T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYAN SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Cahit AYTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR

TEMMUZ 2018

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYAN SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Cahit AYTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA

KIRŞEHİR

TEMMUZ 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Başkan

Prof. Dr. Levent KULA
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA
Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…/…/20..

(İmza Yeri)
Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİMİ

Yüksek lisans tezi olarak hazırladığım rektifiyan slant helislerin karakterizasyonları adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlanmasına kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

Cahit AYTEKİN

REKTİFİYAN SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Cahit AYTEKİN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Temmuz 2018

ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Öklid uzayında eğriler teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde 3 boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerle ve helislerle ilgili bazı tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde rektifiyan eğri ve slant helis tanımlarından yola çıkarak rektifiyan slant helis tanımlanmıştır. Tanımlanan rektifiyan slant helislerin eğrilik ve burulma fonksiyonları yardımıyla bazı karakterizasyonlarına ve rektifiyan slant helis örneklerine yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Rektifiyan eğriler, slant helisler, rektifiyan slant helisler
Sayfa Adedi: 34
Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA

CHARACTERISATION OF RECTIFYING SLANT HELICES

(Master's Thesis)

Cahit AYTEKİN

Kirsehir Ahi Evran University

Institute of Science

July 2018

ABSTRACT

This master thesis consists of three parts. The first chapter is devoted to some basic definitions and concepts related to the theory of curves in Euclidean 3-space. In the second chapter, definition of rectifying curve and slant helix are given in Euclidean 3-space. In the third chapter, by means of the definitions of rectifying curve and slant helix, rectifying slant helices are defined. Also, some characterizations and examples of rectifying slant helices are given by the help of curvature and torsion functions.

Key Words: Rectifying curve, slant helix, rectifying slant helices

Number of Pages: 34

Thesis Advisor: Asst. Prof. Dr. Bülent ALTUNKAYA

TEŞEKKÜR

Matematik anabilim dalında yüksek lisans yapmam konusunda beni destekleyen, hem ders aşamasında hem de tez aşamasında kendisinden çok şey öğrendiğim, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA'ya en kalbi teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans ders aşamasında kendisinden ders aldığım için kendimi şanslı hissettiğim, düzenli ve disiplinli çalışmasını kendime örnek aldığım değerli hocam Prof. Dr. Levent KULA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitiminin her aşamasında vermiş oldukları destekten dolayı değerli eşim Tuğba AYTEKİN'e ve varlığıyla evimizi neşelendiren canım oğlum Kağan Bilge AYTEKİN'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\Vert\ \Vert$	: E^3 de norm
S^2	: E^3 de birim küre
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: E^3 de vektörel çarpım
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.1. V bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longrightarrow \langle u, v\rangle$$

fonksiyonu,

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

ii) $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$\langle au + bv, z\rangle = a\langle u, z\rangle + b\,\langle v, z\rangle$

iii) $v \neq 0$ için $\langle v, v\rangle > 0$, $v = 0$ için $\langle v, v\rangle = 0$

özelliklerini sağladığında, $\langle u, v\rangle$ sayısına u ile v'nin iç çarpımı ve $(V, \langle\ \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir [1].

Tanım 1.2. V bir vektör uzayı olmak üzere,

$\|\ \| : V \rightarrow \mathbb{R}$

$v \rightarrow \|v\|$ fonksiyonu,

i) $\forall\, v \in V$ için $\|v\| \geq 0$

ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

iii) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, v \in V$ için

$\|av\| = |a|\,\|v\|$

iv) $\forall\, u, v \in V$ için

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

özelliklerini sağladığında, $\|\ \|$ fonksiyonuna norm, $\|v\|$ sayısına v vektörünün normu, $(V, \|\ \|)$ ikilisine de normlu vektör uzayı denir [1].

Tanım 1.3. M boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu,}$$

i) $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geq 0$

ii) $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \iff \mathrm{x} = \mathrm{y}$

iii) $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{x})$

iv) $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, \mathrm{z})$

özelliklerini sağladığında, d fonksiyonuna M kümesinde metrik, (M, d) ikilisine metrik uzay ve $\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ sayısına x ile y elemanları arasındaki uzaklık denir [1].

Tanım 1.4. V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ olacak şekilde tümü sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ sayıları varsa $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörlerine lineer bağımlı vektörler, aksi halde $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0,\ i = 1,2, \dots, k$ oluyorsa $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektörlerine lineer bağımsız vektörler denir [1].

Tanım 1.5. V bir vektör uzayı, U kümesi $(U \subset V)$ lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi olmak üzere V nin her bir elemanı U deki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa U ye V nin bir bazı denir. V bir iç çarpım uzayı ve S deki vektörler birbirine dik olduğunda U ye ortogonal baz denir. Bir ortogonal bazdaki vektörler birim normlu ise bu baza ortonormal baz denir [1].

Tanım 1.6. Bir reel afin uzay A ve A birleşen bir vektör uzayı V olsun. V uzayında,

$$\langle\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ , \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir. Eğer $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ (n-boyutlu standart reel vektör uzayı) olarak seçilirse, A standart reel Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [7].

Tanım 1.7.

$$d : \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathrm{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [7].

Tanım 1.8.

$$d\colon \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|y-x\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [7].

