T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAND MORREY UZAYLARI, ÖZELLİKLERİ. HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GRAND MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Yasin KARAKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KIRŞEHİR 2018

T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAND MORREY UZAYLARI, ÖZELLİKLERİ. HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GRAND MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Yasin KARAKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

KIRŞEHİR 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

Üye
Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2018

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "Grand Morrey Uzayları, Özellikleri. Harmonik Analizin İntegral Operatörlerinin Grand Morrey Uzaylarında Sınırlılığı" başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Yasin KARAKAYA

ÖZET

GRAND MORREY UZAYLARI, ÖZELLİKLERİ. HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GRAND MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Yüksek Lisans Tezi

Yasin KARAKAYA

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Eylül 2018

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, grand Lebesgue uzaylarının tanımı ve bu uzaylarda integral operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili teorem ve ispatlar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Ağırlıklı grand Lebesgue uzaylarının tanımı ve bu uzaylarda integral operatörlerinin sınırlılıkları hakkında bilgi verilmiştir.

Beşinci bölümde ise grand Morrey uzaylarının tanımı ve özellikleri verilmiştir.

Son bölüm de ise grand Morrey uzaylarında integral operatörlerinin sınırlılığı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Grand Morrey uzayları, Grand Lebesgue uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyeli, Singüler İntegral Operatörleri

Tez Yöneticileri : Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

Sayfa Adedi : **83**

ABSTRACT

GRAND MORREY SPACES AND THEIR PROPERTIES. THE BOUNDEDNESS OF INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS IN GRAND MORREY SPACES

Master of Science Thesis

Yasin KARAKAYA

Kırşehir Ahi Evran University
Institute of Science
September 2018

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and theorems are given.

In the third chapter, grand Lebesgue spaces are defined and basic properties of these spaces are investigated. The boundedness of integral operators in these spaces are also investigated in this chapter.

In the fourth chapter, weighted grand Lebesgue spaces are introduced and the boundedness of integral operators in these spaces are investigated.

In the fifth chapter, the definition and basic properties of grand Morrey spaces are given.

Finally, the last chapter is devoted to the boundedness of integral operators in grand Morrey spaces.

Keywords	:	Grand Morrey spaces, Grand Lebesgue spaces, Hardy-Littlewood maximal operator, Riesz potential, Singular Integral Operators
Supervisors	:	Prof. Dr. Vagıf S. GULIYEV
Number of Pages	:	**83**

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezimin hazırlanması süresince her türlü yardım ve fedakârlığı sağlayan, bilgi, tecrübe ve güler yüzü ile çalışmama ışık tutan, ayrıca bana bu tezi vererek kendimi geliştirmeye yönelik de birkaç adım ileride olmamı sağlayan, çalışmamın yöneticisi **Sayın Prof. Dr. Vagıf S. GULIYEV** hocama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yetiştirmemde emeği geçen ve benden maddi, manevi hiçbir desteği esirgemeyen aileme armağan ederim.

Yasin KARAKAYA

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$: **n-boyutlu Öklid uzay**

$B(x,r)$: **$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvar**

$d(E)$: **E nin çapı**

X' : **X uzayının ilişik uzayı**

X'' : **X uzayının ikinci ilişik uzayı**

L^p : **Lebesgue uzayları**

$L^{p,\lambda}$: **Morrey uzayları**

$L^{p)}(\Omega)$: **Grand Lebesgue uzayları**

$L^{p)}_{\omega}(\Omega)$: **Ağırlıklı grand Lebesgue uzayları**

$L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$: **Genelleştirilmiş grand Lebesgue uzayları**

$L^{p),\lambda}(\Omega)$: **Grand Morrey uzayları**

$L^{p),\varphi(.),\lambda}(\Omega)$: **Genelleştirilmiş grand Morrey uzayları**

$L^{(p'}$: **Yardmcı Banach uzayları**

$L^{p)'}$: **Small Lebesgue uzayları**

$\mathcal{M}$: **Hardy-Littlewood maksimal operatörü**

I_α : **Riesz potansiyeli**

T : **Calderón-Zygmund operatörü**

$p.v.$: **esas değer**

h.h.y. : **hemen hemen her yerde**

1 GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi S.L. Sobolev, S.M. Nikolskii, A. Calderon, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, P.I. Lizorkin, V.I. Burenkov ve birçok dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna, kısmi diferensiyel denklemlere, matematiksel fiziğe ve birçok matematiksel disiplin alanlarında başarıyla uygulanmıştır. Ayrıca ortaya çıkan yeni problemlerin çözülebilmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı eksikliklerin giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanması ve araştırılması gerekmektedir.

$L^{p),\lambda}(\Omega)$ Grand Morrey uzayları, $n \geq 1$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme ve $1 < p < \infty, \qquad 0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\lambda}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r\leq d}} \left[\frac{\varepsilon}{r^\lambda} \int\limits_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olacak şekilde $f \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonlarının sınıfından oluşur, burada $\mathcal{M}_0$, Ω üzerinde tanımlı reel değerli ve sonlu ölçülü fonksiyonların kümesidir. $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzayları 2010 yılında A. Meskhi [30] tarafından tanımlanmıştır. $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzaylarının genelleştirmesi olan $L^{p),\varphi(.),\lambda}(\Omega)$ uzaylarını da yine A. Meskhi [30] tarafından tanımlanmış olup, bu uzayların $\varphi(x) = x^\theta$ özel durumu ise V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro [28] tarafından incelenmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde grand Morrey uzaylarının tanımı ve temel özellikleri verilerek, bu uzaylarda harmonik analizin bazı fonksiyonel operatörleri olan maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığı incelendi.

Tezin ikinci bölümünde tez çalışmasında gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremlere yer verildi. Üçünçü bölümde 1992 yılında T. Iwaniec ve C. Sbordone [22] tarafından Jacobian'in integrallenebilme özelliklerini çalışırken bulduğu grand Lebesgue uzaylarının tanımı verildi. Bu bölümün birinci kısmında C. Capone ve A. Fiorenza [8] tarafından incelenen grand Lebesgue uzaylarının yapısal özelliklerine yer verildi. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılığı incelendi. Dördüncü bölümde ağırlıklı grand Lebesgue uzaylarının tanımı verilerek Harmonik Analizin bazı foksiyonel operatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları incelendi. Beşinci bölümde grand Morrey uzaylarının tanımı verildi. Son bölümde ise grand Morrey uzaylarında Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal, Riesz potensiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınrlılıkları incelendi.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

2.1 Normlu Uzaylar

Bu kısımda normlu uzaylar ile ilgili tanımlar, özellikler ve teoremler verildi.

Tanım 2.1.1 [Norm, Normlu Vektör Uzayları] X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde **norm** adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir **normlu vektör uzayları** denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [2].

Tanım 2.1.2 [Denk Norm] X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.
$\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\| \cdot \|_1$ ve $\| \cdot \|_2$ normlarına **denk norm** denir [37].

Tanım 2.1.3 [Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık] (x_n), (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir ve

$$x_n \to x_0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsaklık** denir [37].

Tanım 2.1.4 [Çap, sınırlı küme, sınırlı dizi] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A) := \sup \Big\{ \|x-y\| : x \in A,\ y \in A \Big\} \geq 0$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. Eğer bir $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine **sınırlı küme** denir. X içinde (x_n) dizisine karşılık gelen, noktalar kümesi ise (x_n) dizisine **sınırlı dizisi** denir [2].

Tanım 2.1.5 [Cauchy Dizisi] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $m, n \geq n_\epsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ sayısına bağlı bir n_ϵ doğal sayısı varsa o zaman (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir [37].

Önerme 2.1.6 Cauchy dizisi ile ilgili aşağıdaki önermeler doğrudur [2].

(a) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

(b) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

(c) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır.

(d) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.7 [Banach Uzayları] Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach uzayları** adı verilir [2].

Tanım 2.1.8 [Üstten sınırlı, üst sınır, supremum] $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq$ M olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisi **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir. $\sup x_n$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.1.9 [Alttan sınırlı, alt sınır, infimum] $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir. $\inf x_n$ ile gösterilir [5].

Ayrıca infimum ve supremum özellikleri aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 2.1.10 A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = a$ ve $\sup A = b$ olmak üzere a ve b sayılarının özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır [3].
(i) $\forall x \in A$ için $x \geq a$ dır. Çünkü a alt sınırlıdır.
(ii) $\forall \delta > 0$ için

$$x < a + \delta \tag{2.1}$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır. Çünkü a alt sınırlarının en büyüğüdür. Eğer A nın hiçbir elemanı için (2.1) bağıntısı sağlanmasaydı A kümesinin bütün x elemanları için

$$x \geq a + \delta$$

olacaktı. Bu ise $a + \delta$ sayısının bir alt sınırı olduğunu ifade eder. Halbuki bu alt sınır, en büyük alt sınır olarak kabul edilen a sayısından daha büyüktür. Bu mümkün değildir.
(iii) $\forall x \in A$ için $x \leq b$ dir. Dolayısıyla b bir üst sınırdır.
(iv) $\forall \delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

Tanım 2.1.11 **[Artan Fonksiyon, Azalmayan Fonksiyon]** $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanların için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan fonksiyon** denir. Artan fonksiyon $\uparrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa da **azalmayan fonksiyon** denir [3].

Tanım 2.1.12 **[Azalan Fonksiyon, Artmayan Fonksiyon]** $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanların için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **azalan fonksiyon** denir. Azalan fonksiyon $\downarrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa da **artmayan fonksiyon** denir [3].

Tanım 2.1.13 **[f^* Azalan Yeniden Düzenleme]** f fonksiyonunun $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) := \inf \Big\{ \lambda \geq 0 \ : \ \alpha_f(\lambda) \leq t \Big\}$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.14 **[Eş Ölçülebilir Fonksiyonlar]** $f \in M_0(R, \mu)$, $g \in M_0(S, v)$ olmak üzere f ve g aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise, yani $\forall t \geq 0$ için

$$\alpha_f(t) = \alpha_g(t)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ve g ye **eş ölçülebilir fonksiyonlar** denir [6].

2.2 Operatör Teorisi

Bu kısımda operatör kavramlarına ve bu operatörlerin teoremlerine yer verildi.

Tanım 2.2.1 [Operatör] X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D nin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D den Y ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. A operatörünün x e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ yi, $A(x) \in Y$ ye götürdüğünü belirtmek için, $A : D \to Y$ gösterimi kullanır.
Bu durumda D ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A) = \Big\{ y \in Y : y = A(x),\ x \in D(A) \Big\}$$

kümesine A operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir [2].

Tanım 2.2.2 [Lineer Operatör] X ve Y aynı $\mathbf{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin.
Eğer $D(A)$, X in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne **lineer operatör** denir [2].

Tanım 2.2.3 [Birim Operatörü] $A : X \to X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için

$$A(x) = x$$

ise A operatörüne **birim operatörü** veya **özdeşlik operatörü** denir. I_X veya I ile gösterilir [2].

Tanım 2.2.4 [Sınırlılık] X ve Y iki normlu uzay ve $D\left(A\right) \subset X$ olmak üzere $T : D\left(A\right) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D\left(A\right)$ için

$$\left\|Ax\right\| \leq C \left\|x\right\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, A operatörüne **sınırlıdır** denir. Bir A operatörünün normu

$$\left\|A\right\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\left\|Ax\right\|}{\left\|x\right\|}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.2.5 **[Sürekli]** X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \to Y$ operatörü verilsin.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ olmak üzere $\forall x \in D(T),\ \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

şartları sağlanıyor ise bu durumda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir. Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$ nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir [2].

Teorem 2.2.6 X ve Y normlu uzaylar ve $D\,(T) \subset X$ olmak üzere $T : D\,(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır [2].

Tanım 2.2.7 **[Gömme]** X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \Re(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$I : X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir **gömme operatörü** denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [18].

2.3 Ölçü Teorisi

Bu kısımda Ölçü Teorisi ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verildi.

Tanım 2.3.1 [Cebir ve $\sigma-$Cebir] X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A},\ E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebirdir** denir.
Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir **σ-cebir** denir [36].

Tanım 2.3.2 [Borel Cebiri] Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği(veya doğurduğu) σ-cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine **Borel cebiri** denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir [36].

Tanım 2.3.3 [Ölçülebilir Uzay, Ölçü Uzayı, Ölçülebilir Küme] X, boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ de $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de bir **ölçü uzayı** denir. $\mathcal{A}$ daki her bir eleman da **ölçülebilir küme** olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.3.4 [Ölçü, Sonlu Ölçü, σ-sonlu, Olasılık Ölçüsü] $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye **sonlu ölçü** denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne **σ-sonlu** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir [36].

Tanım 2.3.5 [Dış Ölçü] X boştan farklı bir küme olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in \mathrm{P}(X),\ \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir [36].

Tanım 2.3.6 [Lebesgue Dış Ölçüsü, Lebesgue Ölçülebilir] $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.
$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i\ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alınırsa, bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^* (E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^* (A) = \lambda^* (A \cap E) + \lambda^* (A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad \big(\textbf{Caratheodary Ölçümü}\big)$$

ise E kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir [36].

Tanım 2.3.7 [Dağılım Fonksiyonu] (X, μ) bir ülçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}(\text{veya } \mathbb{C})$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu\Bigg(\Big\{x \in X : \ |f(x)| > \lambda\Big\}\Bigg)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir [6].

Tanım 2.3.8 [Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrengement Invariant) Uzayları] $\rho(X, \Sigma, \mu)$, σ-sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in M_0^+(X, \mu)$ olmak üzere

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına **yeniden düzenleme altında değişmeyen (rearrengement invariant) uzayları** denir [6].

Tanım 2.3.9 [hemen hemen her yerde (h.h.y)] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.
Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir [5].

Tanım 2.3.10 [Homojen Fonksiyon] λ ve α iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α**. dereceden homojen fonksiyon** denir [18].

Tanım 2.3.11 [Örtü, Açık Örtü, Alt Örtü, Sonlu Alt Örtü] Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup\limits_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir **örtüsüdür** denir. Bu $\bigcup\limits_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup\limits_i$, A kümesinin **açık örtüsüdür** denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün **alt örtüsü** adı verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye **sonlu alt örtü** denir [2].

Tanım 2.3.12 [Kompaktlık] X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine **kompakttır** denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [2].

Tanım 2.3.13 [Destek] (X, ϱ) bir metrik uzayı ve $f : X \to [0, \infty]$ olsun. $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışına f fonksiyonunun **desteği** denir ve

$$\operatorname{supp} f = \left\{\overline{x \in X : \ f(x) \neq 0}\right\}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f **kompakt destekli fonksiyon** adını alır [18].

Teorem 2.3.14 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter şart s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır [18].

2.4 L^p Uzayları (Lebesgue Uzayları)

Fonksiyonel analizde, Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını olan Lebesgue uzayının tanımı ve özellikleri incelendi. Bunun yanı sıra bazı gerekli olan teoremlere yer verildi.

Tanım 2.4.1 [L^p Uzayları (Lebesgue Uzayları)] (X, μ) bir ölçü uzayı ve $M, f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı μ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$L^p(X) := \left\{ f \in M : \int\limits_X |f|^p d\mu < 1 \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad , & 1 \leq p < \infty \\ \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye **Lebesgue uzayları** denir. Burada

$$ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf \left\{ \lambda : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \right\}$$

dir [18].

