

g, t'de sürekli olduğundan $\lim_{\varepsilon \to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir. Bu (4)'ün ispatını tamamlar.
(5) de benzer yöntemle ispatlanır.
(6) ispat etmek için Tanım 2.2.1 deki $h = \varepsilon^{1-\alpha}$ seçersek ve $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ olur. O halde

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \right)$$

$= t^{1-\alpha} \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.

Şimdi bazı fonksiyonların konform kesirli türevini verelim:

1. $T_\alpha(e^{cx}) = c x^{1-\alpha} e^{cx},\ c \in \mathbb{R}.$
2. $T_\alpha(\sin bx) = b x^{1-\alpha} \cos bx,\ b \in \mathbb{R}.$
3. $T_\alpha(\cos bx) = -b x^{1-\alpha} \sin bx,\ b \in \mathbb{R}.$
4. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = 1.$
5. $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$
6. $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$
7. $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha}$. (Khalil vd., 2014).

Tanım 2.2.2. Mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ olan $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasındaki soldan konform kesirli türevi,

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.9}$$

ile tanımlanır. $a = 0$ olduğunda T_α ile gösterilir. Eğer (a, b) üzerinde $(T_\alpha f)$(t) varsa

$(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \to a^+} (T_\alpha^a f)(t)$'dir.

Mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ olan $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu b noktasındaki sağdan konform kesirli türevi,

$$({}_\alpha^b T f)(t) = \lim -_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.10}$$

ile tanımlanır. Eğer (a, b) üzerinde $({}_\alpha^b T f)$(t) varsa, o halde

$({}_\alpha^b T f)$(b) = $\lim_{t \to b^-} ({}_\alpha^b T f)$(t)'dir (Abdeljawad, 2014).

Tanım 2.2.3. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ alalım. $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ($f^{(n)}(t)$ mevcut olan) a noktasındaki α. mertebeden soldan kesirli türevi,

$$(\mathbf{T}_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

ile tanımlanır. Burada $a = 0$ yazdığımız zaman $\mathbf{T}_\alpha$ olur. f fonksiyonunun ($f^{(n)}(t)$ mevcut olan) b noktasındaki α. mertebeden sağdan kesirli türevi,

$({}_\alpha^b \mathbf{T} f)(t) = (-1)^{n+1} \left({}_\beta^b T f^{(n)}\right)(t)$ ile tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

Dikkat edelirse, $\alpha = n + 1$ olursa o zaman $\beta = 1$ ve f'in kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ (veya $\alpha \in (0,1)$) olduğunda $\beta = \alpha$ olur ve Tanım 2.2.2 elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Teorem 2.2.3. (Zincir Kuralı): $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $f, g: (a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları soldan $\alpha - türevlenebilir$ ve $h(t) = f(g(t))$ olsun. Bu durumda $h(t)$ fonksiyonu soldan $\alpha - türevlenebilirdir$ ve

$$\forall t, t \neq a, g(t) \neq 0, (T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big).(T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \tag{2.11}$$

dir. Eğer

$$t = a \text{ ise, } (T_\alpha^a h)(a) = \lim_{t \to a^+} (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big).(T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \tag{2.12}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımda $u = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ alınır ve g fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$(T_\alpha^a h)(t) = \lim_{u \to t} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{u - t} t^{1-\alpha}$$

$$= \lim_{u \to t} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{g(u) - g(t)} . \lim_{u \to t} \frac{g(u) - g(t)}{u - t} t^{1-\alpha}$$

$$= \lim_{g(u) \to g(t)} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{\big(g(u) - g(t)\big)} g(t)^{1-\alpha}. T_\alpha^a g(t). g(t)^{\alpha-1}$$

$$= (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big).(T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1} \tag{2.13}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.1. $f: [a, \infty) \to \infty$ fonksiyonu (a, ∞) aralığında iki defa türevlenebilir olsun. α ve β sayılarını $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ve $1 < \alpha + \beta \leq 2$ olacak şekilde tanımlayalım. O halde

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t) \tag{2.14}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: f fonksiyonunun iki defa türevlenebilir oluşunu ve kesirli çarpımın türevi kuralını kullanırsak

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} [t^{1-\beta}(t-a)^{-\beta} f'(t)$$

$$= t^{1-\alpha}[t^{1-\beta} f''(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} f'(t)]$$

$$= T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t) \tag{2.15}$$

elde edilir. Dikkat edersek, (2.14) de $\alpha, \beta \to 1$ alınırsa

$T_\alpha^a T_\beta f(t) = T_2 f(t) = f''(t)$ elde edilir.

Konform kesirli türev herhangi bir α ve β için $T_\alpha T_\beta(f)(t) \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$ indeks kuralına sahip değildir: (2.8) denklemi iki defa uygulanırsa

$$T_\alpha T_\beta(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left[t+\varepsilon t^{1-\alpha}+\left(\varepsilon t^{1-\beta}\right)^{1-\beta}\right] - f\left(t+\varepsilon t^{1-\beta}\right) - f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) + f(t)}{\varepsilon^2} \neq T_{\alpha+\beta}(f)(t)$$

olduğu görülür (Ortigueira ve Tenreiro Machado, 2014).

Varsayalım ki $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n$ öyle ki $f^{(n)}(t)$ sürekli olsun. O halde,

$$(\mathbf{T}_\alpha^a f)(t) = \left(T_{\alpha+1-n}^a f^{(n-1)}\right)(t) = (t-a)^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$$

ve böylelikle

$(\mathbf{T}_\alpha^a f)(a) = \lim_{t\to a^+} (t-a)^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde, $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $f^{(n)}(t)$ sağdan durum yerine

$({}_\alpha^b T f)(b) = \lim_{t\to b^-} (b-t)^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = 0$ dir (Abdeljawad, 2014).

$0 < \alpha < 1$ ile $n \in \{1,2,3,\dots\}$, *n'inci* mertebeden soldan(sağdan) dizisel konform kesirli türev tanımı sırasıyla,

$$ {}^{(n)}T_\alpha^a f(t) = \underbrace{T_\alpha^a T_\alpha^a \cdots T_\alpha^a f(t)}_{n-defa} \tag{2.16}$$

ve

$$ {}^{b}T_\alpha^{(n)} f(t) = \underbrace{{}_{\alpha}^{b}T\,{}_{\alpha}^{b}T \cdots {}_{\alpha}^{b}T f(t)}_{n-defa}, \tag{2.17}$$

ile verilir (Abdeljawad, 2014).

Eğer, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ve $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli, iki kez türevlenebilirse doğrudan hesaplamalar gösterir ki,

$$ {}^{(2)}T_\alpha^a f(t) = T_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = \begin{cases} (1-\alpha)(t-a)^{1-2\alpha} f'(t) + (t-a)^{2-2\alpha} f''(t) & ise\ t > a, \\ 0 & ise\ t = a, \end{cases}$$

dir. Benzer şekilde, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ve $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sağdan durum için sürekli, iki kez türevlenebilirse doğrudan hesaplamalar gösterir ki,

$$ {}^{b}T_\alpha^{(2)} f(t) = {}_{\alpha}^{b}T\,{}_{\alpha}^{b}T f(t) = \begin{cases} (1-\alpha)(b-t)^{1-2\alpha} f'(t) + (b-t)^{2-2\alpha} f''(t) & ise\ t > b, \\ 0 & ise\ t = b, \end{cases}$$

dir.

2.3. Konform Kesirli İntegraller

Tanım 2.3.1. $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$ (I_\alpha^a f) = \int_a^t f(x) d\alpha\,(x,a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

$a = 0$ yazdığımızda $d\alpha(x)$ olur. Benzer şekilde,

$$ ({}_{\alpha}^{b}I f) = \int_t^b f(x) d\alpha(b,x) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

ile tanımlanan I_α^a ve ${}_\alpha^b I$ operatörlerine f fonksiyonunun konform soldan ve sağdan kesirli integrali denir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.1. Farz edelim ki $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O zaman $\forall t > a$, $T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$ dir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.2. Farz edelim ki $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O zaman
$\forall t < b$, ${}_\alpha^b T {}_\alpha^b I f(t) = f(t)$ dir (Abdeljawad, 2014).

Tanım 2.3.2. $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. α mertebeden soldan kesirli integral

$$(I_\alpha^a f)(t) = \mathbf{I}_{n+1}^a\big((t-a)^{\beta-1} f\big) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n\,(x-a)^{\beta-1} f(x)dx \tag{2.18}$$

ile tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

Dikkat edersek, $\alpha = n + 1$ ise, $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Buradan da

$$(I_\alpha^a f)(t) = (\mathbf{I}_{n+1}^a f)(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n f(x)dx$$

elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Hatırlarsak, a noktasında mertebesi $\alpha > 0$ olan soldan Riemann- Liouville kesirli integrali

$$(\mathbf{I}_\alpha^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \tag{2.19}$$

ile tanımlanıyordu. Bu tanımdan görüyoruz ki

$(I_\alpha^a f)(t) = (\mathbf{I}_\alpha^a f)(t)$ için, $\alpha = n + 1, n = 0,1,2, \ldots$ dir (Abdeljawad, 2014).

Örnek 2.3.1. Hatırlarsak,

$(\mathbf{I}_\alpha^a (t-a)^{\mu-1})(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\mu-1}$, $\alpha, \mu > 0$ idi.

$(t-a)^{\mu}$ fonksiyonunun mertebesi $\alpha \in (n, n+1]$ olan (konform) kesirli integrali hesaplayabiliriz. Gerçekten $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha + \mu - n > 0$ için,

$$(I_{\alpha}^{a}(t-a)^{\mu})(x) = (\mathbf{I}_{n+1}^{a}(t-a)^{\mu+\alpha-n-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(x-a)^{\alpha+\mu} \tag{2.20}$$

elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Benzer olarak, sağdan (konform) kesirli integralini bulabiliriz. Yani $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha + \mu - n > 0$ için,

$$({}_{\alpha}^{b}I(b-t)^{\mu})(x) = \left({}_{n+1}^{\;\;b}\mathbf{I}(b-t)^{\mu+\alpha-n-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(b-x)^{\alpha+\mu} \tag{2.21}$$

bulunur (Abdeljawad, 2014).

Önerme 2.3.1. $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha, \mu \le 1$ öyle ki $1 < \alpha + \mu \le 2$ olsun. O halde

$$\left(I_{\alpha} I_{\mu} f\right)(t) = \frac{t^{\mu}}{\mu}(I_{\alpha} f)(t) + \frac{1}{\mu}\left(I_{\alpha+\mu} f\right) - \frac{t}{\mu}\int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s) ds \tag{2.22}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: İntegrallerin sırasını değiştirelim

$$\left(I_{\alpha+\mu} f\right)(t) = \left(\mathbf{I}_2 s^{\alpha+\mu-2} f(s)\right)(t) \tag{2.23}$$

O zaman

$$\begin{aligned}
\left(I_{\alpha} I_{\mu} f\right)(t) &= \textstyle\int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(s) s^{\alpha-1} ds\right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\
&= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left(\int_s^{t_1} t_1^{\mu-1} dt_1\right) ds \\
&= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left[\frac{t^{\mu}}{\mu} - \frac{s^{\mu}}{\mu}\right] ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{t^{\mu}}{\mu}(I_{\alpha}f)(t) + \frac{1}{\mu}\left[\left(I_{\alpha+\mu}f\right)(t) - t\int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s)ds\right]. \blacksquare \tag{2.24}$$

elde edilir. Eğer (2.22) formülünde $\alpha, \mu \to 1$ giderse $(I_1 I_1 f)(t) = (I_2 f)(t)$ olur.

Riemann sağdan ve soldan kesirli integrali üzerindeki($Qf(t) = f(a+b-t)$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$) Q-operatörünü hatırlayalım:

$$Q\mathbf{I}_{\alpha}^{a} f(t) = {}_{\alpha}^{b}\mathbf{I}Qf(t) \tag{2.25}$$

dir. $\alpha \in (n, n+1]$ aldığımızda,

$$QI_{\alpha}^{a} f(t) = Q\mathbf{I}_{n+1}^{a}\left((t-a)^{\alpha-n-1}f(t)\right) = {}_{n+1}^{\ \ b}\mathbf{I}\left((b-t)^{\alpha-n-1}f(a+b-t)\right)$$

$$= {}_{\alpha}^{b}IQf(t), \tag{2.26}$$

elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.3. Varsayalım ki $\alpha \in (n, n+1], f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon öyle ki $f^{(n)}(t)$ süreklidir. O halde

$\forall t > a$, $\mathbf{T}_{\alpha}^{a} I_{\alpha}^{a} f(t) = f(t)$ dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımdan

$$\mathbf{T}_{\alpha}^{a} I_{\alpha}^{a} f(t) = T_{\beta}^{a}\left(\frac{d^n}{dt^n} I_{\beta}^{a} f(t)\right)$$

$$= T_{\beta}^{a}\left(\frac{d^n}{dt^n} I_{n+1}^{a} (t-a)^{\beta-1} f(t)\right)$$

$$= T_{\beta}^{a}\left(I_{1}^{a} (t-a)^{\beta-1} f(t)\right) \tag{2.27}$$

elde edilir. Yani

$\mathbf{T}_{\alpha}^{a} I_{\alpha}^{a} f(t) = T_{\beta}^{a} I_{\beta}^{a} f(t)$ Lemma 2.3.1 kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 2.3.4. $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun öyle ki $f^{(n)}(t)$, $\alpha \in (n, n+1]$ için süreklidir. O halde

$\forall t < b$, ${}_{\alpha}^{b}\mathbf{T}_{\alpha}^{b} I f(t) = f(t)$ dir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.5. $f, h: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları olsun öyle ki $t > a$ var T_{α}^{a} var (a, ∞) üstünde f türevlenebilir ve

$T_{\alpha}^{a} f(t) = (t-a)^{1-\alpha} h(t)$ dir. O zaman

$\forall t > a,\ h(t) = f'(t)$ dir (Abdeljawad, 2014).

