T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABİLİM DALI

KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRÜN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Kendal DORAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABİLİM DALI

KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRÜN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Kendal DORAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 12.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE
Ankara Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Emre TAŞ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kendal DORAK

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; bu lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarıma başlamadan önce, akademisyenlik yolunda emin adımlarla yürüyebilmem için bana büyük bir zemin hazırlayan, çalışma tarzını örnek alabilmem için fırsat veren, bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve tecrübelerini esirgemeyen, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ'e en içten şükranlarımı sunuyorum.

Kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayıran, daha iyi yerlere gelebilmem için desteğini ve yardımını esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca yanımda olan, önümüzdeki yıllarda üniversite koridorlarında bir oda paylaşacağımıza inandığım değerli yol arkadaşım Mücahit ÖZKAYA'ya teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca bugünlere gelmemde verdikleri emek ve sevgiyle bana destek olan aileme, bu yoldaki engebeleri daha aşılabilir hale getiren, maddi manevi yardımını ve desteğini esirgemeyen ağabeyim Serkan DORAK'a teşekkürlerimi iletirim.

Haziran, 2019 Kendal DORAK

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L^0(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$\mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue uzayı
$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$\mathrm{W}L^\Phi(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Orlicz uzayı
$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Morrey uzayı
$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı
$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
$\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	Kesirli maksimal operatör
I_α	Riesz potansiyeli

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRÜN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Kendal DORAK

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ

Bu tezde, genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları ve harmonik analizin klasik operatörlerinden birisi olan kesirli maksimal operatörün bu uzaylardaki sınırlılığı hakkında bilgi verilecektir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde,kesirli maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı ile ilgili elde edilmiş sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Çalışmamızın sonuncu bölümü olan beşinci bölümde,kesirli maksimal operatörün genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki sınırlılığı araştırılmıştır.

Haziran 2019, 52 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Orlicz Uzayları, Morrey Uzayları, Genelleştirilmiş Morrey Uzayları, Genelleştirilmiş Orlicz-Morrey Uzayları, Maksimal Operatör, Kesirli Maksimal Operatör.

ABSTRACT

MSc THESIS

BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR ON GENERALIZED ORLICZ-MORREY SPACES

Kendal DORAK

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Fatih DERİNGÖZ

In this thesis, information about generalized Orlicz-Morrey spaces and the boundedness of fractional maximal operator, which is one of the classical operators of harmonic analysis, in these spaces is given.

This study is arranged in five chapters, in the first chapter, information is given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about purpose of this study.

In the second chapter, some basic definitions and theorems related to this study are given.

In the third chapter, the results obtained about the boundedness of fractional maximal operator in Orlicz spaces are presented.

In the fourth chapter, the generalized Orlicz-Morrey spaces are investigated with full of details.

In the fifth chapter which is last part of this study, the boundedness of fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces is investigated.

June 2019, 52 Pages.

Keywords: Orlicz Spaces, Morrey Spaces, Generalized Morrey Spaces, Generalized Orlicz-Morrey Spaces, Maximal Operator, Fractional Maximal Operator.

1. GİRİŞ

Analizde önemli problemlerden biri, belli integral tipli operatörlerin uygun maksimal operatörle kontrol edilmesidir. Bu kontrol çoğu zaman bu operatörlerin çalışıldığı uzayların normlarına göre yapılmaktadır. Örneğin, Coifman [6] tarafından verilen ilginç bir sonuç şudur: T Calderón-Zygmund integral operatörü, M Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir C sabiti vardır. Böylece, M maksimal operatörü T singüler integralini L^p normuna göre kontrol eder ve M operatörünün L^p uzayında sınırlılık özellikleri bize T operatörünün sınırlılık özelliklerini verir.

$0 < \alpha < n$, $0 < p < \infty$ ve w, A_∞ Muckenhoupt sınıfına ait bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere Muckenhoupt ve Wheeden [36] kesirli integral operatör I_α için, kesirli maksimal operatör M_α yı içeren aşağıdaki kontrol-tipli eşitsizlikleri ispatlamışlardır:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p w(x) dx$$

ve

$$\sup_{\lambda > q} \lambda^q w(\{I_\alpha f > \lambda\}) \leq C \sup_{\lambda > q} \lambda^q w(\{M_\alpha f > \lambda\}).$$

Burada C, w nin A_∞ sabitine bağlıdır. Böylece M_α nın ağırlıklı sınırlılığı yardımı ile I_α nın ağırlıklı sınırlılığına karşılık gelen sonucu elde etmişlerdir.

Orlicz [43, 44] tarafından tanıtılan Orlicz uzayları, Lebesgue uzaylarının bir genelleştirilmesidir ve olasılık teorisi, istatistik, potansiyel teori, harmonik analizde olduğu gibi analizin bazı diğer alanlarında da kullanılan önemli bir araçtır. Kesirli maksimal operatörün bu uzaylardaki sınırlılığının araştırıldığı çalışmalara Cianchi [5], Guliyev vd. [18] ve Musil [37] örnek verilebilir.

Klasik Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey [35] tarafından ortaya konulmuştur. Kesirli integral operatörün Morrey sınırlılığı ile ilgili dikkat çekici iki sonuç vardır. Bu iki sonuçtan ilki Spanne [45], ikincisi ise Adams [1] tarafından verilmiştir. Adams'ın sonucu Spanne'nin sonucundan daha güçlü olmasına rağmen Spanne tipli sonuçların uygulanabilirliği daha geniştir. Örneğin, Adams tipli sonuçlar Hedberg [24] tipli noktasal eşitsizliklere dayandığı için bu sonuçlar lokal tipli Morrey uzayları için uygun değildir.

Genelleştirilmiş Morrey uzayları ise Guliyev [14], Mizuhara [34] ve Nakai [38] tarafından tanımlanmıştır. Spanne ve Adams tipli sonuçlar bu uzaylara çeşitli yazarlar tarafından genelleştirilmiştir [14, 15, 19, 38]. $0 < \alpha < n$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere M_α ve I_α operatörleri arasındaki iyi bilinen

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

ilişkisinden dolayı I_α için elde edilmiş bu sonuçlar M_α için de geçerlidir. Fakat M_α operatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığını daha zayıf koşullar altında incelemek mümkündür [3]. Dolayısıyla bu iki operatörün bu uzaylardaki davranışını ayrı ayrı incelemekte fayda vardır.

Fonksiyon uzayları teorisinde doğal bir adım fonksiyonların regülerliğinin Morrey-tipli ölçümünün yuvar üzerindeki Lebesgue normu yerine Orlicz normu ile yapıldığı Orlicz-Morrey uzayları ile çalışmalar yapmaktır. Bu tipteki uzaylar ilk olarak Nakai [40] tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra Sawano vd. [52] başka bir tip Orlicz-Morrey uzayını tanıtmıştır. Deringoz vd. [7] ise genelleştirilmiş Morrey uzayı ve Orlicz uzaylarını birleştiren ve genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı olarak adlandırdıkları yeni bir tip Orlicz-Morrey uzayını tanıtmışlardır. Bu uzaylar literatürde sırası ile birinci tip, ikinci tip ve üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları olarak adlandırılmaktadır.

Bu çalışmada üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarının yapısı araştırılacak ve bu uzaylarda kesirli maksimal operatörün Spanne ve Adams tipli sınırlılıkları ile ilgili elde edilmiş sonuçlar sistematik bir şekilde incelenecektir.

2. ÖN BİLGİLER

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı; $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\big)^{1/2}$ normu ile $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ noktalarının kümesidir.

$\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue ölçüsü $dx = dx_1 \ldots dx_n$ ve $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçüsü $|A|$ ile gösterilecektir.

Eğer $N \subset B$ ve $|B| = 0$ olacak şekildeki bir B Borel kümesi varsa $N \subset \mathbb{R}^n$ kümesine ihmal edilebilir küme denir. B Borel kümesi ve N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere $A = B \cup N$ ise A kümesine (Lebesgue) ölçülebilirdir denir. A ölçülebilir bir küme ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilirse $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (Lebesgue) ölçülebilir olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı $L^0(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. N ihmal edilebilir bir küme olmak üzere bir özellik eğer $A \setminus N$ kümesinde sağlanıyorsa bu özellik A kümesinde "hemen her yerde" sağlanıyordur denir. Bu deyim kısaca "h.h.y." ile gösterilir [49].

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^{c}B(x,r) = \mathbb{R}^n \setminus B(x,r)$ onun tümleyenini göstersin. $\nu_n = |B(0,1)|$ olmak üzere

$$|B(x,r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}\omega_{n-1} r^n$$

biçimindedir. Burada $\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında yarıçap uzunluğu 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır [13].

Z_1 ve Z_2 iki fonksiyon uzayı olmak üzere $Z_1 \subset Z_2$ bağıntısı genelde bir gömme olarak adlandırılır. $I : Z_1 \to Z_2$ birim operatörüne ise gömme operatörü adı verilir. Eğer bu operatör sınırlı ise bu operatöre karşılık gelen gömme sürekli gömme olarak adlandırılır ve $Z_1 \hookrightarrow Z_2$ biçiminde gösterilir [32].