Teorem 2.4.2 [Hölder eşitsizliği] $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır [18].

Teorem 2.4.3 [Minkowski eşitsizliği] $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L^p$ olsun. Bu durumda $(f+g) \in L^p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır [18].

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği gözönüne alındığında L^p uzaylarının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L^p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$(L1)$ $\|f\|_{L^p} \geq 0$

$(L2)$ $\|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow$ h.h.y $f(x) = 0$

$(L3)$ $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \|f\|_{L^p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$(L4)$ $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L^p bir normlu uzaydır.

Teorem 2.4.4 [Young eşitsizliği] $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $p' = \dfrac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır [18].

Tanım 2.4.5 [L^p uzaylarında yakınsaklık] $f_n,\ f \in L^p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L^p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır [18].

Teorem 2.4.6 $1 \leq p < \infty$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $L^p(\Omega)$ uzayları

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır [36].

Teorem 2.4.7 [Fubini] f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{m}} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$, $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir [18].

Teorem 2.4.8 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzaylarındaki basit fonksiyonların kümesi L^p uzaylarında yoğundur [36].

Tanım 2.4.9 (Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık) $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq A \|f\|_{L^p}$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall\ \alpha > 0$ için

$$\mu\left\{x : \ |Tf(x)| > \alpha\right\} \leq \left(\frac{A \|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^q, \qquad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir [38].

Tanım 2.4.10 [Lokal İntegrallenebilme] f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal(veya yerel) integrallenebilir** adı verilir ve

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f|\, d\mu \ < \ \infty, \ K \subset \mathbb{R}^n, \ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \infty, \ K \ \subset \ \mathbb{R}^n, \ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [36].

Teorem 2.4.11 $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

gömme koşulları elde edilir [36].

Tanım 2.4.12 [L^p_w Uzayları (Ağırlıklı Lebesgue Uzayları)] $1 \le p \le \infty$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. f fonksiyonları bütün ölçülebilir norma sahip ise bu durumda $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ uzayları

$$\|f\|_{L^p_\omega}(\mathbb{R}^n) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ **uzayları** denir.
$p = \infty$ durumunda ise $L^\infty(\omega) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L^\infty_\omega} \equiv \|f\|_{L^\infty_\omega(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \ \omega(x)$$

ile tanımlanır [36].

Şimdi, $1 < p < \infty$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzaylarının $[L^p(\Omega)]^*$ dual uzayını ifade eden tanımı aşağıda verildi.

Tanım 2.4.13 **[Dual Uzayı]** $g \in L^{p'}$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ için

$$\Phi_g(f) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L^p(\Omega)]^*$$

ve

$$\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$$

olarak tanımlanır [18].

Lemma 2.4.14 Ω, $\mathbb{R}^n$ nin bir boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p > 1$ ve $M > 0$ olmak üzere öyle keyfi bir $f \in L^p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

ve

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq M\|f\|_p$$

şeklindedir. Bu durumda $g \in L^{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \leq M$ biçimde olur [36].

Tanım 2.4.15 **[Maksimal Operatör]** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\mathcal{M}f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır [41].

Teorem 2.4.16 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $\mathcal{M}f$ maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall\ \alpha > 0$ için

$$m\Big\{x : \mathcal{M}f(x) > y\Big\} \leq \frac{A}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq A_p\|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir [41].

Tanım 2.4.17 [Riesz Potensiyeli] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere, I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$$

olarak tanımlanır [41].

Teorem 2.4.18 $1 < p < \infty,\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,\quad d =$çap$(\Omega) = \sup\Big\{|x-y|\ ;\ x, y \in \Omega\Big\}$, $0 < \alpha < \dfrac{n}{p},\quad \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\Omega)} \leq \overline{c}(p,\alpha,n)\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\overline{c}(p,\alpha,n)$ pozitif sabiti

$$\overline{c}(p,\alpha,n) = c\frac{n}{\alpha[n-\alpha p]}(p')^{1/q}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir [32].

Tanım 2.4.19 (Singüler İntegral)

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp} f$$

Calderón-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür. $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca

$$K(x,y) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x = y\Big\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \le 1$ olmak üzere
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ x \neq y$ için

$$|K(x,y)| \le c_1 |x-y|^{-n}.$$

(ii) $2\ |x-x'| \le |x-y|$ için

$$|K(x,\ y) - K(x',\ y)| + |K(y,\ x) - K(y,\ x')| \le c_1 \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) |x-y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır [7].

Önerme 2.4.20 *T Calderón-Zygmund operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir [14].*

Teorem 2.4.21 (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X,μ) ve (Y,v) ölçü uzayı $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, T $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ den Y ye zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli alt lineer operatör olsun. O halde $p_0 < p < p_1$ için T kuvvetli (p,p) tiplidir [13].

İspat. $f \in L^p$ olsun. $\forall \lambda > 0$ için

$$f_0 = f\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}$$

$$f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|\le c\lambda\}}$$

olmak üzere $f = f_0 + f_1$ şeklinde yazılabilir. O halde $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ ve $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$ olur. Ayrıca

$$|Tf(x)| = |T(f_0+f_1)(x)|$$

$$\le |Tf_0(x) + Tf_1(x)|$$

$$\le |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$$

sağlanır. Böylece

$$\alpha_{Tf}(\lambda) \leq \alpha_{Tf_0}(\lambda/2) + \alpha_{Tf_1}(\lambda/2)$$

gerçeklenir.

1. Durum: $p_1 = \infty$ olsun. $A_1\|Tg\|_\infty \leq A_1\|g\|_\infty$ olmak üzere $c = \dfrac{1}{2A_1}$ seçilirse, Bu durumda $\alpha_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$ olur. Zayıf (p_0, p_0) eşitsizliğinden

$$\alpha_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$$

sağlanır.
Dolayısıyla

$$\|Tf\|_p^p \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\alpha_{Tf_0}(\lambda/2)d\lambda$$

$$\leq p\int_0^1 \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\right)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda$$

$$= p\int_0^1 \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda$$

$$= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{f(x)/c} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu$$

$$= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\frac{\lambda^{p-p_0}}{p-p_0}\bigg|_0^{f(x)(2A_1)}\right)d\mu$$

$$= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p$$

elde edilir.

2. Durum: $p_1 < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\alpha_{Tf_i}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}, \quad i = 0, 1$$

olur.
Dolayısıyla

$$\|Tf\|_p^p \leq \ p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu d\lambda$$

$$+\, p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_1)^{p_1} \int_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} d\mu d\lambda$$

$$= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p \quad .$$

■

Teorem 2.4.22 T Calderón-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda p ye bağlı olmayan $c>0$ sabiti için

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ c\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1<p<2,$$

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ c\left(p+\frac{p}{p-2}\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad p>2$$

gerçeklenir [32].

2.5 $L^{p,\lambda}$ Uzayları (Morrey Uzayları)

1938 yılında Morrey tarafından eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkan Morrey uzaylarının tanımı verilerek bu uzayların özellikleri incelendi.

Tanım 2.5.1 [$L^{p,\lambda}$ **Uzayları**] $1\leq p<\infty$ ve $0\leq\lambda<1$ olsun. $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzaylarının tüm ölçülebilir fonksiyonları için

$$||f||_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0\leq r<d}} \left[\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p,\lambda}$ **uzayları** denir [15].

$L^{p,\lambda}$ uzaylarının bazı özellikleri aşağıda verildi.

(i) $\lambda = 0$ olduğunda

$$L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

Dolayısıyla bu uzay bilinen Lebesgue uzayına dönüşür.
(ii) $\lambda = n$ olduğunda

$$L^{p,n}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(iii) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ olduğunda ise, bu durumda

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$$

olup burada θ, $\mathbb{R}^n$ de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtir.

2.6 Banach Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda Banach fonksiyon uzayları tanıtılarak bazı temel özellikleri verildi.

Tanım 2.6.1 [Banach Fonksiyon Normu] (R, μ) bir ölçü uzayı, $M^+, f : R \to [0, \infty]$ tanımlı $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. M^+ daki f, g, f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$ fonksiyonları, $\forall a \geq 0$ sabiti ve $\mu-$ ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için

(P_1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow$ h.h.y. $f = 0$,

(P_2) $\rho(af) = a\rho(f)$,

(P_3) $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$,

(P_4) h.h.y. $0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$,

(P_5) h.h.y. $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$,

(P_6) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$,

(P_7) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$, (burada C_E, $0 < C_E < \infty$, E ve ρ ya bağlı fakat f ye bağlı değildir) özellikleri sağlanıyorsa ρ ya **Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu)** denir [6].

Tanım 2.6.2 [Banach Fonksiyon Uzayları] (R, μ) bir ölçü uzayı, M de R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde M deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına **Banach fonksiyon uzayı** denir.
$\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

şeklinde ifade edilir [6].

Örnek 2.6.3 $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L^p uzayları bir Banach fonksiyon uzayıdır.

Teorem 2.6.4 ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|.\|_X$ Tanım 2.6.2 deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzaydır. S de R üzerinde tanımlı μ-basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X \hookrightarrow M_0 \tag{2.5}$$

içermeleri sağlanır.
Özel olarak, X te $f_n \to f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n in bir alt dizisi h.h.y. f ye μ-noktasal yakınsaktır [6].

Lemma 2.6.5 $X = X(\rho)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ olsun.
(i) (Fatou Özelliği)

$$0 \leq f_n \uparrow f, \quad (\mu\text{ -h.h.y.}) \ \Rightarrow \text{ya} \quad f \notin X \ \text{ ve } \ \|f_n\|_X \uparrow \infty$$

$$\text{ya da} \quad f \in X \ \text{ ve } \ \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X .$$

(ii) (Fatou Lemması)

$$f_n \to f \ (\mu\text{-h.h.y.}) \ \text{ ve } \ \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty \quad \Rightarrow \quad \|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$$

sağlanır [6].

Teorem 2.6.6 X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ X te $f \in X$ e yakınsaktır ve

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

gerçeklenir. Özel olarak X tamdır [6].

Tanım 2.6.7 [Mutlak Sürekli Norm] X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi ve f, X uzayında bir fonksiyon olsun.
Eğer h.h.y. $E_n \to \varnothing$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\|f\chi_{E_n}\| \to 0$$

oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna **mutlak sürekli norma sahiptir** denir [6].

3 $L^{p)}(\Omega)$ UZAYLARI (GRAND LEBESGUE UZAYLARI)

Grand Lebesgue uzayları T. Iwaniec ve C. Sbordone [22] tarafından 1992 yılında Jacobian'in integrallenebilme özelliklerini çalışırken bulmuştur. Grand Lebesgue uzaylarının yapısal özelliklerini C. Capone ve A. Fiorenza [8] üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayları olan small Lebesgue uzaylarını A. Fiorenza [17] tarafından bulunmuştur.

Bu bölümde grand Lebesgue uzayları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Ayrıca grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayları olan small Lebesgue uzaylarının tanımı ve grand Lebesgue uzaylarında Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılıkları incelendi.

3.0.1 $L^{p)}(\Omega)$ Uzayları

Bu kısımda grand Lebesgue uzayları ile ilgili tanım ve teoremleri verildi.

Tanım 3.0.1 [$L^{p)}(\Omega)$ **Uzayları**] $1 < p < \infty$, Ω da, $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ sonlu Lebesgue ölçüsüne sahip bir küme ve M_0 da, Ω üzerinde reel değerli sonlu ölçülü fonksiyonların bir kümesi olsun. $f \in M_0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p)}(\Omega)$ **uzayları** denir [9].

Teorem 3.0.2 $L^{p)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} \, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

normu ile bir Banach fonksiyon uzayıdır [22].

İspat. $(f_n)_n$; $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında bir Cauchy dizisi olsun.

Yani, $\forall\ \epsilon > 0$, en az $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > N$ için

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0.$$

O halde $\epsilon > 0$ için en az $N \in \mathbb{N}$ vardır. $0 < \varepsilon < p - 1, \quad m > N, \quad n < N$ olacak şekilde

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ayrıca $0 < \varepsilon < p - \varepsilon$ için $(f_n)_n$, $L^{p-\varepsilon}$ bir Cauchy dizisi ve yakınsaklığı f fonksiyonu $f \in L^{p-\varepsilon}$ dur.
$n > N$ olsun. Supremumu tanımına göre, en az ε_0 (n ye bağlı) için
$0 < \varepsilon_0(n) < p - 1$ olmak üzere

$$\|f - f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} + \frac{\epsilon}{3}.$$

$m > N_1$ için en az $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_m(x) - f(x)|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

$n > N$ ve $m > N_1$ olmak üzere

$$\|f - f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} = \|f - f_n + f_m - f_m\|$$

$$\leq \|f_n - f_m\| + \|f_m - f\|$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_n(x) - f_m(x)|^{p-\varepsilon_0(n)} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_\Omega |f_m(x)-f(x)|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}+\frac{\epsilon}{3}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

elde edilir.

Böylece keyfi bir $n > N$ için

$$\|f-f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} = 0.$$

Yani, $f \in L^{p)}(\Omega)$ dır.

Dolayısıyla $L^{p)}(\Omega)$ uzayları bir Banach fonksiyon uzayı olduğu ispatlanır. ■

Teorem 3.0.3 $1 < p < \infty$ ve $0 < \varepsilon \leq p-1$ için

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega)$$

gömme koşulları elde edilir [22].

İspat. (i) Norm tanımından ve Hölder eşitsizliğinden; $q \to \frac{p}{p-\varepsilon}$, $q' \to \frac{p}{\varepsilon}$

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}(\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1}(|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_\Omega |f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}}$$

$$= \|f\|_{L^p(\Omega)}\sup_{0<\varepsilon<p-1}\frac{1}{p-\varepsilon}|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}-\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq c_p\|f\|_{Lp(\Omega)}$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p)}(\Omega)$$

dır.

(ii)Norm tanımından

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{-\frac{1}{p-\epsilon}} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \sup_{0<\sigma<p-1} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma} dx \right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

$$= c_p \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$L^{p)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega)$$

dır. ■

Önerme 3.0.4 C_0^∞, kompakt destekli ve sonsuz kez diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayının kümesi olsun. C_0^∞ kümesi $L^{p)}(\Omega)$ de yoğun değildir. $L^{p)}(\Omega)$ uzayının kapanışı olan $[L^p]_{p)}$ uzayı

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx = 0 \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $f \in [L^p]_{p)}$ fonksiyonunu içerir [17].