Tanım 1.9. $\forall\, x,y,z \in \mathrm{E}^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü,

$$cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xz}\|\,\|\overrightarrow{yz}\|}$$

formülü ile hesaplanan θ reel sayısıdır [7].

Tanım 1.10. E^n, n boyutlu Öklid uzayında $\vec{x} \in \mathrm{E}^n$ için x vektörünün normu,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [7].

Tanım 1.11. Üç boyutlu bir reel vektör uzayı V olsun. V de bir

$$\times : \mathrm{V} \times V \longrightarrow V$$

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \times \beta$$

şeklinde tanımlanan $\times$ iç işlemine V de vektörel çarpım işlemi veya dış çarpım işlemi denir [6].

Tanım 1.12. $x_j : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \mathbb{R}$, . $x_j(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_j$ fonksiyonuna, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ uzayında j inci dik koordinat fonksiyonu denir.

Koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sıralı n lisine, $\mathbb{R}^n$ üstünde dik koordinat sistemi (veya Öklidyen koordinat sistemi) denir [11].

Tanım 1.13. V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilir [7].

$T_A(P)$ de toplama ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla,

$$\oplus : T_A(P) \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P),$$
$$\big((P,\vec{v}),(P,\vec{u})\big) \longrightarrow (P,\vec{v})\oplus(P,\vec{u}) = (P,\vec{v}+\vec{u})$$

ve

$\odot : \mathbb{R} \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$ biçiminde olmak üzere;

$$\big(\lambda,(P,\vec{v})\big) \longrightarrow \lambda\odot(P,\vec{v}) = (P,\lambda\vec{v})$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir. $\{T_A(P),\oplus\ ,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının P noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir [7].

Tanım 1.14. U, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi olsun. U nun her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, U üzerinde bir vektör alanı denir.

V, U üstünde bir vektör alanı ise,

$$V : U \rightarrow \bigcup_{q\in U} T_q(P),\ \text{her } q \in U \text{ için } V(q) \in T_q(\mathbb{R}^n)$$

olur. $V(q)$ vektörü çoğu zaman V_q biçiminde gösterilir [11].

Tanım 1.15. $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}^n$ üzerindeki bir vektör alanı $X : A \rightarrow \bigcup_{p\in A} T_A(P)$ biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki,

$$\pi \circ X = I : A \longrightarrow A$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur. Böylece E^n de bir X vektör alanını $\forall P \in \mathrm{E}^n$ noktasına karşılık bir X_P tanjant vektörü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünülebilir.

E^n de vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathrm{E}^n)$ ile gösterilirse, tanjant uzayına benzer şekilde. $\{\chi(\mathrm{E}^n),\oplus\ ,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ altılısının vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu vektör uzayına E^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\chi(\mathrm{E}^n)$ile gösterilir [7].

Tanım 1.16. $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{E}^n$$

diferensiyellenebilen fonksiyona E^{n} de bir eğri adı verilir. Burada $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $t \in I$ değişkenine α eğrisinin parametresi, (I, α) ya da koordinat komşuluğu denir [7].

Tanım 1.17. E^{n} de bir M eğrisi, (I, α) ve , (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin. $h = \alpha^{-1} \circ \beta \colon J \to I$ diferensiyellenebilir fonksiyona M nin bir parametre değişimi (M nin I parametresinin J deki parametre değişimi) denir [7].

Tanım 1.18. E^{n} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha \colon \mathrm{I} \to \mathrm{E}^{\mathrm{n}}$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha'(t) = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, \left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_t, \dots, \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_t\right)$ dır. $\left(\alpha(t), \alpha'(t)\right) \in T_{\mathrm{E}^{\mathrm{n}}}(P)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [7].

Tanım 1.19. E^{n} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| \colon I \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'\|$ reel sayısına da $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir [7].

Tanım 1.20. Eğer $\|\alpha'\| = 1$ ise M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri, $t \in I$ parametresine de yay parametresi denir [7].

Tanım 1.21. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye, (yani $\forall\, t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$) regüler eğri denir [7].

Tanım 1.22. E^{n} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \left(\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\right)$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için; $\alpha^{(k)} \in S_P\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $t \in M$ için $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ye ise $t \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir [7].

Tanım 1.23. E^{n} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\mathrm{k_i} \colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$$

$$s \to \mathrm{k_i}(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle,\ 1 \leq i \leq 1$$

şeklinde tanımlı $\mathrm{k_i}$ fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $\mathrm{k_i}(s)$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir [7].

Teorem 1.1. $\mathrm{E^n}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki M nin i-yinci eğriliği $\mathrm{k_i}(s)$ ve Serret-Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere,

i. $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

ii. $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),\ 1 \leq i \leq r$

iii. $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir [7].

n=3 özel halinde, $\mathrm{E^3}$, 3-boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$ noktasında bir M eğrisinin Frenet 3-ayaklı alanı,

$$T = \alpha'$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$B = T \wedge N$$

dır [7].

Burada 1-inci eğrilik olan $k_1(s) = \kappa(s)$ değerine sadece eğrilik, 2-inci eğrilik olan $k_2(s) = \tau(s)$ değerine de burulma (torsiyon) denir. T, N ve B vektörlerine de sırasıyla eğrinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Böylece matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

verilebilir [7].