Sonuç 2.3.1. $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun öyle ki $b > t > a$ için $(I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a}) f(t)$ mevcut olsun. O halde $f(t)$, (a, b) üzerinde türevlenebilirdir (Abdeljawad, 2014).

Lemma 2.3.6. $0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde

$$\forall t > a,\ I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a}(f)(t) = \mathrm{f(t)} - \mathrm{f(a)} \tag{2.28}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: f diferansiyellenebilir olduğunda Teorem 2.2.2'deki yardımıyla

$$I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a}(f)(t) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1}\, T_{\alpha}(f)(x) dx$$

$$= \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x) dx = f(t) - f(a) \tag{2.29}$$

elde edilir.

Önerme 2.3.2. $\alpha \in (n, n+1]$, $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $t > a$ için $(n+1)$ defa diferansiyellenebilir olsun. O halde

$$\forall t > a,\ I^a_\alpha \mathbf{T}^a_\alpha(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}, \tag{2.30}$$

elde edilir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımdan Teorem 2.2.1'deki elde edilir,

$$I^a_\alpha \mathbf{T}^a_\alpha(f)(t) = I^a_{n+1}\left((t-a)^{\beta-1} T^a_\beta f^{(n)}(t)\right)$$

$$= I^a_{n+1}\left((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t)\right)$$

$$= I^a_{n+1} f^{(n+1)}(t). \tag{2.31}$$

O halde kısmi integrasyonla istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 2.3.3. $\alpha \in (n, n+1]$, $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, $t < b$ için $(n+1)$ defa diferansiyellenebilir olsun. O halde

$$\forall t < b \ için, \qquad {}^b_\alpha I^b_\alpha \mathbf{T}(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}. \tag{2.32}$$

Özel olarak, $n = 0 \ ya \ da \ 0 < \alpha \leq 1$ ise,

${}^b_\alpha I^b_\alpha T(f)(t) = f(t) - f(b)$ dir (Abdeljawad, 2014).

Şimdi Gronwall eşitliğinin kesirli versiyonunu ispatlayacağız.

Teorem 2.3.1. $r, J = [a, b]$ aralığı üzerinde sürekli, negatif olmayan fonksiyon olsun. $\delta \ ve \ k$ negatif olmayan sabitler olmak üzere,

$r(t) \leq \delta + \int_a^t k r(s)(s-a)^{\alpha-1} ds \ , \ t \in J$ dir.

O halde $\forall t \in J,\ r(t) \leq \delta e^{k\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}}$ dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: $R(t) = \delta + \int_a^t kr(s)(s-a)^{\alpha-1}ds = \delta + I_\alpha^a\big(kr(s)\big)(t)$ tanımlayalım.

O halde $R(a) = \delta$ ve $R(t) \geq r(t)$,

$$T_\alpha^a R(t) - kR(t) = kr(t) - kR(t) \leq kr(t) - kr(t) = 0 \tag{2.33}$$

dır. (2.33) ile $K(t) = e^{-k\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}}$ çarpalım. Teorem 2.2.3'deki Zincir kuralı yardımıyla

$T_\alpha^a K(t) = -kK(t)$ olduğu görülür. Çarpım kuralını kullanırsak

$T_\alpha^a\big(K(t)R(t)\big) \leq 0.$

$K(t)R(t), (a,b)$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğundan, Lemma 2.3.6 dan

$$I_\alpha^a T_\alpha^a\big(K(t)R(t)\big) = K(t)R(t) - K(a)R(a) = K(t)R(t) - \delta \leq 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. Buradan

$$r(t) \leq R(t) \leq \frac{\delta}{K(t)} = \delta e^{k\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}} \tag{2.35}$$

ispat tamamlandı.

3. KESİRLİ MERTEBEDEN KONFORM KALKULÜS

3.1. Kısmi İntegrasyon

Teorem 3.1.1. $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon öyle ki fg türevlenebilir olsun. O halde

$$\int_a^b f(x) T_\alpha^a(g)(x) d\alpha(x, a) = fg|_a^b - \int_a^b g(x) T_\alpha^a\,(f)(x) d\alpha(x, a) \tag{3.1}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

Önerme 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(t) \left({}^b I_\alpha \ \right)(x) d_\alpha(t, a) \tag{3.2}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Tanımdan

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(t, a) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)\, dx \right) g(t)(b-t)^{\alpha-1} d_t$$

elde edilir. İntegrallerin sırası değiştirilerek,

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(x) \left({}^b I_\alpha\ g \right)(x) d_\alpha(x, a)$$

bulunur.

Teorem 3.1.2. $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t) \left({}^b T_\alpha\ g \right)(t) d_\alpha(b, t) + f(t) g(t)\, |_a^b \tag{3.3}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Önerme 2.3.3'den ve g diferansiyellenebilir olduğundan,

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(t,a)$$

$$= \int_a^b (T_\alpha^a f)(t)\ {}^bI_\alpha\ \ {}^bT_\alpha\ g(t) d_\alpha(t,a) + g(b) \int_a^b (T_\alpha^a f)(t) d_\alpha(t,a) \tag{3.4}$$

elde edilir. Önerme 3.1.1 uygulanırsa

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t)\, d_\alpha(t,a) = \int_a^b (I_\alpha^a T_\alpha^a f)(t)\ \ {}^bT_\alpha\ g(t) d_\alpha(b,t) + g(b)(I_\alpha^a T_\alpha^a f)(a) \tag{3.5}$$

bulunur. O halde

Lemma 2.3.6 da $I_\alpha^a T_\alpha^a (f)(t) = f(t) - f(a)$ ve

Önerme 2.3.3 de $\ {}^bI_\alpha\ \ {}^bT_\alpha\ (g)(t) = g(t) - g(b)$

yerine koyarsak ve f ve g'nin diferansiyellenebilirliği göz önüne alındığında ispat tamamlanır.

Uyarı 3.1.1. Teorem 3.1.1 ve ya Teorem 3.1.2 $\alpha \to 1$ alınırsa adi kalkulüs için kısmi integrasyon formülü elde edilir. Burada

$\alpha \to 1$ iken $d_\alpha(t,a) \to dt, d_\alpha(b,t) \to dt,\ T_\alpha^a f(t) \to f'(t),\ \ {}^bT_\alpha\ f(t) \to -f'(t)$

olur (Abdeljawad, 2014).

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3 içinde bazı diferansiyellenebilirlik şartları lazımdır. Şimdi kısmi integrasyon formülleri geçerli olduğu bazı fonksiyon uzaylarını tanımlayalım.

Tanım 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ ve $[a,b]$ bir aralık olmak üzere,

$I_\alpha([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R}: f(x) = (I_\alpha^a \psi)(x) + f(a), bazı\ \psi \in L_\alpha(a)\}$

ve

${}_{\alpha}I([a,b]) = \{g:[a,b] \to \mathbb{R}: g(x) = ({}^{b}I_{\alpha}\, \varphi)(x) + g(b), bazı\ \varphi \in L_{\alpha}(b)\}.$

$L_{\alpha}(a) = \{\psi:[a,b] \to \mathbb{R}: \exists(I_{\alpha}^{a}\psi)(x), \forall x \in [a,b]\}$

ve

$L_{\alpha}(b) = \{\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}: \exists({}^{b}I_{\alpha}\, \varphi)(x), \forall x \in [a,b]\}$

ile tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

Lemma 3.1.1. $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde

a) Eğer f sol (g sağ) $\alpha - diferansiyellenebilir$ ise,

$f \in I_{\alpha}([a,b]), \left(g \in {}^{\alpha}I([a,b])\right)$ dir.

b) ψ fonksiyonu sürekli olmak üzere, eğer $f \in I_{\alpha}([a,b])$ ve

$f(x) = (I_{\alpha}^{a}\psi)(x) + f(a)$ ise, $\psi(x) = T_{\alpha}^{a}f(x)$ ve $(I_{\alpha}^{a}T_{\alpha}^{a}f)(x) = f(x) - f(a)$ dir.

c) φ fonksiyonu sürekli olmak üzere, eğer $g \in {}^{\alpha}I([a,b])$ ile

$g(x) = ({}^{b}I_{\alpha}\, \varphi)(x) + g(b)$ ise $\varphi(x) = {}^{b}T_{\alpha}\, g(x)$ ve $({}^{b}I_{\alpha}\ {}^{b}T_{\alpha}\, g)(x) = g(x) - g(b)$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat:

(a)'nın ispatını Lemma 2.3.6 ve Önerme 2.3.3'de $\psi(t) = T_{\alpha}^{b}f$ ve $\varphi(t) = {}^{b}T_{\alpha}\, g$ seçerek yapabiliriz.

(b)'nin ispatını Lemma 2.3.1 ve sabit fonksiyonun sol $\alpha - türevi$ sıfırdır.

(c)'nin ispatın Lemma 2.3.2 ve sabit fonksiyonun sağ $\alpha - türevi$ sıfırdır.

Teorem 3.1.3. $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsun öyle ki $f \in I_\alpha([a, b])$ ile $\psi(t)$ sürekli ve $g \in {}_\alpha I([a, b])$ ile $\varphi(t)$ sürekli olsun. O halde

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t) \left({}^b T_\alpha \; g(t) \right) d_\alpha(b, t) + f(t) g(t)|_a^b \tag{3.7}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

3.2. Kesirli Kuvvet Serisi Açılımları

Teorem 3.2.1. f fonksiyonu bir t_0 noktasının komşuluğunda $0 < \alpha \leq 1$ için sonsuz $\alpha - diferansiyellenebilir$ fonksiyon olsun. O zaman f kesirli kuvvet serisi açılımına

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)} (t_0) - (t - t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, \; t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, \; R > 0. \tag{3.8}$$

sahiptir. Burada $\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)} (t_0)$, k defa kesirli türevin uygulanması anlamındadır (Abdeljawad, 2014).

İspat: Kabul edelim ki

$$f(t) = c_0 + c_1 (t - t_0)^\alpha + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + c_3 (t - t_0)^{3\alpha} + \cdots, \; t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, R > 0$$

dır. O halde, $f(t_0) = c_0$dır. f için $T_\alpha^{t_0}$ uygularsak ve t_0 değerini hesaplarsak

$\left(T_\alpha^{t_0} f\right)(t_0) = c_1 \alpha$ olduğu görülür. Buradan

$c_1 = \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)(t_0)}{\alpha}$ dir. Tümevarım kullanılarak $T_\alpha^{t_0}, f \; n -$defa uygulanarak ve t_0

hesaplanırsa,

$$\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(n)} (t_0) = c_n \alpha (2\alpha) \ldots (n\alpha) = c_n \alpha^n n! \tag{3.9}$$

ve buradan $c_n = \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(n)}(t_0)}{\alpha^n n!}$

elde edilir. Buradan (3.8) elde edildi ve ispat tamamlandı.

Önerme 3.2.1. (Kesirli Taylor Eşitsizliği): Farz edelim ki, f fonksiyonu t_0 noktasının bir komşuluğu $0 < \alpha \leq 1$ için sonsuz $\alpha - diferansiyyellenebilir$ fonksiyon olsun ve (3.8) Taylor kuvvet serisi açılımına sahip ve $|(T_\alpha^\alpha f)^{n+1}| \leq M,\ M > 0$, $bazı\ n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde

$$\forall (t_0, t_0 + R), |R_n^\alpha(t)| \leq \frac{M}{\alpha^{n+1}(n+1)!}(t - t_0)^{\alpha(n+1)} \tag{3.10}$$

dır. Burada

$R_n^\alpha(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$ dır.

İspat adi kalkulüsde $I_\alpha^{t_0}$ benzer şekilde hesaplanır (Abdeljawad, 2014).

Örnek 3.2.1. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f(t) = e^{\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}$ göz önüne alalım. $f(t)$ fonksiyonu açıktır ki t_0 da diferansiyellenebilir değildir. Dolayısıyla t_0 civarında Taylor kuvvet serisi açılımına sahip değildir. Bununla birlikte $\forall n, \left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(n)} = 1$ ve buradan

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} \tag{3.11}$$

dır. Bölüm testi bu serinin $[t_0, \infty)$ aralığında f yakınsadığını gösterir (Abdeljawad, 2014).

Örnek 3.2.2. Fonksiyonlar $g(t) = \sin\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}$ ve $h(t) = \cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ için $t = t_0$ civarında Taylor kuvvet sersi açılımlarına sahip değillerdir çünkü orada diferansiyellenebilir değiller. Bununla birlikte (3.8) denklemi yardımıyla

$T_\alpha^{t_0} \sin\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} = \cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}$ ve $T_\alpha^{t_0} \cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} = -\sin\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}$

ve

$$\sin\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(t-t_0)^{(2k+1)\alpha}}{\alpha^{(2k+1)}(2k+1)!}, t \in [t_0, \infty) \tag{3.12}$$

ve

$$\cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(t-t_0)^{(2k)\alpha}}{\alpha^{(2k)}(2k)!}, t \in [t_0, \infty) \tag{3.13}$$

olduğu görülür (Abdeljawad, 2014).

Örnek 3.2.3. Fonksiyon $f(x) = \frac{1}{1-\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ $0 < \alpha \leq 1$ için $t = 0$ Taylor kuvvet serisi açılımına sahip değildir çünkü diferansiyellenebilir değildir. Bununla birlikte, (3.8) denklemi yardımıyla görebiliriz ki,

$$\frac{1}{1-\frac{t^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{\alpha k}, \quad t \in [0,1) \tag{3.14}$$

dir. Daha genel olarak,

$$\frac{1}{1-\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}(t-t_0)^{\alpha k}, \quad t \in [t_0, t_0+1) \tag{3.15}$$

ifadesi yazılabilir (Abdeljawad, 2014).