İspat. İlk olarak $f \in [L^p]_{p)}$ ise (3.1) eşitliğinin doğru olduğunu ispat etmek gerekir.
f için sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.
$f \in [L^p]_{p)}$ olsun. $f_n \in L^p$ fonksiyon olmak üzere

$$\|f - f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} \to 0.$$

$\delta > 0$ olsun. $f_{n_0} \in L^p$ ve $\|f - f_{n_0}\|_{L^{p)}(\Omega)} < \dfrac{\delta}{2}$ olacak şeklinde n_0 seçilir.
Hölder eşitsizliğinden f_{n_0} için

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f_{n_0}(x)|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

sağlanır. Dolayısıyla $\varepsilon_0 > 0$ vardır öyle ki $\varepsilon < \varepsilon_0$ olduğu zaman

$$\Big(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}dx\Big)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}$$

sağlanır. Son olarak $\varepsilon < \varepsilon_0$ olduğu zaman

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\le \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(x)-f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&+ \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}|f_{n_0}(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\le \|f-f_{n_0}\|_{L^{p)}(\Omega)} + \frac{\delta}{2} \\
&\le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 3.0.5 [$L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$ **Uzayları (Genelleştirilmiş Grand Lebesgue Uzayları)**]
$1 < p < \infty$, φ de, $(0, p-1)$ üzerinde tanımlı sürekli pozitif bir fonksiyon ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x) = 0$ olsun. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonların sınıfında olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\varphi(.)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$ **uzayları** denir [22].
Ayrıca, özel olarak $\theta \ge 0$ olmak üzere $\varphi = \varepsilon^{\theta}$ alınırsa grand Lebesgue uzayının genelleştirmesi

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde $f \in M_0$ fonksiyonlarının sınıfıdır [29].

Teorem 3.0.6 $1 < p < \infty,\quad 0 < \varepsilon \leq p-1 \quad$ ve $\quad 0 < \theta_1 < \theta_2$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p),\theta_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p),\theta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega)$$

gömme koşulları elde edilir [22].

İspat. (i) Hölder eşitsizliğinden; $q \to \dfrac{p}{p-\varepsilon},\ q' \to \dfrac{p}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon^{\theta_1}|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon^{\theta_1}|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq c_p \|f\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p),\theta_1}(\Omega)$$

dır.
(ii) Hölder eşitsizliğinden; $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \varepsilon^{\theta_2} < \varepsilon^{\theta_1}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p),\theta_2}(\Omega)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon^{\theta_1}|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p),\theta_1}(\Omega)$$

dır.

(iii) Hölder eşitsizliğinden

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= (\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1})^{-\frac{1}{p-\epsilon}} (\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq (\varepsilon^{\theta_2}|\Omega|^{-1})^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \sup_{0<\sigma<p-1} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\sigma} dx \right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

$$= c_p \|f\|_{L}^{p),\theta_2}(\Omega)$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$L^{p),\theta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega)$$

dır. ■

3.0.2 $L^{p)}(\Omega)$ Uzaylarının İlişik Uzayları (Small Lebesgue Uzayları)

Bu kısımda Grand Lebesgue uzaylarının ilişik uzayı olan small Lebesgue uzaylarının tanımı verilmeden önce bu tanımda gerekli olan yardımcı Banach uzayılarının tanımı verildi.

Tanım 3.0.7 **[$L^{(p'}$ Uzayları (Yardımcı Banach Uzayları)]**
$1 < p < \infty$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$ ve M_0, Ω üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli sonlu ölçülü fonksiyonların kümesi olsun. $\forall g \in M_0 (\forall k \in \mathbb{N})$ fonksiyonların kümesi, Ω üzerinde

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) < \infty$$

formundaki ayrışım şeklinde tanımlanır. Eğer bu tanımlanan ayrışım ifadesinin tekrar bir infimumu da alınırsa

$$\|g\|_{L^{(p'}} := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \inf_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |g_k|^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{(p'}$ **uzayları** denir [17].

Teorem 3.0.8 [Hölder Eşitsizliği] $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme, $\forall f \in L^{p)}(\Omega)$ ve $g \in L^{(p'}(\Omega)$ olsun.
Hölder tipi eşitsizliği

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

şeklindedir [17].

İspat. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $g_k \geq 0$ olmak üzere $|g| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ herhangi bir ayrışım ve $f \in L^{p)}$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $0 < \varepsilon < p-1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g_k(x)dx &\leq \left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'}dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'}dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&\leq \varepsilon^{-1/(p-\varepsilon)}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'}dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \\
&\leq \inf_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'}dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|f(x)|\left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\right|dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g_k(x)dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\inf_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}|g_k(x)|^{(p-\varepsilon)'}dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}\|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

dır. ■

Tanım 3.0.9 **[$L^{p)'}$ Uzayları (Small Lebesgue Uzayları)]** M_0, Ω da tanımlı genişletilmiş skaler değerli sonlu ölçülü fonksiyonların kümesi olsun.
$\psi \in L^{(p'}(\Omega)$ olmak üzere

$$\|g\|_{L^{p)'}} = \sup_{\substack{0<\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{(p'}(\Omega)}} \|\psi\|_{L^{(p'}(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanan norm altındaki

$$L^{p)'} := \{g \in M_0 : \|g\|_{p)'} < \infty\}$$

uzaylarına $L^{p)'}$ **uzayları** denir [9].

Ayrıca, $L^{p)'}$ uzayları tanımına göre aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $\forall\ g \in M_0$ için $\|g\|_{L^{p)'}} \leq \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$.

(ii) $\forall\ g \in L^{p)'}$ için $\|g\|_{L^{p)'}} = \|g\|_{L^{(p'}(\Omega)}$.

Teorem 3.0.10 **[Hölder Eşitsizliği]** $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Lebesgue ölçüsü sonlu bir küme, $\forall\ f \in L^{p)}$ ve $g \in L^{p)'}$ olsun.
Hölder tipi eşitsizliği

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

şeklindedir [17].

İspat. Herhangi bir $f \in L^{p)}$ ve $g \in M_0$ için Teorem 3.0.8 nin ispatına benzer şekilde

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)||g(x)|dx = \sup_{\substack{0<\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{\infty}(\Omega)}} \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|\psi(x)dx$$

$$\leq \sup_{\substack{0<\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{(p'}(\Omega)}} \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} |f(x)|\psi(x)dx$$

$$\leq \sup_{\substack{0<\psi\leq|g| \\ \psi\in L^{(p'}(\Omega)}} \|f\|_{L(\Omega)}\|\psi\|_{L(\Omega)}$$

$$= \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.0.11 $f \in L_b^{p)}$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{\substack{g\neq 0 \\ g\in L^{p)'}(\Omega)}} \frac{\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx}{\|g\|_{L^{p)'}(\Omega)}}$$

$$= \|f\|_{(L^{p)'})'(\Omega)}$$

sağlanır.

Önerme 3.0.12 $L^{p)'}$ ve $(L^{p)'})'$ yeniden düzenleme altında değişmez uzaylardır. Ayrıca

$$(L^{p)'})' = L^{p)}$$

dır [17].

İspat. Yeniden düzenleme altında değişmez uzayın ilişik uzayı, yeniden düzenleme altında değişmez uzay olduğundan $(L^{p)'})'$ uzayının yeniden düzenleme altında değişmez olduğunu göstermek yeterlidir.
$f \in \left(L^{p)'}\right)'$ ve $f_n = \min\{n, f\} \in L^\infty$ olsun. Bu durumda

$$\Omega \text{ da } \quad \text{h.h.y.} \qquad 0 \leq f_n \uparrow f \tag{3.2}$$

olur.

Böylece

$$\big[0, |\Omega|\big) \text{ da } \quad \text{h.h.y.} \qquad 0 \leq (f_n)^* \uparrow f^* \tag{3.3}$$

sağlanır, burada $(f_n)^*$ ve f^* sırasıyla f_n ve f in azalan yeniden düzenlemesidir.

$\left(L^{p)'}\right)'$ Fatou özelliğini sağladığından (3.2) göz önüne alınırsa,

$$\|f_n\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} \uparrow \|f\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} \tag{3.4}$$

olur. Diğer taraftan

$$\|(f_n)^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \uparrow \|f^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \tag{3.5}$$

sağlanır. Sonuç 3.0.11 gereği

$$\|f_n\|_{\left(L^{p)'}(\Omega)\right)'} = \|f_n\|_{L^{p)}(\Omega)} \tag{3.6}$$

$$= \|(f_n)^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)} \tag{3.7}$$

elde edilir.
(3.4), (3.5), (3.6) göz önüne alındığında

$$\|f\|_{\left(L^{p)}(\Omega)\right)'} = \|f^*\|_{L^{p)}(0,|\Omega|)}$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.0.13 [Lorentz-Luxemburg Teoremi] Her X Banach fonksiyon uzayı, X'' ikinci ilişik uzayı ile çakışır.
Yani,

$$f \in X \Leftrightarrow f \in X''$$

dir. Bu durumda

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}$$

sağlanır [6].

Önerme 3.0.12 ve klasik Lorentz-Luxemburg Teoreminin sonucu olarak aşağıdaki teorem verildi.

Teorem 3.0.14 $L^{p)}$ uzayları $L^{p)'}$ uzaylarının ilişik uzaylarıdır ve tersine $L^{p)'}$ uzayları da $L^{p)}$ uzaylarının ilişik uzaylarıdır [17].

Şimdi, $L^{p)}$ uzaylarının yansımalı olup olmadığını aşağıdaki lemma ve önermelerle incelendi.

Lemma 3.0.15 X Banach fonksiyon uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter şart X ve X' uzaylarının mutlak sürekli norma sahip olmasıdır [6].

Önerme 3.0.16 $L^{p)}$ uzayları yansımalı değildir [17].

İspat. $L^{p)}$ uzayları yansımalı olmadığını göstermek için mutlak sürekli norma sahip olmayan bir fonksiyon oluşturmak yeterlidir.
Genelliği bozmadan $L^{p)}(0,1)$ uzaylarını ve $f(x) = x^{-1/p}$ fonksiyonunu olsun. f fonksiyonu mutlak sürekli norma sahip değildir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.1 $L^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu bölümde grand Lebesgue uzaylarında Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden Maksimal, Riesz Potansiyeli ve Singüler İntegral operatörlerinin sınırlılıklarının teoremleri ve ispatları verildi.

3.1.1 $L^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Bu kısımda, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün tanımı verildi. Ayrıca $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı incelendi.

Tanım 3.1.1 [Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu] f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun.
Her bir $f \in L_{loc}(\Omega)$, $d =$diam $(\Omega) = \sup\Big\{|x-y|\ ;\ x,\ y \in \Omega\Big\}$, $\Omega(x,r) = B(x,r) \cap \Omega$ olmak üzere

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r\leq d}} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{\Omega(x,y)} |f(y)| d(y)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu** denir [32].

Ayrıca $\mathcal{M} : f \to \mathcal{M}f$ ye Hardy-Littlewood maksimal operatörü de denir.

Teorem 3.1.2 $1 < p < \infty$ ve $d < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlıdır [32].

İspat. Norm tanımından

$$A_1 := \left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

olmak üzere

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p)}(\Omega)} =: \max\{A_1,\ A_2\}$$

elde edilir.

$\sigma < \varepsilon < p-1, \quad \sup\limits_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p-1 \ , \quad \dfrac{1}{p-\varepsilon} > \dfrac{1}{p-\sigma}$ olsun.

Hölder eşitsizliğinden ; $q \to \dfrac{p-\sigma}{p-\varepsilon}$, $q' \to \dfrac{p-\sigma}{\varepsilon-\sigma}$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}} \left(\int\limits_{\Omega} dy\right)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(|\Omega|^{-1}|\Omega|^{\frac{\varepsilon-\sigma}{p-\sigma}} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left[\left(|\Omega|^{-\frac{\varepsilon-\sigma}{p-\sigma}} \int\limits_{\Omega} |\mathcal{M}f(y)|^{p-\sigma} dy\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{-1}\right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\sigma}(\Omega)} \\
&\leq (p-1)|\Omega|^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\sigma}(\Omega)} \\
&\leq (p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{-\frac{1}{p-\sigma}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

olup Teorem 2.4.16 dan dolayı

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{M}f\|_{L^{p)}(\Omega)} &\leq p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\epsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{-\frac{1}{p-\sigma}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq c_0 p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\epsilon\leq\sigma} \left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq c_0 p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \left[\sup_{0<\epsilon\leq\sigma} \left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right] \|f\|_{L^{p)}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda σ, yeterince küçük olduğu için

$$S_{p,\sigma} := c_0\ p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \left[\sup_{0<\epsilon\leq\sigma} \left((p-\varepsilon)'\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right] < \infty.$$

Yani,

$$S_{p,\sigma} \leq c_0\ p\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}}(p-\sigma)'.$$

Dolayısıyla $\mathcal{M}$, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlıdır. ∎

3.1.2 $L^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Bu kısımda Riesz potansiyelinin tanımı verildi. $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında Riesz potansiyeli sınırlı değildir. Bunu ispatlamadan önce $L^{p),\varphi(\cdot)}(\Omega)$ uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlı olup olmadığı gösterildi.

Tanım 3.1.3 [Riesz Potensiyeli] $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere,
I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır [41].

Teorem 3.1.4 $1 < p < \infty$, $\quad 0 < \alpha < \dfrac{n}{p}$, $\quad \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n}$ ve $\theta_2 \geq \left[1 + \dfrac{\alpha q}{n}\right]\theta_1$, $\theta_1 > 0$ olsun.
Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}(\Omega)$ uzaylarından $L^{q),\theta_2}(\Omega)$ uzaylarına sınırlıdır [32].

İspat. İspatı $\theta_2 = \left[1 + \dfrac{\alpha q}{n}\right]\theta_1$ için yapmak yeterlidir. Çünkü $\theta_2 > \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right]\theta_1$ ve yeterince küçük ε için $\varepsilon^{\theta_2} \leq \varepsilon^{[1+\frac{\alpha q}{n}]\theta_1}$ dir. Keyfi bir

$$\varphi(u) := \left[p + \frac{(u-q)n}{n-\alpha(u-q)}\right]^{\frac{n-(u-q)\alpha}{n}}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $t \to 0^+$ için $\varphi(t) \sim t^{1+\frac{\alpha q}{n}}$ dir.

Gerçekten,

$$\lim_{t\to 0^+}\left[p+\frac{(t-q)n}{n-\alpha(t-q)}\right]^{\frac{n-(t-q)\alpha}{n}}=\left[p-\frac{qn}{n+\alpha q}\right]^{1+\frac{\alpha q}{n}} \tag{3.8}$$

olur. (3.8) denkleminde $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n}$ bağıntısından $p=\frac{qn}{n+\alpha q}$ yerine yazılırsa

$$=\left[\frac{qn}{n+\alpha q}-\frac{qn}{n+\alpha q}\right]^{1+\frac{\alpha q}{n}}$$

$$=0$$

elde edilir.

Sonuç olarakta

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1+\frac{\alpha q}{n}}=0$$

olur. Dolayısıyla $\psi(t):=\varphi(t^{\theta_1})$ olmak üzere I_α Riesz potansiyelinin $L^{p),\theta_1}$ uzaylarından $L^{q),\psi(\cdot)}$ uzaylarına sınırlı olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\sigma>0$ yeterince küçük bir sayı olsun.

Norm tanımından

$$A_1:=\left\{\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\left(\frac{\psi(\varepsilon)}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)}\right\}$$

ve

$$A_2:=\left\{\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{\psi(\varepsilon)}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)}\right\}$$

olmak üzere

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\varphi}(\Omega)}=:\max\{A_1,A_2\}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliğinden ve $\sigma < \varepsilon$ olduğundan

$$A_2 = \sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} \Big(\psi(\varepsilon)\Big)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon} d(y) \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$\leq \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} \Big(\psi(\varepsilon)\Big)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] \left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma} d(y) \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

$$= \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} \Big(\psi(\varepsilon)\Big)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] \psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}} \left(\frac{\varphi(\sigma)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma} d(y) \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

$$\leq \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} \psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] \psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \left(\frac{\psi(\varepsilon)}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon} d(y) \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

bulunur.