2. BÖLÜM
E^3 UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

E^3 uzayında yatan bir eğrinin eğriliği bazı noktalarda sıfır olabilir. Bu çalışma boyunca bir eğrinin eğriliğinin her zaman pozitif olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 2.1. $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin konum vektörü her zaman eğrinin rektifiyan düzleminde yatıyorsa, bu eğriye rektifiyan eğri denir.
Dolayısıyla, α rektifiyan eğrisinin konum vektörü, bazı λ ve μ fonksiyonları için

$$\alpha(t) = \lambda(t)T(t) + \mu(t)B(t)$$

eşitliğini sağlar [4].

Teorem 2.1. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi bir rektifiyan eğri olsun. Eğrinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere,

i. $\rho = \|\alpha\|$ fonksiyonu, c_1 ve c_2 sabit olmak üzere,

$$\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$$

eşitliğini sağlar.
ii. c sabit olmak üzere, $\langle \alpha, T \rangle = s + c$ dir.
iii. α eğrisinin konum vektörünün normal bileşeninin normu sabit, ρ fonksiyonu ise sabit değildir.
iv. Eğrinin burulması τ sıfırdan farklıdır ve c sabit olmak üzere, $\langle \alpha, B \rangle = c$ dir.

Tersine, $\kappa > 0$ olan bir $\alpha: I \to E^3$ eğrisi yukarıdaki (i), (ii), (iii) ve (iv) şartlarından en az birini sağlarsa α eğrisi bir rektifiyan eğridir [4].

İspat. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi**,** $\kappa > 0$ olacak şekilde bir rektifiyan eğri olsun. O halde rektifiyan eğri tanımına göre,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \tag{2.1}$$

yazılabilir. (2.1) eşitliğinin s parametresine göre türevini alıp, Frenet-Serret eşitlikleri kullanıldığında,

$$\lambda'(s) = 1, \lambda\kappa = \mu\tau, \mu'(s) = 0 \tag{2.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Dolayısıyla, $\lambda = s + c$ ve $\kappa \neq 0$ olduğundan $\mu \neq 0$ sabittir. (2.1) eşitliğinin yardımıyla $\langle \alpha, T \rangle = s + c$ yazılabilir. Böylece teoremin (ii) bendindeki ifade kanıtlanmış olur [4].

$(\rho^2)' = \langle \alpha, \alpha \rangle' = 2\langle \alpha, \alpha' \rangle$ olduğundan (i) ve (ii) bendindeki ifadeler birbirine denktir. Dolayısıyla (i) sağlanır.

(2.1) eşitliğinden, α eğrisinin konum vektörünün normal bileşeni $\alpha^N = \mu B$ şeklindedir. (2.2.) den $\mu = \langle \alpha, B \rangle$ olur. Dolayısıyla, α eğrisinin konum vektörünün normal bileşeninin normu sabittir. Bu durumda teoremin (iii) bendindeki ifade de kanıtlanmış olur.

Teoremin (iv) bendindeki ifade, (2.2) deki $\lambda\kappa = \mu\tau$ eşitliğinde μ sabit fonksiyon ve $\kappa > 0$ olduğundan açıktır [4].

Tersine, şimdide yukarıdaki teoremdeki (i) ve (ii) bendindeki ifadelerin sağlandığını kabul edelim. O halde herhangi bir c sabiti için, $\langle \alpha, T \rangle = s + c$ olur. Bu eşitliğin s yay parametresine göre türevi alınırsa, $\kappa\langle \alpha, N \rangle = 0$ eşitliğine ulaşılır. $\kappa > 0$ olduğundan dolayı $\langle \alpha, N \rangle = 0$ dır. Bu durum eğrinin bir rektifiyan eğri olduğunu göstermektedir [4].

Eğer (2.2) eşitliğinin (iii) bendindeki ifadenin doğru olduğunu kabul edersek, d bir sabit olmak üzere

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T \rangle^2 + d \tag{2.3}$$

yazılabilir. (2.3) eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\langle \alpha, T \rangle = \langle \alpha, T \rangle (1 + \kappa\langle \alpha, N \rangle) \tag{2.4}$$

eşitliğine ulaşılır. ρ uzaklık fonksiyonunun sabit olmadığı kabul edildiğinden $\langle \alpha, T \rangle \neq 0$ dır. Böylece (2.4) eşitliğinden ve $\kappa > 0$ olduğundan, $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar [4].

Teoremdeki (iv) ifade Frenet-Serret eşitliklerinin uygulanması ile kolayca gösterilebilir.

Frenet-Serret eşitlikleri kinematik olarak aşağıdaki gibi yorumlanabilir. Eğrinin üzerindeki bir noktayı, s zaman parametresine göre hareket ettirdiğimizi düşünelim. Bu durumda $\{T, N, B\}$ çatısı da,

$$T' = \kappa N$$
$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

eşitliklerine uygun olarak nokta ile birlikte hareket eder. Bu hareket anlık gerçekleşen $\tau T + \kappa B$ Darboux vektörüne göre açısal bir hız içermektedir. Darboux vektörünün doğrultusu anlık dönme eksenini ifade etmektedir. Bu vektörün $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ şeklindeki uzunluğu skaler bir açısal hızı belirtmektedir [10].