Uyarı 3.2.1. f fonksiyonu $(-\infty, a)$ üzerinde tanımlı ve a da diferansiyellenebilir değilse o zaman $0 < \alpha \leq 1$ için a noktasında ${}^{a}T_\alpha$ sağdan konform kesirli mertebe türevi araştırırız. Ve bazı $(a-R, a), R > 0$ aralığı üzerinde kesirli Taylor seri açılımı için kullanılır.

Örneğin, $\frac{(a-t)^\alpha}{\alpha}$, $\sin\frac{(a-t)^\alpha}{\alpha}$ ve buna benzer fonksiyonlar (Abdeljawad, 2014).

3.3. Kesirli Laplace Dönüşümleri

Tanım 3.3.1. $t_0 \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ olsun. O halde f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli Laplace dönüşümü,

$$L_\alpha^{t_0}\{f(t)\}(s) = F_\alpha^{t_0}(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t) d_\alpha(t, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t)(t, t_0)^{\alpha-1} d_t \tag{3.16}$$

ile tanımlanır (Abdeljawad, 2014).

Teorem 3.3.1. $a \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1$ ve $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. O halde

$$L_\alpha^a\{T_\alpha(f)(t)\}(s) = sF_\alpha(s) - f(a) \tag{3.17}$$

dir (Abdeljawad, 2014).

İspat: Teorem 2.2.2'nin (6). maddesinden ve adi kısmi integrasyon tanım gereği ispatlanır.

Örnek 3.3.1. Konform kesirli başlangıç değer problemini göz önüne alırsak:

$$(T_\alpha^a y)(t) = \lambda y(t), y(a) = y_0, t > a, \tag{3.18}$$

burada çözüm (a, ∞) üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu kabul edelim. I_α^a operatörünü yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$y(t) = y_0 + \lambda(I_\alpha^a y)(t) \tag{3.19}$$

elde edilir. O zaman

$$y_{n+1} = y_0 + \lambda(I_\alpha^a y_n)(t), n = 0,1,2, \dots, \tag{3.20}$$

$$n = 0, y_1 = y_0 + \lambda y_0 \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} = y_0\left(1 + \lambda\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}\right) \tag{3.21}$$

olduğu görülür.

$$n = 1,\ y_2 = y_0 \left[1 + \lambda \frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} + \lambda^2 \frac{(t-a)^{2\alpha}}{\alpha(2\alpha)}\right] \tag{3.22}$$

olduğu görülür. Tümevarımla devam edersek,

$$y_n = y_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k (t-a)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} \tag{3.23}$$

sonucu elde edilir. $n \to \infty$ limit alınırsa

$$y(t) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (t-a)^{k\alpha}}{\alpha^k k!} \tag{3.24}$$

olur (Abdeljawad, 2014).

Lemma 3.3.1. $f: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun öyle ki $L_{\alpha}^{t_0}\{f(t)\}(s) = F_{\alpha}^{t_0}(s)$ mevcut olsun. O halde

$$F_{\alpha}^{t_0}(s) = \mathcal{L}\left\{f\left(t_0 + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}(s) \tag{3.25}$$

olur. Burada

$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)\, dt$ olur (Abdeljawad, 2014).

Örnek 3.3.2. Bu örnekte bazı fonksiyonlar için kesirli Laplace dönüşümlerini hesapladık (Abdeljawad, 2014).

1. $L_{\alpha}^{t_0}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0.$
2. $L_{\alpha}^{t_0}\{t\}(s) = \mathcal{L}\left\{t_0 + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}(s) = \frac{t_0}{s} + \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}}, s > 0.$
3. $L_{\alpha}^{0}\{t^p\}(s) = \frac{\alpha^{\frac{p}{\alpha}}}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), s > 0.$

4. $L_\alpha^0\left\{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \frac{1}{s-1}, s > 1.$
5. $L_\alpha^0\left\{\sin\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}\right\}(s) = \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{1}{\omega^2+s^2}.$
6. $L_\alpha^0\left\{\cos\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}\right\}(s) = \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2+s^2}.$
7. $L_\alpha^{t_0}\left\{e^{-k\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-kt}f(t_0+(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\right\}(s)$

Örneğin,

$$L_\alpha^0\left\{e^{-kt\frac{t^\alpha}{\alpha}}sin\frac{t^\alpha}{\alpha}\right\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-kt}\sin t\}(s) = \frac{1}{(s+k)^2+1}$$

ve

$L_\alpha^{t_0}\left\{e^{\lambda\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}\right\} = \mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{s-\lambda}$ dir.

Örnek 3.3.3. Konform kesirli başlangıç değer problemi,

$$(T_\alpha^a y)(t) = \lambda y(t), y(a) = y_0, t > a \tag{3.26}$$

göz önüne alalım. Burada çözüm, (a,∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun. L_α^a ve (3.17) eşitliğini kullanarak

$$L_\alpha^a\{y(t)\}(s) = \frac{y_0}{s-\lambda} \tag{3.27}$$

elde edilir. Buradan $y(t) = y_0 e^{\lambda\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$dir.

Son olarak, (konform) kesirli lineer sistemlerin çözümünü ifade etmek için kesirli temel üstel matrisi kullanalım.

$$T_\alpha^a \mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t), 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.28}$$

sistemini göz önüne alalım. Burada $\mathbf{y}, \mathbf{f}: [a,b) \to \mathbb{R}^n$ vektör fonksiyonlar ve A $n \times n$ tipinde matrisdir. (3.28) tanımlanan kesirli homojen olmayan sistemlerin genel çözümü

$$\mathbf{y}(t) = e^{A\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}\mathbf{c} + \int_a^t e^{A\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} e^{-A\frac{(s-a)^\alpha}{\alpha}}\mathbf{f}(s)(s-a)^{1-\alpha}ds, \tag{3.29}$$

ile verilir. Burada

$$e^{A\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-a)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$$

ve **c** sabit vektördür (Abdeljawad, 2014).

3.4. Wronskian Ve Kesirli Lagrange (Green) Özdeşliği

$0 < \alpha \le 1$ olmak üzere,

$$T_\alpha T_\alpha(f) + P(x)T_\alpha(f) + Q(x)f = 0 \tag{3.30}$$

denklemini ele alalım.

Tanım 3.4.1. $0 < \alpha \le 1$ ve (3.30) denklemini sağlayan f ve g fonksiyonlarının wronskian'ı

$$W_\alpha[f,g] = \begin{vmatrix} f & g \\ T_\alpha(f) & T_\alpha(g) \end{vmatrix} = fT_\alpha(g) - gT_\alpha(f) \tag{3.31}$$

ile tanımlanır (Abu Hammad ve Khahil, 2014).

Teorem 3.4.1. $W_\alpha[f,g] = e^{-I_\alpha(P)}$ (Abu Hammad ve Khahil, 2014).

İspat: $W_\alpha[f,g]$ üzerine T_α operatörünü uygulayalım

$$T_\alpha(W_\alpha[f,g]) = T_\alpha\big(fT_\alpha(g) - gT_\alpha(f)\big)$$

$$= T_\alpha(f)T_\alpha(g) + fT_\alpha T_\alpha(g) - T_\alpha(g)T_\alpha(f) + gT_\alpha T_\alpha(f).$$

Fakat, f ve g fonksiyonları (3.30) denklemini sağlar. Buradan

$T_\alpha T_\alpha(f) = -P(x)T_\alpha(f) - Q(x)f$ ve $T_\alpha T_\alpha(g) = -P(x)T_\alpha(g) - Q(x)g$

elde edilir. O zaman

$T_\alpha(W_\alpha[f,g]) = -P(x)(fT_\alpha(g) - gT_\alpha(f)\,) = -P(x)W_\alpha[f,g]$ dir.

Böylece $\frac{T_\alpha(W_\alpha[f,g])}{W_\alpha[f,g]} = -P(x)$ dir.

Sonuç olarak, $W_\alpha[f,g] = I_\alpha\big(-P(x)\big)$ elde edilir.

Şimdi $L(f,\alpha) = T_\alpha^a(p(x)T_\alpha^a f) + q(x)f$ konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville denklemini ele alalım.

Teorem 3.4.2. (Kesirli Lagrange Özdeşliği): $[a,b]$ aralığı üzerinde f ve g, $2\alpha - s\ddot{u}rekli\ t\ddot{u}revlenebilir$ fonksiyonlar olsun. O zaman aşağıdaki özdeşlik sağlanır,

$$\int_a^b \big(gL(f,\alpha) - fL(g,\alpha)\big)d\alpha(x) = [p(x)(g(T_\alpha^a f) - f(T_\alpha^a g))]|_a^b \tag{3.32}$$

(Al-Refai ve Abdeljawad, 2017).

İspat:

$gL(f,\alpha) - fL(g,\alpha) = gT_\alpha^a\big(p(x)(T_\alpha^a f)\big) + q(x)fg - fT_\alpha^a\big(p(x)(T_\alpha^a g)\big) - q(x)fg$

$= gT_\alpha^a\big(p(x)(T_\alpha^a f)\big) - fT_\alpha^a\big(p(x)(T_\alpha^a g)\big)$

elde edilir. 3. bölümdeki konform kesirli türev için kısmi integrasyon formülü kullanılarak,

$$\int_a^b \big(gT_\alpha^a(p(x)(T_\alpha^a f) - fT_\alpha^a(p(x)(T_\alpha^a g)\big)d\alpha(x)$$

$$= p(x)g(T_\alpha^a f)|_a^b - \int_a^b p(x)T_\alpha^a(f)T_\alpha^a(g)d\alpha(x)$$

$$-p(x)f(T_\alpha^a g)|_a^b + \int_a^b p(x)T_\alpha^a(f)T_\alpha^a(g)d\alpha(x)$$
$$= [p(x)(g(T_\alpha^a f) - (f(T_\alpha^a g))|_a^b],$$

elde edilir.

3.5. Genelleştirilmiş Konform Türev

Buraya kadar verilen konform türev tanımında $\alpha \to 0$ alındığında birim operatör elde edilememektedir. Buradan hareketle birim operatörü elde etmek amacıyla yeni bir konform kesirli türev tanımı Anderson ve Ulness (Anderson ve Ulness, 2015) tarafından verilmiştir.

3.5.1. Tanımlar

Tanım 3.5.1.1. (Konform Diferansiyel Operatörü): $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bir T_α diferansiyel operatörü konformdur ancak ve ancak T_0 özdeşlik operatörü ve T_1 klasik diferansiyel operatördür. Özellikle, diferansiyellenebilir fonksiyon $f = f(t)$, T_α konform ancak ve ancak

$$T_0(f)(t) = f(t)$$

ve

$$T_1(f)(t) = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t) \text{ dir.}$$

Bu bağlamda

$$T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha}f'(t) \tag{3.33}$$

ile verilen operatör konform değildir (Anderson ve Ulness, 2015).

Tanım 3.5.1.2. (Konform Türevlerin Sınıfı): $\alpha \in [0,1]$ ve $\kappa_{0,}\kappa_1: [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ fonksiyonu sürekli olsun, öyle ki

$\lim_{\alpha \to 0^+} \kappa_1(\alpha, t) = 1,\ \lim_{\alpha \to 0^+} \kappa_0(\alpha, t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0,\ \lim_{\alpha \to 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

$\kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \alpha \in [0,1), \kappa_0(\alpha, t) \neq 0, \alpha \in (0,1], \forall t \in \mathbb{R}$

dir (Anderson ve Ulness, 2015).

Eğer f fonksiyonu t'de diferansiyellenebilir ve $f'(t) \coloneqq \frac{d}{dt} f$ olursa

$$T_\alpha(f)(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f'(t) \tag{3.35}$$

ile tanımlanan T_α diferansiyel operatörü konformdur (Anderson ve Ulness, 2015).

Tanım 3.5.1.3. (Kısmi Konform Türev): $\alpha \in [0,1]$ ve $\kappa_{0,}\kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ve (3.34) sağlasın. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun öyle ki herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ için, $\frac{\partial}{\partial t} f(t, s)$ var olsun. Bu durumda kısmi diferansiyel operatörü

$$T_\alpha^t f(t, s) = \kappa_1(\alpha, t) f(t, s) + \kappa_0(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial t} f(t, s), \tag{3.36}$$

ile tanımlanır (Anderson ve Ulness, 2015).

Tanım 3.5.1.4. (Konform Üstel Fonksiyon): $\alpha \in (0,1]$ ve $p: [s, t] \to \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{R}, s \leq t$ fonksiyonu sürekli olsun. $\kappa_{0,}\kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun ve (3.34) eşitliklerini sağlasın. p/κ_0 ve κ_1/κ_0 ile $[s, t]$ aralığı üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyon olsunlar. O zaman (3.35)'deki T_α'ya göre üstel fonksiyon

$$e_p(t, s) := e^{\int_s^t \frac{p(\tau) - \kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau}, \quad e_0(t, s) \coloneqq e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha, \tau)}{\kappa_0(\alpha, \tau)} d\tau} \tag{3.37}$$

ile tanımlanır (Anderson ve Ulness, 2015).