C pozitif bir sabit olmak üzere bu çalışmada $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$ eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir.

2.1. Lebesgue Uzayları

Tanım 2.1. $1 \leq p < \infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere;

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı veya p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlanır.

$p = \infty$ için $L^\infty(\Omega)$ uzayı,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{K > 0 : |\{x \in \Omega : |f(x)| > K\}| = 0\} < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır [32].

Teorem 2.2. $1 \leq p \leq \infty$ için $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır [32].

Teorem 2.3. **(Hölder Eşitsizliği)** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme, f ve g fonksiyonları Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır [48].

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak $L^p(\Omega)$ uzayları için aşağıdaki gömme teoremi ifade edilebilir.

Teorem 2.4. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme ve $1 \leq p < q \leq \infty$ olmak üzere

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

olur [32].

Uyarı 2.5. $|\Omega| = \infty$ durumunda Teorem 2.4. geçerli değildir. Gerçekten $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $L^2([1,\infty))$ uzayına ait olmasına rağmen $L^1([1,\infty))$ uzayına ait değildir.

Tanım 2.6. $1 \leq p < \infty$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\|f\|_{\mathrm{W}L^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $\mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [13]:

$$\mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f - \text{ölçülebilir ve } \|f\|_{\mathrm{W}L^p} < \infty\}.$$

Uyarı 2.7. $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n)$. Bunun yanı sıra $\|f\|_{\mathrm{W}L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ eşitsizliği sağlanır [13].

Tanım 2.8. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt K alt kümesi için sırasıyla $f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_K \in \mathrm{W}L^p(\mathbb{R}^n)$ şartlarını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonların uzayı $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathrm{W}L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir. Özel olarak $p = 1$ yani $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise f fonksiyonu lokal integrallenebilirdir denir [13].

Teorem 2.9. (**Lebesgue diferansiyellenebilme teoremi**) $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^p}} = |f(x)|$$

eşitliği gerçeklenir [13].

Tanım 2.10. $\log^+ t = \max\{0, \log t\},\ t > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L \log L$ Zygmund uzayı denir [49].

2.2. Morrey Uzayları

Klasik Morrey uzayları, 1938 yılında Morrey [35] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.11. $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) :\ ||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv ||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilir [46].

$\lambda = 0$ için $\mathcal{M}^{p,0}(\mathbb{R}^n) \equiv L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda = n$ için $\mathcal{M}^{p,n}(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur. Burada Θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

Teorem 2.3.'ün bir sonucu olarak Morrey uzayları için aşağıdaki gömme teoremi ifade edilebilir.

Teorem 2.12. $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 \leq \lambda, \nu \leq n$ ve $\frac{\lambda-n}{p} = \frac{\nu-n}{q}$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M}^{q,\nu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

olur [46].

$\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen zayıf Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathrm{W}M^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{\mathrm{W}L^p(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $f \in \mathrm{W}L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır. Burada $\|f\|_{\mathrm{W}L^p(B(x,r))} = \|f\chi_{B(x,r)}\|_{\mathrm{W}L^p}$ dir [46].

2.3. Genelleştirilmiş Morrey Uzayları

Morrey uzayının tanımındaki kuvvet fonksiyonu r^λ yerine bir $\varphi(r)$ veya daha genel olarak bir $\varphi(x,r)$ fonksiyonu alarak Morrey uzaylarını genelleştirme çalışmaları, bilindiği kadarıyla ilk olarak Dzhumakaeva ve Nauryzbaev [11] tarafından yapılmıştır. Bu tarz genelleştirmeler için Zorko [56] ve Mizuhara [34] çalışmaları da örnek olarak verilebilir.Bu çalışmalarda çoğunlukla φ fonksiyonu üzerine r ye bağlı bazı monotonluk tipli şartlar konulmuştur.

Öncelikle

$$||f||_{\mathcal{M}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{\frac{n-\lambda}{p}} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

olduğuna dikkat edilmelidirNakai [39], bu tanımdaki $r\in(0,\infty)\mapsto r^{\frac{\lambda-n}{p}}\in(0,\infty)$ fonksiyonunu uygun bir $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonuna genelleştirerek, genelleştirilmiş Morrey uzaylarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.13. $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ve $1 \le p < \infty$ olsun. Genelleştirilmiş Morrey uzayı $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L^p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan $f\in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesidir.

Önerme 2.14. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ ve $1\le p<\infty$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir [39]:

i) $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)\neq\Theta$.

ii) $\inf\limits_{t>0}\varphi(t)\max\{t^{\frac{n}{p}},1\}>0$.

$1\le p<\infty$ olmak üzere $r\in(0,\infty)\mapsto r^{\frac{n}{p}}\varphi(r)$ fonksiyonu artandır koşulunu sağlayan azalan $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{G}_p$ olsun. Aşağıdaki önerme genelleştirilmiş Morrey uzayları ile çalışırken $\varphi\in\mathcal{G}_p$ varsayımını yapmanın doğallığını göstermektedir.

Önerme 2.15. $1\le p<\infty$ olmak üzere $\inf\limits_{t>0}\varphi(t)\max\{t^{\frac{n}{p}},1\}>0$ koşulunu sağlayan her $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu için denk normlara göre $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}^{p,\psi}(\mathbb{R}^n)$ olacak şekilde bir $\psi:(0,\infty)\to(0,\infty)\in\mathcal{G}_p$ fonksiyonu vardır [39].

Aşağıdaki önerme yuvarların karakteristik fonksiyonunun genelleştirilmiş Morrey uzaylarına ait olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.16. $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olsun. Bu durumda her $B_0 = B(x_0, r_0)$ yuvarı için

$$\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{p,\varphi}} = \frac{1}{\varphi(r_0)}$$

olur [12, 28].

Klasik Morrey uzaylarına benzer olarak genelleştirilmiş Morrey uzayları arasında aşağıdaki kapsama ilişkisi vardır.

Önerme 2.17. $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_{p_1}$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_{p_2}$ olsun.Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [20]:

i) $\varphi_2 \lesssim \varphi_1$.

ii) $\mathcal{M}^{p_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^{p_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$.

İlk kez Guliyev tarafından tanıtılan ve çalışılan zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı $\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\|f\|_{\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{\mathrm{W}L^p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan bütün $f \in \mathrm{W}L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır [14].

2.4. Spanne ve Adams Tipli Sonuçlar

Bu bölümde kesirli integral ve kesirli maksimal operatörün tanımları verilerek, bu operatörler için Lebesgue ve Morrey uzaylarında elde edilmiş klasik sonuçlar incelenecektir. Sonrasında ise bu sonuçları genelleştirilmiş Morrey uzaylarına genişletme çalışmalarından bahsedilecektir. İlk olarak bu sonuçların elde edilmesinde önemli bir rol oynayan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün tanımı verilecektir.

Tanım 2.18. f lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal operatörü M,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır [54].

Tanım 2.19. f lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere I_α kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır [54].

Uyarı 2.20. I_α ve M operatörleri arasındaki aşağıda verilen noktasal eşitsizlik Hedberg [24] tarafından ispatlanmıştır:

$$I_\alpha f(x) \lesssim Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha p}{n}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hedberg eşitsizliğinin önemli bir özelliği I_α operatörü ile ilgili belli bazı problemleri sıklıkla çözülmesi daha kolay olan M operatörü ile ilgili problemlere indirgemesidir. Örneğin M operatörünün $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki sınırlılığı yardımıyla Hedberg eşitsizliğinin bir sonucu olarak I_α operatörünün $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki sınırlılığı elde edilir (Bkz. Teorem 2.27.).

Tanım 2.21. f, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \le \alpha < n$ olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörü

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $\alpha = 0$ için $M_0 \equiv M$ olduğuna dikkat edilmelidir [13].

Uyarı 2.22. I_α ve M_α operatörleri arasında $0 < \alpha < n$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$M_\alpha(f)(x) \lesssim I_\alpha(|f|)(x) \tag{2.1}$$

ilişkisi vardır [31].

$\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesinin bir lineer alt uzayı $\mathcal{D}$ olmak üzere $\mathcal{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ operatörü her $f, g \in \mathcal{D}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \;\text{ ve }\; \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda \mathcal{T}(f)$$

şartlarını sağlıyorsa lineer operatör,

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \ \text{ ve } \ |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq C\,(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)|) \ \text{ ve } \ |\mathcal{T}(\lambda f)| = |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa quasilineer operatör olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.23. T bir quasilineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise zayıf (p,q) tipindendir denir. Yani her bir $\lambda > 0$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p}\right)^q$$

veya denk olarak

$$\|Tf\|_{\mathrm{W}L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü zayıf (p,q) tipindendir.

Eğer T operatörü $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı ise güçlü (p,q) tipindendir denir. Yani her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise T operatörü güçlü (p,q) tipindendir [31].

Uyarı 2.24. Her güçlü (p,q) tipli operatör aynı zamanda zayıf (p,q) tipli operatördür [31].