Eğer (2.2) eşitliklerinden ikincisini kullanılırsa, rektifiyan bir eğrinin konum vektörünün her zaman Darboux vektörünün yönünde olduğu görülür. Böylece bir rektifiyan eğri kinematik olarak şu şekilde yorumlanabilir. Rektifiyan eğrilerin konum vektörünün oluşturduğu vektör alanı, eğrinin her noktasında anlık dönme eksenini belirlemektedir [4].

E^3 uzayında bir eğrinin burulmasının eğriliğine oranı $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ sıfırdan farklı bir sabit ise, eğri genel helis olarak adlandırılır. Diğer taraftan, rektifiyan eğriler için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebilir.

Teorem 2.2. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisi katı hareket altında bir rektifiyan eğridir ancak ve ancak c_1 ve c_2 sabit olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2$ eşitliğini sağlar [4].

İspat. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi birim hızlı rektifiyan eğri ise $\lambda'(s) = 1,\ \lambda\kappa = \mu\tau,\ \mu'(s) = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda belirli c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu} = c_1 s + c_2$$

bulunur. Buradan burulmanın eğriliğe oranının, s yay uzunluğu parametresine göre sabit olmayan bir lineer fonksiyon olduğu anlaşılmaktadır.

Tersine, $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için, $c_1 \neq 0$ ve c_2 sabit olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2$ olduğu kabul edilsin. Eğer $a = \frac{1}{c_1}$, $b = ac_2$ alınırsa, $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(s+b)}{a}$ eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla Frenet-Serret denklemleri kullanılırsa;

$$\frac{d}{ds}[\alpha(s) - (s+b)T(s) - aB(s)] = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durum α eğrisinin bir rektifiyan eğri olduğunu göstermektedir [3].

Örnek 2.1.

$$\alpha(t) = \left(\frac{(2+t^2)\mathrm{Cos}(t) + t\ \mathrm{Sin}(t)}{(2+t^2)^{3/2}}, \frac{-t\ \mathrm{Cos}(t) + (2+t^2)\mathrm{Sin}(t)}{(2+t^2)^{3/2}}, \frac{2+2t^2+t^4}{(2+t^2)^{3/2}} \right)$$

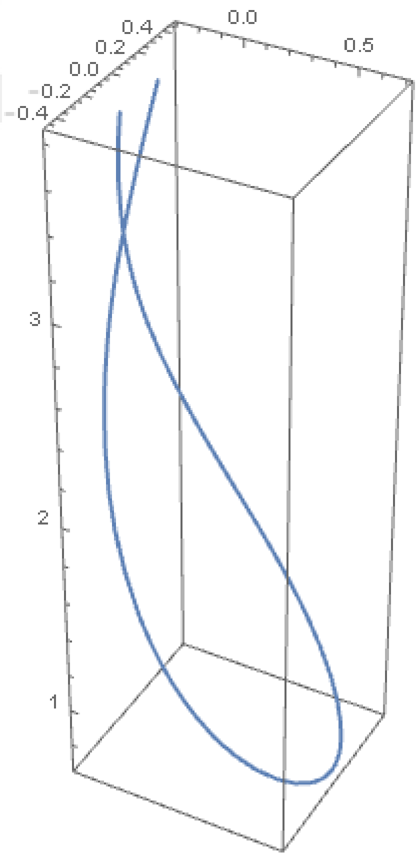
eğrisinin asli normal vektör alanı,

$$N(t) = \left(\frac{-(1+t^2)\mathrm{Cos}(t) + t\ \mathrm{Sin}(t)}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{2+t^2}}, -\frac{\mathrm{Sin}(t) + t\ (\mathrm{Cos}(t) + t\ \mathrm{Sin}(t))}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{2+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{2+t^2}} \right)$$

biçimindedir. Gerekli işlemleri yaparsak,

$$\langle \alpha(t), N(t) \rangle = 0$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla α bir rektifiyan eğridir [5].



Şekil 1. α rektifiyan eğrisi

3. BÖLÜM

E^3 UZAYINDA REKTİFİYAN SLANT HELİSLER

Bu kısımda E^3 uzayında rektifiyan slant helisler incelenmiştir. Bu amaçla önce rektifiyan slant helislerin eğrilik ve burulma denklemleri bulunmuştur. Ayrıca rektifiyan slant helislerin konum vektörlerinin ikinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklemi sağladığı gösterilmiş ve bu denklemin çözümüyle koni üzerinde yatan rektifiyan slant helisler ailesine ulaşılmıştır.

Tanım 3.1. $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin asli normal vektör alanı uzayda sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa, bu eğriye slant helis denir [2].

Teorem 3.1. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak α eğrisinin asli normaller göstergesinin geodezik eğriliği

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)(s)$$

sabittir [8,9].

Tanım 3.2. Bir slant helisin konum vektörü, her zaman kendi rektifiyan düzleminde yatıyorsa, bu eğriye rektifiyan slant helis denir [2].

