T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PRABHAKAR FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Muhammet AY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2018

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PRABHAKAR FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Muhammet AY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

KIRŞEHİR 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Üye:
Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Üye:
Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

03..08/2018

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhammet AY

PRABHAKAR FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Muhammet AY

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Ağustos 2018

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan özel fonksiyonların tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gamma, beta ve hipergeometrik fonksiyonlarının çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Prabhakar fonksiyonu yardımıyla gamma ve beta fonksiyonları için yeni genelleştirmeler tanımlanmıştır. Ardından, yeni genelleştirilmiş beta fonksiyonu kullanılarak Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları için de yeni genelleştirmeler verilmiştir. Ayrıca, bu genelleştirilmiş fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, elde edilen bulgular özetlenerek ileriki çalışmalar için çeşitli öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Hipergeometrik fonksiyon, Mellin dönüşümü, Mittag-Leffler fonksiyonu, Prabhakar fonksiyonu.
Sayfa Adedi: 61
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

GENERALIZED SPECIAL FUNCTIONS DEFINED BY PRABHAKAR FUNCTION

(Master Thesis)

Muhammet AY

Kırşehir Ahi Evran University
Institute of Science

August 2018

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the definitions and some properties of special functions that will be used in other chapters are given.

In the third chapter, some studies related to various generalizations of gamma, beta and hypergeometric functions are mentioned.

In the fourth chapter, new generalizations of gamma and beta functions are defined with the help of Prabhakar function. Then, new generalizations of Gauss hypergeometric and confluent hypergeometric functions are also given by using the new generalization of beta function. Besides, some properties of these generalized functions are examined.

In the fifth chapter, obtained results are summarized and suggestions for forthcoming studies are presented.

Keywords: Gamma function, Beta function, Hypergeometric function, Mellin transform, Mittag-Leffler function, Prabhakar function.
Number of Pages: 61
Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın **Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA**'ya, titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın **Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ**'a derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen, hayat boyu her sıkıntıda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme en içten duygularımla teşekkür ederim.

Muhammet AY

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$(\alpha)_n$	: Pochhammer sembolü
${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi(b;c;z)$	: Konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	: İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$	: Prabhakar fonksiyonu
$\mathfrak{M}[f(x):s]$	: Mellin dönüşümü
$\mathfrak{M}^{-1}[F(s):x]$	: Ters Mellin dönüşümü
$\Gamma_p(x)$	: Genişletilmiş gamma fonksiyonu
$B_p(x,y)$	: Genişletilmiş beta fonksiyonu
$\mathrm{F}_p(a,b;c;z)$	: Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi_p(b;c;z)$	: Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x)$	: E-gamma fonksiyonu
${}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)$	: E-beta fonksiyonu
${}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)$	: E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)$	: E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$H(t)$	: Heaviside fonksiyonu
$\delta(t)$	: Dirac delta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin önemli çalışma alanlarından birisi olan özel fonksiyonlar genellikle has olmayan integraller ya da sonsuz seriler yardımıyla tanımlanırlar [1, 2, 4, 13-16, 21, 33]. Matematiksel fizik, olasılık teorisi ve diğer alanlarda pek çok uygulamalara sahip olmaları nedeniyle, en önemli özel fonksiyonlar arasında gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları yer almaktadır. Bu özel fonksiyonların tanımları ve bu tez de kullanılacak olan bazı özellikleri ikinci bölümde verilmiştir.

Literatür incelendiğinde 1994, 1997 ve 2004 yıllarında Chaudhry ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalardan [6-8] ilham alınarak, gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili 2011 yılından itibaren yapılan çok sayıda yayına rastlanmaktadır. Bu çalışmalardan bazılarına üçüncü bölümde değinilmiştir [9, 11, 12, 17, 20, 26, 28, 30-32, 34, 37].

Ayrıca belirtelim ki 2010 yılında Özarslan ve Özergin tarafından yapılan çalışmayı [24] takiben, Appell, Lauricella ve Srivastava fonksiyonları gibi çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlarının genelleştirmeleri ile kesirli türev ve integral operatörlerinin genelleştirmeleri üzerine yapılan çalışmaların da oldukça popüler hale geldiği görülmektedir [3, 5, 10, 12, 18, 25, 35, 36].

Özel fonksiyonların genelleştirmeleri üzerine yapılan çalışmalar, uygulama alanlarının genişlemesi açısından büyük öneme sahiptir ve bu konu üzerine yapılan çalışmaların sayısı da gün geçtikçe artmaktadır.

Bu sebeple, yukarıda kısmen bahsedilen yayınlardan da esinlenerek, bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının yeni genelleştirmeleri tanımlanmıştır. Ayrıca tanımlanan yeni genelleştirilmiş fonksiyonlar için bazı integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, toplam formülleri ve indirgeme bağıntıları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan özel fonksiyonların tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1. (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x>0 \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [1].

Gamma fonksiyonuna

$$\Gamma(x+1)=x!, \quad x>-1$$

özelliğinden dolayı genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Ayrıca

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \quad x>0$$

eşitliği de sağlanır [1].

Belirtelim ki, $x\in\mathbb{C}$ olması durumunda (2.1) integrali $Re(x)>0$ için yakınsaktır [33].

Tanım 2.2. (Beta Fonksiyonu) $B(x,y)$ ile gösterilen beta fonksiyonu,

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x>0,\ y>0 \tag{2.2}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [1].

Diğer taraftan (2.2) de $t=\sin^2\theta$ ve $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümleri yapılırsa sırasıyla

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta, \quad x>0,\ y>0 \tag{2.3}$$

ve

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du, \quad x>0,\ y>0$$

elde edilir [1]. Gamma fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasında

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,\ y\neq 0,-1,-2,\ldots \tag{2.4}$$

şeklinde bir ilişki vardır [33]. Ayrıca (2.4) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y)=B(y,x)$$

olup, bu eşitlik beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır [33].

Belirtelim ki, $x,y\in\mathbb{C}$ olması durumunda (2.2) integrali $Re(x)>0$ ve $Re(y)>0$ için yakınsaktır [33].

Tanım 2.3. (Pochhammer Sembolü) α kompleks bir sayı ve n sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) & ,n\in\mathbb{N}\\ 1 & ,n=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [33].

Pochhammer sembolü, gamma fonksiyonu yardımıyla

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$$

biçiminde de verilir [33]. Ayrıca, Pochhammer sembolü

$$(a)_{n+m}=(a)_m(a+m)_n \tag{2.5}$$

özelliğine de sahiptir [33].

Tanım 2.4. (Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu) $a,b,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$

şeklinde tanımlanır [33]. Bazen ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ yerine $\mathrm{F}(a,b;c;z)$ gösterimi de kullanılır.

Pochhammer sembolü ile beta fonksiyonu arasındaki

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b)} = \frac{B(b+n, c-b)}{B(b, c-b)}, \quad (Re(c) > Re(b) > 0) \tag{2.6}$$

özelliğinden [1] yararlanılarak Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\mathrm{F}(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \tag{2.7}$$

$$(Re(c) > Re(b) > 0)$$

şeklinde de yazılabilir Ayrıca Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\mathrm{F}(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \tag{2.8}$$

$$(\arg|1-z| < \pi, \ Re(c) > Re(b) > 0)$$

integral temsiline sahiptir [33].

Tanım 2.5. (Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonu) $b, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$${}_1\mathrm{F}_1(b; c; z) = \Phi(b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

şeklinde tanımlanır [33].

Pochhammer sembolü ile beta fonksiyonu arasındaki (2.6) özelliğinden yararlanılarak konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi(b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(b+n, \ c-b)}{B(b, \ c-b)} \frac{z^n}{n!} \tag{2.9}$$

$$(Re(c) > Re(b) > 0)$$

biçiminde de yazılabilir. Ayrıca konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\Phi(b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} e^{zt} dt \tag{2.10}$$

$$(Re(c) > Re(b) > 0)$$

integral temsiline sahiptir [33].

Gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi için [1, 2, 4, 13, 14, 21-23, 27, 33] nolu referanslara bakılabilir.

Tanım 2.6. (Mellin Dönüşümü) $(0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir f fonksiyonunun Mellin dönüşümü,

$$\mathfrak{M}[f(x):s]=F(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx, \quad s\in\mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanır. [19].

Ayrıca Mellin dönüşümü,

$$\mathfrak{M}[f(x):s]=F(s)\Rightarrow \mathfrak{M}[f'(x):s]=-(s-1)F(s-1) \tag{2.11}$$

özelliğini sağlar [19].

Tanım 2.7. (Ters Mellin Dönüşümü) F fonksiyonun ters Mellin dönüşümü

$$\mathfrak{M}^{-1}[F(s):x]=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty} x^{-s}F(s)ds, \quad \mathfrak{c}=Re(s)$$

şeklinde tanımlanır [19].

Tanım 2.8. (Mittag-Leffler Fonksiyonları) Bir parametreli ve iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonları sırasıyla

$$E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad \alpha\in\mathbb{C},\ Re(\alpha)>0$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ Re(\alpha)>0$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 2.9. (Prabhakar Fonksiyonu) Üç parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu olarak da bilinen Prabhakar fonksiyonu

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!}, \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\ Re(\alpha)>0$$

şeklinde tanımlanır [29].