Şimdi sırasıyla bu operatörlerin Lebesgue, Morrey ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıklarını ifade eden teoremler verilecektir.

Teorem 2.25. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $1 \leq p \leq \infty$ için zayıf (p,p) tipli $1 < p \leq \infty$ için ise güçlü (p,p) tipli bir operatördür [22, 33, 55].

Uyarı 2.26. Yukarıdaki Teorem 2.25., $n = 1$ için Hardy ve Littlewood [22] tarafından $n > 1$ için Marcinkiewicz ve Zygmund [33] ve Wiener [55] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.27. I_α kesirli integral operatörü $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ için zayıf (p,q) tipli $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ için ise güçlü (p,q) tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir [21, 23, 53].

Uyarı 2.28. Teorem 2.27., literatürde Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi olarak adlandırılır.

Teorem 2.29. M_α kesirli maksimal operatörü $1 \leq p \leq \frac{n}{\alpha}$ için zayıf (p,q) tipli $1 < p \leq \frac{n}{\alpha}$ için ise güçlü (p,q) tipli bir operatördür. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dir [31].

Uyarı 2.30. Teorem 2.29., $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ için (2.1) eşitsizliğinin bir sonucudur. $p = \frac{n}{\alpha}$ için Hölder eşitsizliğini kullanarak M_α operatörünün $L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu kolayca görülebilir [31].

Riesz potansiyelinin Morrey uzaylarındaki sınırlılığı için elde edilmiş dikkat çekici iki sonuç vardır. Bu sonuçlardan ilki 1960'lı yıllarda Spanne tarafından ifade edilmiştir. Fakat Spanne'nin bu sonucu kendisi tarafından değil 1969 yılında Peetre tarafından basılmıştır. Daha sonra 1975 yılında Adams tarafından bu sınırlılık için daha güçlü bir sonuç aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 2.31. **(Spanne)** $0 < \alpha < n$, $0 < \lambda < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\mu = \frac{n\lambda}{n-\alpha p}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda I_α kesirli integral operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\mu}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [45].

Teorem 2.32. **(Adams)** $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olsun. Bu durumda I_α kesirli integral operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [1].

Uyarı 2.33. Teorem 2.31., Teorem 2.32.'nin bir sonucu olarak elde edilebilir. Gerçekten, $p_1 = \frac{(n-\mu)p}{n-\lambda}$ olmak üzere Teorem 2.12. gereğince $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^{p_1,\mu}(\mathbb{R}^n)$ olur. Bu gerçek gözönüne alınır ve Teorem 2.32. uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir [4].

1987 yılında, Chiarenza ve Frasca M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Morrey uzaylarındaki sınırlılığını veren aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 2.34. $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq n$ olsun. Bu durumda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır [4].

Uyarı 2.35. Chiarenza ve Frasca [4], Teorem 2.34.'ü kullanarak Hedberg-tipli eşitsizlikler (Uyarı 2.20.) yardımıyla Adams'ın sonucunu tekrar ispatlamışlardır.

Uyarı 2.36. Spanne ve Adams tarafından elde edilen yukarıdaki sonuçlar (2.1) eşitsizliğinden dolayı M_α operatörü için de geçerlidir.

Şimdi genelleştirilmiş Morrey uzaylarında elde edilmiş Spanne ve Adams tipli sonuçlar özetlenecektir. İlk olarak maksimal operatörün bu uzaylardaki sınırlılığı için elde edilmiş sonuç verilecektir.

Teorem 2.37. $1 < p < \infty$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olsun. Bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır [2, 50].

Aşağıda verilen teorem Spanne'nin sonucunun genelleştirilmiş Morrey uzaylarına genişletilmesidir.

Teorem 2.38. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_q$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty \varphi_1(t) t^\alpha \frac{dt}{t} \lesssim \varphi_2(r) \tag{2.2}$$

koşulunu sağlasınBu durumda I_α operatörü $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [14, 38].

Şimdi ise genelleştirilmiş Morrey uzayları için elde edilmiş Adams tipli sonuç verilecektir.

Teorem 2.39. $0 < \alpha < n$ ve $1 < p < q < \infty$ olmak üzere $\varphi \in \mathcal{G}_p$ fonksiyonu

$$r^\alpha \varphi(r) + \int_r^\infty t^\alpha \varphi(t) \frac{dt}{t} \lesssim \varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda I_α operatörü $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [14, 19].

(2.1) eşitsizliğinden dolayı I_α için elde edilmiş bu sonuçlar M_α için de geçerlidir. Fakat M_α operatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığını daha zayıf koşullar altında incelemek mümkündür. Şimdi elde edilen bu sonuçlar özetlenecektir.

Teorem 2.40. $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_q$ fonksiyonları

$$\sup_{r<t<\infty} \varphi_1(t) t^\alpha \lesssim \varphi_2(r) \tag{2.3}$$

koşulunu sağlasınBu durumda M_α operatörü $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [15].

Teorem 2.41. $0 < \alpha < n$ ve $1 < p < q < \infty$ olmak üzere $\varphi \in \mathcal{G}_p$ fonksiyonu

$$r^\alpha \varphi(r) \lesssim \varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

koşulunu sağlasınBu durumda M_α operatörü $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [9].

Uyarı 2.42. (2.3) şartı (2.2) şartından daha zayıftır .Gerçekten, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ olduğundan $s \in (r, \infty)$ olmak üzere,

$$\varphi_2(r) \gtrsim \int_r^\infty \varphi_1(t) t^\alpha \frac{dt}{t} \gtrsim \int_s^\infty \varphi_1(t) t^\alpha \frac{dt}{t} \gtrsim \varphi_1(s) s^{\frac{n}{p}} \int_s^\infty t^{\alpha - \frac{n}{p}} \frac{dt}{t} \approx \varphi_1(s) s^\alpha$$

olur. Böylece

$$\sup_{s>r} \varphi_1(s) s^\alpha \lesssim \varphi_2(r)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (2.2) integral şartı sağlanıyorsa (2.3) supremal şartı da sağlanır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin $\varphi_1(r) = r^{-\alpha}$ ve $\varphi_2(r) = 1$ fonksiyonları (2.3) koşulunu sağlamasına rağmen (2.2) koşulunu sağlamaz.Teorem 2.41.'de Teorem 2.39.'un aksine $\int_r^\infty t^\alpha \varphi(t) \frac{dt}{t} \lesssim \varphi(r)^{\frac{p}{q}}$ şartına ihtiyaç duyulmadığına dikkat edilmelidir.

Bu tezde genelleştirilmiş Morrey uzaylarını da kapsayan genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarının yapısı incelenerek, kesirli maksimal operatör için bu uzaylarda elde edilmiş sınırlılık sonuçları araştırılacaktır. Bu problemin çözülmesinde önemli bir yere sahip olan kesirli maksimal operatörünün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı ayrı bir bölümde ele alınacaktır.

2.5. Young Fonksiyonları

Bu bölümde Orlicz uzaylarını tanımlamak için kullanılan Young fonksiyonlarının tanımı verilerek, temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.43. Eğer bir $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ fonksiyonu,

(1) Konvekstir: Her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ için

$$\Phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) \leq \lambda \Phi(t_1) + (1 - \lambda) \Phi(t_2).$$

(2) Soldan süreklidir,

(3) $\lim_{r \to 0^+} \Phi(r) = \Phi(0) = 0$,

(4) $\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = \Phi(\infty) = \infty$

koşullarını sağlıyorsa Young fonksiyonu olarak adlandırılır [41].

Uyarı 2.44. Tanım 2.43. deki (1) ve (3) numaralı özelliklerden herhangi bir Young fonksiyonunun artan olduğu kolayca görülebilir [41].

Tanım 2.45. $0 < r < \infty$ için $0 < \Phi(r) < \infty$ şartını sağlayan Young fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{Y}$ ile gösterilir [41].

Uyarı 2.46. Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığı tarafından kapsanan her kompakt alt aralıkta mutlak süreklidir ve $[0,\infty)$ aralığından $[0,\infty)$ aralığına birebir ve örtendir [41].

Tanım 2.47. Φ bir Young fonksiyonu ve $0 \leq s \leq \infty$ olmak üzere, Φ fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi

$$\Phi^{-1}(s) = \inf\{r \geq 0 : \Phi(r) > s\}$$

ile tanımlanır. Burada $\inf \emptyset = \infty$ alınmaktadır [42].

Uyarı 2.48. Φ Young fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olan Φ^{-1} fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [42]:

(1) Eğer $s < \infty$ ise $\Phi^{-1}(s) < \infty$ olur.

(2) $\Phi^{-1}(\infty) = \infty$.

(3) $\Phi(\Phi^{-1}(r)) \leq r \leq \Phi^{-1}(\Phi(r))$.

(4) $[0,\infty)$ üzerinde süreklidir.

(5) Eğer $0 < \Phi(r) < \infty$ ise $\Phi^{-1}(\Phi(r)) = r$ ve eğer $s \in [0, \Phi(\inf\{r > 0 : \Phi(r) = \infty\})]$ ise $\Phi(\Phi^{-1}(s)) = s$ olur.