Rektifiyan slant helisler için aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.2. α birim hızlı eğrisinin eğrilik ve burulması, $0 \neq c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in R$ ve $c_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \frac{c_3}{(1 + (c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

$$\tau(s) = \frac{c_3(c_1 s + c_2)}{(1 + (c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

eşitliklerini sağlıyorsa α rektifiyan slant helistir [2].

İspat. α eğrisi bir rektifiyan slant helis olsun. Teorem 2.2 ve Teorem 3.1'i kullanarak, m $\neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\mathrm{m} = \frac{c_3}{\kappa\left((1+(c_1 s + c_2)^2)^{3/2}\right)}$$

eşitliği elde edilir. $c_3 = |c_1/m|$ alınırsa

$$\kappa(s) = \frac{c_3}{(1+(c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 2.2 den

$$\tau(s) = \frac{c_3(c_1 s + c_2)}{(1+(c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

eşitliği elde edilir.

Tersine, yukarıdaki eğrilik ve burulma fonksiyonları Teorem 3.1 ve Teorem 2.2 yi sağlar. Bu durumda α eğrisi bir rektifiyan slant helistir [2].

Şimdi, Teorem 3.2 deki c_3 sabitinin açı cinsinden eşitliğini bulmak için yeni bir teorem verilebilir.

Teorem 3.3. α, asli normal vektör alanı sabit bir u doğrultusuyla sabit açı yapan birim hızlı bir rektifiyan slant helis olsun. $0 \neq c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ olmak üzere, α eğrisinin eğriliği ve burulması

$$\kappa(s) = \frac{|c_1 \tan\theta|}{(1+(c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

$$\tau(s) = \frac{|c_1 \tan\theta|(c_1 s + c_2)}{(1+(c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. α eğrisi, E^3 de birim hızlı rektifiyan slant helis olsun. Slant helis tanımından, u ile ifade edilen sabit bir vektör vardır ve aşağıdaki denklemi sağlar;

$$\langle N, u\rangle = \cos(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \neq \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z. \tag{3.1}$$

(3.1) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\langle -\kappa T + \tau B, u\rangle = 0 \tag{3.2}$$

eşitliği elde edilir.

(3.2) eşitliğinin iki tarafı κ ile bölünürse,

$$\langle -T + (c_1 s + c_2)B, u\rangle = 0 \tag{3.3}$$

ve dolayısıyla,

$$\langle T, u\rangle = (c_1 s + c_2)\langle B, u\rangle$$

eşitliği elde edilir.

$\{T, N, B\}$ ortonormal çatısı yardımıyla u vektörü

$$u = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\lambda_1 = \pm \frac{(c_1 s + c_2)\sin(\theta)}{\sqrt{1 + (c_1 s + c_2)^2}}$$

$$\lambda_2 = \cos(\theta)$$

$$\lambda_3 = \pm \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 + (c_1 s + c_2)^2}}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.3) eşitliğinin türevini alınırsa,

$$\pm \frac{c_1 \sin(\theta)}{\kappa(s)\sqrt{1 + (c_1 s + c_2)^2}} - (1 + (c_1 s + c_2)^2)\cos(\theta) = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla,

$$\kappa(s) = \pm \frac{c_1 \tan(\theta)}{(1 + (c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

ve Teorem 2.2 den

$$\tau(s) = \pm\frac{c_1 \tan(\theta)\,(c_1 s + c_2)}{(1 + (c_1 s + c_2)^2)^{3/2}}$$

eşitlikleri elde edilir [2]. Böylece ispat tamamlamış olur.

Teorem 3.4. α eğrisi birim hızlı bir rektifiyan slant helis olsun. $v(s) = \frac{N'(s)}{\kappa(s)}$ olmak üzere, v fonksiyonu

$$v''(s) + \frac{(c_1 \tan(\theta))^2}{(1 + (c_1 s + c_2)^2)^2} v(s) = 0$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini sağlar [2].

İspat. α birim hızlı rektifiyan bir slant helis olduğundan. $f(s) = c_1 s + c_2$ olmak üzere, Frenet denklemleri

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + f\kappa B$$

$$B' = -f\kappa N$$

biçiminde yazılabilir. İkinci eşitlik κ ile bölünürse,

$$\frac{N'}{\kappa} = -T + fB \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. (3.4) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$c_1 B = \left(\frac{N'}{\kappa}\right)' + \kappa(1 + f^2)N$$

ve Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\left(\frac{N'}{\kappa}\right)'' + \kappa(1 + f^2)N' + \left[\left(\kappa(1 + f^2)\right)' + c_1 f\kappa\right] N = 0 \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir.

Eğer gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\left(\kappa(1+f^2)\right)' + c_1 f\kappa = 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.5) eşitliği

$$\left(\frac{N'}{\kappa}\right)'' + \kappa(1+f^2)N' = 0$$

biçimini alır.

$v(s) = \frac{N'(s)}{\kappa(s)}$ olsun. Bu durumda yukarıdaki denklem,

$$(v)'' + \frac{(c_1\tan(\theta))^2}{(1+(c_1 s+c_2)^2)^2}v = 0 \tag{3.6}$$

denklemine dönüşür. Böylece ispat tamamlanmış olur [2].