1971 yılında Prabhakar tarafından tanımlanan bu fonksiyonun bazı özel durumları şunlardır:

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}=E_{\alpha,\beta}(z)$$

$$E^{1}_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{\Gamma(\alpha n+1)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}=E_{\alpha}(z)$$

$$E^{1}_{1,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$$

$$E^{2}_{1,2}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)_n}{\Gamma(n+2)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$$

$$E^{\gamma}_{1,\beta}(z)=\frac{\Phi(\gamma;\beta;z)}{\Gamma(\beta)}.$$

Ayrıca, Prabhakar fonksiyonunun $m.$ basamaktan türevi

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)\right]=(\gamma)_m E^{\gamma+m}_{\alpha,\beta+\alpha m}(z) \tag{2.12}$$

biçimindedir [29].

Mittag-Leffler fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi için [15, 16, 19, 21, 23, 27, 29] nolu referanslara bakılabilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde gamma, beta ve hipergeometrik fonksiyonlarının çeşitli genelleştirmeleri üzerine yapılmış bazı çalışmalara değinilecektir.

3.1. GAMMA FONKSİYONUNUN GENELLEŞTİRMELERİ

1994 yılında, Chaudhry ve Zubair klasik gamma fonksiyonuna $e^{-\frac{p}{t}}$ düzenleyici çarpanını ekleyerek genişletilmiş gamma fonksiyonunu,

$$\Gamma(x;p)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{\left(-t-\frac{p}{t}\right)}dt, \quad Re(p)>0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamışlar ve tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir [6]. $p=0$ için genişletilmiş gamma fonksiyonu, klasik gamma fonksiyonuna indirgenir.

Son yıllarda pek çok araştırmacı, gamma fonksiyonunun (3.1) deki genişletilmesinden esinlenerek çeşitli genelleştirilmiş gamma fonksiyonları tanımlamışlardır. Bunlardan bazıları şunlardır:
Özergin ve arkadaşları [26]

$$\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)=\int_0^\infty t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-t-\frac{p}{t}\right)dt$$
$$(Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,\ Re(p)>0,\ Re(x)>0),$$

Parmar [28]

$$\Gamma_p^{(\alpha,\beta;m)}(x)=\int_0^\infty t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-t-\frac{p}{t^m}\right)dt$$
$$(Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,\ Re(p)>0,\ Re(x)>0,\ Re(m)>0),$$

Çetinkaya ve arkadaşları [11]

$$\Gamma_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(x)=\int_0^\infty t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{t^\kappa}{p}-\frac{q}{t^\mu}\right)dt$$
$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0, Re(x)>0),$$

Şahin ve arkadaşları [37]

$$\Gamma_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{\left(-\frac{t^\kappa}{p}-\frac{q}{t^\mu}\right)}dt$$

$$(Re(p)>0, Re(q)>0, Re(\kappa)>0, Re(\mu)>0).$$

3.2. BETA FONKSİYONUNUN GENELLEŞTİRMELERİ

1997 yılında, Chaudhry ve arkadaşları, genişletilmiş beta fonksiyonu için ilk olarak gamma fonksiyonunda kullanılan $e^{-\frac{p}{t}}$ düzenleyici çarpanını eklemeyi düşünmüşler fakat beta fonksiyonu için önemli olan simetri özelliğini bozacağını görmüşlerdir. Bu yüzden klasik beta fonksiyonuna $e^{-\frac{p}{t(1-t)}}$ düzenleyici çarpanını ekleyerek genişletilmiş beta fonksiyonunu,

$$B(x,y;p):=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)}dt, \quad Re(p)>0 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlamışlar ve tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir [7]. $p=0$ için genişletilmiş beta fonksiyonu, klasik beta fonksiyonuna indirgenir.

Son yıllarda pek çok araştırmacı, beta fonksiyonunun (3.2) deki genişletilmesinden esinlenerek çeşitli genelleştirilmiş beta fonksiyonları tanımlamışlardır. Bunlardan bazıları şunlardır:

Özergin ve arkadaşları [26]

$$B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1\mathrm{F}_1\left(\alpha;\beta;\frac{-p}{t(1-t)}\right)dt$$

$$(Re(p)>0,\ Re(x)>0,\ Re(y)>0,\ Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0),$$

Lee ve arkadaşları [20]

$$B(x,y;p;m)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}exp\left[-\frac{p}{t^m(1-t)^m}\right]dt$$

$$(Re(p)>0,\ m>0),$$

Parmar [28]

$$B_p^{(\alpha,\beta;m)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1\mathrm{F}_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^m(1-t)^m}\right)dt$$
$$(Re(p)>0,\ Re(x)>0,\ Re(y)>0,\ Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,\ Re(m)>0),$$

Choi ve arkadaşları [9]

$$B(x,y;p,q)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}exp\left(-\frac{p}{t}-\frac{q}{1-t}\right)dt$$
$$(Re(p)>0,\ Re(q)>0),$$

Srivastava ve arkadaşları [34]

$$B_p^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^\kappa(1-t)^\mu}\right)dt$$
$$\big(Re(p)\geqq 0;\ \min\{Re(x),\ Re(y),\ Re(\alpha),\ Re(\beta)\}>0;\ \min\{Re(\kappa),\ Re(\mu)\}>0\big),$$

Goswami ve arkadaşları [17]

$$B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t}-\frac{q}{1-t}\right)dt$$
$$(\min\{Re(p),\ Re(q)\}>0;\ p=q=0,\ \min\{Re(x),\ Re(y)\}>0;\ \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-),$$

Shadab ve arkadaşları [32]

$$B_\alpha^p(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_\alpha\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$
$$(\alpha\in\mathbb{R}_0^+,\ Re(p)\geq 0),$$

Rahman ve arkadaşları [30]

$$B_p^{\lambda;m}(\varsigma,\beta)=\int_0^1 z^{\varsigma-1}(1-z)^{\beta-1}E_\lambda\left(-\frac{p}{z^m(1-z)^m}\right)dz$$
$$(Re(\varsigma)>0,\ Re(\beta)>0,\ Re(p)\geq 0,\ \lambda,\ m>0),$$

Rahman ve arkadaşları [31]

$$B_{p,q}^\lambda(\delta_1,\delta_2)=\int_0^1 z^{\delta_1-1}(1-z)^{\delta_2-1}E_\lambda\left(-\frac{p}{z}\right)E_\lambda\left(-\frac{q}{1-z}\right)dz$$
$$(Re(\delta_1)>0,\ Re(\delta_2)>0,\ p,\ q\geq 0,\ Re(\lambda)>0),$$

Çetinkaya ve arkadaşları [11, 12]

$$B_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^\kappa}-\frac{q}{(1-t)^\mu}\right)dt$$

$$(\min\{Re(p),\ Re(q),\ Re(\alpha),\ Re(\beta),\ Re(\kappa),\ Re(\mu)\}>0, \min\{Re(x),\ Re(y)\}>0),$$

Şahin ve arkadaşları [37]

$$B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\left(-\frac{p}{t^\kappa}-\frac{q}{(1-t)^\mu}\right)}dt$$

$$(Re(p)>0, Re(q)>0, Re(\kappa)>0, Re(\mu)>0).$$

3.3. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRMELERİ

2004 yılında, Chaudhry ve arkadaşları, (2.7) ve (2.9) eşitliklerinde paydaki beta fonksiyonu yerine (3.2) genişletilmiş beta fonksiyonunu kullanarak genişletilmiş Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarını

$$\mathrm{F}_p(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B(b+n,\ c-b;p)}{B(b,\ c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{3.3}$$

$$(p\geqq 0;\ |z|<1;\ Re(c)>Re(b)>0)$$

ve

$$\Phi_p(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,\ c-b;p)}{B(b,\ c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{3.4}$$

$$(p\geqq 0;\ Re(c)>Re(b)>0)$$

şeklinde tanımlamışlardır [8]. Ayrıca, $p=0$ olması durumunda (3.3) ve (3.4) sırasıyla klasik Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarına indirgenir.