(6) Eğer $\Phi \in \mathcal{Y}$ ise Φ^{-1}, Φ fonksiyonunun âdi tersidir.

Uyarı 2.49. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Φ^{-1} fonksiyonunun artan ve konkav bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} \Phi^{-1}(t) \geq \Phi^{-1}(\alpha t) \geq \alpha\Phi^{-1}(t) \ , \ 0 < \alpha < 1 \\ \Phi^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(\alpha t) \leq \alpha\Phi^{-1}(t) \ , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır [10].

Tanım 2.50. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, Φ fonksiyonunun tümleyeni

$$\widetilde{\Phi}(r) = \begin{cases} \sup\{rs - \Phi(s) : s \in [0,\ \infty)\} & , r \in [0,\infty) \\ \infty & , \quad r = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır [41].

Örnek 2.51. Aşağıda tümleyen Young fonksiyon çiftlerine bazı örnekler verilmiştir [32]:

(i) $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \frac{t^{p'}}{p'}, \qquad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(ii) $\Phi(t) = t, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} 0 & , 0 \le s \le 1 \\ \infty & , \quad s > 1 \end{cases}$

(iii) $\Phi(t) = e^t - t - 1, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = (1+s)\log(1+s) - s$

(iv) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \le 1 \\ t\log t & , t > 1 \end{cases}, \qquad \widetilde{\Phi}(s) = \begin{cases} s & , s < 1 \\ e^{s-1} & , s \ge 1 \end{cases}$

Önerme 2.52. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$t \le \Phi^{-1}(t)(\widetilde{\Phi})^{-1}(t) \le 2t \tag{2.4}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir [42].

Tanım 2.53. Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer her $t \ge 0$ için

$$\Phi(2t) \le c\Phi(t) \tag{2.5}$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir c sabiti varsa Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyor denir.Bu durum $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2$ ise Φ, ∇_2 koşulunu sağlıyor denir. Bu durum $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir [29].

Önerme 2.54. Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\Phi \in \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(kt) \ge 2k\Phi(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $k > 1$ sabitinin olmasıdır [29].

Örnek 2.55. Aşağıda Δ_2 ve ∇_2 koşullarını sağlayan ve sağlamayan fonksiyonlara dair bazı örnekler verilmiştir [41]:

(i) $\Phi(r) = r$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlar fakat ∇_2 koşulunu sağlamaz.

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\Phi(r) = r^p$ her iki koşulu da sağlar.

(iii) $\Phi(r) = e^r - r - 1$ fonksiyonu ∇_2 koşulunu sağlar fakat Δ_2 koşulunu sağlamaz.

2.6. Orlicz Uzayları

Tanım 2.56. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere Orlicz uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır [47]:

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \exists \alpha > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha |f(x)|) dx < \infty \right\}.$$

Önerme 2.57. $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{|f(x)|}{\lambda}) dx \le 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.Bu norma Orlicz uzayının Luxemburg-Nakano normu adı verilir [47].

Örnek 2.58. Aşağıda bazı özel Young fonksiyonlarına karşılık gelen Orlicz uzaylarına dair örnekler verilmiştir [32]:

(i) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\Phi(t) = t^p$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 \ , \ 0 \le t \le 1 \\ \infty \ , \quad t > 1 \end{cases}$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\Phi(t) = \begin{cases} 0 \quad , \ t \le 1 \\ t \log t \ , \ t > 1 \end{cases}$ ise $L^\Phi(\mathbb{R}^n) = L \log L(\mathbb{R}^n)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme, f ölçülebilir bir fonksiyon ve $t > 0$ olmak üzere

$$m(\Omega,\ f,\ t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$$

biçiminde tanımlansın. $\Omega = \mathbb{R}^n$ olması durumunda kolaylık açısından $m(f,\ t)$ gösterimi tercih edilecektir. Şimdi zayıf Orlicz uzayının tanımı verilecektir.

Tanım 2.59. Φ bir Young fonksiyonu ve

$$\|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{t>0} \Phi(t) m(\frac{f}{\lambda},\ t) \leq 1\right\}$$

olmak üzere zayıf Orlicz uzayı bu quasi-norm yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır [26]:

$$\mathrm{W}L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^0(\mathbb{R}^n) :\ \|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}} < \infty\right\}.$$

Uyarı 2.60. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)} := \|f\chi_{\Omega}\|_{L^{\Phi}} \quad \text{ve} \quad \|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}(\Omega)} := \|f\chi_{\Omega}\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}}$$

olmak üzere $\|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)}$ eşitsizliği gerçeklenir [26].

Uyarı 2.61.

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}} &= \sup_{t>0} \Phi(t) m(\Omega,\ f,\ t) \\ &= \sup_{t>0} t\, m(\Omega,\ f,\ \Phi^{-1}(t)) \\ &= \sup_{t>0} t\, m(\Omega,\ \Phi(|f|),\ t)\end{aligned}$$

eşitlikleri ve

$$\int_{\Omega} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)}}\Big) dx \leq 1, \quad \sup_{t>0} \Phi(t) m\Big(\Omega,\ \frac{f}{\|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}(\Omega)}},\ t\Big) \leq 1 \tag{2.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir [26].

Tanım 2.62. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için sırasıyla $f\chi_{B} \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_{B} \in \mathrm{W}L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ şartlarını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonların uzayı $L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathrm{W}L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir [7].

Lemma 2.63. Φ bir Young fonksiyonu ve B sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun.

$$\|\chi_{B}\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}} = \|\chi_{B}\|_{L^{\Phi}} = \frac{1}{\Phi^{-1}\big(|B|^{-1}\big)}$$

olur [30, 32].

Önerme 2.64. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme ve f, g fonksiyonları Ω üzerinde ölçülebilir olsun. Φ bir Young fonksiyonu ve $\widetilde{\Phi}$ onun tümleyeni olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{L^\Phi}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}}$$

eşitsizliği sağlanır [47].

Lemma 2.65. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bütün B yuvarları için

$$\|f\|_{L^1(B)} \leq 2|B|\Phi^{-1}\left(|B|^{-1}\right)\|f\|_{L^\Phi(B)}$$

eşitsizliği sağlanır [7].

Aşağıdaki teorem Lebesgue diferansiyellenebilme teoreminin Orlicz uzayları için bir benzeridir.

Teorem 2.66. Φ bir Young fonksiyonu ve $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\liminf_{r \to 0+} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}} \geq f(x)$$

eşitsizliği sağlanır [25].

Lemma 2.67. $\beta > 0$, Ψ ve Φ Young fonksiyonları ve B bir yuvar olsunBu durumda ölçülebilir her f fonksiyonu için $\|\,|f|^\beta\|_{L^\Psi(B)} = \|f\|_{L^\Phi(B)}^\beta$ ve $\|\,|f|^\beta\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)} = \|f\|_{\mathrm{W}L^\Phi(B)}^\beta$ olur [10].

Şimdi M Hardy-Littlewood maksimal operatorünün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığını ifade eden teorem verilecektir.

Teorem 2.68. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur [27]:

1. M operatörü $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır, yani

$$\|Mf\|_{\mathrm{W}L^\Phi} \leq C_0\|f\|_{L^\Phi} \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C_0, f fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

2. M operatörünün $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olması yani C_0, f fonksiyonundan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|Mf\|_{L^{\Phi}} \leq C_0 \|f\|_{L^{\Phi}} \tag{2.8}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \nabla_2$ olmasıdır.

3. KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRÜN ORLICZ UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

Kesirli maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı ilk olarak Cianchi [5] tarafından araştırılmıştır. Daha sonra Guliyev vd. [18] farklı bir metodla bu sınırlılık için gerek ve yeter koşulları bulmuştur. Yakın zamanda bu sınırlılık problemi Musil [37] tarafından da incelenmiştir. Bu bölümde Guliyev vd. [18] tarafından elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde incelenecektir.

Aşağıdaki lemma ana teoremin ispatında önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 3.1. $0 < \alpha < n$ ve $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \lesssim r^{\alpha} Mf(x) \tag{3.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir [24].

İspat

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r \le |x-y| < 2^{-j}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}r)^{\alpha} (2^{-j}r)^{-n} \int_{|x-y|<2^{-j}r} |f(y)| dy \\
&\lesssim r^{\alpha} Mf(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem M_α kesirli maksimal operatörünün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 3.2. $0 < \alpha < n$ ve $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ olsun. M_α operatörünün $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$r^{-\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}\big(r\big) \le C \Psi^{-1}\big(r\big) \tag{3.2}$$

olmasıdır. Burada $C > 0$, r den bağımsız bir sabittir. İlave olarak, eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise (3.2) koşulu M_α operatörünün $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir [18].

İspat Bir $B = B(x,r)$ yuvarı için $f_1 = f\chi_{B(x,2r)}$, $f_2 = f - f_1$ olarak alınsın ve y bu B yuvarındaki herhangi bir nokta olsun. Eğer $B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r)) \neq \emptyset$ ise $t > r$ olur. Gerçekten $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r))$ olmak üzere $t > |y-z| \geq |x-z| - |x-y| > 2r - r = r$ eşitsizlikleri gerçeklenir.