Şimdi $0 < \varepsilon \leq \sigma$ olsun. ε için $\dfrac{1}{p-\eta} - \dfrac{1}{q-\varepsilon} = \dfrac{\alpha}{n}$ olacak biçimde η tanımlanabilir.

Bu durumda σ yeterince küçük iken η da yeterince küçük bir pozitif sayıdır.

$u \to 0^+$ iken $\varphi(u) \sim u^{1+\frac{\alpha q}{n}}$ dir. Buradan

$$\frac{1}{p-\eta} - \frac{1}{q-\varepsilon} = \frac{\alpha}{n} \Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha(q-\varepsilon)+n}{n(q-\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = -\frac{n-\alpha(\varepsilon-q)}{n(\varepsilon-q)}$$

$$\Rightarrow p-\eta = -\frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)}$$

$$\Rightarrow \eta = p + \frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)}$$

bulunup, aşağıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}} = \psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left[p+\frac{n(\varepsilon-q)}{n-\alpha(\varepsilon-q)}\right]^{\left[\frac{n-\alpha(\varepsilon-q)}{n}\right]\left(-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}\right)}$$

$$= \left[\varphi(\varepsilon^{\theta_1})\right]^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\varphi(\varepsilon)^{-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}$$

$$\sim \left[(\varepsilon^{\theta_1})^{1+\frac{\alpha q}{n}}\right]\left[\varepsilon^{-\left(1+\frac{\alpha q}{n}\right)\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\right]$$

$$= 1$$

olur.
Dolayısıyla

$$\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}} = 1$$

dir. Teorem 2.4.18 den dolayı

$$(\psi(\varepsilon)|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega)} \leq \overline{c}(p-\eta,\alpha,n)(\psi\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)}$$

$$= \overline{c}(p-\eta,\alpha,n)\psi(\varepsilon)\frac{1}{q-\varepsilon}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}}|\Omega|^{-\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{\frac{\theta_1}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)}$$

$$= \overline{c}(p-\eta,\alpha,n)|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p-\eta}}\eta^{\frac{\theta_1}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta}(\Omega)}$$

$$\leq \left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}\overline{c}(p-\eta,\alpha,n)\right]|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)}$$

dır.
Dolayısıyla

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q),\theta_2}(\Omega)} \leq \left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}\overline{c}(p-\eta,\alpha,n)\right]|\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^{p),\theta_1}(\Omega)}$$

elde edilir. Burada

$$\overline{c}(p-\eta,\alpha,n) = c\frac{n}{\alpha[n-\alpha(p-\eta)]}\left[\frac{p-\eta}{p-\eta-1}\right].$$

c, p, η ve α dan bağımsız bir sabit, σ_1 yeterince küçük pozitif sayıdır.
Eğer σ_1 yeterince küçük ise $0 < \eta \leq \sigma_1$ olduğunda η_0 için

$$n - \alpha(p - \eta) \geq \eta_0 > 0 \ , \qquad \frac{p-\eta}{p-\eta-1} \leq p' + 1$$

dir. ■

Böylece $\theta_2 < \left[1 + \frac{\alpha q}{n}\right]\theta_1, \ \theta_1 > 0$ olduğunda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ uzaylarına sınırlı olmaz.

Şimdi ise aşağıdaki teoremde $n = 1$ ve $\Omega = [0, 1]$ özel durum için I_α Riesz potansiyelinin $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlı olmadığı incelendi.

Teorem 3.1.5 $0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$ ve $q = \dfrac{p}{1 - \alpha p}$ olsun. $\theta_2 < (1 + \alpha q)\theta_1$ olacak şekilde pozitif sayılar olsun.
Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1}$ uzaylarından $L^{q),\theta_2}$ uzaylarına sınırlı değildir [31].

İspat. $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \alpha < 1$ ve $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$ olsun. $q = \dfrac{np}{n - \alpha p}$ ve $\theta_1 = \theta_2 = 1$ alındığında

$$\theta_2 < \Big(1 + \frac{\alpha q}{n}\Big)\theta_1$$

bağıntısı

$$1 < \Big(1 + \frac{\alpha q}{n}\Big)\theta_1$$

olarak elde edilir.
Dolayısıyla I_α Riesz potansiyelinin $L^{p)}$ uzaylarından $L^{q)}$ uzaylarına sınırlı olmadığı ispatlanmış olur. ■

3.1.3 $L^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında Singüler İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu kısımda Calderon-Zygmund tipli singüler integral operatörlerinin tanımı verildi ve T, Calderon-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlılığının ispatı verildi.

Tanım 3.1.6 [Calderon-Zygmund Tipli Singüler İntegral Operatörleri]

$K(x, y)$ fonksiyonu, $\Big\{(x, y) \in \Omega \times \Omega \ : \ x \neq y\Big\}$ kümesi üzerinde sürekli ve

(i) $x \neq y$ için

$$|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n},$$

(ii) $\sigma > 0$ ve $|x-y| > 2|y-z|$ için

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C \frac{|y-z|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}},$$

(iii) $\sigma > 0$ ve $|x-y| > 2|y-\xi|$ için

$$|K(x,y) - K(\xi,y)| \leq C \frac{|x-\xi|^{\sigma}}{|x-y|^{n+\sigma}}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$Tf(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y) f(y) dy$$

eşitliği ile tanımlı operatörler **Calderon-Zygmund tipli singüler integral operatörleri** olarak adlandırılır [20].

Teorem 3.1.7 $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda T, Calderon-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlıdır [32].

İspat. Norm tanımından

$$A_1 := \left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \left(\varepsilon|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_{L^{p)}(\Omega)} =: \max\{A_1,\ A_2\}$$

elde edilir.
Hölder eşitsizliğinden

$$A_2 = \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}$$

$$= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

$$\leq (p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{1}{p-\sigma}} \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} |Tf(y)|^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

$$\leq \ (p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}$$

bulunur.

Sonuç olarak Teorem 2.4.22 den dolayı

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^{p)}(\Omega)} &\leq \ \left[(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq \ \left[(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon} (\varepsilon|\Omega|^{-1})^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&= \left[(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}} + 1\right] \|f\|_{L^{p)}(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon}
\end{aligned}$$

bulunur.

Burada

$$C_{p,\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} + \dfrac{p-\varepsilon}{2-p+\varepsilon}, & 1<p<2 \\[2ex] p-\varepsilon \ + \dfrac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-2}, & p>2 \end{cases}$$

ve

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\varepsilon} \leq \begin{cases} \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \dfrac{p}{2-p}, & 1<p<2, \\[2ex] \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-2}, & p>2 \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla T, Calderon-Zygmund operatörü $L^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlıdır. ■

4 $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ UZAYLARI (AĞIRLIKLI GRAND LEBESGUE UZAYLARI)

Bu bölümde ağırlıklı grand Lebesgue uzayları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Bu uzaylarında Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden Maksimal, Riesz Potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılıkları incelendi.

4.0.1 $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ Uzayları

Bu kısımda ağırlıklı grand Lebesgue uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri verildi.

Tanım 4.0.1 [$L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ **Uzayları**] $1 < p < \infty$, w bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L^{p)}_{\omega}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)^{p-\varepsilon} w(x)\ dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ **uzayları** denir [26].

Teorem 4.0.2 $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^{p)}_{\omega}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)^{p-\varepsilon} w(x)\ dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

normu ile bir Banach fonksiyon uzayıdır [26].

Tanım 4.0.3 [$L^{p),\theta}_{w}(\Omega)$ **(Genelleştirilmiş Ağırlıklı Grand Lebesgue) Uzayları**] $1 < p < \infty$, w bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\theta \geq 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\theta}_{w}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)^{p-\varepsilon} w(x)\ dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p),\theta}_{w}$ **uzayları** denir [26].

Ayrıca, özel olarak $\theta = 1$ durumunda $L^{p),\theta}_{w}$ uzayları $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ uzaylarına dönüşür.

4.1 $L_{\omega}^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu bölümde Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılıkları incelendi.

4.1.1 $L_{\omega}^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Bu kısımda Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal operatörünün sırasıyla Ω nın sınırlı ve sınırsız olduğu duruma bağlı olarak $L_{\omega}^{p)}(\Omega)$ uzaylarında sınırlılığı incelendi.

Tanım 4.1.1 $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer w ağırlık fonksiyonunun

$$\sup_{I\subset(0,1)} \frac{w(I)}{|I|}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < \infty \tag{4.1}$$

şartını sağlıyorsa w fonksiyonu A_p **- Muckenhoupt sınıfındadır** denir [16].

Lemma 4.1.2 $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ de (0,1) üzerinde $A_p = K$ dır. $0 < \varepsilon < \sigma$ için $\sigma > 0$ ve $L > 0$ vardır öyle ki $w \in A_{p-\varepsilon}$ (0,1) üzerinde $A_{p-\varepsilon} \leq L$ dır.

Teorem 4.1.3 $1 < p < \infty$ ve w (0,1) üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, Hardy- Littlewood maksimal operatörünün $L_w^{p)}(0,1)$ uzaylarında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $w \in A_p$ olmasıdır. [27].

İspat. İlk olarak

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)} \leq c\|f\|_{L_w^{p)}(0,1)} \tag{4.2}$$

sağlandığını varsayalım ve (4.1) eşitsizliğini ispatlayalım. $I \subset (0,1)$ sabit bir keyfi aralık olsun. Maksimal operatör tanımından

$$\int_I |f|dx \leq \mathcal{M}(f\chi_I)(x) \quad , \quad x \in I \tag{4.3}$$

diğer taraftan (4.2) hipotezinden

$$\|\mathcal{M}(f\chi_I)\|_{L_w^{p)}} \leq c\|f\chi_I\|_{L_w^{p)}} \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\left(\int_I |f|dx\right)\|\chi_I\|_{L_w^{p)}} &= \left\|\int_I |f|dx\chi_I\right\|_{L_w^{p)}} \\
&\leq \|M(f\chi_I)\|_{L_w^{p)}} \\
&\leq \|c\|f\chi_I\|_{L_w^{p)}} \\
&= c\sup_\varepsilon\left(\varepsilon\int_I |f|^{p-\varepsilon}wdx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= c\sup_\varepsilon\left(\varepsilon\int_I |f|^{p-\varepsilon}\ w^{\frac{p-\varepsilon}{p}}w^{\frac{\varepsilon}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\leq c\sup_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_I\left(|f|^{p-\varepsilon}w^{\frac{p-\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{p}{p-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_I\left(w^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{p}{\varepsilon}}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\
&= c\sup_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_I |f|^pwdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_I wdx\right)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\
&= c\left(\int_I |f|^pwdx\right)^{\frac{1}{p}}\ \sup_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\ w(I)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\
&= c\left(\int_I |f|^pwdx\right)^{\frac{1}{p}}\ \sup_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\ w(I)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)}}\ w(I)^{\frac{-1}{p}}
\end{aligned}$$

$$= c\ w(I)^{\frac{-1}{p}} \left(\int_I |f|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \ \sup_{\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\ w(I)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= c\ w(I)^{\frac{-1}{p}} \left(\int_I |f|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \ \|\chi_I\|_{L_w^{p)}}$$

olur. Yani,

$$\int_I |f| dx \leq c\ w(I)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |f|^p\ w dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.
Yukarıdaki eşitsizlikte $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$ seçilirse $f^p w = w^{-\frac{1}{p-1}}$ olur.
Dolayısıyla

$$\int_I w^{-\frac{1}{p-1}} dx \leq c\ w(I)^{\frac{-1}{p}} \left(\int_I w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

veya

$$w(I)^{\frac{-1}{p}} |I|^{-1} \left(\int_I w^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq c$$

elde edilir. Buradan p-inci kuvvet alınarak (4.1) eşitsizliği elde edilir.

Tersine ispatlamak için $0 < \sigma < p - 1$ olduğunda Lemma 4.1.2 ye göre

$$\|\mathcal{M} f\|_{L_w^{p-\varepsilon}} \leq c \|f\|_{L_w^{p-\varepsilon}}\ , \qquad \varepsilon \in (0, \sigma]$$

sağlandığı görülür.
İlk adımdan, ε, σ dan büyük olsun, yani $\varepsilon \in (\sigma, p-1)$ alalım. Dolayısıyla $\dfrac{p-\sigma}{p-\varepsilon} > 1$ olur.

$\dfrac{p-\sigma}{p-\varepsilon}$ için Hölder eşitsizliğinden ve $\left(1-\dfrac{p-\varepsilon}{p-\sigma}\right)\dfrac{p-\sigma}{\varepsilon-\sigma}=1$ olduğundan

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p-\varepsilon}}=\left[\int_0^1(\mathcal{M}f)^{p-\varepsilon}\ wdx\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$=\left[\int_0^1(\mathcal{M}f)^{p-\varepsilon}\ w^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\ w^{1-\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}dx\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq\left\{\int_0^1\left[(\mathcal{M}f)^{p-\varepsilon}\ w^{\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}}\right]^{\frac{p-\sigma}{p-\varepsilon}}dx\right\}^{\frac{1}{p-\sigma}}\left[\int_0^1(w^{1-\frac{p-\varepsilon}{p-\sigma}})^{\frac{p-\sigma}{\varepsilon-\sigma}}dx\right]^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}$$

$$=\left[\int_0^1(\mathcal{M}f)^{p-\sigma}\ wdx\right]^{\frac{1}{p-\sigma}}\left(\int_0^1 wdx\right)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\varepsilon\in(\sigma,p-1)\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}<\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}$$

ve

$$\sigma<p-1\quad\Rightarrow\quad(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}}>1$$

olduğundan

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)}=\max\left\{\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)}\ ,\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)}\right\}$$

$$=\max\left\{\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)}\ ,\ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left[\int_0^1(\mathcal{M}f)^{p-\sigma}\ wdx\right]^{\frac{1}{p-\sigma}}\left(\int_0^1 wdx\right)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}\right\}$$

$$\leq\max\left\{1,\sup_{\sigma<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}}\left(\int_0^1 wdx\right)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}}\right\}\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|\mathcal{M}f\|_{L_w^{p)}(0,1)}$$

$$\leq c\max\left\{1,(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}}\Big(1+\int\limits_0^1 wdx\Big)^{\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}}\right\}\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_w^{p)}(0,1)}$$

$$\leq c(p-1)\sigma^{-\frac{1}{p-\sigma}}\Big(1+\int\limits_0^1 wdx\Big)^{\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}}\|f\|_{L_w^{p)}(0,1)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Ω kümesinin sınırsız olması durumda $L_\omega^{p)}(\Omega)$ uzaylarında maksimal operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili tanım ve teoremler aşağıda verildi.

Tanım 4.1.4 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ açık küme olsun. $(|\Omega|>\infty)$

$$L^p(\Omega,w):=\left\{f:\|f\|L^p(\Omega,w):=\left(\int\limits_\Omega|f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

gerek ve yeter şart $w\in A_p$ dir [42].