$v = (v_1, v_2, v_3)$ ün bileşenleri, yukarıdaki denklemi sağladığından

$$v_1(s) = -\sqrt{1+f^2(s)}\sin\left[\sec(\theta)\arctan[f(s)]\right]$$
$$v_2(s) = \sqrt{1+f^2(s)}\cos\left[\sec(\theta)\arctan[f(s)]\right]$$
$$v_3(s) = 0$$

biçiminde seçilirse, v vektörü (3.6) diferansiyel denklemini sağlar. Dolayısıyla, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $N = (n_1, n_2, n_3)$ asli normal vektör alanının bileşenlerinin

$$\begin{gathered} n_1(s) = \int \kappa(s)\, v_1 ds = A_1|c_1|\sin(\theta)\cos\left[\sec(\theta)\arctan[f(s)]\right] \\ n_2(s) = \int \kappa(s)\, v_2 ds = A_2|c_1|\sin(\theta)\sin\left[\sec(\theta)\arctan[f(s)]\right] \\ n_3(s) = \cos(\theta) \end{gathered} \tag{3.7}$$

biçiminde olduğu görülür.

Diğer taraftan α, N asli normal vektör alanı, e_3 ile sabit bir θ açısı yapan, birim hızlı rektifiyan slant helis ise

$$\langle N, e_3\rangle = \cos(\theta)$$

eşitliği yazılabilir.

Asli normal vektör alanı için $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ dir. Dolayısıyla,

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 - \cos^2(\theta) = sin^2(\theta)$$

eşitliği vardır. $h(s)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, asli normal vektör alanının bileşenleri

$$\begin{aligned} n_1(s) &= \sin(\theta)\, cos\big(h(s)\big) \\ n_2(s) &= \sin(\theta)\, sin\big(h(s)\big) \\ n_3(s) &= cos(\theta) \end{aligned} \tag{3.8}$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer (3.7) ve (3.8) denklemlerinde, $A_1 = 1/|c_1|,\ A_2 = 1/|c_1|$ ve $h(s) = \sec(\theta)\arctan[f(s)]$ seçilirse bu iki denklem çakışır. α, birim hızlı olduğundan

$$\alpha_1(s) = \sin(\theta)\int\left(\int \kappa(s)\cos[\sec(\theta)\arctan(c_1 s + c_2)]\, ds\right) ds$$

$$\alpha_2(s) = \sin(\theta)\int\left(\int \kappa(s)\sin[\sec(\theta)\arctan(c_1 s + c_2)]\, ds\right) ds$$

$$\alpha_3(s) = \int\left(\int \kappa(s)\cos[\theta]\, ds\right) ds$$

biçiminde yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\alpha_1(s) = -\frac{\cos(\theta)}{c_1}\sqrt{(1 + (c_1 s + c_2)^2)}\cos[\sec(\theta)\arctan(c_1 s + c_2)]$$

$$\alpha_2(s) = -\frac{\cos(\theta)}{c_1}\sqrt{(1 + (c_1 s + c_2)^2)}\sin[\sec(\theta)\arctan(c_1 s + c_2)]$$

$$\alpha_3(s) = \frac{1}{c_1}\sqrt{(1 + (c_1 s + c_2)^2)}\sin(\theta)$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5. $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ c_1 \neq 0,\ c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = -\frac{\sqrt{(1+(c_1s+c_2)^2)}}{c_1}(\cos(\theta)\cos[\sec(\theta)\arctan(c_1s+c_2)],$$

$$\sin(\theta)\cos[\sec(\theta)\arctan(c_1s+c_2)], \qquad (3.9)$$

$$-\sin(\theta))$$

eğrisi,

$$\tan^2(\theta)(x^2+y^2) = z^2 \qquad (3.10)$$

konisi üzerinde yatan birim hızlı bir rektifiyan slant helistir [2].

İspat. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

olduğu görülür. α eğrisinin eğrilik ve burulması hesaplanırsa,

$$\kappa(s) = \frac{|c_1\tan(\theta)|}{((c_1s+c_2)^2+1)^{3/2}}$$

$$\tau(s) = \frac{|c_1\tan(\theta)|(c_1s+c_2)}{((c_1s+c_2)^2+1)^{3/2}}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1s+c_2$$

olduğundan α bir rektifiyan eğridir. Ayrıca α eğrisi için

$$\frac{\kappa(s)}{\left(\kappa^2(s)+\tau^2(s)\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)' = \cot(\theta)$$

olduğundan bir slant helistir.

α eğrisinin bileşenleri

$$\tan^2(\theta)\left(\alpha_1^2(s),\alpha_2^2(s)\right)-\alpha_3^2(s)=0$$

eşitliğini sağladığından

eğri, $\tan^2(\theta)(x^2+y^2)=z^2$ konisi üzerinde yatar. Böylece ispat tamamlanır [2].