Ayrıca $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r))$ olursa $|x-z| \leq |y-z| + |x-y| < t + r < 2t$ olur ki; bu da $B(y,t) \cap {}^{\complement}(B(x,2r)) \subset B(x,2t)$ içermesinin doğruluğunu gösterir.

Dolayısıyla Lemma 2.65. kullanılarak

$$\begin{aligned} M_\alpha f_2(y) &\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(y,t)\cap {}^{\complement}(B(x,2r))} |f(z)|dz \\ &\lesssim \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \\ &\lesssim \|f\|_{L^\Phi} \sup_{r<t<\infty} t^\alpha\, \Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1., (2.1) ve $B(x,2r) \subset B(y,3r)$ olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} M_\alpha(f_1)(y) &\lesssim I_\alpha(|f_1|)(y) = \textstyle\int_{B(x,2r)} \frac{|f(z)|}{|y-z|^{n-\alpha}} dz \\ &\lesssim \textstyle\int_{B(y,3r)} \frac{|f(z)|}{|y-z|^{n-\alpha}} dz \lesssim r^\alpha M f(y) \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$M_\alpha f(y) \lesssim r^\alpha M f(y) + \|f\|_{L^\Phi} \sup_{r<t<\infty} t^\alpha\, \Phi^{-1}(t^{-n})$$

olur.

Böylece (3.2) koşulundan

$$|M_\alpha f(y)| \lesssim Mf(y) \frac{\Psi^{-1}(r^{-n})}{\Phi^{-1}(r^{-n})} + \|f\|_{L^\Phi}\, \Psi^{-1}(r^{-n})$$

elde edilir. $\Phi^{-1}(r^{-n}) = \frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}}$ olacak şekilde bir $r > 0$ seçilsin. Bu durumda

$$\frac{\Psi^{-1}(r^{-n})}{\Phi^{-1}(r^{-n})} = \frac{(\Psi^{-1} \circ \Phi)(\frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}})}{\frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}}}$$

olur. Buradan her $y \in B$ için

$$|M_\alpha f(y)| \leq C_1 \|f\|_{L^\Phi} (\Psi^{-1} \circ \Phi)\Big(\frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}}\Big)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

C_0, (2.7) eşitsizliğindeki sabit olmak üzere Teorem 2.68. kullanılır ve Uyarı 2.61. göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0} \Psi(r)\, m\Big(B, \frac{|M_\alpha f(y)|}{C_1\|f\|_{L^\Phi}}, r\Big) &= \sup_{r>0} r\, m\Big(B, \Psi\Big(\frac{|M_\alpha f(y)|}{C_1\|f\|_{L^\Phi}}\Big), r\Big) \\
&\leq \sup_{r>0} r\, m\Big(B, \Phi\Big(\frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}}\Big), r\Big) \\
&\leq \sup_{r>0} \Phi(r)\, m\Big(\frac{Mf(z)}{\|Mf\|_{\mathrm{W}L^\Phi}}, r\Big) \leq 1
\end{aligned}$$

yani

$$\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitsizliğindeki sabitler x ve r değişkenlerinden bağımsız olduğundan B yuvarları üzerinden supremum alınarak

$$\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^\Psi} \lesssim \|f\|_{L^\Phi}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

Şimdi C_0, (2.8) eşitsizliğindeki sabiti göstersin. $\Phi \in \nabla_2$ olduğundan Teorem 2.68. kullanılır ve Uyarı 2.61. göz önüne alınırsa

$$\int_B \Psi\left(\frac{|M_\alpha f(y)|}{C_1\|f\|_{L^\Phi}}\right) dy \leq \int_B \Phi\left(\frac{Mf(y)}{C_0\|f\|_{L^\Phi}}\right) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(z)}{\|Mf\|_{L^\Phi}}\right) dz \leq 1$$

elde edilir, yani

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(B)} \lesssim \|f\|_{L^\Phi} \tag{3.5}$$

olur. Benzer şekilde (3.5) eşitsizliğindeki sabitler x ve r değişkenlerinden bağımsız olduğundan B yuvarları üzerinden supremum alınarak

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi} \lesssim \|f\|_{L^\Phi}$$

elde edilir.

Şimdi (3.2) koşulunun sınırlılık için gerekliliği gösterilecektir. $B_0 = B(x_0, r_0)$ ve $x \in B_0$ olsun. Bu durumda

$$M_\alpha \chi_{B_0}(x) = \sup_{B \ni x} |B|^{-1+\frac{\alpha}{n}} |B \cap B_0| \geq |B_0|^{-1+\frac{\alpha}{n}} |B_0 \cap B_0| = |B_0|^{\frac{\alpha}{n}} \tag{3.6}$$

olur. Böylece Lemma 2.63. de göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B_0)} \lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{\mathrm{W}L^\Psi} \\ &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|\chi_{B_0}\|_{L^\Phi} \lesssim \frac{\Psi^{-1}(r_0^{-n})}{\Phi^{-1}(r_0^{-n})} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r_0^\alpha &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{L^\Psi(B_0)} \lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|M_\alpha \chi_{B_0}\|_{L^\Psi} \\ &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \|\chi_{B_0}\|_{L^\Phi} \lesssim \frac{\Psi^{-1}(r_0^{-n})}{\Phi^{-1}(r_0^{-n})} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler keyfi $r_0 > 0$ için doğru olduğundan istenilen gösterilmiş olur. ∎

Uyarı 3.3. Eğer Teorem 3.2.'de $\Phi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ alınırsa Teorem 2.29. elde edilir.

Şimdi kesirli maksimal operatörün Orlicz uzaylarındaki sınırlılığı için Cianchi [5] tarafından elde edilmiş sonuçlar ispatsız olarak verilecek ve bu sonuçlar ile Teorem 3.2. kıyaslanacaktır. Bu sonuçlar için aşağıdaki tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.4. Φ ve Ψ, Young fonksiyonları olsun. Eğer her $s \geq 0$ için $\Phi(s) \leq \Psi(cs)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği bir c sabiti varsa Ψ, Φ fonksiyonunu domine ediyor denir.

Tanım 3.5. Ψ bir Young fonksiyonu ve $p \in (1, \infty]$ olsun.

$$B_p(s) = \int_0^s \frac{\Psi(t)}{t^{1+p'}} dt$$

olmak üzere Ψ_p, tümleyeni

$$\widetilde{\Psi_p}(s) = \int_0^s r^{p'-1}(B_p^{-1}(r^{p'}))^{p'} dr \tag{3.7}$$

şeklinde verilen Young fonksiyonudur.

İlk olarak Cianchi [5] tarafından elde edilmiş sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.6. $n \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere

M_α kesirli maksimal operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\Phi \text{ fonksiyonunun } \mathcal{Q} \text{ fonksiyonunu domine etmesidir.} \tag{3.8}$$

Burada $\mathcal{Q}$ fonksiyonu tersi $\mathcal{Q}^{-1}(u) = u^{\alpha/n}\Psi^{-1}(u)$ ile verilen fonksiyonundur [5].

Teorem 3.7. $n \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < n$ olsun. Φ ve Ψ Young fonksiyonları olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörünün $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t)}{t^{1+n/(n-\alpha)}} dt < \infty \text{ ve } \Phi \text{ fonksiyonunun } \Psi_{n/\alpha} \text{ fonksiyonunu domine etmesidir.} \tag{3.9}$$

Burada, $\Psi_{n/\alpha}$ (3.7) ile tanımlanan Young fonksiyonudur [5].

Teorem 3.2., Teorem 3.6. ve Teorem 3.7. kıyaslanırsa aşağıdaki önermelerin doğruluğu görülür.

Sonuç 3.8. $0 < \alpha < n$ ve $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ olsun. Bu durumda

1) (3.8) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul (3.2) koşulunun sağlanmasıdır.

2) İlave olarak eğer $\Phi \in \nabla_2$ oluyorsa, (3.9) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul (3.2) koşulunun sağlanmasıdır.

önermeleri doğrudur [18].

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARI

$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları, 2014 yılında, Deringoz vd. [7] tarafından Orlicz ve genelleştirilmiş Morrey uzaylarını birleştiren bir yapı olarak tanımlanmıştır. Hemen dikkat edilmelidir ki literatürde birden fazla genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı tanımı vardır. Bu uzaylar ilk olarak Nakai [40] tarafından 2004 yılında tanımlanmış, daha sonra Sawano vd. [52] tarafından 2012 yılında farklı bir tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı tanımlanmıştır. Bu bölümde Deringoz vd. [7] tarafından tanımlanan ve şimdilerde üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayları olarak adlandırılan uzay üzerinde detaylı bir araştırma yapılacaktır. Diğer uzayların tanımından farklı olarak üçüncü tip uzayın tanımı, modularlar tarafından üretilen koşullardan bağımsız olarak sadece $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayının normlu lineer bir uzay olması gerçeğine dayanmaktadır. Şimdi $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üçüncü tip genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayının tanımı verilerek bu uzayların yapısı incelenecektir.

Tanım 4.1. $\varphi(r)$, $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğimiz genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan $f \in L^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır [7].