Bu fikirden esinlenerek, (2.7) ve (2.9) eşitliklerininde paydaki beta fonksiyonu yerine bir önceki kısımda bahsedilen genelleştirilmiş beta fonksiyonlarının kullanılmasıyla, sırasıyla aşağıdaki genelleştirilmiş Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bunlar:

Özergin ve arkadaşları [26]

$$\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

ve

$$\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},$$

Lee ve arkadaşları [20]

$$\mathrm{F}_p(a,b;c;z;m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,\ c-b;p;m)}{B(b,\ c-b)}(a)_n\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0,\ m>0,\ |z|<1;\ Re(c)>Re(b)>0)$$

ve

$$\Phi_p(b;c;z;m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,\ c-b;p;m)}{B(b,\ c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0,\ m>0,\ Re(c)>Re(b)>0),$$

Parmar [28]

$$\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;m)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_p^{(\alpha,\beta;m)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0;\ |z|<1;\ Re(c)>Re(b)>0,\ Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,Re(m)>0)$$

ve

$$\Phi_p^{(\alpha,\beta;m)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_p^{(\alpha,\beta;m)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0;\ Re(c)>Re(b)>0,\ Re(\alpha)>0,\ Re(\beta)>0,Re(m)>0),$$

Choi ve arkadaşları [9]

$$\mathrm{F}_{p,q}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b;p,q)}{B(b,c-b)}(a)_n\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ |z|<1;\ Re(c)>Re(b)>0)$$

ve

$$\Phi_{p,q}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b;p,q)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geqq 0,\ q\geqq 0;\ Re(c)>Re(b)>0),$$

Srivastava ve arkadaşları [34]

$$\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_{p}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(|z|<1;\ \min\{Re(\alpha),\ Re(\beta),\ Re(\kappa),\ Re(\mu)\}>0; Re(c)>Re(b)>0;\ Re(p)\geqq 0),$$

Goswami ve arkadaşları [17]

$$\mathrm{F}_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p,\ q\in\mathbb{R}_0^+;\ |z|<1;\ Re(c)>Re(b)>0;\ \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-)$$

ve

$$\Phi_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p,\ q\in\mathbb{R}_0^+;\ Re(c)>Re(b)>0;\ \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-),$$

Shadab ve arkadaşları [32]

$$\mathrm{F}_{p,\alpha}(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k B_{\alpha}^{p}(b+k,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^k}{k!}$$

$$(\alpha\in\mathbb{R}^+,\ p\in\mathbb{R}_0^+,\ |z|<1,\ Re(c)>Re(b)>0)$$

ve

$$\Phi_{p,\alpha}(b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{\alpha}^{p}(b+k,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^k}{k!}$$

$$(\alpha\in\mathbb{R}^+,\ p\in\mathbb{R}_0^+,\ Re(c)>Re(b)>0),$$

Rahman ve arkadaşları [30]

$$\mathrm{F}_{p}^{\lambda;m}(\varsigma_1,\varsigma_2;\varsigma_3;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\varsigma_1)_n\frac{B_{p}^{\lambda;m}(\varsigma_2+n,\varsigma_3-\varsigma_2)}{B(\varsigma_2,\varsigma_3-\varsigma_2)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0,\ m,\ \lambda>0,\ Re(\varsigma_3)>Re(\varsigma_2)>0,\ |z|<1)$$

ve

$$\Phi_p^{\lambda;m}(\varsigma_2;\varsigma_3;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_p^{\lambda;m}(\varsigma_2+n,\varsigma_3-\varsigma_2)}{B(\varsigma_2,\varsigma_3-\varsigma_2)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p\geq 0,\ m,\ \lambda>0,\ Re(\varsigma_3)>Re(\varsigma_2)>0),$$

Rahman ve arkadaşları [31]

$$\mathrm{F}_{p,q}^{\lambda}(\delta_1,\delta_2;\delta_3;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\delta_1)_n\frac{B_{p,q}^{\lambda}(\delta_2+n,\delta_3-\delta_2)}{B(\delta_2,\delta_3-\delta_2)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p,\ q\geq 0,\ \lambda>0,\ Re(\delta_3)>Re(\delta_2)>0,\ |z|<1)$$

ve

$$\Phi_{p,q}^{\lambda}(\delta_2;\delta_3;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{p,q}^{\lambda}(\delta_2+n,\delta_3-\delta_2)}{B(\delta_2,\delta_3-\delta_2)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(p,\ q\geq 0,\ \lambda>0,\ Re(\delta_3)>Re(\delta_2)>0),$$

Çetinkaya ve arkadaşları [11]

$$\mathrm{F}_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0,\ |z|<1,\ Re(c)>Re(b)>0)$$

ve

$$\Phi_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0,\ Re(c)>Re(b)>0),$$

Şahin ve arkadaşları [37]

$$\mathrm{F}_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\frac{B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0,Re(\gamma)>Re(\beta)>0)$$

ve

$$\Phi_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0,Re(\gamma)>Re(\beta)>0).$$

Yukarıda bahsedilen tüm bu çalışmalardan esinlenerek tez çalışmasının sonraki bölümünde Prabhakar fonksiyonu yardımıyla yeni genelleştirilmiş özel fonksiyonlar tanımlanacak ve bu fonksiyonların sağladığı bazı özellikler incelenecektir.

4. PRABHAKAR FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde, Tanım 2.9 da verilen

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!},\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\ Re(\alpha)>0 \tag{4.1}$$

Prabhakar fonksiyonu yardımıyla gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları genelleştirilecek ve genelleştirilen bu fonksiyonların integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, toplam formülleri ve indirgeme bağıntıları gibi çeşitli özellikleri incelenecektir. Bu bölüm boyunca kısalık açısından Prabhakar fonksiyonu yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş gamma, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla E-gamma, E-beta, E-Gauss hipergeometrik ve E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu olarak adlandırılacaktır. Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $k,m,n\in\mathbb{N}$; $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,p,x,y,z\in\mathbb{C}$; $Re(p)>0$, $Re(x)>0$, $Re(y)>0$, $Re(c)>Re(b)>0$ ve $Re(\alpha)>0$ olarak alınacaktır.

4.1. E-GAMMA FONKSİYONU

Tanım 4.1. E-gamma fonksiyonu

$${}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x):=\int_0^{\infty}t^{x-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}\Big(-t-\frac{p}{t}\Big)dt \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

E-gamma fonksiyonu, $p=0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1,\gamma=\beta=2$) olması halinde (2.1) klasik gamma fonksiyonuna, $p\neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1,\gamma=\beta=2$) olması halinde (3.1) genişletilmiş gamma fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.2. E-gamma fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x)\,{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(y) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} & r^{2(x+y)-1}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} \\
& \times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-r^2\cos^2\theta - \frac{p}{r^2\cos^2\theta}\right) E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-r^2\sin^2\theta - \frac{p}{r^2\sin^2\theta}\right) dr d\theta \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

bağıntısını sağlar.

İspat. E-gamma fonksiyonunun (4.2) integral temsilinde $t=\eta^2$ dönüşümü yapılırsa

$$
{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x) = 2\int_0^{\infty} \eta^{2x-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\eta^2 - \frac{p}{\eta^2}\right) d\eta
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(y) = 2\int_0^{\infty} \xi^{2y-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\xi^2 - \frac{p}{\xi^2}\right) d\xi
$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa çarpılırsa

$$
{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x)\,{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \eta^{2x-1}\xi^{2y-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\eta^2 - \frac{p}{\eta^2}\right) E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\xi^2 - \frac{p}{\xi^2}\right) d\eta d\xi
$$

bulunur. Burada $\eta = r\cos\theta$, $\xi = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlara geçilirse

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x)\,{}^{E}\Gamma_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(y) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} & r^{2(x+y)-1}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} \\
& \times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-r^2\cos^2\theta - \frac{p}{r^2\cos^2\theta}\right) E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-r^2\sin^2\theta - \frac{p}{r^2\sin^2\theta}\right) dr d\theta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3. (4.3) eşitliğinde, $p \neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1, \gamma=\beta=2$) alınırsa, genişletilmiş gamma ile genişletilmiş beta fonksiyonu arasındaki ilişki [7],

$$
\Gamma_p(x)\Gamma_p(y) = 2\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} B\left(x, y; \frac{p}{r^2}\right)
$$

bulunur.

Gerçekten de (4.3) eşitliğinde, $p \neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1, \gamma=\beta=2$) alınırsa

$$
\begin{aligned}
\Gamma_p(x)\Gamma_p(y) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} & r^{2(x+y)-1}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} e^{\left(-r^2\cos^2\theta - \frac{p}{r^2\cos^2\theta}\right)} \\
& \times e^{\left(-r^2\sin^2\theta - \frac{p}{r^2\sin^2\theta}\right)} dr d\theta
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(y)=2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}e^{\left(-\frac{p}{r^2\cos^2\theta\sin^2\theta}\right)}d\theta\right)dr$$

olup, Chaudhry ve arkadaşları [7] tarafından verilen

$$B(x,y;b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}e^{\left(-b\sec^2\theta\csc^2\theta\right)}d\theta$$

integral temsili kullanılırsa

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(y)=2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}B\left(x,y;\frac{p}{r^2}\right)$$

istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.4. (4.3) eşitliğinde, $p=0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1,\gamma=\beta=2$) alınırsa, klasik gamma ile klasik beta arasındaki ilişki [1],

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

elde edilir.

Gerçekten de (4.3) eşitliğinde, $p=0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1,\gamma=\beta=2$) alınırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}drd\theta\\&=2\left(\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\right)\end{aligned}$$

olup, (2.3) integral temsili kullanılırsa

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=2B(x,y)\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr$$

elde edilir. Son integralde $r^2=t$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=B(x,y)\int_0^\infty t^{(x+y)-1}e^{-t}dt\\&=B(x,y)\Gamma(x+y)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

arzulanan sonuç elde edilir.

4.2. E-BETA FONKSİYONU

Tanım 4.5. E-beta fonksiyonu

$$ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y):=\int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \tag{4.4} $$

şeklinde tanımlanır.