Tanım 4.1.5

$$L^{p)}((0,1),w):=\left\{f:\|f\|L^p((0,1),w):=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}((0,1),w)}<\infty\right\}$$

[42].

Tanım 4.1.6 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ açık küme olsun. $(|\Omega|>\infty)$

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)}:=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^\varepsilon)}$$

şeklinde tanımlanır [42].

Lemma 4.1.7 $1\leq p<\infty$ ve $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<p-1$ olsun.

$$L^{p-\varepsilon_1}(\Omega,wa^{\varepsilon_1})\hookrightarrow L^{p-\varepsilon_2}(\Omega,wa^{\varepsilon_2})$$

gerek ve yeter şart $a\in L^p(\Omega,w)$ dır [42].

İspat. $C = \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^{p(\frac{1}{p-\varepsilon_2}-\frac{1}{p-\varepsilon_1})}$ olmak üzere ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon_2}(\Omega,wa^{\varepsilon_2})} \leq C\|f\|_{L^{p-\varepsilon_1}(\Omega,wa^{\varepsilon_1})}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.8 [Riesz-Thorin-Stein-Weiss İnterpolasyon Teoremi]
$p_k, q_k \in [1,\infty)$, $(k = 1,2,...)$ ve v_k, w_k ağırlıklı fonksiyonları $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlansın.
T, sublineer operatör ve $L^{p_1}(\Omega,v_1) \cap L^{p_2}(\Omega,v_2)$ olsun.
Bu durumda

$$K \leq K_1^{1-t}K_2^t \ , \ \frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2} \ , \ \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}$$

ve

$$v_t = v_1^{(1-t)\frac{p_t}{p_1}} v_2 = v_1^{(t)\frac{p_t}{p_2}} \ , \ w_t = w_1^{(1-t)\frac{q_t}{q_1}} w_2^{(t)\frac{q_t}{q_2}} \ , \ (0 < t < 1)$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_{L^{q_i}(\Omega,w_i)} \leq K_i\|f\|_{L^{p_i}(\Omega,v_i)} \ , \ i = 1,2,$$

ve

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\Omega,w_t)} \leq K\|f\|_{L^{p_t}(\Omega,v_t)}$$

sağlanır [42].

Lemma 4.1.9 $w \in A_p$, a negatif olmayan fonksiyon, $a^\delta \in A^p$ olmak üzere en az bir $\delta > 0$ vardır. $\varepsilon \in (0,\delta)$ olmak üzere $wa^\varepsilon \in A_{p-\varepsilon}$ dır [42].

İspat. $q > 1$ için $w^q \in A^p$ olmak üzere $wa^\varepsilon = (w^q)^{\frac{1}{q}}(a^{\varepsilon q'})^{\frac{1}{q'}}$ dir.

$\varepsilon_1 > 0$ için $w^q \in A_{p-\varepsilon}$ ve $\varepsilon \leq \dfrac{\delta}{q'}$ için $a^{\varepsilon q'} \in A_p$ olduğundan dolayısıyla
$\varepsilon_2 > 0$ için $a^{\varepsilon q'} \in A_{p-\varepsilon_2}$ olur.

Bu durumda $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{\delta}{q'}, \dfrac{\varepsilon_2}{q'}\right\}$ alınırsa,

$$w^q \in A_{p-\varepsilon}$$

ve

$$a^{\varepsilon q'} \in A_{p-\varepsilon}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.1.10 $a \in L^p(\Omega, w)$ olsun. $\forall \delta \in (0, p-1)$, $C_\delta > 0$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} \le C_\delta \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w;\delta)}$$

dır [42].

İspat. Kabul edelim ki

$$B_\delta = \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^\varepsilon)}$$

olmak üzere

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} \le \delta \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w;\delta)} + B_\delta$$

olsun.
Hölder eşitsizliğinden; $r = \dfrac{p-\delta}{p-\varepsilon} > 1, \quad r' = \dfrac{p-\delta}{p-\delta}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^\varepsilon)} &= \left(\int\limits_\Omega |f|^{p-\varepsilon} w a^\varepsilon dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \left(\int\limits_\Omega |f|^{p-\varepsilon} w^{\frac{1}{r}} a^{\frac{\delta}{r}} w^{\frac{1}{r'}} a^{\varepsilon-\frac{\delta}{r}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\le \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,wa^\delta)} \left(\int\limits_\Omega a^p w dx \right)^{\frac{\varepsilon-\delta}{(p-\varepsilon)(p-\delta)}} \\
&= \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,wa^\delta)} \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^{p(\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\delta})}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Dolayısıyla $h(\varepsilon) = \sup\limits_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\varepsilon \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^p \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B_\delta &\le \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^{p(\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\delta})} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,wa^\delta)} \\
&= \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\varepsilon \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^p \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\delta \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^p \right)^{-\frac{1}{p-\delta}} \delta^{\frac{1}{p-\delta}} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,wa^\delta)} \\
&\le \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \frac{h(\varepsilon)}{h(\delta)} . \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w;\delta)}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Ayrıca C_δ,

$$C_\delta = 1 + \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

şeklinde olup,

$$C_\delta = 1 + \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|a\|_{L^p(\Omega,w)}^{p(\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\delta})}$$

$$\leq 1 + \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \delta^{-\frac{1}{p-\delta}} (p-1)\big(1+\|a\|_{L^p(\Omega,w)}^p\big)^{p(\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{p-\delta})}$$

$$\leq 1 + (p-1)\delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \left(1+\|a\|_{L^p(\Omega,w)}^p\right)^{1-\frac{1}{p-\delta}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.11 $a \in L^p(\Omega, w)$ olsun. Eğer $w \in A_p$ ise en az bir $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ ve $wa^{\varepsilon_0} \in A_{p-\varepsilon_0}$ olmak üzere maksimal operatör $L_a^{p)}(\Omega, w)$ uzaylarında sınırlıdır [42].

İspat. Şimdi

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} \leq C\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} \tag{4.5}$$

ispatlanacaktır.
ε_0 için Lemma 4.1.9 den dolayı

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w;\varepsilon_0)} \leq C\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w;\varepsilon_0)}$$

olduğu görülür.
(4.5) eşitsizliğine göre

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(\Omega,w)} \leq K_1\|f\|_{L^p(\Omega,w)}$$

ve

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega,wa^{\varepsilon_0})} \leq K_2\|f\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega,wa^{\varepsilon_0})}$$

olsun.

Riesz-Thorin-Stein-Weiss İnterpolasyon Teoreminden (Teorem 4.1.8) dolayı

$p_1 = p$, $p_2 = p - \varepsilon_0$, $q_1 = p$, $q_2 = p - \varepsilon_0$
$v_1 = w$, $v_2 = wa^{\varepsilon_0}$, $w_1 = w$, $w_2 = wa^{\varepsilon_0}$

şartlar altında $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ve ε üzerinde bağlı olmayan K_{ε_0} için

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^{\varepsilon})} \leq K_{\varepsilon_0} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^{\varepsilon})}.$$

Dolayısıyla

$$\|\mathcal{M}f\|_{L_a^{p)}(\Omega, w; \varepsilon_0)} = \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^{\varepsilon})}$$

$$\leq K_{\varepsilon_0} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^{\varepsilon})}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.12 $a \in L^p(\Omega, w)$ olsun. $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ vardır öyle ki $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ için $\mathcal{M}$,Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_a^{p)}(\Omega, w)$ uzaylarında sınırlıdır [42].

İspat. $Q \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda maksimal operatör

$$\frac{1}{Q} \int\limits_Q |f(y)| dy \leq (\mathcal{M}f\chi_Q)(x)\ , \quad x \in Q \tag{4.6}$$

şeklindedir.
Kabul edelim ki,

$$\|\mathcal{M}f\chi_Q\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)} \leq c\|f\chi_Q\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)} \tag{4.7}$$

olsun. Bu durumda (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden

$$\left(\frac{1}{Q} \int\limits_Q |f(y)| dy\right) \leq (\mathcal{M}f\chi_Q)(x) \|\chi_Q\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)}$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{Q} \int\limits_Q |f(y)| dy\right) \chi_Q \right\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)}$$

$$\leq \|(\mathcal{M}f\chi_Q)(x)\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)}$$

$$\leq c\|(f\chi_Q)(x)\|_{L_a^{p)}(\Omega, w)}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$\left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q |f(y)|dy\right)\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int\limits_Q w(t)a(t)^{\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq c\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int\limits_Q |f(t)|^{p-\varepsilon}w(t)a(t)^{\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Ayrıca $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ için

$$\left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q |f(y)|dy\right)\left(\int\limits_Q w(t)a(t)^{\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \leq c\left(\int\limits_Q |f(t)|^{p-\varepsilon_0}w(t)a(t)^{\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}.$$

Keyfi bir $f(x) = \left(w(x)a(x)^{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0-1}}$ olsun. Son eşitsizlikte yerine konulursa,

$$\left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q \left(w(x)a(x)^{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0-1}}dx\right)^{p-\varepsilon_0}\left(\int\limits_Q w(t)a(t)^{\varepsilon_0}dt\right) \leq c\left(\int\limits_Q \left(w(x)a(x)^{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon_0-1}+1}dx\right)^{p-\varepsilon_0}$$

elde edilir.
Dolayısıyla

$$\left(\int\limits_Q w(t)a(t)^{\varepsilon_0}dt\right)\left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q \left(w(x)a(x)^{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0-1}}dx\right)^{p-\varepsilon_0-1} \leq c$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ∎

4.1.2 $L_\omega^{p)}(\Omega)$ Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Bu kısımda sırasıyla Ω nın sınırlı ve sınırsız olduğu duruma bağlı olarak $L_\omega^{p)}(\Omega)$ uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığı incelendi. Ana teorem ve ispatını vermeden önce gerekli tanım ve teoremler verildi.

Tanım 4.1.13 $1 < p < \infty$ ve Q da, $(Q \subset \mathbb{R}^n)$ herhangi bir küp olsun. $w \in A_p$ olmak üzere

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [34].

Tanım 4.1.14 $0 < \alpha < n, \quad 1 < p, q < \infty$ olsun. $(w, v) \in A^{\alpha}_{p,q}$ olmak üzere

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} |Q|^{\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [40].

Tanım 4.1.15 $1 < p, q < \infty$ olsun. $(w, v) \in A^{*}_{p,q}$ olmak üzere

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [12].

Lemma 4.1.16 $0 < \alpha < n$, ve $1 < p, q < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğruluğunu kabul edelim [43].

[i] w, v ağırlıklı fonksiyonlar ve $r > 1$, $0 < \varepsilon < q - 1$ için

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} |Q|^{\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q-\varepsilon} - \frac{1}{p}} \left(\int_Q v(x)^r dx \right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon)r}} \left(\int_Q w(x)^{(1-p')r} dx \right)^{\frac{1}{p'r}} < \infty$$

sağlanır.

[ii] Negatif olmayan a, b fonksiyonları için öyle bir $\delta > \varepsilon$ vardır ki ,

$(a^{\frac{\delta}{p}}, b^{\frac{\delta}{q-\varepsilon}}) \in A^{*}(p, q - \varepsilon)$ olsun.

(i) ve (ii) durumlarında $(wa^{\varepsilon}, vb^{\varepsilon}) \in A^{*}_{p,q-\varepsilon}$ doğrudur.

İspat.

$$\Delta := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\frac{\alpha}{n+1}+\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q v(x)b(x)^{\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon)}} \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q [w(x)a(x)^{\varepsilon}]^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

olsun.
Hölder eşitsizliğinden ve en az bir $r > 1$ olduğu durumda,

$$\Delta \leq \sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q v(x)^r dx\right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon)r}} \left(\frac{1}{Q}\int\limits_Q w(x)^{(1-p')r}dx\right)^{\frac{1}{p'r}}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \left[b(x)^{\frac{\varepsilon r'}{q-\varepsilon}}\right]^{q-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \left[a(x)^{\frac{\varepsilon r'}{p}}\right]^{-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{1}{r'}}$$

elde edilir. Yani $(wa^{\varepsilon}, vb^{\varepsilon}) \in A^{*}_{p,q-\varepsilon}$ dır. ■

Önerme 4.1.17 $0 < \alpha < n, \quad 1 < p < \dfrac{n}{a}$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$(w^{\frac{p}{q}}, w) \in A^{\alpha}_{p,q} \Longleftrightarrow w \in A_{1+\frac{q}{p'}}.$$

sağlanır [43].

Teorem 4.1.18 $0 < \alpha < n$, ve $1 < p \leq q < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur [40].

(i) Eğer en az bir $r > 1$ için

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_Q v(x)^r dx\right)^{\frac{1}{(qr)}} \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)^{(1-p')r}dx\right)^{\frac{1}{(p'r)}} < \infty$$

olmak üzere

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^q}(\Omega, v) \leq c\|f\|_{L^q}(\Omega, w) \tag{4.8}$$

sağlanır.

(ii) Eger $p < q$ ve v, $w^{1-p'}$ fonksiyonları da doubling şartını sağlıyorsa bu durumda (4.8) eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart $(w, v) \in A^{\alpha}_{p,q}$ olmasıdır.

Teorem 4.1.19 [Riesz-Thorin-Stein-Weiss İnterpolasyon Teoremi]
$p_k, q_k \in [1, \infty)$, $(k = 1, 2, ...)$ ve v_k, w_k ağırlıklı fonksiyonları $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ da tanımlansın. T, sublineer operatör ve $L^{p_1}(\Omega, w_1) \cap L^{p_2}(\Omega, w_2)$ olsun.
Bu durumda

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1}{p_1} + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)t \quad , \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1}{q_1} + \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)t$$

ve

$$w_t = w_1^{(1-t)\frac{p_t}{p_1}} w_2^{t\frac{p_t}{p_2}} \quad , \quad v_t = v_1^{(1-t)\frac{p_t}{p_1}} v_2^{t\frac{q_t}{q_2}} \quad , \quad (0 < t < 1).$$

olmak üzere T operatörü
$L^{p_1}(\Omega, w_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega, v_1)$, M_1 normu ile sınırlı,
$L^{p_2}(\Omega, w_2) \hookrightarrow L^{q_2}(\Omega, v_2)$, M_2 normu ile sınırlı ise

$$T : L^{p_t}(\Omega, w_t) \hookrightarrow L^{q_t}(\Omega, v_t) \quad , \qquad M \leq M_1^{1-t} M_2^t$$

normu ile sınırlıdır.

Şimdi, aşağıda ağırlıklı grand Lebesgue uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığının teoremi ve ispatı verildi.

Teorem 4.1.20 $1 < p, q < \infty$ olsun. w ve v ağırlıklı fonksiyonları $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ alanında tanımlanmıştır ve T lineer operatörü $L^p(\Omega, w)$ uzaylarından $L^q(\Omega, w)$ uzaylarına sınırlıdır. $1 < p_0 < p$, $1 < q_0 < q$ ve a, b negatif olmayan fonksiyonların Ω alanında tanımlanmıştır. $a \in L^p(\Omega, w)$ ve $b \in L^q(\Omega, w)$ olmak üzere $L^{p_0}(\Omega, wa^{p-p_0})$ uzaylarından $L^{q_0}(\Omega, vb^{q-q_0})$ sınırlıdır. Bu durumda T operatörü ağırlıklı genelleştirilmiş grand Lebesgue $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ uzaylarından ağırlıklı genelleştirilmiş grand Lebesgue $L_a^{q),\theta q/p}(\Omega, v)$ uzaylarına sınırlıdır.