Lemma 4.2. $\varphi(r)$, $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve Φ bir Young fonksiyonu olsun.

(i) Eğer belli bir $t > 0$ için

$$\sup_{t<r<\infty} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(r^{-n}) = \infty \tag{4.1}$$

ise $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur [9].

(ii) Eğer belli bir $\tau > 0$ için

$$\sup_{0<r<\tau} \varphi(r)^{-1} = \infty \tag{4.2}$$

ise $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur [9].

İspat (i) (4.1) sağlansın ve f özdeş olarak 0 olmasın. Bu durumda

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} > 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t<r<\infty} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1})\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \sup_{t<r<\infty} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(r^{-n})\end{aligned}$$

ve dolayısyla $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \infty$ olur.
(ii) Şimdi $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun ve (4.2) sağlansın. O zaman iki olası durum söz konusudur:

1. Durum: Her $t > 0$ için $\sup_{0<r<t} \varphi(r)^{-1} = \infty$.

2. Durum: Belli bir $s \in (0, \tau)$ için $\sup_{0<r<s} \varphi(r)^{-1} < \infty$.

İlk olarak 1. Durum incelenecektir. Teorem 2.66.'dan hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\liminf_{r\to 0+} \frac{\|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}}{\|\chi_{B(x,r)}\|_{L^\Phi}} \geq |f(x)| \tag{4.3}$$

olduğu bilinmektedir. Bu x noktalarının hepsi için $f(x) = 0$ olduğu iddia ediliyor. Aksi kabul edilsin, yani x noktasının sabit ve $|f(x)| > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Lemma 2.63. ve (4.3) kullanılarak her $0 < r \leq t_0$ için

$$\Phi^{-1}\big(|B(x,r)|^{-1}\big)\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \geq \frac{|f(x)|}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $t_0 > 0$ sayısının varlığı görülür. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} &\geq \sup_{0<r<t_0} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}\big(|B(x,r)|^{-1}\big)\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\ &\geq \frac{|f(x)|}{2} \sup_{0<r<t_0} \varphi(r)^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \infty$ yani $f \notin \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Dikkat edilmeli ki 2. Durum $\sup_{s<r<\tau} \varphi(r)^{-1} = \infty$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\begin{aligned}\sup_{s<r<\infty} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) &\geq \sup_{s<r<\tau} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \\ &\geq \Phi^{-1}(|B(x,\tau)|^{-1}) \sup_{s<r<\tau} \varphi(r)^{-1} = \infty\end{aligned}$$

olur ki bu da zaten 1. Durumdur. ■

Uyarı 4.3. Eğer belli bir $t > 0$ için

$$\sup_{0<r\leq t} \frac{\Phi^{-1}(r^{-n})r^n}{\varphi(r)} = \infty$$

oluyor ise $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur. Gerçekten, Uyarı 2.49.'dan

$$\Phi^{-1}(r^{-n})r^n \leq \Phi^{-1}(t^{-n})t^n < \infty$$

olur ve dolayısıyla

$$\sup_{0<r<t} \varphi(r)^{-1} = \infty$$

olur ki bu da ispatı tamamlar [10].

Tanım 4.4. Eğer

$$\varphi(r) \leq C\varphi(s), \quad (\varphi(r) \geq C\varphi(s),) \qquad r \leq s$$

doğru olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonuna neredeyse artandır (neredeyse azalandır) denir.

Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{G}_\Phi$ ile $t \in (0,\infty) \mapsto \frac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})}$ fonksiyonu neredeyse artan ve $t \in (0,\infty) \mapsto \frac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})t^n}$ fonksiyonu neredeyse azalan olacak şekildeki tüm $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir [10].

Uyarı 4.5. Eğer

$$\frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{C} \leq \frac{\varphi(r)}{\varphi(s)} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu doubling koşulunu sağlar denir. Dikkat edilmelidir ki $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olması φ fonksiyonunun doubling koşulunu sağlamasını gerektirir [10].

Uyarı 4.6. Nakai [39, s. 446] tarafından yapılan gözleme benzer olarak (bkz. Önerme 2.15.), Lemma 4.2. ve Uyarı 4.3. baz alınarak $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımında $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ olduğu varsayılabilir. Daha açık olarak aşağıdakiler doğrudur:

(i) Lemma 4.2. dolayısıyla her $r > 0$ için $\inf\limits_{r \le t < \infty} \dfrac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})} > 0$ olduğu kabul edilebilir.

$$\psi(r) = \Phi^{-1}(r^{-n}) \inf_{r \le t < \infty} \frac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})}, \quad r > 0$$

olmak üzere $r \in (0,\infty) \mapsto \frac{\psi(r)}{\Phi^{-1}(r^{-n})}$ ile tanımlı fonksiyon artandır ve normların denkliğinden $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{\Phi,\psi}(\mathbb{R}^n)$ olur. Gerçekten, ψ fonksiyonunun tanımından $\psi(r) \le \varphi(r)$ olduğu açıktır. Böylece $\mathcal{M}^{\Phi,\psi}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \le \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\psi}}$ olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0} \psi(r)^{-1}\Phi^{-1}(r^{-n})\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} &= \sup_{r>0} \frac{1}{\inf_{r \le t < \infty} \frac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})}} \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&= \sup_{r>0} \left(\sup_{r \le t < \infty} \frac{\Phi^{-1}(t^{-n})}{\varphi(t)} \right) \|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&\le \sup_{t>0} \varphi(t)^{-1}\Phi^{-1}(t^{-n})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{\Phi,\psi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\psi}} \le \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}$ olur [10].

(ii) Uyarı 4.3. dolayısıyla her $r > 0$ için $\inf\limits_{0 < t \le r} \dfrac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(t^{-n})t^n} > 0$ olduğu kabul edilebilir. $\psi(r)$

$$\sup_{t \in (0,r]} \frac{\Phi^{-1}(t^{-n})t^n}{\varphi(t)} = \frac{\Phi^{-1}(r^{-n})r^n}{\psi(r)}$$

eşitliği ile tanımlansın.Her $r > 0$ için $\psi(r) \le \varphi(r)$ eşitsizliğinin sağlandığını görmek kolaydır. Dolayısıyla $\mathcal{M}^{\Phi,\psi}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \le \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\psi}}$ olur.Tersine, şimdi $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $r \in (0,\infty)$ olmak üzere,

$$\frac{\Phi^{-1}(r^{-n})r^n}{\psi(r)} \le 2\frac{\Phi^{-1}(t^{-n})t^n}{\varphi(t)}$$

olacak şekilde $t \in (0,r]$ sayısı ve $N \lesssim r^{-n}t^n$ olmak üzere $B(x,r)$ yuvarının $\{B(x_j,t)\}_{j=1}^N$ örtüsü seçilsin. j_0,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} &\le N\|f\|_{L^\Phi(B(x_{j_0},t))} \\
&= N \max_{j=1,2\ldots,N} \|f\|_{L^\Phi(B(x_j,t))} \\
&\lesssim t^{-n}r^n\|f\|_{L^\Phi(B(x_{j_0},r))}.
\end{aligned}$$

olacak biçimde bir indis olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{\Phi^{-1}(r^{-n})}{\psi(r)}\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} &\lesssim \frac{r^n\Phi^{-1}(r^{-n})}{\psi(r)t^n}\|f\|_{L^\Phi(B(x_{j_0},t))}\\ &\leq 2\frac{\Phi^{-1}(t^{-n})}{\varphi(t)}\|f\|_{L^\Phi(B(x_{j_0},t))}\\ &\leq 2\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}},\end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Bu ise $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\psi}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\mathcal{M}^{\Phi,\psi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ gömmesi vardır [10].

Aşağıdaki lemma $\mathcal{G}_\Phi$ sınıfının kullanışlılığına ait bir örnektir:

Lemma 4.7. $B_0 := B(x_0, r_0)$ olsun. Eğer $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu neredeyse azalan ise

$$\frac{1}{\varphi(r_0)} \leq \|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sabiti vardır [8].

İspat $B = B(x,r)$ keyfi bir yuvarı belirtmek üzere, $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımından ve Lemma 2.63.'den

$$\begin{aligned}\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B|^{-1})\frac{1}{\Phi^{-1}(|B\cap B_0|^{-1})}\\ &\geq \varphi(r_0)^{-1}\Phi^{-1}(|B_0|^{-1})\frac{1}{\Phi^{-1}(|B_0\cap B_0|^{-1})} = \frac{1}{\varphi(r_0)}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Eğer $r \leq r_0$ alınır ise $\varphi(r_0) \leq C\varphi(r)$ olur ve

$$\varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B|^{-1})\|\chi_{B_0}\|_{L^\Phi(B)} \leq \frac{1}{\varphi(r)} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Diğer yandan eğer $r \geq r_0$ ise $\frac{\varphi(r_0)}{\Phi^{-1}(|B_0|^{-1})} \leq C\frac{\varphi(r)}{\Phi^{-1}(|B|^{-1})}$ olur ve

$$\varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B|^{-1})\|\chi_{B_0}\|_{L^\Phi(B)} \leq \frac{C}{\varphi(r_0)}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Ayrıca $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilecek olan zayıf genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right)\|f\|_{\mathrm{W}L^{\Phi}(B(x,r))} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $f \in \mathrm{W}L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının sınıfıdır [7].