E-beta fonksiyonu, $p=0$ ve $\beta=1$ (ya da $\beta=2$) olması halinde (2.2) klasik beta fonksiyonuna, $p\neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1, \gamma=\beta=2$) olması halinde (3.2) genişletilmiş beta fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.6. E-beta fonksiyonu

i) ${}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(-p\sec^{2}\theta\csc^{2}\theta)d\theta$

ii) ${}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)=\int_{0}^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du$

iii) ${}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)=2^{1-x-y}\int_{-1}^{1}(1+u)^{x-1}(1-u)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{4p}{(1-u^{2})}\right)du$

iv) ${}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)=(c-a)^{1-x-y}\int_{a}^{c}(u-a)^{x-1}(c-u)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p(c-a)^{2}}{(u-a)(c-u)}\right)du$

integral temsillerine sahiptir.

İspat. (4.4) integral temsilinde

i) $t=\sin^{2}\theta$ dönüşümü ile,

$$ \begin{aligned} {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta)^{2x-2}(1-\sin^{2}\theta)^{y-1} \\ &\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{(\sin^{2}\theta)(1-\sin^{2}\theta)}\right)d\theta \\ &=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(-p\sec^{2}\theta\csc^{2}\theta)d\theta \end{aligned} $$

ii) $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^2}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+\frac{1}{u}\right)\right]du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du \end{aligned}$$

iii) $t = \frac{1+u}{2}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+u}{2}\right)^{x-1}\left(1-\frac{1+u}{2}\right)^{y-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{4p}{(1-u^2)}\right)du \\ &= 2^{1-x-y}\int_{-1}^{1}(1+u)^{x-1}(1-u)^{y-1}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{4p}{(1-u^2)}\right)du \end{aligned}$$

iv) $t = \frac{u-a}{c-a}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) &= \int_a^c \frac{1}{c-a}\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u-a}{c-a}\right)^{y-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right)du \\ &= (c-a)^{1-x-y}\int_a^c (u-a)^{x-1}(c-u)^{y-1}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right)du \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7. $Re(x) > m$ ve $Re(y) > m$ olmak üzere, E-beta fonksiyonu

$$\frac{d^m}{dp^m}\left[{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] = (-1)^m(\gamma)_m\ {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta+m\alpha;\gamma+m)}(x-m,y-m) \tag{4.5}$$

türev formülünü sağlar.

İspat. (1.Yol) Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. (4.4) ün her iki yanının p parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\left[{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d}{dp}\left\{E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\right\}dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d}{dp}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\right\}dt \\ &= -\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^{n-1}}{(n-1)!}dt \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte n yerine $n+1$ konulduktan sonra Pochhammer sembolünün (2.5) özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] &= -\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n+1}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}dt\\ &= -\gamma\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1)_{n}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}dt\\ &= -\gamma\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}E_{\alpha,\beta+\alpha}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &= -\gamma\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+\alpha;\gamma+1)}(x-1,y-1) \end{aligned}\tag{4.6}$$

sonucuna ulaşılır. O halde $m=1$ için (4.5) türev formülü doğrudur.

Şimdi (4.5) türev formülünün $m=k$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$\frac{d^k}{dp^k}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right]=(-1)^k(\gamma)_k\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+k\alpha;\gamma+k)}(x-k,y-k)\tag{4.7}$$

eşitliği sağlansın. (4.7) eşitliğinin her iki yanının p paramatresine göre türevi alınır ve (4.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] &= \frac{d}{dp}\left[(-1)^k(\gamma)_k\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+k\alpha;\gamma+k)}(x-k,y-k)\right]\\ &= (-1)^k(\gamma)_k\frac{d}{dp}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+k\alpha;\gamma+k)}(x-k,y-k)\right]\\ &= (-1)^{k+1}(\gamma)_k(\gamma+k)\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+(k+1)\alpha;\gamma+k+1)}(x-k-1,y-k-1)\\ &= (-1)^{k+1}(\gamma)_{k+1}\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta+(k+1)\alpha;\gamma+k+1)}(x-(k+1),y-(k+1))\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da (4.5) türev formülünün $m=k+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

(2.Yol) Şimdi E-Beta fonksiyonun p parametresine göre m. basamaktan türevinin ispatının ikinci yolu olarak

$$\frac{d^m}{dp^m}\{p^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}p^{n-m},\quad n\geq m\tag{4.8}$$

eşitliğinden yararlanacağız [22]. (4.4) eşitliğinin her iki yanının p parametresine göre

$m.$ basamaktan türevi alınır ve Prabhakar fonksiyonunun (4.1) tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dp^m}\left[{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d^m}{dp^m}\left\{E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\right\}dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d^m}{dp^m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\right\} \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)t^n(1-t)^n n!}\frac{d^m}{dp^m}\{p^n\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte, (4.8) dikkate alındıktan sonra n yerine $n+m$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dp^m}\left[{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] \\
&\quad= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)t^n(1-t)^n n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}p^{n-m} \\
&\quad= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}(\gamma)_{n+m}}{\Gamma(\alpha(n+m)+\beta)t^{n+m}(1-t)^{n+m}}\frac{p^n}{\Gamma(n+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Pochhammer sembolünün (2.5) özelliğinden yararlanılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dp^m}\left[{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)\right] \\
&\quad= (-1)^m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\gamma)_m(\gamma+m)_n}{\Gamma(\alpha n+\alpha m+\beta)t^n(1-t)^n}\frac{p^n}{\Gamma(n+1)} \\
&\quad= (-1)^m(\gamma)_m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\gamma+m)_n}{\Gamma(\alpha n+\alpha m+\beta)t^n(1-t)^n}\frac{p^n}{n!} \\
&\quad= (-1)^m(\gamma)_m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma+m)_n}{\Gamma(\alpha n+\alpha m+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!} \\
&\quad= (-1)^m(\gamma)_m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}E_{\alpha,\beta+\alpha m}^{\gamma+m}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&\quad= (-1)^m(\gamma)_m\ {}^E B_p^{(\alpha,\beta+m\alpha;\gamma+m)}(x-m,y-m)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.8. E-beta fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathfrak{M}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y):s\right]=B(x+s,y+s)^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s),\quad Re(s)>0$$

şeklindedir.

İspat. Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathfrak{M}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y):s\right]=\int_{0}^{\infty}p^{s-1}\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)dp$$

olup, (4.4) integral temsilinin dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left[{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y):s\right]&=\int_{0}^{\infty}p^{s-1}\left[\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\right]dp\\&=\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\left[\int_{0}^{\infty}p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp\right]dt\end{aligned}\tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$ fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü, $p=t(1-t)u$ değişken değiştirmesi yapılmasıyla ve E-gamma fonksiyonunun (4.2) tanımı göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left[E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):s\right]&=\int_{0}^{\infty}p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp\\&=t^{s}(1-t)^{s}\int_{0}^{\infty}u^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(-u)du\\&=t^{s}(1-t)^{s}\,{}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s),\quad Re(s)>0\end{aligned}\tag{4.10}$$

olarak bulunur. (4.10) eşitliğinin (4.9) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}p^{s-1}\,{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)dp&={}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)\int_{0}^{1}t^{x+s-1}(1-t)^{y+s-1}dt\\&=B(x+s,y+s)^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 2.7 de verilen ters Mellin dönüşümü ve Teorem 4.8 göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 4.9. E-beta fonksiyonunun bir başka integral temsili de

$$ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty} B(x+s,y+s)\ {}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)p^{-s}ds, \quad Re(s)>0 $$

şeklindedir.

Teorem 4.10. E-beta fonksiyonu

$$ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) = {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y+1) + {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+1,y) $$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. (4.4) integral temsilinin kullanılmasıyla kolayca

$$ \begin{aligned} {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y}\left[\frac{1}{t(1-t)}\right]E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y}\left[(1-t)^{-1}+t^{-1}\right]E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left[t^{x}(1-t)^{y-1}+t^{x-1}(1-t)^{y}\right]E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+1,y) + {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y+1) \end{aligned} $$

elde edilir ki bu istenilendir. ■

Teorem 4.11. E-beta fonksiyonu

$$ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,1-y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+n,1), \quad Re(y)<1 $$

toplam formülünü sağlar.

İspat. E-beta fonksiyonunun (4.4) integral temsilinden

$$ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,1-y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-y}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt $$

eşitliği yazılabilir. Bu son eşitlikte

$$(1-t)^{-y}=\sum_{n=0}^{\infty}(y)_n\frac{t^n}{n!},\quad |t|<1$$

seri açılımı [1] kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,1-y)&=\int_0^1 t^{x-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(y)_n\frac{t^n}{n!}\right)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\int_0^1 t^{x+n-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\,{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+n,1)
\end{aligned}$$

bulunur. ∎

Teorem 4.12. E-beta fonksiyonu

$${}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\,{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+n,y+1)$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. $(1-t)^{y-1}$ ifadesinin

$$(1-t)^{y-1}=(1-t)^{y}\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1$$

şeklinde yazılabileceği (4.4) integral temsilinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{x+n-1}(1-t)^{y}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\,{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+n,y+1)
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Lemma 4.13. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ve $Re(x+\lambda)>0$, $Re(\mu)>0$ olmak üzere,

$$\mathfrak{M}\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right] = {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+\lambda,\mu) \tag{4.11}$$

Mellin dönüşüm formülü sağlanır. Burada

$$H(1-t)=\begin{cases} 0 & ,t>1 \text{ ise} \\ 1 & ,t<1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanan Heaviside fonksiyonudur [9, 23].