Örnek 3.1. Yukarıdaki (3.9) ve (3.10) denklemlerinde

$$c_1=1, c_2=0, \qquad \cos(\theta)=\frac{1}{3}$$

seçilir ve elde edilen eğri β ile gösterilirse,

$$\beta(s)=\left(-\frac{1}{3}\sqrt{s^2+1}\cos\left(3\arctan(s)\right),-\frac{1}{3}\sqrt{s^2+1}\sin\left(3\arctan(s)\right),\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{s^2+1}\right),$$

$$\tan(\theta)=2\sqrt{2}$$

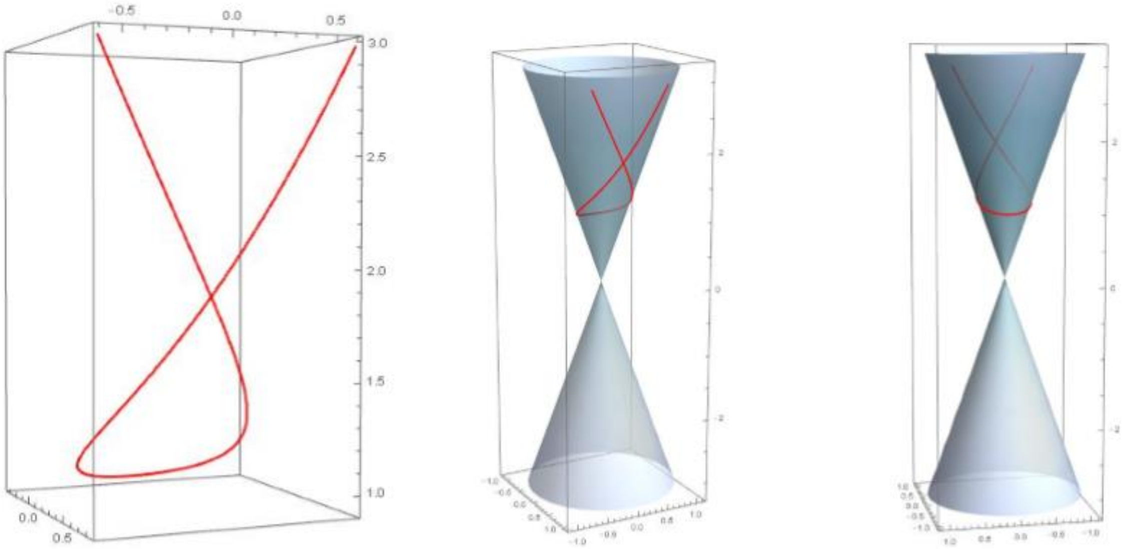
$$8(x^2+y^2)=z^2$$

eşitlikleri elde edilir. β eğrisi, eğriliği ve burulması

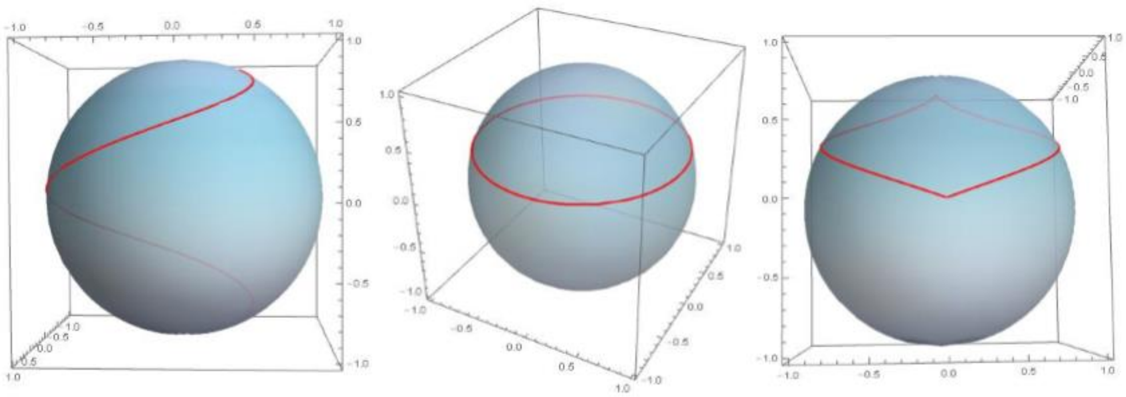
$$\kappa(s)=\frac{2\sqrt{2}}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau(s)=\frac{2\sqrt{2}s}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

olan birim hızlı bir rektifiyan slant helistir.



Şekil 2. $8(x^2+y^2)=z^2$ konisi üzerinde yatan β rektifiyan slant helisi



Şekil 3. β eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergeleri

Örnek 3.2. Yukarıdaki (3.9) ve (3.10) denklemlerinde

$$c_1=\frac{1}{2},\ c_2=-\frac{1}{5},\qquad \cos(\theta)=\frac{1}{10}$$

seçilirse,

$$\tan(\theta)=\sqrt{99}$$

$$\gamma(s)=\frac{-\sqrt{\left(\frac{5s-2}{10}\right)^2+1}}{5}\left(\cos\left(10\arctan\left(\frac{5s-2}{10}\right)\right),\sin\left(10\arctan\left(\frac{5s-2}{10}\right)\right),-\frac{3\sqrt{11}}{5}\right)$$