Bu tanımlara göre eğer $\Phi(r) = r^p$, $1 \le p < \infty$ seçilirse $\mathcal{M}^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı ve $\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\varphi}$ zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı; $\Phi(r) = r^p$, $1 \le p < \infty$ ve $\varphi(r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$, $0 \le \lambda \le n$ seçilirse $\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı ve $\mathrm{W}\mathcal{M}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Morrey uzayı; $\varphi(r) = \Phi^{-1}\left(|B(x,r)|^{-1}\right)$ seçilirse $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayı ve $\mathrm{W}L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Orlicz uzayı elde edilir [7].

5. KESİRLİ MAKSİMAL OPERATÖRÜN GENELLEŞTİRİLMİŞ ORLICZ-MORREY UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

5.1. Spanne-Tipli Sonuç

Bu bölümde kesirli maksimal operatörün genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki Spanne-tipli sınırlılığı için bir karakterizasyon verilecektir.

Lemma 5.1. $0 < \alpha < n$ ve $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ olsun ve (3.2) koşulu sağlansın. Bu durumda her $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $B = B(x,r)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(B)} \leq C\|f\|_{L^{\Phi}(2B)} + \frac{C}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{r<t<\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(B(x,2t))}\, \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) t^{\alpha} \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir C sabiti vardır. Eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise

$$\|M_\alpha f\|_{L^{\Psi}(B)} \leq C\|f\|_{L^{\Phi}(2B)} + \frac{C}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{r<t<\infty} \|f\|_{L^{\Phi}(B(x,2t))}\, \Phi^{-1}\big(t^{-n}\big) t^{\alpha} \tag{5.2}$$

eşitsizliği de gerçeklenir [16].

İspat f fonksiyonunun

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_{2B}, \quad f_2 = f - f_1$$

gösterimi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(B)} \lesssim \|M_\alpha f_1\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(B)} + \|M_\alpha f_2\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(B)}$$

olur. M_α operatörünün $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından (bkz. Teorem 3.2.)

$$\|M_\alpha f_1\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(B)} \leq \|M_\alpha f_1\|_{\mathrm{W}L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L^{\Phi}(2B)} \tag{5.3}$$

elde edilir. Burada $C > 0$, f fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

$y \in B$ ve $r < t$ ise $B(y,t) \subset B(x,2t)$ olduğu Teorem 3.2.'nin ispatından bilinmektedir. Lemma 2.65. kullanılarak $y \in B$ için

$$\begin{aligned} M_\alpha f_2(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(y,t)\setminus(B(x,2r))} |f(z)|dz \\ &\le \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,2t)} |f(z)|dz \\ &\lesssim \sup_{r<t<\infty} t^\alpha\, \Phi^{-1}(t^{-n})\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,2t))} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 2.63. yardımıyla

$$\|M_\alpha f_2\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)} \lesssim \frac{1}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \sup_{r<t<\infty} t^\alpha\, \Phi^{-1}(t^{-n})\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,2t))} \tag{5.4}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Böylece (5.1) eşitsizliğinin doğruluğu (5.3) ve (5.4)'den elde edilir.

Eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise (5.3) yerine güçlü tipli sınırlılık kullanılarak benzer şekilde (5.2) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilir. ■

Teorem 5.2. (Spanne-Tipli Sonuç) $0 < \alpha < n$, $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ ve $\varphi_2 \in \mathcal{G}_\Psi$ olsun.

1. (3.2) ve

   $$\frac{\varphi_1(r)}{\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \le C\, \frac{\varphi_2\big(r\big)}{\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)} \tag{5.5}$$

   koşulları sağlansın. Bu durumda, $C > 0$ sabiti r den bağımsız olmak üzere

   $$\sup_{r<t<\infty} \varphi_1(t)t^\alpha \le C\,\varphi_2(r) \tag{5.6}$$

   koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için yeterlidir. İlave olarak eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise (5.6) koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için yeterlidir [16].

2. φ_1 fonksiyonu neredeyse azalan olsun. Bu durumda $C > 0$ sabiti r den bağımsız olmak üzere

   $$\varphi_1(r)r^\alpha \le C\varphi_2(r) \tag{5.7}$$

koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve dolayısıyla $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gereklidir [17].

3. (3.2) ve (5.5) koşulları sağlansın. φ_1 ve φ_2 fonksiyonları neredeyse azalan olsun. Bu durumda M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul (5.7) dir. İlave olarak eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise (5.7) koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir [17].

İspat *1.* (5.5), (5.1), (5.6) ve φ_1 ve Φ^{-1} fonksiyonlarının doubling özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(r)^{-1}\Psi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,2r))} \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(r)^{-1} \sup_{r<t<\infty} \|f\|_{L^\Phi(B(x,2t))}\,\Phi^{-1}\big(t^{-n}\big)t^\alpha \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(r)^{-1}\Phi^{-1}\big(r^{-n}\big)\|f\|_{L^\Phi(B(x,r))} \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(r)^{-1} \sup_{r<t<\infty} \varphi_1(t)t^\alpha\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\mathrm{W}L^\Psi(B)$ ve $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ yerine sırasıyla $L^\Psi(B)$ ve $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ alınırsa güçlü sınırlılık da benzer şekilde kolaylıkla elde edilir.

2. (3.6) eşitsizliği göz önüne alınır ve Lemma 4.7. kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
r_0^\alpha &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1})\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B_0)} \lesssim \varphi_2(r)\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}} \\
&\lesssim \varphi_2(r)\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}} \lesssim \frac{\varphi_2(r)}{\varphi_1(r)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3. φ_2 fonksiyonu neredeyse azalan olduğundan (5.6) ve (5.7) denktir. Bu durumda teoremin üçüncü iddiası teoremin birinci ve ikinci ifadelerinin bir sonucudur. ■

5.2. Adams-Tipli Sonuç

Bu bölümde kesirli maksimal operatörün genelleştirilmiş Orlicz-Morrey uzaylarındaki Adams-tipli sınırlılığı için bir karakterizasyon verilecektir.

Aşağıdaki teorem bu bölümde verilecek temel sonuç için kilit bir rol oynamaktadır ve Deringoz vd. tarafından [7, Teorem 4.6] ispatlanmıştır.

Teorem 5.3.

1. $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu neredeyse azalan olsun.Bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.
2. Eğer $\Phi \in \nabla_2$ ve $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu neredeyse azalan ise M operatörü $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Temel teoremin ispatı için aşağıdaki Hedberg-tipli eşitsizlik kilit bir rol oynamaktadır (Bkz. Uyarı 2.20.).

Lemma 5.4. $\Phi \in \mathcal{Y}$ olmak üzere $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu neredeyse azalan olsun ve

$$t^\alpha \lesssim \varphi(t)^{\beta-1} \tag{5.8}$$

koşulu sağlansın. Bu durumda her $f \in \mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_\alpha f(x) \leq C(Mf(x))^\beta \, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} \tag{5.9}$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir C sabiti vardır [9].

İspat Keyfi bir $B = B(x,r)$ yuvarı için f fonksiyonunun

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_B, \quad f_2 = f - f_1$$

gösterimi göz önüne alınsın. O zaman

$$M_\alpha f(x) \leq M_\alpha f_1(x) + M_\alpha f_2(x)$$

olur.

Lemma 2.65. kullanılarak

$$
\begin{aligned}
M_\alpha f_2(x) &= \sup_{t>0} \frac{t^\alpha}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)\setminus(B(x,r))} |f(z)|dz \\
&\le \sup_{t>r} \frac{t^\alpha}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \\
&\lesssim \sup_{t>r} t^\alpha\, \Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\, \|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \sup_{t>r} t^\alpha\, \varphi(t).
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.3) yardımıyla

$$
M_\alpha f(x) \lesssim r^\alpha M f(x) + \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} \sup_{t>r} t^\alpha\, \varphi(t)
$$

olur.

(5.8) koşulu ve Sawano vd. [51, s. 6492] tarafından verilen teknik göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
M_\alpha f(x) &\lesssim \min\{\varphi(r)^{\beta-1} M f(x), \varphi(r)^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}\} \\
&\lesssim \sup_{s>0} \min\{s^{\beta-1} M f(x), s^\beta \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}\} \\
&= (M f(x))^\beta\, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta},
\end{aligned}
$$

sonucuna varılır ki bu da (5.9) eşitsizliğidir. ∎

Teorem 5.5. $\Phi \in \mathcal{Y}$, $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ fonksiyonu neredeyse azalan ve $\beta \in (0,1)$ olmak üzere $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ ve $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ olsun. Bu durumda (5.8) koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathrm{W}\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir. İlave olarak eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise (5.8) koşulu M_α operatörünün $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerekli ve yeterlidir [9].