İspat. Herhangi bir $\theta > 0$ olduğu durumda

$$A = \sup_{0<\varepsilon\leq q-q_0} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^{\varepsilon})}$$

ve

$$B = \sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^{\varepsilon})}.$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_b^{L^{q),\theta_1}}(\Omega,v) = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^{\varepsilon})} = \max\{A,B\}.$$

elde edilir.

Önce A sayısını inceleyelim.
İnterpolasyon Teoreminden (Teorem 4.1.19) dolayı
$p_1 = p$, $p_2 = p_0$, $q_1 = q$, $q_2 = q_0$
$v_1 = w$, $v_2 = wa^{p-p_0}$, $w_1 = v$, $w_2 = vb^{q-q_0}$
şartlar altında ve

$$p_\varepsilon = \Big(\frac{1}{p} + t\big(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}\big)\Big)^{-1}, \quad t = \frac{\varepsilon q_0}{(q-q_0)(q-\varepsilon)} \qquad \varepsilon \in [0, q-q_0]$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^{\varepsilon})} \leq M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_{L^{p_\varepsilon}(\Omega,wa^{p-p_\varepsilon})}.$$

dır. Dolayısıyla

$$A \leq \sup_{0<\varepsilon\leq q-q_0} M_1^{1-t} M_2^t \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}} \|f\|_{L^{q_\varepsilon}(\Omega,wa^{p-p_\varepsilon})}$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon\leq q-q_0} M_1^{1-t} M_2^t (p-p_\varepsilon)^{-\frac{\theta}{p_\varepsilon}} \sup_{0<p-p_\varepsilon\leq p-p_0} (p-p_\varepsilon)^{\frac{\theta}{p_\varepsilon}} \|f\|_{L^{q_\varepsilon}}(\Omega, wa^{p-p_\varepsilon}).$$

Son eşitsizlikte $t = \dfrac{p_0(p-p_\varepsilon)}{p_\varepsilon(p-p_0)}$ yerine konulursa ve

$$C(p_0,q_0) = \sup_{0<t\leq 1} M_1^{1-t}M_2^t\Big(\frac{tq(q-q_0)}{q_0+t(q-q_0)}\Big)^{-\theta\left(\frac{1-t}{q}+\frac{t}{q_0}\right)}\Big(\frac{tp(p-p_0)}{p_0+t(p-p_0)}\Big)^{\theta_1\left(\frac{1-t}{p}+\frac{t}{p_0}\right)}$$

olmak üzere

$$A \leq C(p_0,q_0)\|f\|_{L_a^{p),\theta}(\Omega,w)}$$

elde edilir.
Kabul edelim ki, $C(p_0,q_0)$ ın sağ tarafındaki ifade $t^{\theta_1\frac{1}{q}-\theta\frac{1}{p}}$ ın t ye göre $0<t<1$ aralığında supremumunun sonlu olması için $\theta_1\dfrac{1}{q}-\theta\dfrac{1}{p}=0$ veya $\theta_1 = \dfrac{q}{p}\theta$ olması gerekir.
Aksi takdirde $C(p_0,q_0)=\infty$ olur.

Şimdi ise B sayısını inceleyelim.
Hölder eşitsizliğinden ve $\dfrac{q_0}{q-\varepsilon}>1$ den

$$\|Tf\|_{L^{q-\varepsilon}(\Omega,vb^\varepsilon)} \leq \|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{q\left(\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\ \|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})}$$

elde edilir.
Dolayısıyla $h(\varepsilon) := \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\ \|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{q\left(\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}$ olmak üzere

$$B \leq \sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1}\ \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\ \|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{q\left(\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\ \|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})}$$

$$= (q-q_0)^{-\frac{\theta_1}{q_0}}\ \|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{-\frac{q}{q_0}}\ \sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1}\ \varepsilon^{\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\ \|b\|_{L^q(\Omega,v)}^{\frac{q}{q-\varepsilon}}\ (q-q_0)^{\frac{\theta_1}{q_0}}\ \|Tf\|_{L^{q_0}(\Omega,vb^{q-q_0})}$$

$$\leq \inf_{0<q-q_0<q-1}\Big(h^{-1}(q-q_0)\ \sup_{q-q_0<\varepsilon<q-1} h(\varepsilon)\Big).A = A$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Ayrıca, $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{p}{q}$ halinde

$$C(p_0, q_0) = \max\left\{ M_1\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\theta}{p}}, M_2\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\theta}{p_0}} \right\}$$

olur.

Aşağıda, Ω nın sınırsız olduğu durumda $L_{\omega}^{p)}(\Omega)$ uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılığı ile ilgili teorem ve ispatı verildi.

Teorem 4.1.21 $0 < \alpha < n$ ve $1 < p < q < \infty$ olsun. Aşağıdaki şartların doğruluğunu kabul edelim.

(i) $(w, v) \in A_{p,q}^{\alpha}$;

(ii) $v, w^{1-p'}$ doubling şartı;

(iii) En az $r > 1$ ve $0 < \varepsilon_0 < q - 1$ vardır öyle ki;

$$\sup_{Q} |Q|^{\frac{\alpha}{n+1} + \frac{1}{q-\varepsilon_0} - \frac{1}{p_0}} \left(\int_Q v(x)^r dx \right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon_0)r}} \left(\int_Q w(x)^{(1-p_0')r} dx \right)^{\frac{1}{p_0' r}} < \infty, \quad p_0 \leq -\varepsilon_0,$$

(iv) a, b negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere en az $\delta > \varepsilon_0$ vardır öyle ki, $(a^{\frac{\delta}{p_0}}, b^{\frac{\delta}{q\varepsilon_0}}) \in A^*(p_0, q - \varepsilon_0)$ ve vb^{ε_0} $(wa^{\varepsilon_0})^{1-p_0'}$ doubling şartları sağlanır.

Bu durumda $\theta > 0$ olmak üzere I_α Riesz potansiyel operatörü genelleştirilmiş grand lebesgue $L_a^{p,\theta}(\mathbb{R}^n, w)$ uzayından genelleştirilmiş grand lebesgue $L_b^{q,\theta q/p}(\mathbb{R}^n, v)$ uzayına sınırlıdır [43].

İspat. Teoremin ispatında Teorem 4.1.20 göz önüne alınırsa, bu teoremin (i), (ii) şartları ve Teorem 4.1.18 den dolayı $I_\alpha : L^p(\Omega, w) \to L^q(\Omega, v)$, aynı zamanda yine bu teoremin (iii), (iv) şartları, Lemma 4.1.16 ve Teorem 4.1.18 dan dolayı da

$$I_\alpha : L^{p_0}(\Omega, wa^{\varepsilon_0}) \to L^{q-\varepsilon_0}(\Omega, vb^{\varepsilon_0})$$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.1.20 deki şartlar sağlanır ve Teorem 4.1.20 uygulanırsa ispat tamamlanmış olur. ∎

Sonuç 4.1.22 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun.

$w \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ ve w , $w^{\frac{-p'}{q}}$ doubling şartları altında

$$I_\alpha : L^{p,\theta}(\Omega, w^{\frac{p}{q}}) \hookrightarrow L^{q,\theta q/p}(\Omega, w)$$

olur.

4.1.3 $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ Uzaylarında Singüler İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu kısımda Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden singüler integral operatörlerinin $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ uzaylarında sınırlılığı incelendi.

Teorem 4.1.23 $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ ve w ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda T, Calderón-Zygmund operatorü $L^{p)}_{\omega}(\Omega)$ uzaylarında sınırlı olması için $w \in A_p$ olması gerekir [26].

İspat. $0 < \sigma < p - 1$ olsun.
Norm tanımından

$$A_1 := \left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)} \right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{ \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)} \right\}$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_{L_w^{p),\theta}(\Omega)} =: \max\{A_1, A_2\}$$

elde edilir.
Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)} \\
&\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L_w^{p-\sigma}} w(\Omega)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}} \|Tf\|_{L_w^{p-\sigma}} w(\Omega)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}} \\
&\leq \left(\sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} w(\Omega)^{\frac{\varepsilon-\sigma}{(p-\sigma)(p-\varepsilon)}} \right) \left(\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.
Ayrıca

$$\|Tf\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} |Tf(x)|^{p-\sigma} w(x)dx \right)^{1/(p-\sigma)} w(\Omega)^{(\varepsilon-\sigma)/[(p-\sigma)(p-\varepsilon)]}$$

eşitsizlikten dolayı

$$\|Tf\|_{L_w^{p),\theta}(\Omega)} \leq c\max\left\{1,(p-1)^\theta\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}}(1+w(\Omega))^{\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}}\right\}\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_w^{p-\varepsilon}(\Omega)}$$

$$\leq c(p-1)^\theta\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}}(1+w(\Omega))^{\frac{p-1-\sigma}{p-\sigma}}\|f\|_{L_w^{p),\theta}(\Omega)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ UZAYLARI (GRAND MORREY UZAYLARI)

$L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzayları 2010 yılında A. Meskhi [30] tarafından tanımlanmıştır. $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzaylarının genelleştirmesi olan $L^{p),\varphi(.),\lambda}(\Omega)$ uzayları da yine A. Meskhi [30] tarafından tanımlanmış olup, bu uzayların $\varphi(x) = x^{\theta}$ özel durumu ise V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro [28] tarafından incelenmiştir.

5.0.1 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ Uzayları

Bu kısımda grand Morrey uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri verildi.

Tanım 5.0.1 [$L^{p),\lambda}(\Omega)$ **Uzayları**] $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Bu durumda $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonların sınıfında olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} \left[\frac{\varepsilon^{\theta}}{r^{\lambda}} \int\limits_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p),\lambda}(\Omega)$ **uzayları** denir [30].

Aşağıda $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzayları ile ilgili bazı özellikler verildi.

(i) $\lambda = 0$ olduğunda $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ uzayları, $L^{p),\theta}(\Omega)$ uzaylarına dönüşür.

(ii) $\theta = 1$ olduğunda ise $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ sembolü yerine $L^{p),\lambda}(\Omega)$ sembolü kullanılır.

Tanım 5.0.2 [$L^{p),\varphi(.),\lambda}$ **Uzayları (Genelleştirilmiş Grand Morrey Uzayları)**] $1 < p < \infty$, φ de, $(0,\ p-1)$ üzerinde tanımlı sürekli pozitif bir fonksiyon ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$ olsun. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonların sınıfında olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p),\varphi(.),\lambda}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} \left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{r^{\lambda}} \int\limits_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^{p),\varphi(.)}(\Omega)$ **uzayları** denir [28].

6 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ UZAYLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Bu bölümde grand Morrey uzayları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Bu uzaylarında Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerinin sınırlılıkları incelendi.

6.1 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ Uzaylarında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Bu kısımda Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatörlerinden maksimal operatörünün grand Morrey uzaylarında sınırlılığı incelendi.

Teorem 6.1.1 $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $d < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ sınırlıdır [32].

Aşağıda Teorem 6.1.1'i ispatlamak için gerekli olan önermelerin ifadeleri ve ispatları verildi.

Önerme 6.1.2 $1 < p < \infty$ olsun. c_0, p ye bağlı olmayan pozitif bir sabit olmak üzere

$$||\mathcal{M}f||_{L^p(\Omega)} \leq c_0(p')^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(\Omega)} \tag{6.1}$$

dır [30].

İspat. İspatı Marcinkiewicz enterpolasyon teoreminde (Teorem 2.4.21) benzeri ifade edildi. Lemmayı kapsayan uygun c_0 vardır. ■

Önerme 6.1.3 $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Burada önerme 6.1.2 gereğince μ ve c_0 sabiti için Doubling şartı $b > 0$ sabiti olmak üzere

$$||\mathcal{M}f||_{L^p(\Omega)} \leq \left(b^{\lambda/p}c_0(p')^{\frac{1}{p}} + 1\right)||f||_{L^p(\Omega)}$$

dır [30].

İspat. a pozitif sabiti bir sayı,

$f_1 = f \cdot \chi_{B(x,\overline{a}r)}$

$f_2 = f - f_1$

ile tanımlansın. f sonlu ve $f = f_1 + f_2$ olsun.

Norm tanımından

$$J_1(x,\ r) := \left(\frac{1}{|B(x,r)|^{\lambda}} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f_1)^p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$J_2(x,\ r) := \left(\frac{1}{|B(x,r)|^{\lambda}} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f_2)^p(y)dy\right)^{1/p}$$

olsun. Bu durumda

$$\left[\frac{1}{|B(x,r)|^{\lambda}} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f)^p(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} \leq J_1(x,\ r) + J_2(x,\ r)$$

olduğu görülür. Böylece

$$\left[\frac{1}{|B(x,r)|^{\lambda}} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f)^p(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} := J_1(x,\ r) + J_2(x,\ r)$$

tanımlanmış olur. Bu durumda (6.1) eşitsizliğindeki c_0 sabiti olmak üzere önerme 6.1.2 uygulandığında

$$J_1(x,\ r) \leq \frac{1}{|B(x,r)|^{\lambda/p}} \left(\int\limits_{X} (\mathcal{M}f_1(y))^p dy\right)^{1/p}$$

$$\leq c_0 (p')^{\frac{1}{p}} (|B(x,r)|)^{-\lambda/p} \left(\int\limits_{B(x,\bar{a}r)} |f(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

$$\leq c_0 b^{\frac{\lambda}{p}} (p')^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

elde edilir. Böylece

$$y \in B(x,\ r)\mathcal{M}f_2(y) \leq \sup_{\Omega \subset B} \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_{B} |f(y)|dy$$

bulunur. Sonuç olarakta

$$J_2(x,\ r) \leq r^{\frac{1-\lambda}{p}} \sup_{\Omega \subset B} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$\leq \sup_B (\mu B)^{-\lambda/p} \left(\int_B |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$= \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

elde edilir.
$J_1(x,r)$ ve $J_2(x,r)$ göz önüne alındığında

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|^\lambda} \int_{B(x,r)\cap\Omega} (\mathcal{M}f(y))^p dy \right)^{1/p} \leq \left(c_0 b^{\lambda/p} (p')^{1/p} + 1 \right) \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi, aşağıda ise $\mathcal{M}$, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ uzaylarında sınırlılığının ispatı verildi.

İspat. Norm tanımından

$$A_1 := \left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0\leq r<d}} \left(\frac{\varepsilon^\theta}{r^\lambda} \int_{B(x,r)\cap\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{ \sup_{0<\varepsilon\leq p-1} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0\leq r<d}} \left(\frac{\varepsilon^\theta}{r^\lambda} \int_{B(x,r)\cap\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

olmak üzere

$$||\mathcal{M}f||_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} =: \max\{A_1, A_2\}$$

elde edilir.

$\sigma < \varepsilon < p-1, \quad \sup\limits_{\sigma \leq \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p-1, \quad \dfrac{1}{p-\varepsilon} > \dfrac{1}{p-\sigma}$ olsun.