İspat. Mellin dönüşümünün ve Heaviside fonksiyonunun tanımlarının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}&\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right] \\
&= \int_0^\infty t^{x-1}t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \int_0^1 t^{x+\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&\quad + \int_1^\infty t^{x+\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \int_0^1 t^{x+\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+\lambda,\mu)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 4.14. $Re(x)>1$ ve $Re(y)>1$ olmak üzere, E-beta fonksiyonu

$$\begin{aligned}
y\ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}&(x+1,y) - x\ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y+1) \\
&= p\gamma\ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma)}(x-1,y-1) - 2p\gamma\ {}^{E}B_{p}^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma)}(x,y-1)
\end{aligned}$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. $f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)$ fonksiyonunu

$$f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)=(1-t)^{y-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. $f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)$ fonksiyonunun türevi, δ Dirac delta fonksiyonu ile H Heaviside fonksiyonu arasındaki [23]

$$\frac{d}{dt}H(1-t)=-\delta(1-t)$$

ilişkisinin ve (2.12) nin $m=1$ özel durumuna karşılık gelen

$$\frac{d}{dz}\left[E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)\right]=\gamma E^{\gamma+1}_{\alpha,\beta+\alpha}(z)$$

türev formülünün kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)\}= &-(y-1)(1-t)^{y-2}H(1-t)E^{\gamma}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\ &-(1-t)^{y-1}\delta(1-t)E^{\gamma}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\ &+\frac{p\gamma(1-2t)}{t^2(1-t)^2}(1-t)^{y-1}H(1-t)E^{\gamma+1}_{\alpha,\alpha+\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $t\neq 1$ için $\delta(1-t)=\delta(t-1)=0$ olduğu göz önüne alınır ve bu son eşitliğin her iki tarafına t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\{f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)\}:x\right] = &-(y-1)\,\mathfrak{M}\left[(1-t)^{y-2}H(1-t)E^{\gamma}_{\alpha,\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\\ &+p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-2}(1-t)^{y-3}H(1-t)E^{\gamma+1}_{\alpha,\alpha+\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\\ &-2p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-1}(1-t)^{y-3}H(1-t)E^{\gamma+1}_{\alpha,\alpha+\beta}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.11) den

$$\mathfrak{M}\left[f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p):x\right] = {}^{E}B^{(\alpha,\beta;\gamma)}_{p}(x,y)$$

olup, (2.11) özelliğinden de

$$\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\left\{f^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:y;p)\right\}:x\right]=-(x-1)\;{}^{E}B^{(\alpha,\beta;\gamma)}_{p}(x-1,y) \tag{4.14}$$

eşitliği yazılabilir. O halde (4.13) ün sol ve sağ yanında sırasıyla (4.14) ve (4.11) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}-(x-1)\;{}^{E}B^{(\alpha,\beta;\gamma)}_{p}(x-1,y) = &-(y-1)\;{}^{E}B^{(\alpha,\beta;\gamma)}_{p}(x,y-1)\\ &+p\gamma\;{}^{E}B^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}_{p}(x-2,y-2)\\ &-2p\gamma\;{}^{E}B^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}_{p}(x-1,y-2)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak x yerine $x+1$ ve y yerine $y+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &y\ {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x+1,y)-x\ {}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(x,y+1) \\ &\qquad = p\gamma\ {}^{E}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(x-1,y-1)-2p\gamma\ {}^{E}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(x,y-1) \end{aligned}$$

bulunur. O halde ispat tamamlanmış olur. ■

4.3. E-HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, (2.7) ve (2.9) eşitliklerinde paydaki beta fonksiyonu yerine E-beta fonksiyonu yazılarak E-Gauss hipergeometrik ve E-konfluent hipergeometrik fonksiyonları tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir.

4.3.1. E-Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu

Tanım 4.15. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,\ c-b)}{B(b,\ c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1 \qquad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır.

E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu, $p=0$ ve $\beta=1$ (ya da $\beta=2$) olması halinde (2.7) klasik Gauss hipergeometrik fonksiyonuna, $p\neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da α=1, $\gamma=\beta=2$) olması halinde (3.3) genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.16. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \qquad (4.16)$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.15) eşitliğinde E-beta fonksiyonunun (4.4) integral temsili kullanılırsa

$$\begin{aligned}{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{z^n}{n!}\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}dt\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}=(1-zt)^{-a}$$

serisel ifadesinden yararlanılırsa

$${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.17. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

i) $${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}u^{b-1}(1+u)^{a-c}[1+u(1-z)]^{-a}\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du$$

ii) $${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2b-1}(\cos v)^{2c-2b-1}(1-z\sin^2 v)^{-a}\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\sec^2 v\csc^2 v\right)dv$$

iii) $${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}(\sinh v)^{2b-1}(\cosh v)^{2a-2c+1}\times(\cosh^2 v-z\sinh^2 v)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\cosh^2 v\coth^2 v\right)dv$$

integral temsillerine sahiptir.

İspat. (4.16) integral temsilinde

i) $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned}&{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\\ &\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+u)^2}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{b-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{c-b-1}\left[1-z\frac{u}{1+u}\right]^{-a}\\ &\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+\frac{1}{u}\right)\right]du\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\\
&\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{a-c}[1+u(1-z)]^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du
\end{aligned}
$$

ii) $t=\sin^2 v$ dönüşümü ile,

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\\
&\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin v\cos v(\sin v)^{2b-2}(1-\sin^2 v)^{c-b-1}(1-z\sin^2 v)^{-a}\\
&\qquad\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{(\sin^2 v)(1-\sin^2 v)}\right)dv\\
&\quad=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2b-1}(\cos v)^{2c-2b-1}(1-z\sin^2 v)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\sec^2 v\csc^2 v\right)dv
\end{aligned}
$$

iii) $t=\tanh^2 v$ dönüşümü ile,

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\\
&\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^\infty 2\frac{\sinh v}{\cosh^3 v}(\tanh v)^{2b-2}(1-\tanh^2 v)^{c-b-1}(1-z\tanh^2 v)^{-a}\\
&\qquad\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{(\tanh^2 v)(1-\tanh^2 v)}\right)dv\\
&\quad=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^\infty(\sinh v)^{2b-1}(\cosh v)^{2a-2c+1}(\cosh^2 v-z\sinh^2 v)^{-a}\\
&\qquad\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\cosh^2 v\coth^2 v\right)dv
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 4.18. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki türev formülünü sağlar:

$$
\frac{d^m}{dz^m}\left[{}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right]=\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\,{}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+m,b+m;c+m;z). \tag{4.17}
$$

İspat. (1.Yol) Bu eşitlik m üzerinden tümevarım yapılarak ispatlanır. Pochhammer sembolü ve beta fonksiyonunun

$$
(a)_{n+1}=a(a+1)_n \tag{4.18}
$$

ve

$$
B(b,\ c-b)=\frac{c}{b}B(b+1,\ c-b) \tag{4.19}
$$

özellikleri dikkate alınarak, (4.15) eşitliğinin her iki yanının z değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] &= \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+1}\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+1,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(a+1)_n\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+1,c+1-(b+1))}{B(b+1,c+1-(b+1))}\frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{ab}{c}\;{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b+1;c+1;z) \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. O halde $m=1$ için (4.17) türev formülü doğrudur.

Şimdi (4.17) türev formülünün $m=k$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right]=\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\;{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+k,b+k;c+k;z)$$

sağlansın. Son eşitliğin her iki yanının z değişkenine göre türevi alınır ve (4.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] &= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{d}{dz}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+k,b+k;c+k;z)\right] \\
&= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)}\;{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+k+1,b+k+1;c+k+1;z) \\
&= \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\;{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+k+1,b+k+1;c+k+1;z)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (4.17) türev formülünün $m=k+1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

(2.Yol) (4.15) eşitliğinin her iki yanının z değişkenine göre m. basamaktan türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dz^m}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] &= \frac{d^m}{dz^m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{E}B_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)\,n!}\frac{d^m}{dz^m}\{z^n\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\frac{d^m}{dz^m}\{z^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} z^{n-m}, \quad n \geq m$$

eşitliği [22] kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dz^m}\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] &= \sum_{n=m}^{\infty}(a)_n \frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)\,n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}z^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+m}\frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)}\end{aligned}$$

bulunur. (2.5) ve (2.6) özelliklerinden yararlanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d^m}{dz^m}\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] \\ &\quad= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_m(a+m)_n\frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \\ &\quad= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_m(a+m)_n\frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}\frac{B(b+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \\ &\quad= (a)_m\sum_{n=0}^{\infty}(a+m)_n\frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}\frac{(b)_m}{(c)_m}\frac{z^n}{n!} \\ &\quad= \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\sum_{n=0}^{\infty}(a+m)_n\frac{{}^E B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}\frac{z^n}{n!} \\ &\quad= \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\,{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+m,b+m;c+m;z)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. O halde ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.19. $Re(s)>0$ olmak üzere, E-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathfrak{M}\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z):s\right] = \frac{{}^E\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\mathrm{F}(a,b+s;c+2s;z)$$

şeklindedir.