İspat (5.9) eşitsizliği ve Lemma 2.67. kullanılarak her B yuvarı için

$$
\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)} \lesssim \|(Mf)^\beta\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)}\, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} = \|Mf\|_{\mathrm{W}L^\Phi(B)}^\beta\, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta}
$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 5.3.'den

$$
\begin{aligned}
&\eta(r)^{-1}\Psi^{-1}(|B|^{-1})\|M_\alpha f\|_{\mathrm{W}L^\Psi(B)} \lesssim \eta(r)^{-1}\Psi^{-1}(|B|^{-1})\|Mf\|_{\mathrm{W}L^\Phi(B)}^\beta\, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} \\
&= \left(\varphi(r)^{-1}\Phi^{-1}(|B|^{-1})\|Mf\|_{\mathrm{W}L^\Phi(B)}\right)^\beta\, \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}^{1-\beta} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}}
\end{aligned}
$$

olur. Bütün B yuvarları üzerinden supremum alınırsa istenilen sonuç elde edilir. Eğer $\Phi \in \nabla_2$ ise bu durumda güçlü sınırlılık da doğrudur.

Gereklilik Teorem 5.2. (ii)'ye benzer biçimde ispatlanır. ■

KAYNAKLAR

[1]. Adams, D. R., 1975, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42, 765-778.

[2]. Akbulut, A., Guliyev, V. S., Mustafayev, R., 2012, *On boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Math. Bohem., 137 1, 27-43.

[3]. Burenkov, V. I., Gogatishvili, A., Guliyev, V. S., Mustafayev, R., 2010, *Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces*, Complex Var. Elliptic Equ., vol 55, no. 8-10, 739-758.

[4]. Chiarenza, F., Frasca, M., 1987, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl., 7, 7, 273-279.

[5]. Cianchi, A., 1999, *Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces*, J. London Math. Soc., 2, 1, 187-202.

[6]. Coifman R., 1972, *Distribution function inequalities for singular integrals*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 69 (10) 2838-2839.

[7]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., Samko, S., 2014, *Boundedness of maximal and singular operators on generalized Orlicz-Morrey spaces*, Operator Theory, Operator Algebras and Applications. Series: Operator Theory: Advances and Applications Vol. 242, 139-158.

[8]. Deringoz, F., Guliyev, Vagif S., Hasanov, Sabir G., 2016, *Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., Paper No. 248, 22 pp.

[9]. Deringoz, F., Guliyev, Vagif S., Hasanov, Sabir G., 2017, *A characterization for Adams-type boundedness of the fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces*, Integral Transforms Spec. Funct. 28, no. 4, 284-299.

[10]. Deringoz, F., Guliyev, V. S., Nakai, E., Sawano, Y., Shi M., *Generalized fractional maximal and integral operators on Orlicz and generalized Orlicz–Morrey spaces of the third kind*, Positivity. https://doi.org/10.1007/s11117-018-0635-9

[11]. Dzhumakaeva, G. T., Nauryzbaev, K. Zh., 1982, *Lebesgue-Morrey spaces*, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat 79, 5, 7-12.

[12]. Eridani., Utoyo, M.I. and Gunawan, H., 2012, *A characterization for fractional integrals on generalized Morrey spaces*, Anal. Theory Appl. 28 (3), 263-268.

[13]. Grafakos, L., 2004, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

[14]. Guliyev, V. S., 2009, *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, 20.

[15]. Guliyev, Vagif S., Shukurov, Parviz S., 2013, *On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces*, Advances in harmonic analysis and operator theory, 175199, Oper. Theory Adv. Appl., 229, Birkhuser/Springer Basel AG, Basel.

[16]. Guliyev, Vagif S., Deringoz, F., 2015, *Boundedness of fractional maximal operator and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces*, Complex Anal. Oper. Theory 9, no. 6, 1249–1267.

[17]. Guliyev, Vagif S., Deringoz, F., 2018, *Some characterizations of Lipschitz spaces via commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces*, Mediterr. J. Math. 15, no. 4, Art. 180, 19 pp.

[18]. Guliyev, V.S, Deringoz, F., Hasanov, S.H., 2019, *Fractional maximal function and its commutators on Orlicz spaces*, Anal. Math. Phys., 9, no. 1, 165–179.

[19]. Gunawan, H., 2003, *A note on the generalized fractional integral operators*, J. Indones. Math. Soc. 9, 39-43.

[20]. Gunawan, H., Hakim, Denny I., Limanta, Kevin M., Masta, Al A., 2017, *Inclusion properties of generalized Morrey spaces*. Math. Nachr. 290, no. 2-3, 332-340.

[21]. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1928, *Some properties of fractional integrals. I.*, Mathematische Zeitschrift 27, 565-606.

[22]. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1930, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. 54, 81-116.

[23]. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1932, *Some properties of fractional integrals. II.*, Mathematische Zeitschrift 34, 403-439.

[24]. Hedberg, L.I, 1972, *On certain convolution inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. 36, 505-510.

[25]. Hencl, S., Kleprlik, L., 2012, *Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz-Sobolev spaces*, Illinois J. Math. 56, 3, 931-955.

[26]. Kawasumi R., Nakai E., *Pointwise multipliers on weak Orlicz spaces*. https://arxiv.org/abs/1811.02858

[27]. Kokilashvili, V., Krbec, M. M., 1991, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore.

[28]. Komori, Y. and Mizuhara, T., 2006, *Factorization of functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ and generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. 279, no. 5-6, 619-624.

[29]. Krasnoselskii, M. A., Rutickii, Ya. B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, English translation P. Noordhoff Ltd., Groningen.

[30]. Liu, P. and Wang, M., 2013, *Weak Orlicz spaces: Some basic properties and their applications to harmonic analysis*, Science China Mathematics 56 (4), 789-802.

[31]. Lu, S., Ding, Y. and Yan, D., 2007, *Singular Integrals and Related Topics*, World Scientific Publishing, Singapore.

[32]. Pick, Luboš., Kufner, Alois., John, Oldřich., Fučík, Svatopluk., 2013, *Function spaces*, Vol. 1. Second revised and extended edition. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 14. Walter de Gruyter & Co., Berlin, xvi+479 pp. ISBN: 978-3-11-025041-1; 978-3-11-025042-8.

[33]. Marcinkiewicz, J., and Zygmund, Antoni., 1939, *On the summability of double Fourier series*, Fundamenta Mathematicae 32.1, 122-132.

[34]. Mizuhara, T., 1991, *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonic analysis, Sendai, ICM-90 Satellite Conference Proceedings, 183-189.

[35]. Morrey, C. B., 1938, *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 43, 126-166.

[36]. Muckenhoupt, B., Wheeden, R., 1974, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 192, 261-274.

[37]. Musil, V., 2019, *Fractional maximal operator in Orlicz spaces*, J. Math. Anal. Appl. 474, no. 1, 94–115.

[38]. Nakai, E., 1994, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr., 166, 95-103.

[39]. Nakai, E., 2000, *A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces*, Sci. Math.,3, 3, 445-454.

[40]. Nakai, E., 2004, *Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, In: Banach and Function Spaces, Kitakyushu, Yokohama Publishers, Yokohama, 323-333.

[41]. Nakai, E., 2008, *Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function*, Studia Math. 188, no. 3, 193–221.

[42]. O'Neil, R., 1965, *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 115, 300-328.

[43]. Orlicz, W., 1988, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus*, B. Bull. Acad. Polon. A, 207-220 ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 217-230.

[44]. Orlicz, W., 1988, *Über Räume (L^M)*, B. Bull. Acad. Polon. A, 93-107 ; reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 345-359.

[45]. Peetre, J., 1969, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal., 4, 71-87.

[46]. Rafeiro, Humberto, Samko, Natasha, Samko, Stefan, 2013, *Morrey-Campanato spaces:an overview*, Operator theory, pseudo-differential equations, and mathematical physics, 293–323, Oper. Theory Adv. Appl., 228, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.

[47]. Rao, M. M., Ren, Z. D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, Inc., New York.

[48]. Rudin, W., 1987, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill.

[49]. Sadosky, Cora., 1979, *Interpolation of operators and singular integrals*, An introduction to harmonic analysis. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 53. Marcel Dekker, Inc., New York, xii+375 pp. ISBN: 0-8247-6883-3.

[50]. Sawano, Y., 2008, *Generalized Morrey Spaces for non-doubling measures*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 15, 413-425.

[51]. Sawano, Y., Sugano, S., Tanaka, H., 2011, *Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (12), 6481–6503.

[52]. Sawano, Y., Sugano, S., Tanaka, H., 2012, *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Anal., 36, no. 4, 517-556.

[53]. Sobolev, S.L., 1938, *On a theorem in functional analysis* (Russian), Mat. Sob. 4, 471-497

[54]. Stein, E. M., 1993, *Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press.

[55]. Wiener, Norbert., 1939, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. 5, no. 1, 1-18.

[56]. Zorko, C. T., 1986, *Morrey space*, Proc. Amer. Math. Soc., 98, 4, 586-592.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kendal DORAK
Doğum Yeri	Diyarbakır
Doğum Tarihi	13.03.1993
Uyruğu	T.C.
E-Posta Adresi	kendaldorak@gmail.com
Web Adresi	...

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	...