Lemma 3.5.1.1. (Temel Türevler): $\alpha \in [0,1]$ olsun ve (3.35) deki gibi tanımlanan konform diferansiyel operatörü T_α verilsin. $p: [s, t] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

$\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar ve (3.34) eşitliklerini sağlasınlar, p/κ_0 ve κ_1/κ_0 fonksiyonları $[s,t]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. Varsayalım ki f ve g fonksiyonları diferansiyellenebilir olsunlar. O zaman

i. $T_\alpha[af + bg] = aT_\alpha[f] + bT_\alpha[g], \forall a, b \in \mathbb{R};$

ii. $T_\alpha c = c\kappa_1(\alpha,\cdot), her\ sabit\ için\ c \in \mathbb{R};$

iii. $T_\alpha[fg] = fT_\alpha[g] + gT_\alpha[f] - fg\kappa_1(\alpha,\cdot);$

iv. $T_\alpha[f/g] = \frac{gT_\alpha[f] - fT_\alpha[g]}{g^2} + \frac{f}{g}\kappa_1(\alpha,\cdot);$

v. $\alpha \in (0,1]$ ve sabit $s \in \mathbb{R}$ için, (3.37)de verilen üstel fonksiyon $e_p(t,s)$ sağlar,

$$T_\alpha^t\left[e_p(t,s)\right] = p(t)e_p(t,s); \tag{3.38}$$

vi. $\alpha \in (0,1]$ ve (3.37)de verilen üstel fonksiyonu e_0 için,

$$T_\alpha\left[\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] = f(t); \tag{3.39}$$

dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (i) ve (ii) maddeleri (3.35)den kolaylıkla ispatlanabilir.
(iii) ispatlamak için (3.35)den faydalanırsak (değişkeni yok ederek),

$$T_\alpha[fg] = \kappa_0(fg' + f'g) + \kappa_1 fg = (f\kappa_0 g' + f\kappa_1 g) + (g\kappa_0 f' + g\kappa_1 f) - fg\kappa_1$$

$$= f(T_\alpha g) + g(T_\alpha f) - fg\kappa_1$$

elde edilir.
(iv)'ün ispatı da benzer şekilde ihmal edilerek yapılabilir.
(v)'in ispatı, (3.36) kısmi türevi e_p uygulanarak, (3.37) kullanılarak

$$T_\alpha^t e_p(t,s) = \kappa_0(\alpha,t)\left(\frac{p(t)\kappa_1(\alpha,t)}{\kappa_0(\alpha,t)}\right)e_p(t,s) + \kappa_1(\alpha,t)e_p(t,s)$$

$$= \big(p(t) - \kappa_1(\alpha,t)\big)e_p(t,s) + \kappa_1(\alpha,t)e_p(t,s) = p(t)e_p(t,s).$$

elde edilir. Son olarak (vi) için, (3.35) ve (3.37) tekrar kullanılarak

$$T_\alpha\left[\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] = \kappa_0(\alpha,t)\frac{d}{dt}\left(\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right) + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$$= \kappa_0(\alpha,t)\left(\frac{-\kappa_1(\alpha,t)}{\kappa_0(\alpha,t)}\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds + \frac{f(t)e_0(t,t)}{\kappa_0(\alpha,t)}\right) + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$$= -\kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds + f(t) + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$= f(t)$ elde edilir.

Tanım 3.5.1.5. (İntegraller): $\alpha \in (0,1]$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ olsun. (3.37) ve Lemma 3.5.1.1'deki (v) ve (vi) özelliklerinden

$$\int T_\alpha f(t) d_\alpha t = f(t) + ce_0(t,t_0),\ c \in \mathbb{R}$$

ilkel fonksiyonu tanımlanır. Benzer biçimde, $[a,b]$ aralığı üzerinde f'nin integral tanımı,

$$\int_a^t f(s)e_0(t,s)d_\alpha s := \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds,\ d_\alpha s := \frac{1}{\kappa_0(\alpha,s)}ds; \tag{3.40}$$

ile tanımlanır. Burada (3.37)den

$e_0(t,s) = e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)}d\tau} = e^{-\int_s^t \kappa_1(\alpha,\tau)d_\alpha \tau}$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

Lemma 3.5.1.2. (Temel İntegraller): $\alpha \in (0,1]$ olsun, konform diferansiyel operatörü T_α (3.35) de, integral (3.40) da verilsin. $\kappa_{0,}\kappa_1$ sürekli fonksiyonlar olsunlar ve (3.34) eşitliğini sağlasınlar. Burada f ve g fonksiyonları diferansiyellenebilir olsunlar. O halde

i. f'nin belirli integralinin türevi,

$T_\alpha\left[\int_a^t f(s)e_0(t,s)d_\alpha s\right] = f(t)$ ile verilir.

ii. f'nin türevinin belirli integrali,

$\int_a^t T_\alpha[f(s)]e_0(t,s)d_\alpha s = f(s)e_0(t,s)|_{s=a}^t \coloneqq f(t) - f(a)e_0(t,a)$ ile verilir.

iii. Parçalı integrasyon formülü,

$$\int_a^b f(t)T_\alpha[g(t)]e_0(b,t)d_\alpha t$$

$= f(t)g(t)e_0(b,t)|_{t=a}^b - \int_a^b g(t)(T_\alpha[f(t)] - \kappa_1(\alpha,t)f(t))e_0(b,t)d_\alpha t$ ile verilir.

iv. Bir integralin diferansiyeli için Leibniz kuralı (3.36) kullanılarak

$T_\alpha\left[\int_a^t f(t,s)e_0(t,s)d_\alpha s\right] = \int_a^t \big(T_\alpha^t[f(t,s)] - \kappa_1(\alpha,t)\big)e_0(t,s)d_\alpha s + f(t,t)$ ile verilir.

Eğer e_0 olmasaydı,

$T_\alpha\left[\int_a^t f(t,s)d_\alpha s\right] = f(t,t) + \int_a^b T_\alpha^t[f(t,s)]d_\alpha s$ bulunur (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (i)'nin ispatı (3.39) ve (3.40)dan doğrudan elde edilir. Lemma 3.5.1.1 (ii)'sinde $c = 1$ kullanılırsa, burada (ii), (iii)nin özel halidir.

(iii)nin ispatı, Lemma 3.5.1.1 (iii)si ve (3.40) integral tanımından yararlanılır. (iii)nin ikinci ifadesi için (3.35), (3.40) ve $\alpha \neq 0$ kullanılarak

$$f'(t)dt = \frac{T_\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha,t)f(t)}{\kappa_0(\alpha,t)}dt = (T_\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha,t)f(t))d_\alpha t$$

elde edilir.

(iv)'ün ispatı $\alpha = 1$ kullanılarak Leibniz kuralıyla

$$T_\alpha\left[\int_a^t f(t,s)e_0(t,s)d_\alpha s\right] = T_\alpha\left[\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right]$$

$$= \kappa_0(\alpha,t)\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$$= \kappa_0(\alpha,t)\int_a^t \frac{e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}\left(\frac{-\kappa_1(\alpha,t)f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,t)} + \frac{\partial}{\partial t}f(t,s)\right)ds + f(t,t) + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$= \int_a^t (T_\alpha^t[f(t,s)] - \kappa_1(\alpha,t)f(t,s))e_0(t,s)d_\alpha s + f(t,t)$ elde edilir.

(iv)'ün ikinci ifadenin ispatı için, $e_0(t,s)$ integral ifadesi yok olursa

$$T_\alpha\left[\int_a^t f(t,s)d_\alpha s\right] = T_\alpha\left[\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right]$$

$$= \kappa_0(\alpha,t)\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$$= \kappa_0(\alpha,t)\left[\frac{f(t,t)}{\kappa_0(\alpha,t)} + \int_a^t \frac{\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds$$

$= f(t,t) + \int_a^b T_\alpha^t[f(t,s)]d_\alpha s$ elde edilir.

Lemma 3.5.1.3. (Sabitlerin Değişimi): $\kappa_0$ve κ_1 fonksiyonları (3.34) eşitliklerini sağlasınlar. $f, p: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli olsun, e_p (3.37)deki gibi tanımlansın ve $u_0 \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$$T_\alpha u(t) - p(t)u(t) = f(t),\ u(t_0) = u_0,$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$u(t) = u_0 p(t)e_p(t,t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t,s)f(s)d_\alpha s\,, t \in [t_0,\infty) \tag{3.41}$$

ile verilir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (3.41)deki u verilsin. Lemma 3.5.1.1 (v) ve Lemma 3.5.1.2 (iv) kullanılarak,

$$T_\alpha u(t) = u_0 e_p(t,t_0) + e_p(t,t)f(t) + \int_{t_0}^{t} p(t)e_p(t,s)f(s)d_\alpha s = p(t)u(t) + f(t)$$

elde edilir.

3.5.2. Taylor Serileri

$\kappa_{0,}\kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ fonksiyonları sürekli olsun öyle ki (3.34) deki şartları sağlasınlar. $\alpha = 1$ ve $n \in \mathbb{N}_0$,

$$h_n(t,s) = \frac{1}{n!}(t-s)^n$$

polinomları verilsin. $h_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ yardımıyla

$$h_0(t,s) \equiv 1, \forall t,s \in \mathbb{R} \tag{3.42}$$

$$h_n(t,s) = \int_s^t h_{n-1}(\tau,s)d_\alpha\tau\,,\ n \in \mathbb{N},\ \forall t,s \in \mathbb{R} \tag{3.43}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Lemma 3.5.1.1 (ii) ve Lemma 3.5.1.2 (iv) den

$$T_\alpha^t h_n(t,s) = h_{n-1}(t,s) + \kappa_1(\alpha,t)h_n(t,s) \tag{3.44}$$

elde edilir (Anderson ve Ulness, 2015).

Lemma 3.5.2.1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. f, *n defa diferansiyellenebilir* ve p_k fonksiyonları $0 \le k \le n-1$, $bazı\ t \in \mathbb{R}$ de diferansiyellenebilir ve

$$T_\alpha p_{k+1}(t) = p_k(t) + \kappa_1(\alpha,t)p_{k+1}(t), \forall k, 0 \le k \le n-2 \tag{3.45}$$

olsunlar. O zaman t noktasında

$$T_\alpha[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k p_k (T_\alpha)^k f] = (-1)^{n-1} p_{n-1}(T_\alpha)^n f + (T_\alpha p_0 - \kappa_1(\alpha,.)p_0)f$$

elde edilir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Lemma 3.5.1.1 (i) ve (iii) ve (3.45) kullanılarak

$$T_\alpha[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k p_k (T_\alpha)^k f] = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k T_\alpha\,[p_k (T_\alpha)^k f]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \{p_k (T_\alpha)^{k+1} f + (T_\alpha p_k - \kappa_1(\alpha,.)p_k)(T_\alpha)^k f\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\, p_k (T_\alpha)^{k+1} f + (-1)^{n-1} p_{n-1}(T_\alpha)^n f$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left((T_\alpha p_k - \kappa_1(\alpha,.)p_k)(T_\alpha)^k f\right) + \left((T_\alpha p_0 - \kappa_1(\alpha,.)p_0)f\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\, p_k (T_\alpha)^{k+1} f + (-1)^{n-1} p_{n-1}(T_\alpha)^n f$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1} \left((T_\alpha p_{k+1} - \kappa_1(\alpha,.)p_{k+1})(T_\alpha)^{k+1} f\right) + \left((T_\alpha p_0 - \kappa_1(\alpha,.)p_0)f\right)$$

$= (-1)^{n-1} p_{n-1}(T_\alpha)^n f + \left((T_\alpha p_0 - \kappa_1(\alpha,.)p_0)f\right)$ buluruz.

Teorem 3.5.2.2. (Taylor Formulü): $n \in \mathbb{N}$ ve f, $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde n *defa diferansiyellenebilir* olduğunu varsayalım. $t,s \in [t_0,\infty)$ ve h_k fonksiyonları (3.42) ve (3.43)de tanımlansın, yani

$h_0(t,s) \equiv 1$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için, $h_{k+1}(t,s) = \int_s^t h_k(\tau,s)d_\alpha\tau$

olsun. O halde $t \in [t_0,\infty)$ için,

$$f(t) = e_0(t,s)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\, h_k(s,t)(T_\alpha)^k f(s)$$
$$+(-1)^{n-1}\int_s^t h_{n-1}(\tau,t)(T_\alpha)^n f(\tau)e_0(t,\tau)d_\alpha\tau$$

elde edilir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (3.44) ve Lemma 3.5.2.1den

$$T_\alpha[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h_k(.,t)(T_\alpha)^k f](\tau) = (-1)^{n-1}h_{n-1}(\tau,t)(T_\alpha)^n f(\tau), \forall\tau \in [t_0,\infty)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi s'den t'ye integrallersek ve Lemma 3.5.1.2 (ii) yi kullanırsak

$$(-1)^{n-1}\int_s^t h_{n-1}(\tau,t)(T_\alpha)^n f(\tau)e_0(t,\tau)d_\alpha\tau$$

$$= \int_s^t T_\alpha[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\, h_k(.,t)(T_\alpha)^k f]\,(\tau)e_0(t,\tau)d_\alpha\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h_k(\tau,t)(T_\alpha)^k f(\tau)e_0(t,\tau)|_{\tau=s}^{t}$$

$= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h_k(s,t)(T_\alpha)^k f(s)e_0(t,s)$ elde edilir.

Örnek 3.5.2.1. $\alpha \in (0,1], \omega_0, \omega_1 \in (0,\infty)$, κ_1 fonksiyonu (3.34) sağlasın ve $\kappa_0(\alpha,t) \equiv \alpha\omega_0^{1-\alpha}$ alalım, (3.40) denklemiyle,

$$d_\alpha\tau = \frac{1}{\kappa_0(\alpha,\tau)}d\tau = \frac{1}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}d\tau$$

elde edilir. (3.42) denkleminde $h_0(t,s) \equiv 1$ alırsak, (3.43) göre h_1 hesaplarsak

$$h_1(t,s) = \int_s^t h_0(\tau,s)\,d_\alpha\tau = \frac{1}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\int_s^t 1\,d\tau = \frac{t-s}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}$$

elde edilir. Buna ek olarak

$$h_2(t,s) = \int_s^t h_1(\tau,s)\,d_\alpha\tau = \frac{1}{2!}\left(\frac{t-s}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\right)^2$$

bulunur. Genelleştirirsek,

$$h_n(t,s) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t-s}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\right)^n$$

elde edilir.

Dikkat edersek $\alpha = 1$ alınırsa beklendiği gibi, $h_n(t,s) = \frac{1}{n!}(t-s)^n$ olur (Anderson ve Ulness, 2015).