İspat. Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathfrak{M}\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z):s\right] = \int_0^{\infty} p^{s-1}\ {}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)dp$$

olup, (4.16) integral temsilinin dikkate alınmasıyla

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z):s\right] \\
&\quad=\int_{0}^{\infty} p^{s-1}\left[\frac{1}{B(b,c-b)}\int_{0}^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\right]dp \\
&\quad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_{0}^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\left[\int_{0}^{\infty} p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp\right]dt
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) ile verilen

$$
\int_{0}^{\infty} p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp = t^{s}(1-t)^{s}\ {}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s), \quad Re(s)>0
$$

eşitliği (4.21) de yerine yazıldıktan sonra, (2.8) integral temsili göz önünde tutulursa

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z):s\right] &= \frac{{}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)}{B(b,c-b)}\int_{0}^{1} t^{b+s-1}(1-t)^{c+s-b-1}(1-zt)^{-a}dt \\
&= \frac{{}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)}{B(b,c-b)}\int_{0}^{1} t^{b+s-1}(1-t)^{c+2s-(b+s)-1}(1-zt)^{-a}dt \\
&= \frac{{}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\mathrm{F}(a,b+s;c+2s;z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 2.7 ve Teorem 4.19 birlikte dikkate alındığında aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 4.20. $Re(s)>0$ olmak üzere, E-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bir başka integral temsili de

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) \\
&\quad=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty}\frac{{}^{E}\Gamma_{0}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\mathrm{F}(a,b+s;c+2s;z)p^{-s}ds
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Teorem 4.21. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \tag{4.22}
$$

dönüşüm formülünü sağlar.

İspat. (4.16) integral temsilinde $t=1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-u)^{b-1}u^{c-b-1}[1-z(1-u)]^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{u(1-u)}\right)du
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$[1-z(1-u)]^{-a}=(1-z)^{-a}\left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a}$$

eşitliği ve beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) \\
&= \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)}\int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{u(1-u)}\right)du \\
&= \frac{(1-z)^{-a}}{B(c-b,b)}\int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}u\right)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{u(1-u)}\right)du \\
&= (1-z)^{-a}\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.22. (4.22) eşitliğinde z yerine sırasıyla $1-\dfrac{1}{z}$ ve $\dfrac{z}{1+z}$ yazılırsa

$${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}\left(a,b;c;1-\frac{1}{z}\right)=z^{a}\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,c-b;c;1-z)$$

ve

$${}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}\left(a,b;c;\frac{z}{1+z}\right)=(1+z)^{a}\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,c-b;c;-z)$$

dönüşüm formülleri elde edilir.

Teorem 4.23. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\Delta_a\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right]=\frac{bz}{c}\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b+1;c+1;z) \tag{4.23}$$

bağıntısını sağlar. Burada Δ_a,

$$\Delta_a\left[{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right]={}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b;c;z)-{}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlanan bir fark operatörüdür.

İspat. (4.24) eşitliğinde (4.16) integral temsili kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Delta_a\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] &= {}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b;c;z) - {}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z) \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&\quad - \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \frac{z}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \frac{bz}{c}\frac{1}{B(b+1,c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}\, E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \frac{bz}{c}\, {}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b+1;c+1;z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

(4.20) ve (4.23) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 4.24. E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$z\frac{d}{dz}\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right] = a\Delta_a\left[{}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)\right]$$

bağıntısını sağlar.

Lemma 4.25. $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ ve $Re(b+\lambda)>0$, $Re(\mu)>0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right] \\
&\qquad = B(b+\lambda,\mu)\ {}^E\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b+\lambda;b+\lambda+\mu;z) \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Mellin dönüşümü formülü sağlanır.

İspat. Mellin dönüşümünün ve Heaviside fonksiyonunun tanımlarının ve de (4.16) integral temsilinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\
&\qquad=\int_0^{\infty}t^{b-1}t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\qquad=\int_0^{1}t^{b+\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}(1-zt)^{-a}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\qquad=B(b+\lambda,\mu)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b+\lambda;b+\lambda+\mu;z)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. ■

Teorem 4.26. $Re(b)>2$ ve $Re(c)>Re(b+2)$ olmak üzere, E-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
&(b-1)B(b-1,c-b+1)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b-1;c;z)\\
&\qquad=(c-b-1)B(b,c-b-1)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c-1;z)\\
&\qquad\quad-azB(b,c-b)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b;c;z)\\
&\qquad\quad-p\gamma B(b-2,c-b-2)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(a,b-2;c-4;z)\\
&\qquad\quad+2p\gamma B(b-1,c-b-2)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(a,b-1;c-3;z)
\end{aligned}
$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. $f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)$ fonksiyonunu

$$
f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)=(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)
$$

şeklinde tanımlayalım. $f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)$ fonksiyonunun türevi, δ Dirac delta fonksiyonu ile H Heaviside fonksiyonu arasında [23] nolu referansda verilen

$$
\frac{d}{dt}H(1-t)=-\delta(1-t)
$$

ilişkisinin ve (2.12) nin $m=1$ özel durumuna karşılık gelen

$$
\frac{d}{dz}\left[E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)\right]=\gamma E_{\alpha,\beta+\alpha}^{\gamma+1}(z)
$$

türev formülünün kullanılmasıyla,

$$\frac{d}{dt}\{f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\} = -(c-b-1)(1-t)^{c-b-2}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$
$$+ az(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$
$$-(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\delta(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$
$$+\frac{p\gamma(1-2t)}{t^2(1-t)^2}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

olarak elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanına t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\left\{f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\right\}:b\right]$$
$$= -(c-b-1)\mathfrak{M}\left[(1-t)^{c-b-2}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$
$$+ az\,\mathfrak{M}\left[(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$
$$+ p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-2}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$
$$- 2p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-1}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right] \tag{4.26}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.25) den

$$\mathfrak{M}\left[f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p):b\right] = B(b,c-b)\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c;z)$$

olup, (2.11) özelliğinden de

$$\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\left\{f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\right\}:b\right] = -(b-1)B(b-1,c-b+1)\ {}^{E}\mathrm{F}_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b-1;c;z) \tag{4.27}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (4.26) nın sol ve sağ yanında sırasıyla (4.27) ve (4.25) dikkate alınarak

$$
\begin{aligned}
&-(b-1)B(b-1,c-b+1)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b-1;c;z)\\
&\qquad\qquad\qquad = -(c-b-1)B(b,c-b-1)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a,b;c-1;z)\\
&\qquad\qquad\qquad\quad + azB(b,c-b)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(a+1,b;c;z)\\
&\qquad\qquad\qquad\quad + p\gamma B(b-2,c-b-2)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(a,b-2;c-4;z)\\
&\qquad\qquad\qquad\quad - 2p\gamma B(b-1,c-b-2)\ {}^{E}\mathrm{F}_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(a,b-1;c-3;z)
\end{aligned}
$$

istenilen sonuca ulaşılır. ■

4.3.2. E-Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonu

Tanım 4.27. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,\ c-b)}{B(b,\ c-b)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.28}
$$

şeklinde tanımlanır.

E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu, $p=0$ ve $\beta=1$ (ya da $\beta=2$) olması halinde (2.9) klasik konfluent hipergeometrik fonksiyonuna, $p\neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1, \gamma=\beta=2$) olması halinde (3.4) genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 4.28. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} e^{zt} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right) dt \tag{4.29}
$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.28) de E-beta fonksiyonunun (4.4) integral temsili kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}\,dt
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}=e^{zt}$$

serisel ifadesi kullanılırsa

$$ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt $$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.29. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

i) ${}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\dfrac{e^z}{B(b,c-b)}\displaystyle\int_0^{\infty}u^{b-1}(1+u)^{-c}e^{-\frac{z}{1+u}}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du$

ii) ${}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\dfrac{2e^z}{B(b,c-b)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2b-1}(\cos v)^{2c-2b-1}e^{-z\cos^2 v}$

$$\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\sec^2 v\csc^2 v\right)dv$$

iii) ${}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\dfrac{2}{B(b,c-b)}\displaystyle\int_0^{\infty}(\sinh v)^{2b-1}(\cosh v)^{1-2c}e^{z\tanh^2 v}$

$$\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\cosh^2 v\coth^2 v\right)dv$$

integral temsillerine sahiptir.