Hölder eşitsizliğinden;

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)} \\
&= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{0\leq r<d} (B(x,r))^{\frac{1-\lambda}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} (B(x,r))^{\frac{1-\lambda}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\theta} dy \right)^{\frac{1}{p-\theta}} \\
&\leq \left(\sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\sigma}} \right) \left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} (B(x,r))^{\frac{1-\lambda}{p-\theta}} \left(\frac{1}{r} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \right) \\
&\leq (p-1)^{\theta} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} \Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{\frac{1-\lambda}{p-\sigma}} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}} \left(\frac{1}{r} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&= (p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}} \left(\frac{\sigma^{\theta}}{r^{\lambda}} \int\limits_{\Omega} (\mathcal{M}f(y))^{p-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{p-\sigma}} \\
&\leq (p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Dolayısıyla önerme 6.1.2 den dolayı

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p),\lambda}(\Omega)} \leq p\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|\mathcal{M}f\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(X,\mu)}$$

$$\leq c_0 p \cdot \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} b^{\frac{\lambda}{p-\varepsilon}} \left[\left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + 1 \right] \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq c_0 p \cdot \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \left[\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} b^{\frac{\lambda}{p-\varepsilon}} \left[\left(\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + 1 \right] \right] \|f\|_{L^{p),\lambda}(\Omega)}$$

bulunur. Bu durumda yeterince küçük σ için,

$$S_{p,\sigma} := c_0 p\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} b^{\frac{\lambda}{p-\varepsilon}} \left[((p-\varepsilon)')^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + 1 \right] < \infty$$

Yani,

$$S_{p,\sigma} \leq c_0 p\sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} b^{\frac{\lambda}{p-\sigma}} [(p-\sigma)' + 1].$$

Dolayısıyla

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} \leq \left(\inf_{0<\sigma<p-1} S_{p,\sigma} \right) \|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

6.2 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Bu kısımda grand Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlı olmadığı verildi. Bunu ispatlamadan önce genelleştirilmiş grand Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlı olup olmadığı gösterildi.

Teorem 6.2.1 $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1/\gamma$, $0 < \alpha < \dfrac{(1-\lambda)\gamma}{p}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{(1-\lambda)n}$,

$\theta_1 > 0$ ve $\theta_2 \geq \Big[1 + \dfrac{\alpha q}{(1-\lambda)n}\Big]\theta_1$ olsun.

Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1,\lambda}(\Omega)$ uzaylarından $L^{q),\theta_2,\lambda}(\Omega)$ uzaylarına sınırlıdır [32].

Aşağıda teorem 6.2.1 ispatlamak için gerekli olan bazı önerme, lemma ve ispatları verildi.

Önerme 6.2.2 $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Burada c_0 sabit ve a $= a_1\Big(a_1(a_0+1)+1\Big)$ olmak üzere

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq \Big((\bar{a})^{\frac{\lambda\gamma}{p}} c_0 (p')^{\frac{1}{p}} + 1\Big)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

sağlanır.

Lemma 6.2.3 $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1/\gamma$, $0 < \alpha < \dfrac{(1-\lambda)n}{p}$ ve $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{(1-\lambda)n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}(\Omega)} \leq c(p,\alpha,\lambda,\gamma)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $c(p,\alpha,\lambda,\gamma)$ pozitif sabiti

$$c(p,\ \alpha,\ \lambda,\ \gamma) = c\frac{(1-\lambda)n}{\alpha[(1-\lambda)n - \alpha p]}[(p')^{1/q} + 1]$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir [32].

İspat. Hedberg's tipi eşitsizliğinden

$$|(I_\alpha f)(x)| \leq c_{p,\lambda,\gamma,\alpha}(\mathcal{M}f)^{1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}}(x)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}}, \tag{6.2}$$

sağlanır, burada $c_{p,\lambda,n,\alpha} = \dfrac{2((1-\lambda)n)}{\alpha((1-\lambda)n - \alpha p))}$ dır.

(6.2) yi ispatlamak için

$$f_r(x) := \frac{1}{r^n}\int\limits_{\Omega} |f(y)|dy$$

olsun. Bu durumda

$$|x-y| \leq 2 \int\limits_{|x-y|}^{2|x-y|} t^{\alpha-\gamma-1}dt, \ 0<|x-y|<l \tag{6.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (6.3) eşitsizliğinden dolayı

$$|(I_\alpha f)(x)| \leq 2 \int\limits_X |f(y)| \left(\int\limits_{|x-y|}^{2|x-y|} t^{\alpha-\gamma-1}dt \right) dy$$

$$= 2 \int\limits_0^{2d} t^{\alpha-\gamma-1} \left(\int\limits_{\frac{t}{2}<|x-y|<t} |f(y)|dy \right) dt$$

$$\leq 2 \int\limits_0^{2d} t^{\alpha-\gamma} f_t(x)dt$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$|(I_\alpha f)(x)| \leq 2 \left[\int\limits_0^{\varepsilon} t^{\alpha-\gamma} f_t(x)dt + \int\limits_{\varepsilon}^{2d} t^{\alpha-\gamma} f_t(x)dt \right]$$

$$=: 2\left[J_1^{(\varepsilon)}(x) + J_2^{(\varepsilon)}(x) \right]$$

sağlanır. Böylece

$$J_1^{(\varepsilon)}(x) \leq (\mathcal{M}f)(x) \int\limits_0^{\varepsilon} t^{\alpha-1}dt = \frac{(\mathcal{M}f)(x)}{\alpha} \varepsilon^{\alpha}$$

olduğu görülür.

Hölder eşitsizliğinden ve $\mu B(x,\ r) \leq br^{\gamma}$ şartından

$$f_t(x) = \frac{1}{t^{\gamma}} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|dy$$

$$\leq \left(\frac{1}{t^{\gamma}} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= t^{-\frac{\gamma}{p}+\frac{\lambda\gamma}{p}} \left(\frac{1}{t^{\gamma\lambda}} \int\limits_{\Omega} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq t^{-\frac{\gamma}{p}+\frac{\lambda\gamma}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

sağlanır. $\dfrac{\lambda - 1}{p}\gamma + \alpha < 0$ şartı uygulandığında

$$|(I_\alpha f)(x)| \leq 2 \left[\frac{(\mathcal{M}f)(x)}{\alpha} \varepsilon^{\alpha} + \left(\int\limits_{\varepsilon}^{2l} t^{\frac{(\lambda-1)\gamma}{p}+\alpha-1} dt \right) \|f\|_{L^{p,\lambda}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{(\mathcal{M}f)(x)}{\alpha} \varepsilon^{\alpha} - \frac{\varepsilon^{\frac{\lambda-1}{p}\gamma+\alpha}}{\left[\alpha + \frac{\lambda-1}{p}\gamma\right]} \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \right]$$

bulunur.

$\varepsilon = \left[\dfrac{\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}}{(\mathcal{M}f)(x)} \right]^{\frac{p}{(1-\lambda)n}}$ seçilirse;

$$|(I_\alpha f)(x)| \leq 2 \left[\frac{(\mathcal{M}f)^{1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}}(x)}{\alpha} \Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}} - \frac{1}{\left[\alpha + \frac{(\lambda-1)\gamma}{p}\right]} \Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}} (\mathcal{M}f)^{1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}}(x) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{p}{\alpha p + (\lambda - 1)\gamma} \right] \Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}} (\mathcal{M}f)^{1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}}(x)$$

$$= 2 \frac{(1-\lambda)n}{\alpha((1-\lambda)n - \alpha p)} \Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}} (\mathcal{M}f)^{1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}}(x)$$

elde edilir.
Sonuç olarak $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{(1-\lambda)n}$ koşulu ve Önerme 6.2.2 den dolayı

$$\left(\frac{1}{t^{\gamma\lambda}}\int\limits_{B(x,t)}|(I_\alpha f)(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq t^{-\frac{\gamma\lambda}{q}}\frac{2((1-\lambda)n)}{\alpha((1-\lambda)n-\alpha p)}\left[\int\limits_{B(x,t)}(\mathcal{M}f(y))^{q\left[1-\frac{p\alpha}{(1-\lambda)n}\right]}dy\right]^{\frac{1}{q}}\Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}}$$

$$=\frac{2((1-\lambda)n)}{\alpha((1-\lambda)n-\alpha p)}\left[\frac{1}{t^{\gamma\lambda}}\int\limits_{B(x,t)}(\mathcal{M}f(y))^p dy\right]^{\frac{1}{q}}\Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}}$$

$$\leq\frac{2((1-\lambda)n)}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha p]}\|\mathcal{M}f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{p/q}\Big\|f\Big\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}^{\frac{\alpha p}{(1-\lambda)n}}$$

elde edilir.
Son durumdaki eşitsizlikte $\|\mathcal{M}f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\leq\Big((\overline{a})^{\frac{\lambda\gamma}{p}}c_0(p')^{\frac{1}{p}}+1\Big)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$ yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{t^{\gamma\lambda}}\int\limits_{B(x,t)}|(I_\alpha f)(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2((1-\lambda)n)}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha p]}\Big((\overline{a})^{\frac{\lambda\gamma}{p}}c_0(p')^{\frac{1}{p}}+1\Big)^{p/q}\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq\frac{(1-\lambda)n}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha p]}\Big((c_0)^{p/q}(\overline{a})^{\frac{\lambda\gamma}{q}}(p')^{1/q}+1\Big)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq\frac{(1-\lambda)n}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha p]}\Big(c_0(\overline{a})^{\lambda\gamma}(p')^{1/q}+1\Big)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq c\frac{(1-\lambda)n}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha p]}\Big((p')^{1/q}+1\Big)\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Şimdi ise aşağıda Riesz potansiyelinin $L^{p),\varphi(.),\lambda}(\Omega)$ uzaylarında sınırlı olup olmadığı ispatı ayrıntılı olarak incelendi.

İspat. İspatı $\theta_2 = 1 + \dfrac{\alpha q}{(1-\lambda)n}$ için yapmak yeterli olacaktır. Çünkü $\theta_2 > 1 + \frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}$ ve yeterince küçük ε için $\varepsilon^{\theta_2} \leq \varepsilon^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}}$ dir. Keyfi bir

$$\varphi(u) := \left[p + \frac{(1-\lambda)(u-q)\gamma}{(1-\lambda)n - \alpha(u-q)}\right]^{\frac{\gamma(1-\lambda)-(u-q)\alpha}{(1-\lambda)n}}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $t \to 0^+$ için $\varphi(t) \sim t^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}}$ dir. Gerçekten

$$\lim_{t\to 0^+}\left[p + \frac{(1-\lambda)(t-q)\gamma}{(1-\lambda)n - \alpha(t-q)}\right]^{\frac{\gamma(1-\lambda)-(t-q)\alpha}{(1-\lambda)n}} = \left[p - \frac{q(1-\lambda)n}{(1-\lambda)n+\alpha q}\right]^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}} \tag{6.4}$$

olur. (6.4) denkleminde $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{(1-\lambda)n}$ bağıntısından $p = \dfrac{q(1-\lambda)n}{(1-\lambda)n+\alpha q}$ yerine yazılırsa,

$$= \left[\frac{q(1-\lambda)n}{(1-\lambda)n+\alpha q} - \frac{q(1-\lambda)n}{(1-\lambda)n+\alpha q}\right]^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}}$$

$$= 0$$

elde edilir.

Sonuç olarakta

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}} = 0$$

olur. Dolayısıyla $\psi(t) := \varphi(t^{\theta_1})$ olmak üzere I_α Riesz potansiyelinin $L^{p),\theta_1,\lambda}(\Omega)$ den $L^{q),\psi(\cdot),\lambda}(\Omega)$ ye sınırlı olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\sigma > 0$ yeterince küçük bir sayı olsun.

Norm tanımından

$$A_1 := \left\{\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma}\ \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}}\left(\frac{\psi(\varepsilon)}{t^{\lambda\gamma}}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon}dy\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{\sup_{0<\varepsilon<q-1}\ \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0\leq r<d}}\left(\frac{\psi(\varepsilon)}{t^{\lambda\gamma}}\int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon}dy\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right\}$$

olmak üzere

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\varphi,\lambda}(\Omega)} =: \max\{A_1, A_2\}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliği ve $\sigma < \varepsilon$ olduğundan

$$A_2 = \psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} t^{\frac{(1-\lambda)n}{q-\varepsilon}} \left(\frac{1}{t^\gamma} \int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} (\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}} t^{\frac{(1-\lambda)n}{q-\varepsilon}} \left(\frac{1}{t^\gamma} \int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$\leq \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} (\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] t^{\frac{(1-\lambda)n}{q-\sigma}} t^{-\frac{\gamma}{q-\sigma}} \left(\int_{B(x,t)} |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

$$= \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} (\psi(\varepsilon))^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] \psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}} \left(\frac{\varphi(\sigma)}{t^{\lambda\gamma}} \int_{B(x,t)} |I_\alpha f(y)|^{q-\sigma} dy \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

$$\leq \left[\sup_{\sigma<\varepsilon<q-1} \psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right] \psi(\sigma)^{-\frac{1}{q-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} \sup_{\substack{x\in X \\ 0\leq r<d}} \left(\frac{\psi(\varepsilon)}{t^{\lambda\gamma}} \int_\Omega |I_\alpha f(y)|^{q-\varepsilon} dy \right)^{\frac{1}{q-\sigma}}$$

elde edilir.

Şimdi $0 < \varepsilon \leq \sigma$ olsun. ε için $\dfrac{1}{p-\eta} - \dfrac{1}{q-\varepsilon} = \dfrac{\alpha}{(1-\lambda)n}$ olacak biçimde η tanımlanabilir.

Bu durumda σ yeterince küçük iken η da yeterince küçük pozitif sayıdır.

$u \to 0^+$ olduğunda $\varphi(u) \sim u^{1+\frac{\alpha q}{n}}$ dir. Dolayısıyla $\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}} = 1$ dir. Gerçekten

$$\frac{1}{p-\eta} - \frac{1}{q-\varepsilon} = \frac{\alpha}{(1-\lambda)n} \Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha}{(1-\lambda)n} + \frac{1}{q-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = \frac{\alpha(q-\varepsilon) + (1-\lambda)n}{(1-\lambda)n(q-\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-\eta} = -\frac{(1-\lambda)n - \alpha(\varepsilon-q)}{(1-\lambda)n(\varepsilon-q)}$$

$$\Rightarrow p-\eta=-\frac{(1-\lambda)n(-q)}{(1-\lambda)n-\alpha(\varepsilon-q)}$$

$$\Rightarrow \eta=p+\frac{(1-\lambda)n(\varepsilon-q)}{(1-\lambda)n-\alpha(\varepsilon-q)}$$

bulunup, aşağıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}}=\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\left[p+\frac{n(-q)}{(1-\lambda)n-\alpha(\varepsilon-q)}\right]^{\left[\frac{(1-\lambda)n-\alpha(\varepsilon-q)}{(1-\lambda)n}\right]\left(-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}\right)}$$

$$=\left[\varphi(\varepsilon^{\theta_1})\right]^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\varphi(\varepsilon)^{-\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}$$

$$\sim\left[(\varepsilon^{\theta_1})^{1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}}\right]\left[\varepsilon^{-\left(1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}\right)\frac{\theta_1}{q-\varepsilon}}\right]$$

$$=1$$

elde edilir. Bu durumda lemma 6.2.3 den dolayı

$$\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|I_\alpha f\|_{L^{q-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}\leq c(p-\eta,\ \alpha,\ \lambda)\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\|f\|_{L^{q-\eta,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq c(p-\eta,\ \alpha,\ \lambda)\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\eta^{-\frac{\theta_1}{p-\eta}}\eta^{\frac{\theta_1}{p-\eta}}\|f\|_{L^{p-\eta,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq\left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}c(p-\eta,\ \alpha,\ \lambda)\right]\|f\|_{L^{p),\theta_1,\lambda}(\Omega)}$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$||I_\alpha f\|_{L^{q),\theta_2,\lambda}(\Omega)}\leq\left[\sup_{0<\eta\leq\sigma_1}c(p-\eta,\ \alpha,\ \lambda)\right]\|f\|_{L^{p),\theta_1,\lambda}(\Omega)}$$

burada

$$c(p-\eta,\alpha,\lambda)=\overline{c}\frac{(1-\lambda)n}{\alpha[(1-\lambda)n-\alpha(p-\eta)]}\left(\left[\frac{p-\eta}{p-\eta-1}\right]^{\frac{1}{q-\varepsilon}}+1\right)$$

$\overline{c}, p, \eta, \alpha$ dan bağımsız bir sabit ve σ_1 yeterince küçük pozitif sayıdır.
Eğer σ_1 yeterince küçük ise $0<\eta\le\sigma_1$ olduğundan η_0 için

$$(1-\lambda)n-\alpha(p-\eta)\ge\eta_0>0 \quad , \quad \frac{p-\eta}{p-\eta-1}\le p'+1$$

dir. ■

Böylece $\theta_2<\left[1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}\right]\theta_1$, $\theta_1>0$ olduğunda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1,\lambda}$ uzaylarından $L^{q),\theta_2,\lambda}$ uzaylarına sınırlı olmaz.