Örnek 3.5.2.2. $\alpha \in (0,1], \omega_0, \omega_1 \in (0,\infty)$, κ_1 fonksiyonu (3.34) sağlasın ve

$$\kappa_0(\alpha,t) = \alpha(\omega_0 t)^{1-\alpha}, t \in [0,\infty)$$

olsun. (3.40) dan,

$$d_\alpha\tau = \frac{\tau^{\alpha-1}}{\alpha(\omega_0 t)^{1-\alpha}}d\tau$$

elde edilir. $h_0(t,s) \equiv 1$ başlarsak

$$h_1(t,s) = \int_s^t h_0(\tau,s)\,d_\alpha\tau = \frac{1}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\int_s^t \tau^{\alpha-1}\,d\tau = \frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha^2\omega_0^{1-\alpha}}$$

ve

$$h_2(t,s) = \int_s^t h_1(\tau,s)\,d_\alpha\tau = \frac{1}{2!}\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha^2\omega_0^{1-\alpha}}\right)^2$$

elde edilir. Bu şekilde devam edersek,

$$h_n(t,s) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha^2\omega_0^{1-\alpha}}\right)^n$$

bulunur. $\alpha = 1$ için,

$h_n(t,s) = \frac{1}{n!}(t-s)^n$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

Örnek 3.5.2.3. $\kappa_0(\alpha,t) = t^{1-\alpha}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)t^\alpha\right)$ ve $\kappa_1(\alpha,t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)t^\alpha\right)$

olsun. Bu fonksiyonlar (3.34) sağladığı kolayca gösterilebilir. $h_0 \equiv 1$ ve olduğu açıktır

$$h_1(t,s) = \int_s^t \frac{\tau^{\alpha-1} d\tau}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\tau^{\alpha}\right)}.$$

olduğu açıktır. $u = \tau^{\alpha}, du = \alpha\tau^{\alpha-1}d\tau$ yazarsak

$$h_1(t,s) = \frac{1}{\alpha}\int_{s^{\alpha}}^{t^{\alpha}} \frac{du}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)u\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)t^{\alpha}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)s^{\alpha}\right)}{\alpha(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$$

elde edilir.

$\chi \equiv (1-\alpha)\frac{\pi}{2}$ ve limit $\chi \to 0^{+}(\alpha \to 1)$ alınırsa düzenli polinomların elde edildiği kolayca ispatlanır. İlk olarak, serilerin açılımları,

$$h_1(t,s) = \frac{\tan\chi t^{\alpha} - \tan\chi s^{\alpha}}{\alpha\chi} = \frac{\chi t^{\alpha} - \chi s^{\alpha}}{\alpha\chi} + \mathcal{O}[\chi]^2$$

ile verilir. O halde

$$\lim_{\chi \to 0^{+}(\alpha \to 1)} h_1(t,s) = t - s$$

dir. $h_n(t,s)$, bir önceki örnekden biraz daha fazla karmaşıktır, fakat yine de çözüme uygundur. İlk olarak,

$$h_2(t,s) = \int_s^t h_1(\tau,s) d_{\alpha}\tau = \frac{1}{\alpha\chi}\int_s^t \frac{(\tan\chi\tau^{\alpha} - \tan\chi s^{\alpha})\tau^{\alpha-1} d\tau}{\cos^2\chi\tau^{\alpha}}$$

dır. Yeniden, $u = \tau^{\alpha}, du = \alpha\tau^{\alpha-1}d\tau$ uygulanırsa

$$h_2(t,s) = \frac{1}{2\alpha^2\chi}\int_{s^{\alpha}}^{t^{\alpha}} \frac{\tan\chi u - \tan\chi s^{\alpha} du}{\cos^2\chi u}$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2\chi^2}\left(\sec^2\chi t^{\alpha} - \sec^2\chi s^{\alpha} - 2\tan\chi t^{\alpha}\tan\chi s^{\alpha} + 2(\tan\chi s^{\alpha})^2\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$\lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} h_2(t,s) = \lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} \frac{1}{2\alpha^2\chi^2}(1 - 1 + (\chi t^\alpha)^2 - (\chi s^\alpha)^2 - 2\chi t^\alpha \chi s^\alpha$

$+2(\chi s^\alpha)^2 + \mathcal{O}[\chi^4])$

$$= \lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} \frac{1}{2\alpha^2\chi^2}((\chi t^\alpha)^2 - 2\chi t^\alpha \chi s^\alpha + (\chi s^\alpha)^2 + \mathcal{O}[\chi^4])$$

$$= \lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} \frac{1}{2\alpha^2}((t^\alpha - s^\alpha)^2 + \mathcal{O}[\chi^2])$$

$$= \frac{1}{2}(t-s)^2$$

dir. Bu örnek için üstel fonksiyonu dikkate alalım. Buradan,

$e_\lambda(t,s) = e^{\int_s^t \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau}$ integrali hesaplayalım,

$$\int_s^t \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau = \int_s^t \frac{\lambda - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\tau^\alpha\right)}{\tau^{1-\alpha}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\tau^\alpha\right)} d\tau = \frac{(\lambda-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)t^\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} + \frac{t^\alpha}{\alpha} + C$$

elde edilir. Burada C sabiti,

$$C = -\frac{(\lambda-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)s^\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} - \frac{s^\alpha}{\alpha}$$

ile verilir. Böylece,

$e_\lambda(t,s) = Ae^{\frac{(\lambda-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)t^\alpha\right)}{\alpha(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} + \frac{t^\alpha}{\alpha}}$, $A = e^C$ elde edilir.

Özel durumda, $e_1(t,s) = Ae^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ dir. $\chi \equiv (1-\alpha)\frac{\pi}{2}$ alınırsa,

$$\lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} e_\lambda(t,s) = \lim_{\chi\to 0^+(\alpha\to 1)} Ae^{(\lambda-1)\frac{\chi t^\alpha}{\alpha\chi} + \frac{t^\alpha}{\alpha} + \mathcal{O}[\chi^2]} = Ae^{\lambda t}$$

elde edilir (Anderson ve Ulness, 2015).

3.5.3. İkinci Mertebeden Lineer Konform Türevler

Önemli matematik denklemleri, matematiksel fizik, matematiksel biyoloji, fiziksel kimya ve mühendislikte sabit katsayılı ikinci dereceden lineer homojen adi diferansiyel denklemi

$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ ile verilir.

Yay kütle sisteminde, a kütle, b sönüm katsayısı ve c yay sabitidir. Bu bölümde (3.34) kullanarak sabit katsayılı ikinci dereceden lineer homojen adi diferansiyel denklem araştırmalarına paralel olarak,

$$aT_\alpha T_\alpha y(t) + bT_\alpha y(t) + cy(t) = 0, t \in [t_0, \infty)$$

denklemini ele alacağız. Ek olarak, ilgili Cauchy-Euler tipi konform denklem,

$$atT_\alpha[tT_\alpha y(t)] + btT_\alpha y(t) + cy(t) = 0, t \in [t_0, \infty), t_0 > 0$$

incelenecektir (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.3.1. (Sabit Katsayılı Konform Diferansiyel Denklemler): $\kappa_{0,}\kappa_1: [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ve (3.34) sağlasınlar ve T_α (3.35) deki gibi verilsin. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. (3.37) den sabit λ için,

$$e_\lambda(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau} = e^{\int_{t_0}^{t} (\lambda - \kappa_1(\alpha,\tau)) d_\alpha \tau}$$

elde edilir. O zaman

$$aT_\alpha T_\alpha y(t) + bT_\alpha y(t) + cy(t) = 0, t \in [t_0, \infty) \tag{3.46}$$

sabit katsayılı homojen konform diferansiyel denklemi

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.47}$$

yardımcı denklemine sahiptir ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için (3.46) denkleminin genel çözümü:

1. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (3.47) nin farklı iki kökü ise,

$y(t) = c_1 e_{\lambda_1}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2}(t, t_0)$ dir.

2. Eğer $\lambda = -\frac{b}{2a}$ (3.47) nin tekrarlanan kökü varsa,

$y(t) = c_1 e_\lambda(t, t_0) + c_2 e_\lambda(t, t_0) \int_{t_0}^{t} 1 \, d_\alpha s$ dir.

3. Eğer $\lambda = \zeta \mp i\beta$ (3.47) nin kompleks kökü varsa,

$y(t) = c_1 e_\zeta(t, t_0) \cos\left(\int_{t_0}^{t} \beta \, d_\alpha s\right) + c_2 e_\zeta(t, t_0) \sin\left(\int_{t_0}^{t} \beta \, d_\alpha s\right)$ dir.

(Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: . λ kompleks sabit olmak üzere,

$$y = y(t) = e_\lambda(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda - \kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau}$$

çözümü ile başlayalım. Bu y çözümünü (3.46) da yerine koyarsak $\alpha = 1$ klasik durumundaki gibi (3.47) yardımcı denklemi elde edilir. Böylece üç farklı durum oluşur.

Eğer yardımcı denklem iki gerçel ve farklı köke sahipse (i) de verildiği gibi genel çözüm üstel fonksiyonların lineer kombinasyonudur.

Varsayalım ki $\lambda \in \mathbb{R}$, (3.47) nin katlı kökü olsun, yani $\lambda = -\frac{b}{2a}$ dir. O halde

$$y_1(t) = e_\lambda(t, t_0) = e_{-\frac{b}{2a}}(t, t_0)$$

(3.46) nın bir çözümüdür. $\alpha = 1$ iken $y_2 = t y_1$ ikinci lineer bağımsız bir çözüm olduğunu biliyoruz, ayrıca

$y_2(t) = e_\lambda(t,t_0)h_1(t,t_0) = e_\lambda(t,t_0)\int_{t_0}^{t} 1\, d_\alpha s$ dir.

Böylelikle, (3.35) yada (3.44)den

$$T_\alpha y_2(t) = e_\lambda(t,t_0)\left(1+\lambda\int_{t_0}^{t} 1 d_\alpha s\right), T_\alpha T_\alpha y_2(t) = e_\lambda(t,t_0)\left(2\lambda+\lambda^2\int_{t_0}^{t} 1 d_\alpha s\right)$$

elde edilir.

$\lambda = -b/(2a)$ ile $aT_\alpha T_\alpha y_2(t) + bT_\alpha y_2(t) + cy_2(t)$

kontrol edersek

$$ae_\lambda(t,t_0)\left(2\lambda+\lambda^2\int_{t_0}^{t} 1 d_\alpha s\right) + be_\lambda(t,t_0)\left(1+\lambda\int_{t_0}^{t} 1 d_\alpha s\right) + ce_\lambda(t,t_0)\int_{t_0}^{t} 1\, d_\alpha s$$

$$= e_\lambda(t,t_0)(a\lambda^2+b\lambda+c)\int_{t_0}^{t} 1\, d_\alpha s = 0$$

elde edilir. Burada λ yardımcı polinomun sıfırıdır.

Son olarak, varsayalım ki (3.47) nin kökleri $\lambda = \zeta \mp i\beta$ biçimindeki kompleks sayılar olsun. O zaman Euler formülü (3.37) ile (3.47) nin kompleks değerli çözümü

$$y(t) = e_{(\zeta+i\beta)}(t,t_0) = e_\zeta(t,t_0)\left(\cos\left(\int_{t_0}^{t}\beta d_\alpha s\right) + i\sin\left(\int_{t_0}^{t}\beta d_\alpha s\right)\right)$$

dir. Bu ifadenin gerçel ve imajiner(sanal) parçaları (3.46) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

Teorem 3.5.3.2. (Cauchy-Euler Konform Diferansiyel Denklemler): $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1]\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ fonksiyonları sürekli ve (3.34) sağlasın ve (3.35) deki T_α verilsin. $a,b,c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. O halde

$$atT_\alpha[tT_\alpha y(t)] + btT_\alpha y(t) + cy(t) = 0,\ t \in [t_0,\infty), t_0 > 0 \tag{3.48}$$

homojen Cauchy Euler konform diferansiyel denklemi (3.47) yardımcı denklemine sahiptir ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için (3.48) denkleminin genel çözümü:

1. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, (3.47) nin farklı iki kökü ise,

$y(t) = c_1 e_{\lambda_1/t}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2/t}(t, t_0)$ dir.

2. Eğer $\lambda = -\frac{b}{2a}$, (3.47) nin tekrarlanan kökü varsa,

$y(t) = c_1 e_{\lambda/t}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda/t}(t, t_0) \int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s$ dir.

3. Eğer $\lambda = \zeta \mp i\beta$ (3.47) nin kompleks kökü varsa,

$y(t) = c_1 e_{\zeta/t}(t, t_0) \cos\left(\beta \int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s\right) + c_2 e_{\zeta/t}(t, t_0) \sin\left(\beta \int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s\right)$ dır.

(Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: λ kompleks sabit olmak üzere

$y = y(t) = e_{\lambda/t}(t, t_0)$

çözümü ile başlayalım. Bu y çözümünü (3.46) da yerine koyarsak $\alpha = 1$ klasik durumundaki gibi (3.47) yardımcı denklemi elde edilir. Böylece üç farklı durum oluşur. Eğer yardımcı denklem iki gerçel ve farklı köke sahipse, sonuç (i) de açıktır. Varsayalım $\lambda \in \mathbb{R}$, (3.47) nin katlı kökü olsun, yani $\lambda = -\frac{b}{2a}$ dır. O halde

$y_1(t) = e_{\lambda/t}(t, t_0)$, (3.46) bir çözümüdür. Düzenlersek

$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s$ elde edilir. Buradan da (ii), $y_1$çözümü ve $\lambda = -\frac{b}{2a}$

$$atT_\alpha[tT_\alpha y_2(t)] + btT_\alpha y_2(t) + cy_2(t) = 2atT_\alpha y_1(t) + atT_\alpha[tT_\alpha y_1(t)]\int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s$$

$$+by_1(t) + \left(btT_\alpha y_1(t)\right)\int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s + cy_1(t)\int_{t_0}^{t} s^{-1}\, d_\alpha s = 0$$

elde edilir. Son olarak, varsayalım ki (3.47) nin kökleri $\lambda = \zeta \mp i\beta$ biçimindeki kompleks sayılar olsun. O zaman (3.48) in kompleks değerli çözümü

$$y(t) = e_{(\zeta+i\beta)/t}(t,t_0) = e_{\zeta/t}(t,t_0)\left(\cos\left(\beta\int_{t_0}^{t} s^{-1} d_\alpha s\right) + i\sin\left(\beta\int_{t_0}^{t} s^{-1} d_\alpha s\right)\right)$$

elde edilir. Tekrardan gerçel ve imajiner(sanal) parçaları (3.48) in lineer bağımsız çözümleridir.