İspat. (4.29) integral temsilinde

i) $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü ile,

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+u)^2}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{b-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{c-b-1}e^{z\left(\frac{u}{1+u}\right)} \\
&\quad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+\frac{1}{u}\right)\right]du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+u)^2}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{b-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{c-b-1}e^{z\left(1-\frac{1}{1+u}\right)}\\
&\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du\\
&=\frac{e^z}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}u^{b-1}(1+u)^{-c}\,e^{-\frac{z}{1+u}}\,E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[-p\left(2+u+u^{-1}\right)\right]du
\end{aligned}
$$

ii) $t=\sin^2 v$ dönüşümü ile,

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin v\cos v(\sin v)^{2b-2}(1-\sin^2 v)^{c-b-1}e^{z\sin^2 v}\\
&\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{(\sin^2 v)(1-\sin^2 v)}\right)dv\\
&=\frac{2e^z}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin v)^{2b-1}(\cos v)^{2c-2b-1}e^{-z\cos^2 v}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\sec^2 v\csc^2 v\right)dv
\end{aligned}
$$

iii) $t=\tanh^2 v$ dönüşümü ile,

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}2\frac{\sinh v}{\cosh^3 v}(\tanh v)^{2b-2}(1-\tanh^2 v)^{c-b-1}e^{z\tanh^2 v}\\
&\qquad\times E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{(\tanh^2 v)(1-\tanh^2 v)}\right)dv\\
&=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}(\sinh v)^{2b-1}(\cosh v)^{1-2c}\,e^{z\tanh^2 v}\,E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-p\cosh^2 v\coth^2 v\right)dv
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 4.30. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki türev formülünü sağlar:

$$
\frac{d^m}{dz^m}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]=\frac{(b)_m}{(c)_m}\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+m;c+m;z). \tag{4.30}
$$

İspat. Bu eşitlik m üzerinden tümevarım yapılarak ispatlanır. (4.28) eşitliğinin her iki yanının z değişkenine göre türevi alınır ve (4.19) özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right] &= \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+1,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}\\
&=\frac{b}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^{E}B_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+n+1,c+1-(b+1))}{B(b+1,c+1-(b+1))}\frac{z^n}{n!}\\
&=\frac{b}{c}\;{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+1;c+1;z) \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu $m=1$ için (4.30) türev formülünün sağlandığını gösterir.

Şimdi de (4.30) türev formülünün $m=k$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$
\frac{d^k}{dz^k}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]=\frac{(b)_k}{(c)_k}\;{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+k;c+k;z)
$$

sağlansın. Son eşitliğin her iki yanının z değişkenine göre türevi alınır ve (4.31) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right] &=\frac{(b)_k}{(c)_k}\frac{d}{dz}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+k;c+k;z)\right]\\
&=\frac{(b)_k}{(c)_k}\frac{(b+k)}{(c+k)}\;{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+k+1;c+k+1;z)\\
&=\frac{(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\;{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+k+1;c+k+1;z)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu da (4.30) türev formülünün $m=k+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Ayrıca belirtelim ki bu teoremin ispatı, Teorem 4.18 in ikinci yoluna benzer şekilde tümevarım yapılmadan da verilebilir.

Teorem 4.31. $Re(s) > 0$ olmak üzere, E-konfluent fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathfrak{M}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z):s\right] = \frac{{}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)$$

şeklindedir.

İspat. Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathfrak{M}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z):s\right] = \int_0^\infty p^{s-1}\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)dp$$

olup, (4.29) integral temsilinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z):\ s\right]\\
&\qquad=\int_0^\infty p^{s-1}\left[\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\right]dp\\
&\qquad=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}\left[\int_0^\infty p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp\right]dt
\end{aligned} \tag{4.32}$$

sonucuna ulaşılır. (4.10) ile verilen

$$\int_0^\infty p^{s-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp = t^s(1-t)^s\ {}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s), \quad Re(s)>0$$

eşitliği, (4.32) de yerine yazıldıktan sonra (2.10) integral temsili dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z):s\right] &= \frac{{}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+s-b-1}e^{zt}dt\\
&= \frac{{}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+2s-(b+s)-1}e^{zt}dt\\
&= \frac{{}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Sonuç 4.32. $Re(s)>0$ olmak üzere, E-konfluent hipergeometrik fonksiyonun bir başka integral temsili de

$${}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty}\frac{{}^{E}\Gamma_0^{(\alpha,\beta;\gamma)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,\ c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)p^{-s}ds$$

şeklindedir.

Teorem 4.33. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=e^{z}\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(c-b;c;-z) $$

dönüşüm formülünü sağlar.

İspat. (4.29) ile verilen

$$ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt $$

integral temsilinde, $t=1-u$ dönüşümü yapılırsa

$$ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-u)^{b-1}u^{c-b-1}e^{(z(1-u))}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{u(1-u)}\right)du $$

elde edilir. Burada beta fonksiyonunun simetri özelliği dikkate alınırsa

$$ \begin{aligned} {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) &= \frac{e^{z}}{B(c-b,b)}\int_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1}e^{-uz}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{u(1-u)}\right)du \\ &= e^{z}\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(c-b;c;-z) \end{aligned} $$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.34. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ b\Delta_b\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\right]+c\Delta_c\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]=0 \tag{4.33} $$

bağıntısını sağlar.

İspat. Fark operatörünün tanımı yardımıyla (4.33) eşitliğinin sol tarafı

$$ \begin{aligned} & b\Delta_b\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\right]+c\Delta_c\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right] \\ &\qquad = b\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+1;c+1;z)-b\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z) \\ &\qquad\quad + c\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)-c\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) \end{aligned} \tag{4.34} $$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikte (4.29) integral temsilinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
b\Delta_b\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\big]&+c\Delta_c\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\big]\\
&=\frac{b}{B(b+1,c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt\\
&-\frac{b}{B(b,c-b+1)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt\\
&+\frac{c}{B(b,c-b+1)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt\\
&-\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
B(b,c-b+1)&=\frac{c-b}{c}B(b,c-b)\\
B(b+1,c-b)&=\frac{b}{c}B(b,c-b)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
b\Delta_b\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\big]&+c\Delta_c\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\big]\\
&=\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(t-1)e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt\\
&+\frac{c(c-b)}{(c-b)B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\Big(-\frac{p}{t(1-t)}\Big)dt=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.35. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
\frac{d}{dz}\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\big]=\frac{b}{c}\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)-\Delta_c\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]
$$

bağıntısını sağlar.

İspat. E-konfluent hipergeometrik fonksiyonunun (4.31) türev formülünün ve fark operatörünün tanımının kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\big[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\big]&=\frac{b}{c}\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+1;c+1;z)\\
&=\frac{b}{c}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+1;c+1;z)-{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)+{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\right]\\
&=\frac{b}{c}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)+\Delta_b\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z)\right]\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte, (4.33) bağıntısından yararlanılmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right] &= \frac{b}{c}\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z) - \frac{c}{b}\Delta_c\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]\right] \\ &= \frac{b}{c}\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c+1;z) - \Delta_c\left[{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)\right]\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.36. $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ ve $Re(b+\lambda)>0$, $Re(\mu)>0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right] \\ &\qquad = B(b+\lambda,\mu)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+\lambda;b+\lambda+\mu;z) \qquad (4.35)\end{aligned}$$

Mellin dönüşüm formülü sağlanır.

İspat. Mellin dönüşümünün ve Heaviside fonksiyonunun tanımlarının ve de (4.29) integral temsilinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}\left[t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right] \\ &= \int_0^{\infty} t^{b-1}t^{\lambda}(1-t)^{\mu-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \int_0^{1} t^{b+\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}e^{zt}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= B(b+\lambda,\mu)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b+\lambda;b+\lambda+\mu;z)\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 4.37. $Re(b)>2$ ve $Re(c)>Re(b+2)$ olmak üzere, E-konfluent hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar:

$$\begin{aligned}&(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b-1;c;z) \\ &= (c-b-1)B(b,c-b-1)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c-1;z) \\ &\quad - zB(b,c-b)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) \\ &\quad - p\gamma B(b-2,c-b-2)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(b-2;c-4;z) \\ &\quad + 2p\gamma B(b-1,c-b-2)\,{}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(b-1;c-3;z)\end{aligned}$$

İspat. $f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)$ fonksiyonunu

$$f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)=(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonunun türevi,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\} &= -(c-b-1)(1-t)^{c-b-2}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\ &+ z(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\ &- (1-t)^{c-b-1}e^{zt}\delta(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\ &+ \frac{p\gamma(1-2t)}{t^2(1-t)^2}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafına t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\{f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\}:b\right]\\ &= -(c-b-1)\,\mathfrak{M}\left[(1-t)^{c-b-2}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\ &+ z\,\mathfrak{M}\left[(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\ &+ p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-2}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\ &- 2p\gamma\,\mathfrak{M}\left[t^{-1}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)E_{\alpha,\alpha+\beta}^{\gamma+1}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.35) den

$$\mathfrak{M}\left[f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p):b\right]=B(b,c-b)\ {}^{E}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z)$$

olup, (2.11) özelliğinden de

$$\mathfrak{M}\left[\frac{d}{dt}\{f_{b,c}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(t:z;p)\}:b\right]=-(b-1)B(b-1,c-b+1)\ {}^{E}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b-1;c;z) \tag{4.37}$$

eşitliği yazılabilir. O halde (4.36) nın sol ve sağ yanında sırasıyla (4.37) ve (4.35) dikkate alınarak

$$
\begin{aligned}
-(b-1)B(b-1,c-b+1)\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b-1;c;z)& \\
&= -(c-b-1)B(b,c-b-1)\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c-1;z) \\
&\quad + zB(b,c-b)\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\beta;\gamma)}(b;c;z) \\
&\quad + p\gamma B(b-2,c-b-2)\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(b-2;c-4;z) \\
&\quad - 2p\gamma B(b-1,c-b-2)\ {}^{E}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta;\gamma+1)}(b-1;c-3;z)
\end{aligned}
$$

istenilen sonuca ulaşılır. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Prabhakar fonksiyonu yardımıyla E-gamma ve E-beta fonksiyonları tanımlanmış ve ardından E-beta fonksiyonu kullanılarak E-Gauss hipergeometrik ve E-konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları da verilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonlar için bazı integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, toplam formülleri ve indirgeme bağıntıları elde edilmiştir. Literatürde yer almayan bu sonuçlar (muhtemelen) orjinaldir.

Prabhakar fonksiyonu yardımıyla genelleştirilen bu fonksiyonların özel durumları incelendiğinde $p=0$ ve $\beta=1$ (ya da $\beta=2$) alınması durumunda E-beta, E-Gauss hipergeometrik ve E-konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının, sırasıyla klasik beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarına indirgendiği ve tez içerisinde elde edilen tüm sonuçların klasik fonksiyonlar için elde edilen sonuçlarla çakıştığı görülür. Ayrıca $p\neq 0$ ve $\alpha=\beta=\gamma=1$ (ya da $\alpha=1, \gamma=\beta=2$) seçilmesi durumunda ise E-gamma fonksiyonunun (3.1) genişletilmiş gamma fonksiyonuna, E-beta fonksiyonunun (3.2) genişletilmiş beta fonksiyonuna, E-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun (3.3) genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonuna ve E-konfluent hipergeometrik fonksiyonunun (3.4) genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonuna indirgendiği ve yine tez çalışmasında elde edilen sonuçların [6], [7] ve [8] nolu referanslarla verilen yayınlardaki sonuçlarla örtüştüğü gözlemlenebilir.

İlerleyen çalışmalarda, E-beta fonksiyonu kullanılarak Appell, Lauricella, Srivastava ve Horn fonksiyonları gibi çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar için de yeni genelleştirmeler tanımlanabilir ve bunların çeşitli özellikleri incelenebilir. Ayrıca, bu fonksiyonlar yardımıyla kesirli türev ve integral operatörleri tanımlanabilir. Bu operatörler yardımıyla bazı özel fonksiyonlar için doğurucu fonksiyon ilişkileri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Altın, A. *Uygulamalı Matematik*, Ankara Üniversitesi, Gazi Kitapevi, Ankara, **2011**.

[2] Andrews, G. E.; Askey, R.; Roy, R. *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, **1999**.

[3] Ayaz, Ö. *Genişletilmiş Beta Fonksiyonu ile Tanımlanan Bazı Özel Fonksiyonlar*, Yüksek Lisans Tezi, AEÜ-Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 51s, **2014**.

[4] Balcı, M. *Matematik Analiz-II*, Sürat Üniversitesi Yayınevi, Ankara, **2013**.

[5] Baleanu, D.; Agarwal, P.; Parmar R. K.; Alqurashi, M. M.; Salahshour, S. Extension of the fractional derivative operator of the Riemann-Liouville, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **2017**, *10*, 2914-2924.

[6] Chaudhry, M. A.; Zubair, S. M. Generalized incomplete gamma functions with applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **1994**, *55*, 99-124.

[7] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Rafique, M.; Zubair, S. M. Extension of Euler's Beta function, *J. Comput. Appl. Math.*, **1997**, *78*, 19-32.

[8] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Srivastava, H. M.; Paris, R. B. Extended hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Appl. Math. Comput.*, **2004**, *159*, 589-602.

[9] Choi, J.; Rathie, A. K.; Parmar, R. K.; Kim, Y. Extension of extended beta, hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Honam Mathematical J.*, **2014**, *36*, 357-385.

[10] Çetinkaya, A.; Yağbasan M. B.; Kıymaz, İ. O. The extended Srivastava's triple hypergeometric functions and their integral representations, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **2016**, *9*, 4860-4866.

[11] Çetinkaya, A.; Kıymaz, İ. O.; Agarwal, P.; Jain, S. A Further Generalization of Gamma, Beta and Hypergeometric Functions, *IECMSA*, **2017** (yayınlanmamış).

[12] Çetinkaya, A.; Kıymaz, İ. O.; Agarwal, P.; Agarwal, R. A comparative study on generating function relations for generalized hypergeometric functions via generalized fractional operators, *Advances in Difference Equations*, **2018**, DOI:10.1186/s13662-018-1612-0.

[13] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions*, Vol. I., McGraw-Hill, New York, Toronto, London, **1953**.

[14] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions*, Vol. II., McGraw-Hill, New York, Toronto, London, **1953**.

[15] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions*, Vol. III., McGraw-Hill, New York, **1955**.

[16] Gorenflo, R.; Kilbas, A. A.; Mainardi, F.; Rogosin, S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer, **2014**.

[17] Goswami, A.; Jain, S.; Agarwal , P.; Aracı, S. A Note on the new extended beta and Gauss hypergeometric functions, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **2018**, *12*, 139-144.

[18] Kıymaz, İ. O.; Çetinkaya, A.; Agarwal, P. An extension of Caputo fractional derivative operator and its applications, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **2016**, *9* , 3611-3621.

[19] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J. *Teory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland mathematics studies, vol.204. Elsevier, Amsterdam, **2006**.

[20] Lee, D. M.; Rathie, A. K.; Parmar, R. K.; Kim, Y. Generalization of extended beta function, hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Honam Mathematical J.*, **2011**, *33*, 187-206.

[21] Mathai, A. M.; Haubold, H. J. *Special Functions for Applied Scientists*, Springer Science, Business Media, LLC **2008**.

[22] Miller, K. S.; Ross, B. *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication **1993**.

[23] Oldham, K.; Myland, J.; Spanier, J. *An Atlas of Functions*, II. Edition, Springer Science + Business Media, LLC, **2009**.

[24] Özarslan, M. A.; Özergin, E. Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator, *Math. Comput. Modelling*, **2010**, *52*, 1825-1833.

[25] Özergin, E. *Some Properties of Hypergeometric Functions*, Doktora Tezi, Eastern Mediterranean University, Gazimagusa, 62s, **2011**.

[26] Özergin, E.; Özarslan, M. A.; Altın, A. Extension of gamma, beta and hypergeometric functions, *Math. Appl. Comput.*, **2011**, *235*, 4601-4610.

[27] Paris, R. B.; Kominski, D. *Asymptotics and Mellin Barnes Integrals*, Cambridge University Press, **2001**.

[28] Parmar, R. K. A new generalization of gamma, beta, hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Le Matematiche*, **2013**, *Vol. LXVIII*, 33-52.

[29] Prabhakar, T. R. A singuler integral equation with generalized Mittag-Leffer function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, **1971**, *19*, 7-25.

[30] Rahman, G.; Nisar, K. S.; Mubeen, S. A new generalization of extended beta and hypergeometric functions, *Journal of Mathematical Sciences*, **2018**, DOI:10.20944/preprints201802.0036.v1

[31] Rahman, G.; Kanwal, G.; Nisar, K. S.; Ghaffar, A. A new extension of beta and hypergeometric function, *Preprints*, **2018**, DOI:10.20944/preprints201801.0074.v1

[32] Shadab, M.; Saime, J.; Choi, J. An extended beta function and its application, *Journal of Mathematical Sciences*, **2018**, *103*, 235-251.

[33] Srivastava, H. M.; Manocha H. L. *A Treatise on Generating Functions*, Ellis Horwood Limited, **1984**.

[34] Srivastava, H. M.; Agarwal, P.; Jain S. Generating functions for the generalized Gauss hypergeometric functions, *Math. Appl. Comput.*, **2014**, *247*, 348-352.

[35] Sökmen, Y. *Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, AEÜ-Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 63s, **2012**.

[36] Şahin, R. *Çok Degiskenli Hipergeometrik Fonksiyonlar*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 69s, **2011**.

[37] Şahin, R.; Yağcı, O.; Yağbasan, M. B.; Kıymaz, İ. O.; Çetinkaya, A. Further generalizations of gamma, beta and related functions, *Journal of Inequalites and Special Functions*, **2018**, (Baskıda).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	AY, Muhammet
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	11.06.1993, Ankara
e-mail	:	muhammetay.aeu@gmail.com

Eğitim

İlk Öğrenim	:	Atatürk İlköğretim Okulu, 1999-2007, Kırşehir
Orta Öğrenim	:	Kırşehir Lisesi, 2007-2011, Kırşehir
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2011-2016, Kırşehir
Yüksek Lisans	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 2016-. . . , Kırşehir
Yabancı Dil	:	İngilizce