Şimdi ise aşağıdaki teoremde $n=1$ ve $\Omega=[0,1]$ özel durum için I_α nın $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzaylarında sınırlı olmadığı incelendi.

Teorem 6.2.4 $0<\alpha<1$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{p}{1-\alpha p}$ olsun. $\theta_2<(1+\alpha q)\theta_1$ olacak şekilde pozitif sayılar olsun.
Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $L^{p),\theta_1,\lambda}$ uzaylarından $L^{q),\theta_2,\lambda}$ uzaylarına sınırlı değildir.

İspat. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $0<\alpha<1$ ve $1<p<\dfrac{(1-\lambda)n}{\alpha}$ olsun. $q=\dfrac{(1-\lambda)np}{(1-\lambda)n}-\alpha p$ ve $\theta_1=\theta_2=1$ alındığında

$$\theta_2<\left(1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}\right)\theta_1$$

bağıntısı

$$1<\left(1+\frac{\alpha q}{(1-\lambda)n}\right)\theta_1$$

olarak bulunur.
Dolayısıyla I_α Riesz potansiyelinin $L^{p)\theta,\lambda}$ uzaylarından $L^{q)\theta,\lambda}$ uzaylarına sınırlı olmadığı ispatlanmış olur. ■

6.3 $L^{p),\lambda}(\Omega)$ Uzaylarında Singüler İntegral Operatörlerinin Sınırlılığı

Bu kısımda T, Calderon-Zygmund operatörünün $L^{p),\lambda}(\Omega)$ uzaylarında sınırlılığının ispatı incelendi.

Teorem 6.3.1 $1 < p < \infty, \theta > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun. Bu durumda T, Calderón-Zygmund operatorü olmak üzere $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ sınırlıdır [32].

Bu teoremin ispatı verilmeden önce ispatta kullanılacak bazı tanım, teoremler ve ispatlar aşağıda verildi.

Lemma 6.3.2 T Calderón-Zygmund operatorü olsun. Bu durumda p'ye bağlı olmayan $c > 0$ sabiti için

$$\|T\|_{L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)} \leq c\left(\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p}\right), \; 1 < p < 2,$$

$$\|T\|_{L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)} \leq c\left(p + \frac{p}{p-2}\right), \; p > 2$$

gerçeklenir [30].

İspat. T zayıf $(1,1)$ ve kuvvetli $(2,2)$ tipli olduğundan Marcinkiwicz interpolasyon teoremi (teorem 2.4.21) gereğince

$$\|T\|_{L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{2p}{p-1}\frac{A_0}{c^{p-1}} + \frac{4p}{2-p}\frac{A_1^2}{c^{p-2}}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \; 1 < p < 2,$$

sağlanır, burada A_0 ve A_1 sırasıyla T operatörünün zayıf $(1,1)$ ve kuvvetli $(2,2)$ tipli eşitsizliğinden ortaya çıkan sabitlerdir.

$$\left[\frac{2p}{p-1}\frac{A_0}{c^{p-1}} + \frac{4p}{2p}\frac{A_1^2}{c^{p-2}}\right]^{1/p} \leq 2^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}\frac{A_0^{1/p}}{c^{(p-1)/p}} + 4^{1/p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{1/p}\frac{A_1^{2/p}}{c^{(p-2)/p}}$$

$$\leq c\left(\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p}\right),$$

burada c pozitif sabiti p ye bağlı değildir. Şimde $p > 2$ olsun. Yukarıda verilenleri kullanarak

$$\|T\|_{L^p \to L^p} = \|T\|_{L^{p'} \to L^{p'}} \leq \left(\frac{p'}{p'-1} + \frac{p'}{2-p} \right) = c \left(p + \frac{p}{p-2} \right)$$

olduğu görülür. ■

Önerme 6.3.3 $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun.

$$\|T\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c \left[\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p} + \frac{p-\lambda+1}{1-\lambda} \right], \ 1 < p < 2,$$

$$\|T\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c \left[p + \frac{p}{p-2} + \frac{p-\lambda+1}{1-\lambda} \right], \ p > 2$$

sağlanır [30].

Şimdi, aşağıda Teorem 6.3.1 ispatı verildi.

İspat. $0 < \sigma < p-1$ olsun. Norm tanımından

$$A_1 := \left\{ \sup_{0 < \varepsilon \leq \sigma} \sup_{\substack{x \in X \\ 0 \leq r < d}} \left(\frac{\varepsilon^\theta}{r^\lambda} \int_\Omega |Tf|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

ve

$$A_2 := \left\{ \sup_{0 < \varepsilon \leq \ p-1} \sup_{\substack{x \in X \\ 0 \leq r < d}} \left(\frac{\varepsilon^\theta}{r^\lambda} \int_\Omega |Tf|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right\}$$

olmak üzere

$$\|Tf\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} =: \max\{A_1, \ A_2\}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliğinden,

$$A_2 = \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}$$

$$= \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{-\frac{\lambda}{p-\varepsilon}} \Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \times \left(\frac{1}{r}\int_{\Omega} |Tf|^{p-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{\sigma<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{\frac{1-\lambda}{p-\varepsilon}} \left(\Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{-1} \int_{\Omega} |Tf|^{p-\sigma}\right)^{\frac{1}{p-\sigma}}$$

bulunur.

Ayrıca genelliği bozmadan $\mu(X) = 1$ olduğu varsayıldığında, sonuç olarak

$$\Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{\frac{1-\lambda}{p-\varepsilon}} \leq \Big(\mu B(x,\ r)\Big)^{\frac{1-\lambda}{p-\sigma}}$$

elde edilir.

Buradan da

$$A_2 \leq (p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}$$

elde edilir.

Önerme 6.3.3 den dolayı

$$\|Tf\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} \leq \left[(p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|Tf\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}$$

$$\leq \left[(p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\lambda,\varepsilon} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon,\lambda}(\Omega)}$$

$$= \left[(p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} + 1\right] \sup_{0<\varepsilon\leq\ \sigma} C_{p,\lambda,\varepsilon} \sup_{\substack{x\in X \\ 0\leq r<d}} \left[\frac{\varepsilon^{\theta}}{r^{\lambda}} \int_{\Omega} |f(y)|^{p-\varepsilon} dy\right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \left[(p-1)^{\theta} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} + 1\right] \|f\|_{L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)} \sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\lambda,\varepsilon}$$

bulunur.

Bu durumda

$$C_{p,\lambda,\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{p-\varepsilon-\lambda+1}{1-\lambda} + \dfrac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1} + \dfrac{p-\varepsilon}{2-p+\varepsilon}, \ 1<p<2, \\ \\ \dfrac{p-\varepsilon-\lambda+1}{1-\lambda} + p-\varepsilon + \dfrac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-2}, \qquad p>2 \end{cases}$$

ve

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\sigma} C_{p,\lambda,\varepsilon} \leq \begin{cases} \dfrac{p-\lambda+1}{1-\lambda} + \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \dfrac{p}{2-p}, \qquad 1<p<2, \\ \\ \dfrac{p-\lambda+1}{1-\lambda} + \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-1} + \dfrac{p-\sigma}{p-\sigma-2}, \quad p>2 \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla T Calderón-Zygmund operatorü $L^{p),\theta,\lambda}(\Omega)$ uzaylarında sınırlıdır. ■

KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R., *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42, (**1975**), 765-778.

[2] Alp, M. ; Musayev, B. *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, (**2000**).

[3] Balcı, M. *Analiz I*, Balcı Yayınları, (**1997**), 23.

[4] Balcı, M. *Analiz II*, Balcı Yayınları, (**1997**), 47.

[5] Balcı, M. *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, (**1998**), 93.

[6] Bennett, C. ; Sharpley, R.*Interpolation of Operators*, Academic Press, (**1988**).

[7] Burenkov, V.I. ; Guliyev, V.S. ; Tararykova, T.V. ; Serbetci, A. *Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Genuine Singular Integral Operators in Local Morrey-Type Spaces*, Doklady Akademii Nauk, (**2008**), 1, 11-14.

[8] Capone, C. ; Fiorenza, A. *On small Lebesgue spaces*, J. Funct. Spaces Appl., (**2005**), 3, 73-89.

[9] Capone, C. ; Formica, M.R. ; Giova R. *Grand Lebesgue spaces with respect to measurable function*, Nonlinear Analysis, (**2013**), 85, 125-131.

[10] Chiarenza, F. ; Frasca, M. *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Mat. 7, (**1987**), 273-279.

[11] Di Fazio, G. ; Ragusa, M. A.*Commutators and Morrey spaces* , Bollettino U.M.I., (**1991**), 8, 323-330.

[12] Ding, Y. ; Lin, C.C. *Two-weigt norm inequalities for the rough fractional integrals*, Int. J. Math. Math. Sci., (**2001**), 8, 517-520.

[13] Duandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math., AMS, Providence, RI, (**2001**), 1, 29.

[14] Dyn'kin, E.M. *Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory*, Commutative Harmonic Analysis I. Encyclopaedia of Math. Sci., (**1991**), 15, 167-259.

[15] Eridani, A. ; Kokilashvili V. ; Meskhi A. *Morrey spaces and fractional integral operators*, Expo. Math., (**2009**), 27, 227-239.

[16] Fiorenza, A. ; Gupta, B. ; Jain, P. *The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces*, Stud. Math., (**2008**), 188(2), 123-133.

[17] Fiorenza, A. *Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces*, Collect. Math., (**2000**), 51(2), 131-148.

[18] Fucík, S. ; Kufner, A. ; Pick, L. ; Oldrich, J. ; *Function Spaces*, Walter de Gruyter publishing, (**2012**).

[19] Giaquinta, M. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Princeton Univ. Press, (**1983**).

[20] Guliyev, S.V. ; Hasanov J.J. ; Samko S. G. *Boundedness of the maximal, potantial and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces*, Math. Scand., (**2010**), 107, 286-288.

[21] Hedberg, L. *On certain convolution inequalities*, Proc. Am. Math. Soc., (**1972**), 36, 505-510.

[22] Iwaniec, T. ; Sbordone, C. *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*, Arch. Rational Mech. Anal., **1992**, 119, 129-143.

[23] Kokilashvili, V. ; Meskhi, A. *Maximal and singular integrals in Morrey spaces with variable exponent*, Arm. J. Math., (**2008**), 1, 18-28.

[24] Kokilashvili, V. ; Meskhi, A. *A note on the boundedness of the Hilbert transform in weighted grand Lebesgue spaces*, Georgian Math. J., (**2009**), 16(3), 547-551.

[25] Kokilashvili, V. *Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., (**2009**), 151, 129-133.

[26] Kokilashvili, V. *Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand lebesgue spaces*,Translated from Problems in Mathematical Analysis, (**2010**), 49, 19-25.

[27] Kokilashvili, V. ; Meskhi, A. *Maximal functions and potentials in variable exponent Morrey spaces with non-doubling measure*, Complex Var. Elliptic Eqns., (**2010**), 55(8), 923-936.

[28] Kokilashvili, V. ; Meskhi, A. ; Rafeiro, H. *Riesz type potential operators in generalızed grand Morrey spaces*, Math. FA., **2012**, 1, 4-5.

[29] Kokilashvili, V. *Trace and one-weighted inequalities for fractional integrals in Grand Lebesgue spaces*, Memorial seminar dedicated to Professor Miroslav Krbec, Prague, Czech Republic, (**2012**).

[30] Meskhi, A. *Integral operators in grand Morrey spaces*, Math. FA., (**2010**), 2, 3-28.

[31] Meskhi, A. *Criteria for the boundedness of potential operators in grand Lebesgue spaces*, Math. FA., (**2010**), 1, 12-25.

[32] Meskhi, A. *Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations, (**2011**), 56(10-11), 1003-1019.

[**33**] Morrey, C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., (**1938**), 43, 126-166.

[**34**] Muckenhoupt, B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., (**1972**), 165, 207-226.

[**35**] Peetre, J. *On the theory of $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ spaces*, J. Functional Analysis, (**1969**), 71-80.

[**36**] Royden, H. L. *Real Analysis*, MacMillan, New York, 2nd ed., (**1968**).

[**37**] Rudin, W. *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics.* McGraw-Hill, Inc., New York, (**1991**).

[**38**] Sadosky, C. *Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis*, Marcel Dekker Inc., (**1979**).

[**39**] Sawano Y. ; Tanaka H. *Morrey spaces for nondoubling measures*, Acta Math. Sinica, (**1992**), 6, 1535-1540.

[**40**] Sawyer E.T. ; Weeden R. L. *Weighted inequalities for fractional integrals on euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 4, 813-840. (**1992**).

[**41**] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (**1970**).

[**42**] Umarkhadzhiev S.M. *Hardy-Littlewood maximal operator in generalized grand Lebesgue spaces*, AIP Conf. Proc., (**2014**), 1637, 1137-1142.

[**43**] Umarkhadzhiev S.M. *Boundedness of the Riesz potential operator in grand Lebesgue spaces*, Vladikavkaz. Math. Zh., (**2014**) 16(2), 62-68.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Yasin KARAKAYA
Doğum Yeri	:	Kocasinan / KAYSERİ
Doğum Tarihi	:	03.06.1992
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
E-mail	:	yasinkarakaya_38@hotmail.com

Eğitim Durumu

İlköğretim	:	Kadir Has İlköğretim Okulu, 1998-2005
Ortaöğretim	:	Kayseri Melikgazi Mustafa Eraslan Anadolu Lisesi, 2006-2010
Lisans	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010-2015
Pedagojik Eğitimi	:	Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, 2014-2015
Yüksek Lisans	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 2015-2018