3.5.4. Self-Adjoint Konform Denklemler

$\alpha \in [0,1]$ ve T_α da (3.35) ifadesindeki gibi olsun. Bu bölümde

$$Lx(t) = T_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1(\alpha,.)x)](t) + q(t)x(t) = 0 \qquad (3.49)$$

formal self-adjoint denklemini inceleyelim (Anderson ve Ulness, 2015).

Varsayalım ki $[t_0,\infty)$ üzerinde p,q sürekli ve $p(t) \neq 0$, $\forall t \in [t_0,\infty)$ olsun. $\mathbb{D}$ kümesini $x:[t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi olarak tanımlayalım öyle ki $T_\alpha x:[t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli ve $T_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1(\alpha,.)x)]:[t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $x \in \mathbb{D}$ fonksiyonuna $Lx(t) = 0$, $\forall t \in [t_0,\infty)$ denklemini sağlarsa (3.49) ın çözümüdür. κ_0 ve κ_1 fonksiyonları (3.34) sağlasın, T_α (3.35) deki gibi verilsin ve integral (3.40) daki tanımlansın (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.4.1. Varsayalım ki κ_0 ve κ_1 fonksiyonları (3.34) sağlasın. $\alpha \in (0,1]$ ve T_α (3.35) deki gibi verilsin. $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde p,q,f sürekli, $p(t) \neq 0$ ve $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ sabitleri verilsin. O halde,

$$Lx(t) = f(t),\ x(t_0) = x_0,\ T_\alpha\, x(t_0) = x_1$$

başlangıç değer problemi $[t_0,\infty)$ üzerinde tek çözümü vardır (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: $Lx = f$ bir vektör denklemine denk olarak yazalım $\alpha = 1$ için standart argümanları kullanalım. x, $Lx = f$ denkleminin bir çözümü olsun ve

$$y(t) \coloneqq p(t)(T_\alpha x(t) - \kappa_1(\alpha, t)x(t)),$$

$T_\alpha x(t) = \kappa_1(\alpha, t)x(t) + \frac{1}{p(t)}y(t)$ olsun.

(3.49) da tanımlanan L için, x fonksiyonu $Lx = f$ denkleminin bir çözümü olduğundan

$$T_\alpha y(t) = -q(t)x(t) + f(t)$$

elde edilir. Buradan $z(t) \coloneqq \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ yazılırsa z fonksiyonu

$$T_\alpha z(t) = A(t)z(t) + b(t),\ A(t) = \begin{bmatrix} \kappa_1(\alpha, t) & 1/p(t) \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix},\ b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

vektör denkleminin bir çözümü olur. (3.35)deki T_α tanımından,

$$z'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa_0(\alpha,t)p(t)} \\ \frac{-q(t)}{\kappa_0(\alpha,t)} & \frac{-\kappa_1(\alpha,t)}{\kappa_0(\alpha,t)} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{\kappa_0(\alpha,t)} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradaki tüm fonksiyonlar sürekli olduğundan istenen sonuç $(\alpha = 1)$ standart ispatından gelir.

Örnek 3.5.4.1. Varsayalım ki κ_0, κ_1 fonksiyonları (3.34) sağlasın öyle ki $[0, \infty)$ aralığı üzerinde κ_1 diferansiyellenebilir olsun. $\alpha \in (0,1]$ ve $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer

$$p(t) \coloneqq e_{2\kappa_1}(t, 0) = e_0(0, t),\ q(t) \coloneqq \big(1 + T_\alpha \kappa_1(\alpha, t)\big)p(t),\ t \in [0, \infty)$$

olursa (3.49) denklemi $T_\alpha T_\alpha x + x = 0$ denklemine indirgenir.

$$T_\alpha T_\alpha x + x = 0,\ x(0) = x_0,\ T_\alpha x(0) = x_1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü Teorem 3.5.3.1 yardımıyla

$$x(t) = x_0 e_0(t,0)\cos\left(\int_0^t 1 d_\alpha s\right) + x_1 e_0(t,0)\sin\left(\int_0^t 1 d_\alpha s\right)$$

ile verilir. Eğer

$$\omega_0, \omega_1 \in (0,\infty) \text{ ve } \kappa_0(\alpha,t) \equiv \alpha\omega_0^{1-\alpha}, \kappa_1(\alpha,t) \equiv (1-\alpha)\omega_1^{\alpha}$$

olursa (3.37) ve (3.40) denklemlerinden

$$e_0(t,0) = e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\omega_0^{\alpha-1}\omega_1^{\alpha}t},\ d_\alpha s = \frac{1}{\kappa_0(\alpha,\tau)}ds = \frac{1}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}ds,\ \int_0^t 1 d_\alpha s = \frac{t}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}$$

elde edilir. Böylelikle, bu örnek için çözüm

$$x(t) = x_0 e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\omega_0^{\alpha-1}\omega_1^{\alpha}t}\cos\left(\frac{t}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\right) + x_1 e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\omega_0^{\alpha-1}\omega_1^{\alpha}t}\sin\left(\frac{t}{\alpha\omega_0^{1-\alpha}}\right)$$

dir. Beklendiği gibi $\alpha \to 1$, $x(t) \to x_0\cos t + x_1 \sin t$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.4.2. (Mertebenin İndirgenmesi): Varsayalım ki κ_0, κ_1 fonksiyonları (3.34) eşitliklerini sağlasınlar. Eğer y_1, (3.49) lineer homojen denklemin çözümü yani eğer $Ly_1 = 0$ ise,

$$y_2(t) = y_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s,\ Y_1(s) := 2\kappa_1(\alpha,s) - 2\frac{T_\alpha y_1(s)}{y_1(s)} \tag{3.50}$$

ifadesi (3.49)un ikinci lineer bağımsız çözümüdür. Burada e_{Y_1} (3.37) deki gibi tanımlanır (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (3.49) atfen $y_1$fonksiyonu $Ly = 0$'ın bir çözümü olsun ve y_2, (3.50) formun da alınsın. Lemma 3.5.1.1 kullanılarak,

$$T_\alpha y_2(t) = y_1(t)T_\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s$$

$$+\left(T_\alpha y_1(t)-\kappa_1(\alpha,t)y_1(t)\right)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s$$

$$=\frac{y_1(t)}{p(t)}e_{Y_1}(t,a)+\left(T_\alpha y_1(t)\right)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s$$

dir. O halde

$$p(t)\left(T_\alpha y_2(t)-\kappa_1(\alpha,t)y_2(t)\right)$$

$$=y_1(t)e_{Y_1}(t,a)+p(t)\left(T_\alpha y_1(t)-\kappa_1(\alpha,t)y_1(t)\right)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s$$

dir. Öyle ki

$$T_\alpha[p(T_\alpha y_2-\kappa_1 y_2)]=y_1Y_1e_{Y_1}+e_{Y_1}(T_\alpha y_1-\kappa_1 y_1)$$

$$+p(T_\alpha y_1-\kappa_1 y_1)\left(\frac{1}{p}e_{Y_1}+\kappa_1\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s\right)$$

$$-[qy_1+\kappa_1 p(T_\alpha y_1-\kappa_1 y_1)]\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)}e_{Y_1}(s,a)d_\alpha s$$

dir. O halde

$$T_\alpha[p(T_\alpha y_2-\kappa_1 y_2)]$$

$$=-qy_2+\left(y_1\left(2\kappa_1-2\frac{T_\alpha y_1}{y_1}\right)+T_\alpha y_1-\kappa_1 y_1\right)e_{Y_1}+p(T_\alpha y_1-\kappa_1 y_1)\left(\frac{1}{p}e_{Y_1}+0\right)$$

$$=-qy_2$$

dir. Burada (3.50) Y_1formu kullanıldı.

Teorem 3.5.4.3. Varsayalım ki κ_0, κ_1 fonksiyonları (3.34) eşitliklerini sağlasınlar. $[0,\infty)$ aralığı üzerinde κ_1 diferansiyellenebilir ve $a.b:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman

$$T_\alpha T_\alpha x + a(t)T_\alpha x + b(t)x = 0,\ t\in[t_0,\infty) \tag{3.51}$$

denklemi $t\in[t_0,\infty)$ için,

$$\begin{aligned} p(t) &= e_{a+2\kappa_1}(t,t_0),\\ q(t) &= p(t)(\kappa_1(\alpha,t)a(t)+b(t)+T_\alpha\kappa_1(\alpha,t)) \end{aligned} \tag{3.52}$$

(3.49) daki Self-Adjoint formunda yazılabilir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Varsayalım ki x (3.51)in bir çözümü olsun. (3.52) den

$$pa = T_\alpha p + 2p\kappa_1,\ pb = q - pa\kappa_1 - pT_\alpha\kappa_1 = q - T_\alpha(p\kappa_1) + p{\kappa_1}^2 \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.51) in her iki tarafını p ile çarpıp ve (3.53)ü kullanarak,

$$0 = pT_\alpha T_\alpha x + paT_\alpha x + pbx$$

$$= pT_\alpha(T_\alpha x) + (T_\alpha p - 2p\kappa_1)T_\alpha x + (q - T_\alpha(p\kappa_1) + p{\kappa_1}^2)x$$

$$= pT_\alpha(T_\alpha x) + (T_\alpha x)(T_\alpha p - p\kappa_1) - p\kappa_1 T_\alpha x + (q - T_\alpha(p\kappa_1) + p{\kappa_1}^2)x$$

$$= T_\alpha[pT_\alpha x] - T_\alpha[p\kappa_1 x] + qx$$

elde edilir. T_α lineerliğiyle (3.52)de verilen p,q ile bu denklem $Lx=0$ self-adjoint formundadır.

Tanım 3.5.4.1. (Wronskian): $\kappa_0, \kappa_1: [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ve (3.34) eşitliklerini sağlasınlar. $x, y: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ise, x ve y konform wronskian'ı

$$W(x,y)(t) = det\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ T_\alpha x(t) & T_\alpha y(t) \end{pmatrix}, t \in [t_0, \infty) \tag{3.54}$$

ile verilir (Anderson ve Ulness, 2015).

Tanım 3.5.4.2. (Lagrange Parantezleri): $x, y: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun. x ve y Lagrange parantezleri

$t \in [t_0, \infty)$ için, $\{x: y\}(t) = p(t)W(x,y)(t)$

ile verilir. Burada W, (3.54) de verilen Wronskiandır (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.4.4. (Lagrange Özdeşliği): $x, y \in \mathbb{D}$,

$x(t)Ly(t) - y(t)Lx(t) = T_\alpha\{x: y\}(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Konform çarpım kuralından, $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde

$T_\alpha\{x: y\} = T_\alpha[xp(T_\alpha y - \kappa_1 y) - yp(T_\alpha x - \kappa_1 x)]$

$= xT_\alpha[p(T_\alpha y - \kappa_1 y)] + p(T_\alpha y - \kappa_1 y)(T_\alpha x - \kappa_1 x)$

$-yT_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1 x)] - p(T_\alpha x - \kappa_1 x)(T_\alpha y - \kappa_1 y)$

$= xT_\alpha[p(T_\alpha y - \kappa_1 y)] - yT_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1 x)]$

$= x\{qy + T_\alpha[p(T_\alpha y - \kappa_1 y)]\} - y\{qx + T_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1 x)]\}$

$= xLy - yLx$ dir.

Sonuç 3.5.4.1. (Abel Formulü): Eğer x ve y her ikisini de (3.49) denklemini çözerse,

$$W(x,y)(t) = \frac{ce_0(t,t_0)}{p(t)}, \forall t \in [t_0,\infty)$$

dir. Burada $c \in \mathbb{R}$ sabittir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Varsayalım ki x ve y her ikisi de (3.49) denklemini sağlasın. Lagrange özdeşliği ile

$T_\alpha\{x:y\} = 0,\ t \in [t_0,\infty)$ dır.

Buradan $\{x,y\}(t)$, T_α göre sabit olmalıdır. Yani

$\{x,y\}(t) = ce_0(t,t_0),\ t \in [t_0,\infty)$ dir.

Sonuç 3.5.4.2. Eğer x ve y her ikisi de (3.49) denklemini çözerse, ya

$W(x,y)(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0,\infty)$ olur

ya da

$W(x,y)(t) \neq 0, \forall t \in [t_0,\infty)$ dir.

Birinci durum x ve y'nin $[t_0,\infty)$ üzerinde lineer bağımlı olduğu durum için geçerlidir. İkinci durum x ve y'nin $[t_0,\infty)$ üzerinde lineer bağımsız olduğu durum için geçerlidir. Dikkat edelim ki $\alpha \equiv 1$ iken bu sonuçlar sağlanır (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Varsayalım ki x ve y her ikisinide (3.49), çözsün. Abel formülüyle 3.5.4.1

$$W(x,y)(t) = \frac{ce_0(t,t_0)}{p(t)}, \forall t \in [t_0,\infty)$$

elde edilir. Eğer x ve y lineer bağımlı ise, $\forall t \in [t_0, \infty)$ üzerinde $W(x,y)(t) \equiv 0$ olduğu açıktır. Bunun yanı sıra $\forall t \in [t_0, \infty)$ aralığı üzerinde $W(x,y)(t) \equiv 0$ ise, o halde

$$0 = xT_\alpha y - yT_\alpha x = x(\kappa_0 y' + \kappa_1 y) - y(\kappa_0 x' + \kappa_1 x) = \kappa_0(xy' - x'y),$$

böylece x ve y lineer bağımlıdır.

Uyarı 3.5.4.1. İki sürekli fonksiyonun konform iç çarpımı

$$\langle y, z\rangle = \int_a^b y(t)z(t)e_0(b,t)d_\alpha t$$

ile tanımlanır. x ve y Langange parantezi ile tanımlanmıştı.

$\{x\colon y\}(t) = p(t)W(x,y)(t),\ t \in [t_0, \infty)$ dır.

Lagrange özdeşliği (Teorem 3.5.4.4) integrali alınarak ve iç çarpım notasyonunu kullanırsak

$$\langle x, Ly\rangle - \langle y, Lx\rangle = \int_a^b T_\alpha\{x\colon y\}(t)e_0(b,t)d_\alpha t$$

$$= \{x\colon y\}(b) - \{x\colon y\}(a)e_0(b,a)$$

$$= p(b)W(x,y)(b) - p(a)W(x,y)(a)e_0(b,a)$$

elde edilir. (3.49) denklemi yukarıda verilen iç çarpıma göre formal self-adjointdir. Yani x ve y fonksiyonları

$$p(b)W(x,y)(b) = p(a)W(x,y)(a)e_0(b,a)$$

self-adjoint sınır koşullarını sağlarsa

$\langle x, Ly\rangle = \langle y, Lx\rangle$ özdeşliği sağlanır (Anderson ve Ulness, 2015).

Tanım 3.5.4.3. (Cauchy Fonksiyonu): $\forall s \in [t_0, \infty)$ için,
$x: [t_0, \infty) \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Lx(.,s) = 0,\ x(s,s) = 0,\ T_\alpha x(s,s) = \frac{1}{p(s)}$$

başlangıç değer probleminin çözümü ise x fonksiyonuna (3.49) denklemini sağladığı için Cauchy fonksiyonu denir (Anderson ve Ulness, 2015).

Örnek 3.5.4.2. (3.49) da $q = 0$ alınırsa,

$$T_\alpha[p(t)(T_\alpha x(t) - \kappa_1(\alpha,t)x(t))] = 0$$

denklemi için Cauchy fonksiyonu

$x(t,s) = \int_s^t \frac{e_0(\tau,s)}{p(\tau)} d_\alpha\tau$, $\forall t,s \in [t_0, \infty)$ ile verilir (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.4.5. Eğer u ve v (3.49) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise (3.49) için $x(t,s)$ Cauchy fonksiyonu

$$x(t,s) = \frac{u(s)v(t) - v(s)u(t)}{p(s)[u(s)T_\alpha v(s) - v(s)T_\alpha u(s)]},\ t,s \in [t_0,\infty) \tag{3.55}$$

ile verilir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: (3.55) denklemin sağ tarafı $y(t,s)$ olarak tanımlansın. Dikkat edersek her bir sabit s için, $y(.,s)$, u ve v çözümlerinin lineer kombinasyonudur ve (3.49) çözümleridir. Açıktır ki $y(s,s) = 0$ Ayrıca

$$T_\alpha y(t,s) = \frac{u(s)T_\alpha v(t) - v(s)T_\alpha u(t)}{p(s)[u(s)T_\alpha v(s) - v(s)T_\alpha u(s)]}$$

elde edilir. (3.54)de verilen Wronskian tanımı kullanılarak,

$T_\alpha y(s,s) = \frac{W(u,v)(s)}{p(s)W(u,v)(s)} = \frac{1}{p(s)}$

bulunur. Başlangıç değer problemlerinin çözümünün tekliğinden (Teorem 3.5.4.1), her bir sabit s için,

$x(t,s) = y(t,s)$ bulunur.

Teorem 3.5.4.6. (Sabitlerin Değişimi Formülü): Farz edelim ki $a \in [t_0, \infty)$ ve $[t_0, \infty)$ üzerinde f süreklidir. $x(t,s)$, (3.49) için Cauchy fonksiyonu olsun. O zaman

$x(t) = \int_a^t x(t,s)f(s)d_\alpha s$, $t \in [t_0, \infty)$ ifadesi

$Lx = f(t)$, $x(a) = 0$, $T_\alpha x(a) = 0$

başlangıç değer probleminin çözümüdür (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: $x(t,s)$, (3.49) için Cauchy fonksiyonu olsun ve

$x(t) = \int_a^t x(t,s)f(s)d_\alpha s$, $x(a) = 0$

olsun. x için T_α konform türev alınırsa ve Lemma 3.5.1.2 (iv) kullanılırsa

$$T_\alpha x(t) = x(t,t)f(t) + \int_a^t T_\alpha[x(t,s)]f(s)d_\alpha s = \int_a^t T_\alpha[x(t,s)]f(s)d_\alpha s$$

elde edilir. Dikkat edilirse integral de T_α, t değişkenine göre türevi göstermektedir. Bu yüzden

$T_\alpha x(a) = 0$ dır. Buradan

$$p(t)\big(T_\alpha x(t) - \kappa_1(\alpha,t)x(t)\big) = \int_a^t p(t)\big(T_\alpha x(t,s) - \kappa_1(\alpha,t)x(t,s)\big)f(s)d_\alpha s$$

elde edilir ve Lemma 3.5.1.2 (iv) kullanılarak

$$T_\alpha\left[p(t)\left(T_\alpha x(t)-\kappa_1(\alpha,t)x(t)\right)\right]$$

$$=p(t)\left(T_\alpha x(t,t)-\kappa_1(\alpha,t)x(t,t)\right)f(t)$$

$$+\int_a^t T_\alpha\left[p(t)\left(T_\alpha x(t,s)-\kappa_1(\alpha,t)x(t,s)\right)\right]f(s)d_\alpha s$$

$$=f(t)+\int_a^t\left(-q(t)x(t,s)\right)f(s)\,d_\alpha s$$

$$=f(t)-q(t)x(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$Lx(t)=f(t)$ dir.

Sonuç 3.5.4.3. Farz edelim ki $a\in[t_0,\infty)$ ve $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde f süreklidir. $x(t,s)$, (3.49) için Cauchy fonksiyonu olsun. O halde

$x(t)=u(t)+\int_a^t x(t,s)f(s)d_\alpha s,\ t\in[t_0,\infty)$ fonksiyonu

$Lx=f(t),\ x(a)=A,\ T_\alpha x(a)=B$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Burada A ve B sabitlerdir ve u fonksiyonu

$Lu=0,\ u(a)=A,\ T_\alpha u(a)=B$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.4.7. (Başlangıç Değer Problemleri için Karşılaştırma Teoremi): Varsayalım ki (3.49) için x Cauchy fonksiyonu

$t\geq s$ için $x(t,s)\geq 0$ koşulunu sağlasın. Eğer $u,v\in\mathbb{D}$ fonksiyonları

$Lu(t) \geq Lv(t), \forall t \in [a,b]$,

$u(a) = v(a), T_\alpha u(a) = T_\alpha v(a)$

koşullarını sağlıyorlarsa,

$u(t) \geq v(t), \forall t \in [a,b]$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: u ve v teoremin ifadesindeki gibi olsun.

$\omega(t) := u(t) - v(t), \forall t \in [a,b]$ aralığı üzerinde alınırsa

$h(t) \coloneqq L\omega(t) \coloneqq Lu(t) - Lv(t) \geq 0, \forall t \in [a,b]$

bulunur. Sonuç olarak,

$L\omega(t) = h(t), \omega(a) = T_\alpha \omega(a) = 0$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. Sabitlerin değişimi formülünden (Teorem 3.5.4.6)

$\omega(t) = \int_a^t x(t,s)h(s)d_\alpha s \geq 0$

elde edilir.

3.5.5 Sturm-Liouville Problemleri

$\alpha \in [0,1]$ ve T_α (3.35) deki gibi olsun. Bu bölümde

$$T_\alpha[p(T_\alpha x - \kappa_1(\alpha,.)x)](t) + \big(\lambda r(t) + q(t)\big)x(t) = 0 \tag{3.56}$$

Sturm-Liouville konform diferansiyel denklemini ele alalım. Varsayalım ki $[t_0, \infty)$ üzerinde p, q, r gerçel ve sürekli fonksiyonlar

$p(t) \neq 0, \forall t \in [t_0, \infty)$ ve $r(t) \geq 0$

olsun. (3.49) kullanılarak, denklem (3.56)

$Lx = -\lambda r(t)x$ olarak ifade edilir. Şimdi

$$Lx = -\lambda r(t)x$$

$$\zeta x(a) - \beta T_\alpha x(a) = 0 \tag{3.57}$$

$$\gamma x(b) - \delta T_\alpha x(b) = 0$$

Sturm-Liouville problemini ele alalım. Burada $\zeta, \beta, \gamma, \delta$ reel sabitleri

$$\zeta^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$$

koşulunu sağlar (Anderson ve Ulness, 2015).

Örnek 3.5.5.1. $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ fonksiyonları sürekli ve (3.34) sağlasınlar ve $\kappa_1(\alpha, t) \equiv \kappa_1(\alpha)$ reel sabit olsun (3.57)de $p(t) \equiv 1, \ell > 0$ ve $2\zeta = \kappa_1(\alpha)$ verilsin. (3.57) Sturm-Liouville probleminde yani

$$T_\alpha T_\alpha x(t) - 2\zeta T_\alpha x(t) + \lambda x(t) = 0, x(0) = 0 = x(\ell)$$

için özikililer bulalım. Teorem 3.5.3.1 ile çözümler $e_m(t, 0)$ formunu alır. Burada m

$$m^2 - 2\zeta m + \lambda = 0, m = \zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - \lambda}$$

yardımcı denklemin bir köküdür. Eğer

$\lambda < \zeta^2$ise, $x(t) = c_1 e_{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \lambda}}(t, 0) + c_2 e_{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - \lambda}}(t, 0)$

dir. Sınır koşulları $c_1 = 0 = c_2$ olmasını gerektirir. Bu durumda özdeğer yoktur. Eğer

$\lambda = \zeta^2$ise, $x(t) = c_1 e_\zeta(t,0) + c_2 e_\zeta(t,0) \int_0^t 1 d_\alpha s$

dir. Sınır koşullarından $c_1 = 0 = c_2$ elde edilir. Bu durumda da özdeğer yoktur. Eğer

$\lambda > \zeta^2$ ise, $x(t) = c_1 e_\zeta(t,0) \cos\left(\int_0^t \sqrt{\lambda - \zeta^2} d_\alpha s\right) + c_2 e_\zeta(t,0) \sin\left(\int_0^t \sqrt{\lambda - \zeta^2} d_\alpha s\right)$

dir. $x(0) = 0$ sınır koşulundan $c_1 = 0$ ve $x(\ell\,) = 0$ koşulundan

$\left(\int_0^t \sqrt{\lambda - \zeta^2} d_\alpha s\right) = n\pi, n \in \mathbb{N}$

elde edilir. λ'ya göre çözersek

$\lambda = \lambda_n = \zeta^2 + \left(\frac{n\pi}{\int_0^\ell 1 d_\alpha s}\right)^2, n \in \mathbb{N}$ özdeğerleri ve

$x(t) = x_n(t) = e_\zeta(t,0) \sin\left(\frac{n\pi \int_0^t 1 d_\alpha s}{\int_0^\ell 1 d_\alpha s}\right)$

karşılık gelen öz fonksiyonları elde edilir.

$\alpha = 1(\zeta = 0)$ için, $(\lambda_n, x_n) = ((n\pi/\ell)^2, \sin(n\pi t/\ell))$

bilinen özikiliye indirgenir (Anderson ve Ulness, 2015).

Teorem 3.5.5.1. (3.57) Sturm-Liouville problemindeki bütün özdeğerler gerçel ve basittir. Yöndeş her bir özdeğere karşılık gerçel değerli bir öz fonksiyon vardır. (3.57) denkleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları r ve e_0 fonksiyonlarına göre ortogonaldir. Yani farklı öz değerlere karşılık gelen x_1 ve x_2 fonksiyonları için

$\int_a^b x_1(t)\, x_2(t) r(t) e_0(b,t) d_\alpha t = 0$

dır (Anderson ve Ulness, 2015).

3.5.6 Gronwall Eşitsizliği

Bu bölüme karşılaştırma teoremi ile başlayacağız, bu bölüm boyunca $\alpha \in (0,1]$, $t \in [t_0, \infty)$ aralığında ve κ_0, κ_1 fonksiyonları (3.34) eşitliklerini sağlasınlar (Anderson ve Ulness, 2015).

Lemma 3.5.6.1. $[t_0, \infty)$ üzerinde p, y, f sürekli fonksiyonlar ve e_p (3.37)deki gibi tanımlansın. O halde

$T_\alpha y(t) \leq p(t)y(t) + f(t), \forall\, t \in [t_0, \infty)$ ise,

$y(t) \leq y(t_0)e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, s)f(s)d_\alpha s, \forall\, t \in [t_0, \infty$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: Konform iç çarpım kuralını (Lemma 3.5.1.1 (iii)) kullanılırsa

$$T_\alpha\big[y(t)e_{\kappa_1 - p}(t, t_0)\big] = [T_\alpha y(t) - p(t)y(t)]e_{\kappa_1 - p}(t, t_0)$$

elde edilir. $e_0(t, s)$ çarpıp her iki tarafın integrali alınırsa, Lemma 3.5.1.2 (ii) yardımıyla

$$y(s)e_{\kappa_1 - p}(s, t_0)e_0(t, s)\big|_{s=t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} [T_\alpha y(s) - p(s)y(s)]e_{\kappa_1 - p}(s, t_0)e_0(t, s)\, d_\alpha s$$

$$y(t)e_{\kappa_1 - p}(t, t_0) - y(t_0)e_0(t, t_0) \leq \int_{t_0}^{t} f(s)e_{\kappa_1 - p}(s, t_0)e_0(t, s)\, d_\alpha s$$

elde edilir. Öyle ki

$$y(t) \leq\ y(t_0)\frac{e_0(t,t_0)}{e_{\kappa_1 - p}(t,t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(s)\frac{e_{\kappa_1 - p}(s,t_0)e_0(t,s)}{e_{\kappa_1 - p}(t,t_0)}d_\alpha s$$

bulunur. (3.37) yardımıyla

$$\frac{e_0(t,t_0)}{e_{\kappa_1 - p}(t,t_0)} = e_p(t, t_0) \text{ ve } \frac{e_{\kappa_1 - p}(s,t_0)e_0(t,s)}{e_{\kappa_1 - p}(t,t_0)} = e_p(t, s)$$

elde edilir.

Teorem 3.5.6.1. (Gronwall Eşitsizliği): $[t_0,\infty)$ üzerinde p,y,f sürekli fonksiyonlar ve $p\geq 0$ olsun. O zaman

$y(t)\leq f(t)+\int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e_0(t,s)\,d_\alpha s$, $\forall\ t\in[t_0,\infty)$ ise,

$y(t)\leq f(t)+\int_{t_0}^{t} p(s)f(s)e_p(t,s)\,d_\alpha s$, $\forall\ t\in[t_0,\infty)$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: $z(t)=\int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e_0(t,s)\,d_\alpha s$ alırsak $z(t_0)=0$ olur. Lemma 3.5.1.2 (i)den

$$T_\alpha z(t)=p(t)y(t)\leq p(t)[f(t)+z(t)]=p(t)f(t)+p(t)z(t)$$

elde edilir. Lemma 3.5.6.1 ile

$$z(t)\leq \int_{t_0}^{t} e_p(t,s)p(s)f(s)\,d_\alpha s$$

elde edilir. $y(t)\leq f(t)+z(t)$ olduğundan teorem elde edilir.

Sonuç 3.5.6.1. $[t_0,\infty)$ üzerinde p,y sürekli fonksiyonlar ve $p\geq 0$ olsun. O zaman

$y(t)\leq \int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e_0(t,s)\,d_\alpha s$, $\forall t\in[t_0,\infty)$ ise,

$y(t)\leq 0$, $\forall t\in[t_0,\infty)$ olur (Anderson ve Ulness, 2015).

Sonuç 3.5.6.2. $[t_0,\infty)$ üzerinde p,y sürekli fonksiyonlar , $p\geq 0$ ve $\delta\in\mathbb{R}$ olsun. O halde

$y(t)\leq \delta+\int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e_0(t,s)\,d_\alpha s$, $\forall t\in[t_0,\infty)$ ise,

$y(t)\leq \delta e_p(t,t_0)+\delta\int_{t_0}^{t}\kappa_1(\alpha,s)e_p(t,s)d_\alpha s$, $\forall t\in[t_0,\infty)$ dir (Anderson ve Ulness, 2015).

İspat: İlk olarak

$$e_p(t,s) = e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s) \tag{3.58}$$

dir. Teorem 3.5.6.1 $f(t) = \delta$ alırsak ve Teorem 3.5.1.1 (v) kullanırsak, (3.58) ifadesinden

$$y(t) \leq \delta\left[1 + \int_{t_0}^{t} p(s)e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s)d_\alpha s\right]$$

$$= \delta\left[1 - \int_{t_0}^{t} (\kappa_1(\alpha,s) - p(s))e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s)d_\alpha s + \int_{t_0}^{t} \kappa_1(\alpha,s)e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s)d_\alpha s\right]$$

$$= \delta\left[1 - \int_{t_0}^{t} T_\alpha e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s)d_\alpha s + \int_{t_0}^{t} \kappa_1(\alpha,s)e_p(t,s)d_\alpha s\right]$$

$$= \delta\left[1 - e_{\kappa_1 - p}(s,t)e_0(t,s)\Big|_{s=t_0}^{s=t} + \int_{t_0}^{t} \kappa_1(\alpha,s)e_p(t,s)d_\alpha s\right]$$

$$= \delta\left[e_{\kappa_1 - p}(t,t_0)e_0(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \kappa_1(\alpha,s)e_p(t,s)d_\alpha s\right]$$

$$= \delta e_p(t,t_0) + \delta\int_{t_0}^{t} \kappa_1(\alpha,s)e_p(t,s)d_\alpha s$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde kesirli mertebeden konform Sturm –Liouville operatörü ele alınacaktır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu kavram yardımıyla kesirli mertebeden konform Sturm–Liouville operatörü için tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

Denklemden operatöre geçiş yapmak için,

$$(f,g) \coloneqq \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, d_\alpha t, f, g \in L_\alpha^2(a,b),$$

iç çarpımı yardımıyla $L_\alpha^2(a,b)$ Hilbert uzayını tanımlayalım (Allahverdiev, vd., 2019).

$p(x)$ ile $q(x)$ reel değerli sürekli ve $[a,b]$ aralığı üzerinde konform kesirli integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$ly = -T_\alpha(p(x)T_\alpha y) + q(x)y, L_\alpha^2(a,b) \tag{4.1}$$

Sturm-Liouville ifadesini göz önüne alalım.

Şimdi maksimal ve minimal operatörün tanım kümelerini verelim,

$$D_{max} = \left\{ \begin{matrix} y \in L_\alpha^2[a,b]: y \; ve \; (pT_\alpha)(y), [a,b] üzerinde \; mutlak \; sürekli \\ ve \; l(y) \in L_\alpha^2(a,b) \end{matrix} \right\}.$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max}: y(a) = (pT_\alpha)(a) = 0, y(b) = (pT_\alpha)(b) = 0\}.$$

$L_{max}y = ly$ ile D_{max} üzerinde L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım.
Eğer L_{max} operatörü D_{min} kümesine kısıtlanırsa L_{min} minimal operatör elde edilir.
${L_{min}}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür (Naimark,1968).

$\forall y, z \in D_{max}$ için, Green formülü;

$$(ly,z) - (y,lz) = p(x)z(x)T_\alpha\big(y(x)\big) - p(x)y(x)T_\alpha\big(z(x)\big)$$

$$= \Big[p(x)\Big(z(x)T_\alpha\big(y(x)\big) - y(x)T_\alpha\big(z(x)\big)\Big)\Big]_a^b$$

$= [y,z](b) - [y,z](a)$

ile verilir. Burada

$$[y,z](x) = p(x)\left(z(x)T_\alpha\big(y(x)\big) - y(x)T_\alpha\big(z(x)\big)\right)$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.1. H Hilbert uzay, $\Gamma_{1,}\Gamma_2 : D(M^*) \to H$ lineer dönüşümler olsun.

1) $\forall f, g \in D(M^*)$ için $(M^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, M^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H$.

2) Herhangi bir $F_1, F_2 \in H$ için bir $f \in D(M^*)$ vektörü vardır öyleki

$\Gamma_1 f = F_1$ ve $\Gamma_2 f = F_2$ olur.

Koşullarını sağlayan $(H, \Gamma_{1,}\Gamma_2)$ üçlüsüne $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde eşit indis defektli M kapalı simetrik operatörünün sınır değer uzayı denir.
Şimdi

$$\Gamma_1, \Gamma_2 : D_{max} \to \mathbb{C}^2,\ \Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(a) \\ y(b) \end{pmatrix},\ \ \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} p(a)T_\alpha\big(y(a)\big) \\ p(b)T_\alpha\big(y(b)\big) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.1. (4.2) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

İspat: $\forall y, z \in D_{max}$ için

$(\Gamma_1 y - \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y - \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2}$

$$= \left(\begin{pmatrix} -y(a) \\ y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p(a)T_\alpha\big(z(a)\big) \\ p(b)T_\alpha\big(z(b)\big) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} - \left(\begin{pmatrix} p(a)T_\alpha\big(y(a)\big) \\ p(b)T_\alpha\big(y(b)\big) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z(a) \\ z(b) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}$$

$$= \left(-y(a)\,\overline{\left(p(a)T_\alpha\big(z(a)\big)\right)} + y(b)\,\overline{\left(p(b)T_\alpha\big(z(b)\big)\right)}\right)$$

$$-\left(-p(a)T_\alpha\big(y(a)\big)\overline{(z(a))} + p(b)T_\alpha\big(y(b)\big)\overline{(z(b))}\right)$$

$$= p(a)T_\alpha\big(y(a)\big)\overline{(z(a))} - y(a)\,\overline{\left(p(a)T_\alpha\big(z(a)\big)\right)}$$

$$+y(b)\,\overline{\left(p(b)T_\alpha\big(z(b)\big)\right)} - p(b)T_\alpha\big(y(b)\big)\overline{(z(b))}$$

$$= [y,z](b) - [y,z](a) = (L_{max}y, z) - (y, L_{max}z)$$

Green özdeşliği yardımıyla elde edildi. Böylelikle sınır değeri uzayının tanımının ilk koşulunu kanıtladık. Şimdi sınır değer uzayının tanımının ikinci koşulunu kanıtlayacağız.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$y(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)v_1 + \alpha_3(t)u_2 + \alpha_4(t)v_2 \in H,$$

vektör değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\alpha_1^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_1}(a) = 0 \quad \alpha_1^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_1}(b) = 0$$
$$\alpha_2^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_2}(a) = 0 \quad \alpha_2^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_2}(b) = 0$$
$$\alpha_3^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_3}(a) = 0 \quad \alpha_3^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_3}(b) = 0$$
$$\alpha_4^{[0]}(a) = 1 \quad T_{\alpha_4}(a) = 0 \quad \alpha_4^{[0]}(b) = 1 \quad T_{\alpha_4}(b) = 0$$

Bu durumda bu fonksiyon D_{max} kümesine aittir ve

$$\Gamma_1 y = u\,, \Gamma_2 y = v$$

olduğu açıktır.

Sonuç 4.1. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise L_{min} operatörünün

$$(K-I)\Gamma_1 y + i(K+I)\Gamma_2 y = 0 \tag{4.3}$$

ve

$$(K-I)\Gamma_1 y - i(K+I)\Gamma_2 y = 0 \tag{4.4}$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla L_{min} operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine L_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.3) ve (4.4) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (4.3) ve (4.4) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa L_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer üniter olursa L_{min} operatörünün kendine eş genişlemesini verir. L_{min} operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D(K)$ için,

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

koşulunu sağlayan lineer operatördür.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatör ele alınmıştır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar orijinal olup literatüre katkısı olacaktır. Bu çalışmanın devamı olarak singüler durumda konform kesirli mertebeden Sturm-Liouville operatörünün genişlemeleri yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.

Abu Hammad, M., Khalil R., 2014. Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 177-183.

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Volume I. Frederick Ungar, New York.

Anderson D.R., Ulness D. J., 2015. Newly defined conformable derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, vol. 10, no. 2, 109-137.

Allahverdiev, B. P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential. *Izvestiya Rossiskoi Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya* 59, 19-54 (English translate: *Izvestiya: Mathematics*, 59: 1, 45-62).

Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations and Appications*, 19, no. 5, 839-849.

Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear and Multilinear Algebra*, 62, no. 9, 1146-1152.

Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat*, 30, no. 6, 1475-1484.

Allahverdiev, B.P., Tuna H. And Yalçınkaya Y., 2019. Conformable fractional Sturm-Liouville equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-19.

Al-Refai M., Abdeljawad T., 2017. Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problems. *Complexity*.

Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity. *Izvestiya Akademii Nauk Azerbaidzan SSR Seriya Fizicheskaya-Tekholagiya Matematicheskaya Nauk*, 2, 140-143.

Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Matematicheskii Sbornik*, 38, 431-450.

Bruk, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Matematicheskii Sbornik*, 100, 210-216.

Gorbachuk, M. L, Kochubei, A. N. and Rybak M. A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions. *Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences*, 205, 1029-1032 (English translate: *Soviet Mathematics Doklady*, 13(1972), 1063-1067).

Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V. I., 1984. *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Naukova Dumka, Kiev (English translate: 1991, Birkhauser Verlag).

Gorbachuk, M. L. , Gorbachuk, V. I., Kochubei, A. N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, 41, 1299-1312 (English translate *Ukrainian Mathematical Journal*, 41, (1989), 1117-1129).

Gray H. L., Zhang N. F., 1988. On a new definition of the fractional difference. *Mathematics of Computation*, 50, (182), 513-529.

Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M., 2014. A new definition of fractional derivatives. *Journal of Computation Applied Mathematics*, 264, 65-70.

Khol'kin, A. M., 1981. Self-adjoint boundary conditions at-infinity for a quasiregular system of even-order differential equations. *Theory of Operators in Function Spaces and its Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 174-183.

Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications-I. *Matematicheskii Sbornik*, 20, 431-495; II, *Matematicheskii Sbornik* 21, 365-404.

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0,\infty)$. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, 16, 292-324.

Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.

Naimark M. A., 1968. *Linear Differental Operators*, Second ed. Nauka, Moscow, English transl. of Örst ed., Parts 1, 2, Ungar, New York.

Ortigueira M.D., Tenreiro Machado J.A., 2015. What is a fractional derivate. *Journal of Computational Physics*, 293, 4-13.

Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90, 193-254; (Russian translate: *İn Matematika*, 6:4 (1962)11-70).

Rellich, F., 1950. Halbbeschrankte gewöhnliche differentialoperatoren zweiter ordnung. *Mathematische Annalen*, 122, 343-368.

Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 184, 1034-1037 (English translate: *Soviet Mathematics Doklady*, 10 (1969), 188-192).

Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1, 187-246.

von Neumann, J., 1929. Allgemeine eigenwerttheorie hermitescher functional operatoren. *Mathematische Annalen*, 102, 49-131.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Hülya Akdemir	
Doğum Yeri ve Yılı	: Burdur/ 1991	

Eğitim Durumu		Yıl
Lise	: Burdur Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2009
Lisans	: Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	2016

Çalıştığı Kurum / Kurumlar	Yıl

1- -

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

1- -