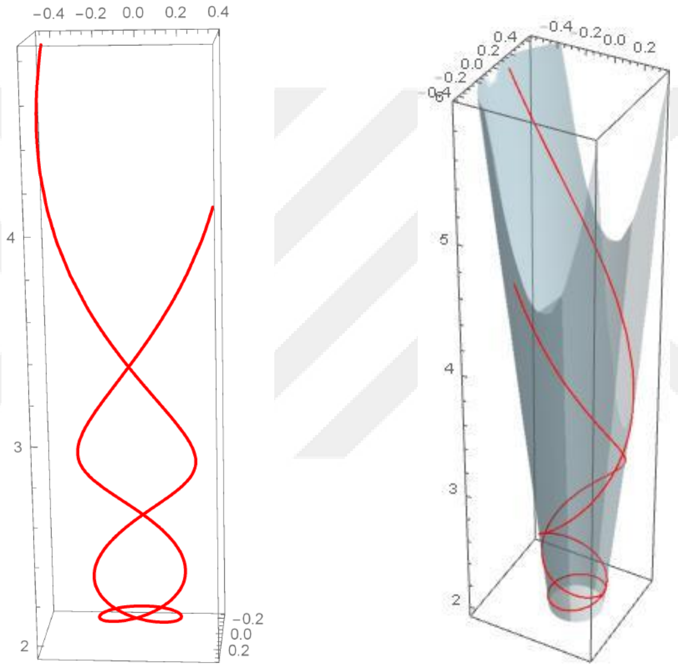
$$99(x^2 + y^2) = z^2$$

eşitliklerini elde ederiz. γ eğrisi, eğriliği ve burulması

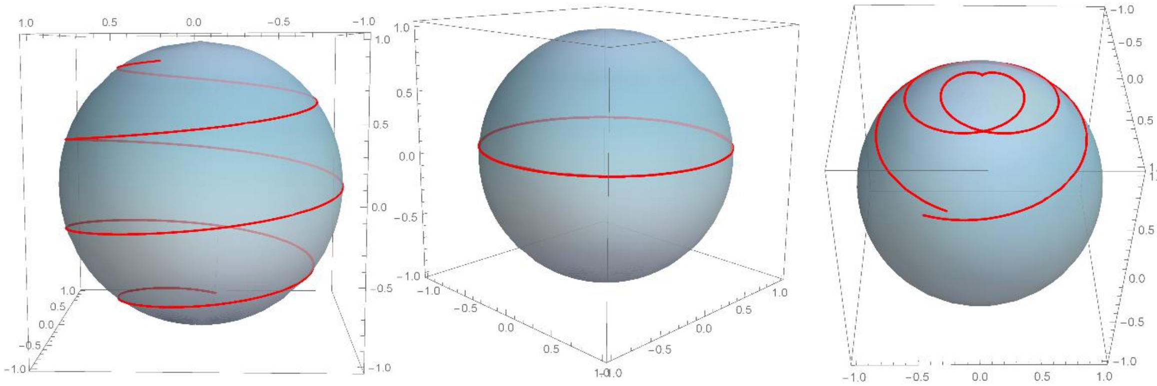
$$\kappa(s) = \frac{1500\sqrt{11}}{(5s(5s-4)+104)^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

$$\tau(s) = \frac{1500\sqrt{11}\,(5s-2)}{(5s(5s-4)+104)^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

olan birim hızlı bir rektifiyan slant helistir.



Şekil 4. $99(x^2 + y^2) = z^2$ konisi üzerinde yatan γ rektifiyan slant helisi



Şekil 5. γ eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergeleri

KAYNAKÇA

[1] Akdeniz, F. and Öztürk, F., 1996, *Lineer Modeller*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

[2] Altunkaya, B., Aksoyak, F.K., Kula, L. and Aytekin, C., 2016, On Rectifying Slant Helices in Euclidean 3-Space. *Konuralp Journal of Mathematics*. Volume 4, No 2 17-24.

[3] Appell, P., 1941, *Traite de Mecnique Rationnelle,* Vol.1, 6th ed., Gauthier-Villars, Paris.

[4] Chen, B. Y., 2003, When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?, *Amer. Math. Monthly,* 110, 147-152.

[5] Deshmukh, S., Chen B.Y. and Alshammari, S.H., 2018, On rectifying curves in Euclidean 3-space. *Turk. J. Math*. 42, 609-620.

[6] Hacısalihoğlu, H. H., 2005, *2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri*, Ankara.

[7] Hacısalihoğlu H. H., 1998, *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

[8] Izumiya S., Takeuchi N., 2004, New special curves and developable surfaces, *Turk. J. Math.* 28, 153-163.

[9] Izumiya, S., Takeuchi, N., 2002, Generic properties of helices and Bertrand curves , *J. Geom*. 74, 97-109.

[10] Laugwitz, D., 1965, *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press,New York.

[11] Sabuncuoğlu A., 2010, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınevi.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ADI, SOYADI	: CAHİT AYTEKİN
DOĞUM YERİ	: ZONGULDAK
DOĞUM TARİHİ	: 25.04.1986

EĞİTİM BİLGİLERİ

LİSE	: Zonguldak İMKB Anadolu Öğretmen Lisesi
LİSANS	: Kocaeli Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
1.YÜKSEK LİSANS	: Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim/Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
2.YÜKSEK LİSANS	: Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
DOKTORA	: Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim/Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
YABANCI DİL	**:** İngilizce

GÖREVİ

Ahi Evran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi