



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA  
PİSAGOR-HODOGRAF EĞRİLERİ VE  
UYGULAMALARI**

**Betül ÇELİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KIRŞEHİR / 2019**



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA  
PİSAGOR-HODOGRAF EĞRİLERİ VE  
UYGULAMALARI**

**Betül ÇELİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**  
**Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA**

**KIRŞEHİR / 2019**

Bu çalışma 24.04.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

### Tez Jürisi



Prof. Dr. Yusuf YAYLI  
Ankara Üniversitesi  
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Ferdađ KAHRAMAN AKSOYAK  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Eğitim Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Eğitim Fakültesi

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Betül ÇELİK



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



## ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezinde, 4-boyutlu Öklid uzayında hodograf eğrileri ile Pisagor-Hodograf (PH) eğrileri ve uygulamaları üzerine çalışılmıştır. Bu tez çalışması Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü bünyesinde gerçekleştirilmiştir.

Lisans ve Lisansüstü ders sürecimde tanıdığım günden beri bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim her zaman bana örnek olan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA' ya büyük bir içtenlik ile teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan bana maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Nisan, 2019

Betül ÇELİK

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ . . . . .	v
İÇİNDEKİLER . . . . .	vi
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ . . . . .	viii
ÖZET . . . . .	ix
ABSTRACT . . . . .	x
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	2
3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HODOGRA F EĞRİLERİ . . . . .	13
4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA PİSAGOR-HODOGRA F EĞRİLERİ . . . . .	15
4.1. Dönme Altında Pisagor-Hodograf Eğrileri . . . . .	22
4.2. Pisagor-Hodograf Eğrileri ile Helis Eğrilerinin İlişkisi . . . . .	23
5. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .	28
KAYNAKLAR . . . . .	29
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	31

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 4.1. $\tilde{\beta}$ eğrisi .....	27
Şekil 4.2. $\tilde{\beta}$ eğrisinin hodografi .....	27





## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}[t]$	: Reel katsayılı polinomlar kümesi
$\mathbb{E}^n$	: $n$ -boyutlu Öklid uzayı
$\langle, \rangle$	: $\mathbb{E}^n$ de iç çarpım
$\ \cdot\ $	: $\mathbb{E}^n$ de norm
$\wedge$	: $\mathbb{E}^4$ de vektörel çarpım
$\gamma$	: $\mathbb{E}^n$ de eğri
$C^k$	: $k$ . mertebeden diferansiyellenebilen eğri
$C^\infty$	: Her mertebeden diferansiyellenebilen eğrilerin sınıfları
$T$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin teğet vektör alanı
$N$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin asli normal vektör alanı
$B_1$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin birinci binormal vektör alanı
$B_2$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin ikinci binormal vektör alanı
$\kappa$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin birinci eğriliği
$\tau$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin ikinci eğriliği
$\sigma$	: $\mathbb{E}^4$ de bir eğrinin üçüncü eğriliği
$\nabla$	: Gradient operatörü
$A$	: $\mathbb{E}^4$ de hiperyüzey
$S^3$	: $\mathbb{E}^4$ de birim küre
$Z$	: $\mathbb{E}^4$ de tor yüzeyi
$\alpha$	: $\mathbb{E}^4$ de polinom eğrisi
$\tilde{\alpha}$	: $\mathbb{E}^4$ de $\alpha$ polinom eğrisinin dönme altındaki görüntü eğrisi
$\alpha'$	: $\alpha$ eğrisinin hodografi
$\nu$	: $\alpha$ eğrisinin hodograf polinomu
$\beta$	: $\alpha$ polinom helis eğrisinin izdüşüm eğrisi
$\tilde{\beta}$	: $\beta$ eğrisinin dönme altındaki görüntü eğrisi
$\tilde{\tilde{\beta}}$	: $\mathbb{E}^3$ de eğri

Kısaltmalar	Açıklama
PH	: Pisagor-Hodograf Eğrisi
RPH	: Rasyonel Pisagor-Hodograf Eğrisi

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA PİSAGOR-HODOGRAF EĞRİLERİ VE UYGULAMALARI

Betül ÇELİK

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA

Bu yüksek lisans tezinde, 4-boyutlu Öklid uzayında Pisagor-Hodograf eğrileri ve uygulamaları incelenmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin hodografları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında Pisagor-Hodograf eğrisinin tanımı verilip özellikleri incelenmiş, Pisagor-Hodograf eğrileri ile helis eğrileri arasındaki ilişki verilmiştir. Son bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Nisan 2019, 42 Sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Polinom Eğrisi, Helis Eğrisi, Hodograf, Pisagor-Hodograf Eğrisi, Rasyonel Pisagor-Hodograf Eğrisi.

## **ABSTRACT**

**MSc THESIS**

# **PYTHAGOREAN-HODOGRAPH CURVES IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE AND ITS APPLICATIONS**

**Betül ÇELİK**

**Kırşehir Ahi Evran University  
Science and Engineering Institute  
Mathematics Department**

**Supervisor: Asst. Prof. Bülent ALTUNKAYA**

In this thesis, Pythagorean-Hodograph curves and their applications in 4-dimensional Euclidean space were examined. This thesis consists of five sections. The first section is reserved for the introduction. In the second section, the basic concepts for the thesis are given. In the third section, hodograph curves in 4-dimensional Euclidean space were investigated. In the fourth section, the definition of Pythagorean-Hodograph curve in 4-dimensional Euclidean space is given and some properties of these curves are examined, in addition, the relationship between helices and Pythagorean-Hodograph curves is given. The last section is devoted to results and discussion.

April 2019, 42 Pages.

**Keywords:** Polynomial Curve, Helix Curve, Hodograph, Pythagorean-Hodograph Curve, Rational Pythagorean-Hodograph Curve.

## 1. GİRİŞ

Polinom eğrileri geometri alanında oldukça çalışılan konulardandır. Bu eğriler bilgisayar, robotik, dizayn, navigasyon gibi birçok alanda da sıklıkla kullanılmaktadır. Hodograf kavramı ilk olarak kuaterniyonları da bilim dünyasına kazandıran W.R. Hamilton tarafından tanımlanmıştır [7]. Farouki ve Sakkalis, Kubota'nın polinomlar için Pisagor koşulunu verdiği çalışmasından faydalanarak 2-boyutlu Öklid uzayında Pisagor-Hodograf (PH) eğrilerinin tanımını yapmışlar ve düzlemsel PH eğrileri için karakterizasyon vermişlerdir [2, 9]. Daha sonra Farouki ve Sakkalis, 3-boyutlu Öklid uzayında da PH eğrileri için karakterizasyonlar vermişlerdir [3]. Ayrıca, Farouki PH eğrilerinin helis eğrileri ile olan ilişkisini vermiştir [4]. Daha sonra Larson rasyonel polinom eğrileri üzerine çalışmıştır [11]. Bunlara ek olarak, Altunkaya ve Kula  $n$ -boyutlu Öklid uzayında polinom helisleri incelemiş, polinom eğrilerinden helis ve polinom helislerden rasyonel helis oluşturmak için bir yöntem vermişlerdir [1].

Bu tezde yukarıdaki çalışmalardan yararlanılarak 4-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin hodograf-ları, Pisagor-Hodograf (PH) eğrileri ve Rasyonel Pisagor-Hodograf (RPH) eğrileri çalışıldı. Ayrıca 4-boyutlu Öklid uzayında helis eğrileri ve PH eğrileri arasındaki ilişki incelendi.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.**  $V$ , boş kümeden farklı bir küme ve  $\mathbb{K}$  bir cisim olsun. Aşağıda verilen önermeler doğru ise  $V$  kümesi  $\mathbb{K}$  cismi üstünde bir vektör uzayıdır, denir.

- 1)  $V$  kümesinde toplama işlemi  $+$  ile tanımlanmıştır ve  $(V, +)$  değişmeli gruptur.
- 2)  $\mathbb{K} \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(a, v) \rightarrow av$  biçiminde tanımlanan fonksiyon, skalerle çarpma işlemidir ve aşağıdaki önermeleri doğrular.

$$i) \forall a \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V \text{ için, } a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2.$$

$$ii) \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v_1 \in V \text{ için, } (a + b)v_1 = av_1 + bv_1.$$

$$iii) \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v_1 \in V \text{ için, } (ab)v_1 = a(bv_1).$$

$$iv) \mathbb{K} \text{ nin çarpmaya göre birim elemanı } 1 \text{ olsun. Bu durumda, } \forall v_1 \in V \text{ için } 1v_1 = v_1.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ise bu vektör uzayına reel vektör uzayı denir.  $V$  nin elemanlarına vektör,  $\mathbb{R}$  nin elemanlarına skalar denir [15].

**Tanım 2.2.**  $V$ ,  $\mathbb{K}$  cismi üstünde bir vektör uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeleri doğrulayan,

$$i) \forall v_1 \in V, v_1 \neq 0 \Rightarrow \langle v_1, v_1 \rangle > 0$$

$$ii) \forall v_1, v_2 \in V, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$$

$$iii) \forall v_1, v_2, v_3 \in V, \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$

$$iv) \forall a \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V, \langle av_1, v_2 \rangle = a \langle v_1, v_2 \rangle$$

$f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(v_1, v_2) \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle$  fonksiyonuna  $V$  üstünde bir iç çarpım denir.  $V$  vektör uzayı üstünde bir iç çarpım varsa, vektör uzayına iç çarpım uzayı denir [15].

**Tanım 2.3.**  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi olmak üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

eşitliği ile tanımlı  $\mathbb{R}^n$  kümesinde toplama işlemi,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, y_n + y_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır.  $\lambda \in \mathbb{R}$  için skalarla çarpma işlemi,

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre  $\mathbb{R}^n$  kümesi  $\mathbb{R}$  cismi üstünde bir vektör uzayı olur.

$(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  için,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu bir iç çarpımdır. Bu fonksiyona  $\mathbb{R}^n$  üzerinde standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir.  $\mathbb{R}^n$ , Öklid iç çarpım fonksiyonu ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon  $\mathbb{R}^n$  üzerinde bir normdur. Buna göre  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon  $\mathbb{R}^n$  uzayında bir metriktir. Buna göre  $\mathbb{R}^n$  bir metrik uzaydır. Bu metrik ile birlikte  $\mathbb{R}^n$  uzayına Öklid uzayı denir ve  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir [16].

**Teorem 2.1.**  $x, y$  sıfırdan farklı ve  $x, y \in \mathbb{R}^n$  için,

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Burada  $\theta$ ,  $x$  ile  $y$  arasındaki açıdır [16].

**Tanım 2.4.**  $x_j : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_j$  fonksiyonuna,  $\mathbb{E}^n$  uzayında  $j$  inci dik koordinat fonksiyonu denir. Koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sıralı  $n$  lisine,  $\mathbb{E}^n$  üstünde dik koordinat sistemi (Öklidyen koordinat sistemi) denir [16].

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4$  üstünde dik koordinat sistemi olsun. Sırasıyla  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4$  düzlemlerine göre  $\theta$  açılık dönme matrisleri

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

dir [8].

**Tanım 2.5.**  $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonunun  $\mathbb{E}^n$  nin her bir noktasında  $k$ . basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise  $f$  fonksiyonu  $C^k$  sınıfındadır, denir [16].

**Tanım 2.6.**  $I, \mathbb{R}$  nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}$$

biçiminde düzgün ( $C^\infty$  sınıfından) bir  $\gamma$  dönüşümüne,  $\mathbb{E}^n$  uzayında bir eğri denir [16].

**Tanım 2.7.**  $\mathbb{E}^n$  de  $M$  eğrisi  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  olmak üzere  $\gamma(t) \in M$  ve

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \gamma'(t) = \left( \frac{d\gamma_1(t)}{dt}, \frac{d\gamma_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n(t)}{dt} \right)$$

dir.  $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in T_{E^n}(t)$  tanjant vektörüne,  $M$  eğrisinin  $t \in I$  parametre değerine karşılık gelen  $\gamma(t)$  noktasında,  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [5].

**Tanım 2.8.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned}\|\gamma'\| : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\gamma'\|(t) = \|\gamma'(t)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı  $\|\gamma'\|$  fonksiyonuna,  $\gamma$  eğrisinin skalar hız fonksiyonu ve  $\|\gamma'(t)\|$  reel sayısına da  $\gamma$  nın  $\gamma(t)$  noktasındaki skalar hızı denir [5].



**Tanım 2.9.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin. Eğer  $\forall s \in I$  için,

$$\left\| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right\| = 1$$

ise  $\gamma$  eğrisi birim hızlı eğridir denir ve  $s$  parametresine yay parametresi adı verilir [5].

**Tanım 2.10.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin.  $a, b \in I$  olmak üzere,  $a$  dan  $b$  ye  $\gamma$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu

$$s(t) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du, \quad u \in I$$

dır [16].

**Tanım 2.11.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin. Her  $t \in I$  için  $\gamma'(t) \neq 0$  ise  $\gamma$  eğrisine regüler (düzenli) eğri denir [5].

**Tanım 2.12.**  $M \subset \mathbb{E}^n$  eğrisi  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,  $\psi = \{\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(r)}\}$  sistemi lineer bağımsız ve  $\forall \gamma^{(k)}, k > r$  için  $\gamma^{(k)} \in Sp\{\psi\}$  olmak üzere,  $\psi$  den elde edilen  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  ortonormal sistemine,  $M$  eğrisinin Serret-Frenet  $r$ -ayaklı alanı ve  $m \in M$  için  $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$  ye ise  $m \in M$  noktasındaki Serret-Frenet  $r$ -ayaklısı denir. Her bir  $V_i, 1 \leq i \leq r$ , ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [5].

Bu çalışmada  $\mathbb{E}^4$  de Serret-Frenet 4-ayaklı alanı  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  yerine  $\{T, N, B_1, B_2\}$  sembolleri kullanılacaktır.

**Tanım 2.13.**  $M \subset \mathbb{E}^n$  eğrisi  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $t \in I$  için  $\gamma(t)$  noktasındaki Serret-Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$  olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r,$$

$$t \rightarrow k_i(t) = \langle V_i'(t), V_{i+1}(t) \rangle$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu ve  $t \in I$  için  $k_i(t)$  reel sayısına da  $\gamma(t)$  noktasında  $M$  nin  $i$ -yinci eğriliği denir [5].

Bu çalışmada  $\mathbb{E}^4$  de  $k_1, k_2, k_3$  eğrilikleri yerine  $\kappa, \tau, \sigma$  sembolleri kullanılacaktır.

**Tanım 2.14.**  $M \subset \mathbb{E}^n$  eğrisi  $(I, \gamma)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $\gamma(t)$  eğrisinin teğet vektör alanı sabit bir  $v$  vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa,  $M$  ye helis denir [5].

**Teorem 2.2.**  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisinin Serret-Frenet vektör alanları  $T, N, B$  ve eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$  olsun.

$$\begin{aligned} T' &= \|\gamma'\| \kappa N \\ N' &= \|\gamma'\| (-\kappa T + \tau B) \\ B' &= -\|\gamma'\| \tau N \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir [16].

**Teorem 2.3.**  $\kappa > 0$  için  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi genel helistir ancak ve ancak  $\frac{\tau}{\kappa}$  sabittir [10].

**İspat.**  $\Rightarrow \gamma$  eğrisi genel helis olsun.  $\langle T, v \rangle = \|T\| \|v\| \cos \theta$  olacak şekilde sabit bir  $v$  doğrultusu ve  $\theta$  sabit açısı vardır.

$$\langle T', v \rangle = 0$$

dır. (2.1) eşitliğinden

$$\langle N, v \rangle = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla  $N \perp v$  tir. Bu ifadeden  $v$  nun,  $T$  ile  $B$  nin gerdiği düzlemde olduğu anlaşılır.

$$v = T \cos \theta + B \sin \theta$$

$$0 = T' \cos \theta + B' \sin \theta$$

$$0 = \kappa N \cos \theta - \tau N \sin \theta$$

$$\tau N \sin \theta = \kappa N \cos \theta$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = \text{sabit}$$

olacak şekilde bir  $\theta$  açısı vardır.  $\mathbb{E}^4$  de bu durumun olma şartı yoktur.

$\Leftrightarrow \gamma$  eğrisi için  $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$  olsun.  $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$  olarak alınsın.

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\tau \sin \theta = \kappa \cos \theta$$

$$\|\gamma'\| \tau N \sin \theta = \|\gamma'\| \kappa N \cos \theta$$

olur. (2.1) eşitliği kullanılarak

$$-B' \sin \theta = T' \cos \theta$$

$$0 = T' \cos \theta + B' \sin \theta$$

$$v = T \cos \theta + B \sin \theta$$

elde edilir. Bu ifadeden  $v$  in  $T$  ile  $B$  nin gerdiği düzlemde olduğu anlaşılır. Dolayısıyla  $v \perp N$  olur.

$\langle N, v \rangle = 0$  dır ve  $\langle \|\gamma'\| \kappa N, v \rangle = 0$  olur. Bu durumda  $\langle T, v \rangle = \text{sabit}$  olur. Dolayısıyla  $\gamma$  eğrisi bir helistir.

Tanım 2.12 ve Tanım 2.13 yardımıyla bir eğrinin Serret-Frenet vektör alanları ve eğrilikleri, Gramm-Schmidth yöntemi kullanılarak hesaplanabilir.  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir eğrinin Serret-Frenet vektör alanlarını ve eğriliklerini hesaplamak için Mağden farklı bir yöntem kullanmıştır. Bunu yapmak için ilk önce  $\mathbb{E}^4$  de vektörel çarpım olarak adlandırdığı aşağıdaki tanımı vermiştir [12].

**Tanım 2.15.**  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{E}^4$  ve  $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{E}^4$  de ikişer ikişer dik vektörler olmak üzere,

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

determinantına  $\mathbb{E}^4$  de vektörel çarpım denir.

Daha sonra Mağden bu tanımdan faydalanarak  $\mathbb{E}^4$  de herhangi bir regüler eğri için aşağıdaki teoremi vermiştir [12].

**Teorem 2.4.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  regüler eğrisi için Serret-Frenet ve eğrilik denklemleri,

$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$

$$N = \frac{\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma'}{\|\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma'\|}$$

$$B_1 = \mu B_2 \wedge T \wedge N$$

$$B_2 = \mu \frac{T \wedge N \wedge \gamma'''}{\|T \wedge N \wedge \gamma'''\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma'\|}{\|\gamma'\|^4}$$

$$\tau = \frac{\|T \wedge N \wedge \gamma'''\| \|\gamma'\|}{\|\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma'\|}$$

$$\sigma = \frac{\langle \gamma^{(IV)}, B_2 \rangle}{\|T \wedge N \wedge \gamma'''\| \|\gamma'\|}$$

dir. Burada  $\mu \in \{-1, 1\}$ ,  $[T, N, B_1, B_2]$  matrisinin determinantını  $+1$  yapan sayıdır [12].

**Tanım 2.16.**  $\mathbb{E}^4$  de 3-boyutlu bir yüzey,  $\mathbb{E}^4$  deki boş olmayan bir  $A$  kümesine denir. Öyle ki bu  $A$  kümesi,

$$A = \left\{ v \in V \subset \mathbb{E}^4 \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}, V \text{ bir açık alt küme} \right\}$$

$$v \rightarrow f(v) = c$$

$\forall p \in A$  için  $\nabla f|_p \neq 0$  olarak tanımlanır. Bu yüzeye hiperyüzey adı verilir [16].

**Tanım 2.17.**  $C \in \mathbb{E}^4$  olmak üzere,

$$d(U, C) = \|U - C\| = r$$

eşitliğini sağlayan  $U \in \mathbb{E}^4$  noktalarının kümesine  $C$  merkezli,  $r \in \mathbb{R}$  yarıçaplı 3-boyutlu hiperküre denir ve  $\mathbf{S}^3$  ile gösterilir [6].

**Tanım 2.18.**  $\mathbf{S}^3 = \{U \in \mathbb{E}^4 \mid \langle U - C, U - C \rangle = 1\}$  biçiminde tanımlanan hiperküreye  $\mathbb{E}^4$  de birim küre adı verilir [6].

**Tanım 2.19.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  bir eğri ve  $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$  de bir hiperküre olsun. Eğer  $\gamma \subset \mathbf{S}^3$  ise  $\gamma$  eğrisine  $\mathbb{E}^4$  uzayında küresel eğri denir [6].

**Tanım 2.20.**  $\mathbb{E}^4$  de tor yüzeyi,

$$\left\{ \mathbf{Z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \mid z_1^2 + z_2^2 = 1, z_3^2 + z_4^2 = 1 \right\}$$

olarak ifade edilir [5].

**Tanım 2.21.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  bir eğri ve  $Z \subset \mathbb{E}^4$  de bir tor olsun. Eğer  $\gamma \subset Z$  ise  $\gamma$  eğrisine  $\mathbb{E}^4$  de tor yüzeyi üzerinde yatan eğri denir [5].

**Tanım 2.22.**  $n \in \mathbb{N}_0$  ve  $a_i \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $0 \leq i \leq n$ ,

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, a_n \neq 0$$

biçimindeki  $t$  değişkenine bağlı fonksiyona,  $n$ . dereceden bir polinom denir.

$a_0 \neq 0$  ve  $1 \leq i \leq n$  olmak üzere  $a_i = 0$  ise bu polinoma sabit polinom adı verilir [11].

**Tanım 2.23.**  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  eğrisinin  $1 \leq i \leq n$  için  $\alpha_i(t)$  değerleri birer polinom ise  $\alpha(t) \in \mathbf{R}[t]$  eğrisine  $n$ -boyutlu polinom eğrisi denir [11].

**Tanım 2.24.**  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  eğrisi için,

$$\alpha_1(t) = \frac{a_1(t)}{b_1(t)}, \alpha_2(t) = \frac{a_2(t)}{b_2(t)}, \dots, \alpha_n(t) = \frac{a_n(t)}{b_n(t)}$$

olacak şekilde  $\text{ebob}(a_i(t), b_i(t)) = c_i$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$  koşulunu sağlayan  $a_i(t)$  ve  $b_i(t)$ ,  $k$ . dereceden polinomlar mevcut ise  $\alpha(t) \in \mathbf{R}[t]$  eğrisine  $n$ -boyutlu rasyonel polinom eğrisi denir [11].

**Tanım 2.25.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$   $n$ -boyutlu polinom eğrisi için,

$$\text{max} = \{\text{der}(\alpha_1(t)), \text{der}(\alpha_2(t)), \dots, \text{der}(\alpha_n(t))\}$$

değerine  $\alpha$  polinom eğrisinin derecesi denir [11].

**Tanım 2.26.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$   $n$ -boyutlu polinom eğrisinin hodografi  $\alpha$  eğrisinin türevi olan  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$  vektör alanıdır [2].

**Tanım 2.27.**  $\alpha(t)$  polinom eğrisi olsun.  $a, b \in I$  ve  $\nu(t)$  bir polinom olmak üzere,  $\alpha(t)$  eğrisinin yay uzunluğu,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \nu(t) dt, \quad t \in I$$

dir [2].



### 3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HODOGRAF EĞRİLERİ

Bu bölümde hodograf eğrilerinin tarihsel gelişimi anlatılıp, bazı hodograf eğrilerine ait karakterizasyonlar ve örnekler verilecektir.

Hodograf kavramı ilk olarak 1847 yılında, kuaterniyonları da bilim dünyasına kazandıran W.R. Hamilton tarafından tanımlanmıştır [7]. Hamilton hodograf kavramını kullanarak gezegenlerin güneş etrafındaki yörüngelerinin eliptik olduğunu yeni bir yöntemle göstermiştir. Bu çalışmasında Hamilton, bir parçacığın hız-zaman fonksiyonunun grafiğini, parçacığın hodografi olarak almıştır. Bunu yaparken hızı, hodograf üzerindeki bir noktanın konum vektörü olarak göstermiştir. Eğer hız fonksiyonu zamana bağlı ise buradan yörüneye, integral alınarak direkt geçilebilir.

**Lemma 3.1.**  $\mathbb{E}^4$  de birim hızlı tüm eğrilerin hodografi küresel bir eğridir.

**İspat.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  birim hızlı bir eğri ise  $\|\gamma'(s)\| = 1$  dir. Dolayısıyla Tanım 2.19 dan  $\gamma'(s) \subset \mathbb{S}^3$  tür. Yani  $\gamma$  eğrisinin hodografi,  $\mathbb{S}^3$  üzerinde yatan küresel bir eğridir.

**Örnek 3.1.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  birim hızlı bir eğri olsun.  $r_1, r_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  ve  $r_1^2 m_2^2 + r_2^2 m_1^2 = m_1^2 m_2^2 (r_1^2 + r_2^2) \neq 0$  olmak üzere,

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \left( \frac{r_1}{m_1} \sin(m_1 s), -\frac{r_1}{m_1} \cos(m_1 s), \frac{r_2}{m_2} \sin(m_2 s), -\frac{r_2}{m_2} \cos(m_2 s) \right)$$

eğrisi için,

$$\|\gamma(s)\| = 1, \quad \left\| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right\| = 1$$

olduğundan  $\gamma(s)$  ve hodografi olan

$$\frac{d\gamma(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} (r_1 \cos(m_1 s), r_1 \sin(m_1 s), r_2 \cos(m_2 s), r_2 \sin(m_2 s))$$

eğrileri  $\mathbb{S}^3$  üzerinde yatan küresel eğrilerdir [13].



**Örnek 3.2.**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  bir eğri olsun.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$  ve  $a^2 + b^2 = 1$  olmak üzere,

$$\gamma(s) = (\cos(as), \sin(as), \cos(bs), \sin(bs))$$

için,

$$\gamma_1^2(s) + \gamma_2^2(s) = \cos^2(as) + \sin^2(as) = 1$$

$$\gamma_3^2(s) + \gamma_4^2(s) = \cos^2(bs) + \sin^2(bs) = 1$$

olduğundan  $\gamma(s)$  eğrisi  $\mathbf{Z}$  üzerinde yatar.

$$\left\| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right\| = 1$$

olduğundan  $\gamma(s)$  eğrisinin hodografi,

$$\frac{d\gamma(s)}{ds} = (-a \sin(as), a \cos(as), -b \sin(bs), b \cos(bs))$$

$\mathbf{S}^3$  üzerinde yatan küresel bir eğridir [13].

#### 4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA PİSAGOR-HODOGRAFI EĞRİLERİ

**Tanım 4.1.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$   $n$ -boyutlu polinom eğrisinin hodografı  $\alpha'(t)$ ,  $\nu(t)$  bir polinom olmak üzere,

$$\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 + \dots + \alpha'_n(t)^2 = \nu(t)^2$$

eşitliğini sağlıyorsa  $\alpha$  eğrisine  $n$ -boyutlu Pisagor-Hodograf eğrisi denir. Kısaca PH ile gösterilir [2].

**Tanım 4.2.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$  4-boyutlu polinom eğrisinin hodografı  $\alpha'(t)$ ,  $\nu(t)$  bir polinom olmak üzere,

$$\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 + \alpha'_3(t)^2 + \alpha'_4(t)^2 = \nu(t)^2$$

eşitliğini sağlıyorsa  $\alpha$  eğrisine 4-boyutlu PH eğrisi denir [2].

**Teorem 4.1.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$  polinom eğrisinin hodografı,  $\text{ebob}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t), \alpha'_4(t)) = w(t)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= [u^2(t) + v^2(t)] w(t) \\ \alpha'_2(t) &= [\sqrt{2}(u(t)q(t) + v(t)p(t))] w(t) \\ \alpha'_3(t) &= [\sqrt{2}(v(t)q(t) - u(t)p(t))] w(t) \\ \alpha'_4(t) &= [p^2(t) + q^2(t)] w(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

aralarında asal  $u(t), v(t), p(t), q(t)$  polinomları yardımıyla yazılabiliyorsa,  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**İspat.**  $\alpha$  eğrisi (4.1) eşitliğini sağlasın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\|^2 &= [u^2(t) + v^2(t)]^2 w(t)^2 + [\sqrt{2}(u(t)q(t) + v(t)p(t))]^2 w(t)^2 \\
&+ [\sqrt{2}(v(t)q(t) - u(t)p(t))]^2 w(t)^2 + [p^2(t) + q^2(t)]^2 w(t)^2 \\
&= [u^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + v^4(t)]w^2(t) + [2u^2(t)q^2(t) + 4u(t)v(t)p(t)q(t) \\
&+ 2v^2(t)p^2(t)]w^2(t) + [2v^2(t)q^2(t) - 4u(t)v(t)p(t)q(t) + 2u^2(t)p^2(t)]w^2(t) \\
&+ [p^4(t) + 2p^2(t)q^2(t) + q^4(t)]w^2(t) \\
&= w^2(t)[u^4(t) + v^4(t) + p^4(t) + q^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + 2u^2(t)p^2(t) + 2u^2(t)q^2(t) \\
&+ 2v^2(t)p^2(t) + 2v^2(t)q^2(t) + 2p^2(t)q^2(t)] \\
&= w(t)^2 [u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\|\alpha'(t)\| = \nu(t) = w(t) [u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]$$

olacak şekilde bir  $\nu(t)$  polinomu vardır. Tanım 4.2 den dolayı  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**Örnek 4.1.**  $\alpha(t) = \left( \frac{5}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \sqrt{2}\left(\frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4\right), \sqrt{2}\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4\right), \frac{1}{3}t^6 \right)$  polinom eğrisinin hodografi olan,

$$\alpha'(t) = (5t^3 + 2t^2 + t, \sqrt{2}(3t^4 + t^3), \sqrt{2}(t^4 - t^3), 2t^5)$$

eğrisi

$$u(t) = t + 1, \quad v(t) = 2t, \quad p(t) = t^2, \quad q(t) = t^2, \quad w(t) = t$$

olmak üzere Teorem 4.1 deki koşulu sağlar. Dolayısıyla  $\alpha$  bir PH eğrisidir.

Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 &= (5t^3 + 2t^2 + t)^2 + (\sqrt{2}(3t^4 + t^3))^2 + (\sqrt{2}(t^4 - t^3))^2 + (2t^5)^2 \\ &= t^2(2t^4 + 5t^2 + 2t + 1)^2 \\ &= \nu^2(t)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla  $\nu(t) = 2t^5 + 5t^3 + 2t^2 + t$  polinomu elde edilir.

$\alpha$  eğrisinin eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{2\sqrt{4 + 4t + 5t^2}}{\nu(t)^2} \\ \tau(t) &= \frac{2\sqrt{36 + 48t + 80t^2 + 192t^3 + 384t^4 + 512t^5 + 540t^6 + 300t^7 + 141t^8}}{t(4 + 4t + 5t^2)\nu(t)^2} \\ \sigma(t) &= \frac{12(2 + t)\sqrt{4 + 4t + 5t^2}}{t(36 + 48t + 80t^2 + 192t^3 + 384t^4 + 512t^5 + 540t^6 + 300t^7 + 141t^8)}\end{aligned}$$

dir.

**Teorem 4.2.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$  polinom eğrisinin hodografi,

$ebob(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t), \alpha'_4(t)) = 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= u^2(t) + v^2(t) \\ \alpha'_2(t) &= \sqrt{2}(u(t)q(t) + v(t)p(t)) \\ \alpha'_3(t) &= \sqrt{2}(v(t)q(t) - u(t)p(t)) \\ \alpha'_4(t) &= p^2(t) + q^2(t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

aralarında asal  $u(t), v(t), p(t), q(t)$  polinomları yardımıyla yazılabiliyorsa,  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**İspat.**  $\alpha$  eğrisi (4.2) eşitliğini sağlasın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\|^2 &= [u^2(t) + v^2(t)]^2 + [\sqrt{2}(u(t)q(t) + v(t)p(t))]^2 + [\sqrt{2}(v(t)q(t) - u(t)p(t))]^2 \\
&\quad + [p^2(t) + q^2(t)]^2 \\
&= [u^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + v^4(t)] + [2u^2(t)q^2(t) + 4u(t)v(t)p(t)q(t) + 2v^2(t)p^2(t)] \\
&\quad + [2v^2(t)q^2(t) - 4u(t)v(t)p(t)q(t) + 2u^2(t)p^2(t)] + [p^4(t) + 2p^2(t)q^2(t) + q^4(t)] \\
&= u^4(t) + v^4(t) + p^4(t) + q^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + 2u^2(t)p^2(t) + 2u^2(t)q^2(t) \\
&\quad + 2v^2(t)p^2(t) + 2v^2(t)q^2(t) + 2p^2(t)q^2(t) \\
&= [u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\|\alpha'(t)\| = \nu(t) = [u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]$$

olacak şekilde bir  $\nu(t)$  polinomu vardır. Tanım 4.2 den dolayı  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**Örnek 4.2.**  $\alpha(t) = \left(\frac{5}{3}t^3 + t^2 + t, \sqrt{2}\left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3\right), \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right), \frac{2}{5}t^5\right)$  polinom eğrisinin hodografi olan,

$$\alpha'(t) = (5t^2 + 2t + 1, \sqrt{2}(3t^3 + t^2), \sqrt{2}(t^3 - t^2), 2t^4)$$

eğrisi,

$$u(t) = t + 1, \quad v(t) = 2t, \quad p(t) = t^2, \quad q(t) = t^2$$

olmak üzere Teorem 4.2 deki koşulu sağlar. Dolayısıyla  $\alpha$  bir PH eğrisidir.

Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\|^2 &= (5t^2 + 2t + 1)^2 + (\sqrt{2}(3t^3 + t^2))^2 + (\sqrt{2}(t^3 - t^2))^2 + (2t^4)^2 \\
&= (2t^4 + 5t^2 + 2t + 1)^2 \\
&= \nu^2(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla  $\nu(t) = 2t^4 + 5t^2 + 2t + 1$  polinomu elde edilir.

$\alpha$  eğrisinin eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{2t\sqrt{4+4t+5t^2}}{\nu(t)^2} \\ \tau(t) &= \frac{2\sqrt{36+48t+80t^2+192t^3+384t^4+512t^5+540t^6+300t^7+141t^8}}{(4+4t+5t^2)\nu(t)^2} \\ \sigma(t) &= \frac{12(2+t)\sqrt{4+4t+5t^2}}{36+48t+80t^2+192t^3+384t^4+512t^5+540t^6+300t^7+141t^8}\end{aligned}$$

dir.

**Teorem 4.3.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$  polinom eğrisinin hodografi,  $ebob(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t), \alpha'_4(t)) = 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t) \\ \alpha'_2(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t)) \\ \alpha'_3(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)) \\ \alpha'_4(t) &= u^2(s) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

aralarında asal  $u(t), v(t), p(t), q(t)$  polinomları yardımıyla yazılabiliyorsa,  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**İspat.**  $\alpha$  eğrisi (4.3) eşitliğini sağlasın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 &= [u^2(s) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]^2 + [2(u(t)q(t) + v(t)p(t))]^2 \\ &+ [2(v(t)q(t) - u(t)p(t))]^2 + [u^2(s) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]^2 \\ &= [u^4(t) + v^4(t) + p^4(t) + q^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) - 2u^2(t)p^2(t) \\ &- 2u^2(t)q^2(t) - 2v^2(t)p^2(t) - 2v^2(t)q^2(t) + 2p^2(t)q^2(t)] \\ &+ [4u^2(t)q^2(t) + 8u(t)v(t)p(t)q(t) + 4v^2(t)p^2(t)] \\ &+ [4v^2(t)q^2(t) - 8u(t)v(t)p(t)q(t) + 4u^2(t)p^2(t)] \\ &+ [u^4(t) + v^4(t) + p^4(t) + q^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + 2u^2(t)p^2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2u^2(t)q^2(t) + 2v^2(t)p^2(t) + 2v^2(t)q^2(t) + 2p^2(t)q^2(t)] \\
& = 2[u^4(t) + v^4(t) + p^4(t) + q^4(t) + 2u^2(t)v^2(t) + 2u^2(t)p^2(t) \\
& + 2u^2(t)q^2(t) + 2v^2(t)p^2(t) + 2v^2(t)q^2(t) + 2p^2(t)q^2(t)] \\
& = 2[u^2(s) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\|\alpha'(t)\| = \nu(t) = \sqrt{2} [u^2(s) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)]$$

olacak şekilde bir  $\nu(t)$  polinomu vardır. Tanım 4.2 den dolayı  $\alpha$  eğrisi  $\mathbb{E}^4$  uzayında bir PH eğrisidir.

**Örnek 4.3.**  $\alpha(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}t^3}{15}(5 + 3t^2), t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}t^3}{15}(5 + 3t^2) \right)$  polinom eğrisinin hodografi,

$$\alpha'(t) = \left( -\frac{-1 + 2t^2 + 2t^4}{\sqrt{2}}, 2t, 2t^2, \frac{1 + 2t^2 + 2t^4}{\sqrt{2}} \right)$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\nu(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\alpha$  bir PH eğrisidir.

$\alpha$  eğrisinin eğrilikleri,

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{1 + 4t^2}}{\nu(t)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1 + 6t^2 + 18t^4 + 32t^6 + 18t^8}}{(1 + 4t^2)\nu(t)^2}$$

$$\sigma(t) = \frac{6t\sqrt{1 + 4t^2}}{1 + 6t^2 + 18t^4 + 32t^6 + 18t^8}$$

dir. Teorem 4.1, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 de verilen karakterizasyonların dışında farklı karakterizasyonlar da elde edilebilir.

**Tanım 4.3.**  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$  4-boyutlu rasyonel polinom eğrisinin hodografi,  $\nu(t)$  bir rasyonel polinom olmak üzere,

$$\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2 + \alpha_4'(t)^2 = \nu(t)^2$$

eşitliğini sağlıyorsa  $\alpha$  eğrisine 4-boyutlu Rasyonel Pisagor-Hodograf eğrisi denir. Kısaca RPH ile gösterilir [2].

**Örnek 4.4.**  $\alpha(t) = \left( \frac{6}{-6+t^4}, -\frac{\sqrt{2}t(-3+t^2)}{-6+t^4}, \frac{3\sqrt{2}t^2}{-6+t^4}, \frac{\sqrt{2}t(3+t^2)}{-6+t^4} \right)$  rasyonel polinom eğrisinin hodografi,

$$\alpha'(t) = \left( -\frac{24t^3}{(-6+t^4)^2}, \frac{\sqrt{2}(-18+18t^2-9t^4+t^6)}{(-6+t^4)^2}, -\frac{6\sqrt{2}t(6+t^4)}{(-6+t^4)^2}, -\frac{\sqrt{2}(18+18t^2+9t^4+t^6)}{(-6+t^4)^2} \right)$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\nu(t) = \frac{2(18+18t^2+9t^4+t^6)}{(-6+t^4)^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\alpha$  bir RPH eğrisidir.

$\alpha$  eğrisinin eğrilikleri,

$$\kappa(t) = \frac{3(-6+t^4)^3}{\sqrt{2}(18+18t^2+9t^4+t^6)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{3(-6+t^4)^2\sqrt{36+144t^2+84t^4+16t^6+t^8}}{\sqrt{2}(18+18t^2+9t^4+t^6)^2}$$

$$\sigma(t) = \frac{2(-6+t^4)^2}{36+144t^2+84t^4+16t^6+t^8}$$

dir.



#### 4.1. Dönme Altında Pisagor-Hodograf Eğrileri

Dönme altında bir eğrinin hızının invariant kaldığı bilinmektedir. Dolayısıyla, dönme altında  $\nu(t)$  polinomu invarianttır. Örneğin,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$ ,  $\mathbb{E}^4$  de bir PH eğrisi olsun.  $\alpha$  eğrisi  $x_1x_4$  düzlemi etrafında  $\theta$  radyan döndürülürse,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1(t) \\ \tilde{\alpha}_2(t) \\ \tilde{\alpha}_3(t) \\ \tilde{\alpha}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= (\tilde{\alpha}_1(t), \tilde{\alpha}_2(t), \tilde{\alpha}_3(t), \tilde{\alpha}_4(t)) \\ &= (\alpha_1(t) \cos \theta + \alpha_4(t) \sin \theta, \alpha_2(t), \alpha_3(t), -\alpha_1(t) \sin \theta + \alpha_4(t) \cos \theta) \end{aligned}$$

eğrisi elde edilir.

$\tilde{\alpha}(t)$  eğrisinin hodografi,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(t) &= (\tilde{\alpha}'_1(t), \tilde{\alpha}'_2(t), \tilde{\alpha}'_3(t), \tilde{\alpha}'_4(t)) \\ &= (\alpha'_1(t) \cos \theta + \alpha'_4(t) \sin \theta, \alpha'_2(t), \alpha'_3(t), -\alpha'_1(t) \sin \theta + \alpha'_4(t) \cos \theta) \end{aligned}$$

eğrisidir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\alpha}'(t)\|^2 &= \alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 + \alpha'_3(t)^2 + \alpha'_4(t)^2 \\ &= \nu(t)^2 \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\|\tilde{\alpha}'(t)\| = \nu(t)$  bulunur [14].

**Örnek 4.1.1.**  $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5)$  eğrisi için,

$\alpha(t)$  eğrisinin hodografi,

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 2t^2, 2t^2 + 2t^4)$$

eğrisidir.

$$\|\alpha'(t)\| = \nu(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4$$

olduğundan  $\alpha$  eğrisi bir PH eğrisidir. Dolayısıyla,  $\alpha$  eğrisi  $x_1x_4$  düzlemi etrafında  $\theta$  radyan döndürüldüğünde elde edilen

$$\tilde{\alpha}(t) = (t \cos \theta + (\frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5) \sin \theta, t^2, \frac{2}{3}t^3, -t \sin \theta + (\frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5) \cos \theta)$$

eğrisi de  $\nu(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4$  eşitliğini sağlayan bir PH eğrisidir.

$\tilde{\alpha}(t)$  eğrisinin hodografi,

$$\tilde{\alpha}'(t) = (\cos \theta + (2t^2 + 2t^4) \sin \theta, 2t, 2t^2, -\sin \theta + (2t^2 + 2t^4) \cos \theta)$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\alpha}'(t)\|^2 &= \cos^2 \theta + (2t^2 + 2t^4)^2 \sin^2 \theta + 4t^2 + 4t^4 + \sin^2 \theta + (2t^2 + 2t^4)^2 \cos^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta (1 + (2t^2 + 2t^4)^2) + \sin^2 \theta (1 + (2t^2 + 2t^4)^2) + 4t^2 + 4t^4 \\ &= 1 + 4t^2 + 4t^4 + (2t^2 + 2t^4)^2 \\ &= 1 + 2(2t^2 + 2t^4) + (2t^2 + 2t^4)^2 \\ &= (1 + (2t^2 + 2t^4))^2 \\ &\Rightarrow \|\tilde{\alpha}'(t)\| = \nu(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4 \end{aligned}$$

bulunur [1].

## 4.2. Pisagor-Hodograf Eğrileri ile Helis Eğrilerinin İlişkisi

$\alpha$  bir polinom eğrisi olmak üzere,  $\alpha$  eğrisi bir helis ise bu eğri polinom helis olarak adlandırılır.

**Teorem 4.2.1.**  $\mathbb{E}^4$  de her polinom helis eğrisi PH eğrisidir .

**İspat.**  $\alpha(t)$  eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında polinom helis eğrisi olsun.  $\alpha(t)$  eğrisinin teğet vektörü  $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ , sabit bir  $v$  vektörü ile sabit açı yapar.

$$\langle T(t), v \rangle = \cos \theta$$

$$\left\langle \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, v \right\rangle = \cos \theta$$

$$\|\alpha'(t)\| = \frac{1}{\cos \theta} \langle \alpha'(t), v \rangle$$

denkleminde eşitliğin sağ tarafı  $\cos \theta$  nın sabit olmasından dolayı bir polinomdur ve  $\|\alpha'(t)\| = \nu(t)$  olacak şekilde bir  $\nu(t)$  polinomu vardır. Dolayısıyla  $\alpha$  helis eğrisi bir PH eğrisidir.

**Örnek 4.2.1.**  $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5)$  eğrisi için,

$\alpha(t)$  eğrisinin hodografi,

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 2t^2, 2t^2 + 2t^4)$$

bulunur.  $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  olmak üzere,  $\langle T(t), v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$  eşitliğini sağladığından,  $\alpha$  bir helistir. Ayrıca

$$\alpha'_1(t)^2 + \alpha'_2(t)^2 + \alpha'_3(t)^2 + \alpha'_4(t)^2 = (1 + (2t^2 + 2t^4))^2$$

olduğundan

$$\nu(t) = 1 + 2t^2 + 2t^4$$

bulunur. Yani,  $\alpha$  eğrisi aynı zamanda bir PH eğrisidir.

$\alpha$  polinom helisinin eğrilikleri,

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{1+4t^2}}{(1+2t^2+2t^4)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+6t^2+18t^4+32t^6+18t^8}}{(1+4t^2)(1+2t^2+2t^4)^2}$$

$$\sigma(t) = \frac{6t\sqrt{1+4t^2}}{1+6t^2+18t^4+32t^6+18t^8}$$

dir.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$  polinom helis eğrisinin doğrultusu  $v$  birim vektörü olsun.  $\alpha$  eğrisinin doğrultusuna dik olan düzleme izdüşüm yapıldığında elde edilen eğri,

$$\beta(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t), v \rangle v \quad (4.4)$$

dir.  $\alpha$  polinom helis olduğundan  $\langle \alpha'(t), v \rangle = \cos \theta \|\alpha'(t)\| = \cos \theta \nu(t)$  dir.

$\beta$  eğrisinin hodografi,

$$\beta'(t) = \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), v \rangle v$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\|^2 &= \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle \\ &= \langle \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), v \rangle v, \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), v \rangle v \rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle - 2\langle \alpha'(t), \langle \alpha'(t), v \rangle v \rangle + \langle \langle \alpha'(t), v \rangle v, \langle \alpha'(t), v \rangle v \rangle \\ &= \nu^2(t) - 2\cos \theta \nu(t) \langle \alpha'(t), v \rangle + \cos^2 \theta \nu^2(t) \\ &= \nu^2(t) - 2\cos^2 \theta \nu^2(t) + \cos^2 \theta \nu^2(t) \\ &= \nu^2(t)(1 - \cos^2(\theta)) \\ &= (\nu(t) \sin(\theta))^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Buradan  $\|\beta'(t)\| = \nu(t) \sin \theta$  bulunur. Dolayısıyla  $\alpha$  polinom helisinin izdüşümü ile elde edilen  $\beta$  eğrisi bir PH eğrisidir [14].

**Örnek 4.2.2.**  $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5)$  eğrisinin doğrultusu  $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  olan bir helis olduğunu Örnek 4.2.1 den biliyoruz.  $\alpha$  eğrisinin teğet vektör alanı,  $v$  vektörü ile  $\frac{\pi}{4}$  radyanlık bir açı yapar. Yani,

$$\langle T(t), v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$$

olur. Dolayısıyla, (4.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5) - \langle (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5) - \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5)(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5) - (\frac{t}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}, 0, 0, \frac{t}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) \\ &= \left( \frac{t}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}, t^2, \frac{2}{3}t^3, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\beta$  eğrisinin hodografı için

$$\|\beta'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2(t^2 + t^4)) = \sin \frac{\pi}{4} \nu(t)$$

bulunur. Yani,  $\beta$  eğrisi bir PH eğrisidir.

$\beta$  eğrisi,  $x_1x_4$  düzlemi etrafında  $\frac{\pi}{4}$  radyan döndürüldüğünde,

$$\tilde{\beta}(t) = (0, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{1}{\sqrt{2}}(-t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}))$$

eğrisi elde edilir.  $\tilde{\beta}$  eğrisi de bir PH eğrisi olur.  $\tilde{\beta}$  eğrisinin birinci bileşeni sıfır olduğundan  $\mathbb{E}^3$  de bir eğri olarak kabul edilebilir.  $\mathbb{E}^3$  deki bu eğri  $\tilde{\tilde{\beta}}$  ile gösterilsin.

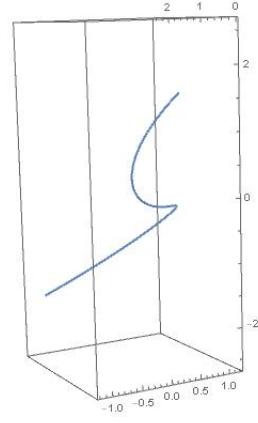
$$\tilde{\beta}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right)\right)$$

yazılabilir.  $\tilde{\beta}$  eğrisinin hodografı,

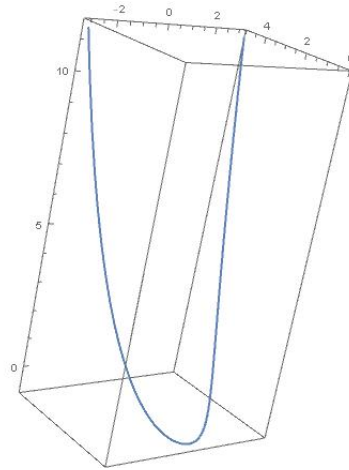
$$\tilde{\beta}'(t) = \left(2t, 2t^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + 2t^2 + 2t^4)\right)$$

dir.

$\tilde{\beta}$  eğrisinin ve hodografının grafiği aşağıda verilmiştir.



**Şekil 4.1.**  $\tilde{\beta}$  eğrisi



**Şekil 4.2.**  $\tilde{\beta}$  eğrisinin hodografı

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 4-boyutlu Öklid uzayında verilen bazı eğrilerin, hodograf eğrilerine ait karakterizasyonları incelenmiş ve [7] nolu çalışmada yer alan hodograf eğrilerinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra Farouki ve Sakkalis'in Pisagor-Hodograf eğrileri için 2 ve 3-boyutlu Öklid uzayında yaptığı çalışmalardan ve [14] nolu çalışmadan yola çıkılarak 4-boyutlu Öklid uzayında Pisagor-Hodograf (PH) eğrileri ve uygulamaları incelenmiştir.

Pisagor-Hodograf ve Rasyonel Pisagor-Hodograf (RPH) eğrilerine ait karakterizasyonlar elde edilmiş ve bu eğrilerle ilgili örnekler verilmiştir. PH eğrileri ile helis eğrileri arasındaki ilişki incelenmiş ve izdüşüm fonksiyonu kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayında PH helis eğrisi elde edilmiştir.

Bu çalışmadaki tüm örnekler Mathematica 10 programı kullanılarak yapılmıştır.

## KAYNAKLAR

- [1]. Altunkaya, B. ve Kula, L., 2018, On Polynomial Helices in n-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ , *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(1), 4.
- [2]. Farouki, R. T. and Sakkalis, T., 1990, Pythagorean hodographs, *IBM Journal of Research and Development*, 34(5), 736-752.
- [3]. Farouki, R. T. and Sakkalis, T., 1994, Pythagorean-hodograph space curves, *Advances in Computational Mathematics*, 2(1), 41-66.
- [4]. Farouki, R. T., 2008, *Pythagorean-Hodograph Curves*, Springer Berlin Heidelberg, 381-391.
- [5]. Hacısalihoğlu, H. H., 1998, *Diferansiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi, 3.baskı, Beşevler-Ankara, 269s.
- [6]. Hacısalihođlu, H. H., 2000, *Diferansiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi, Ankara, 340s.
- [7]. Hamilton, W. R., 1847, The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3, 344-353.
- [8]. Hollasch, S. R., 1991, *Four-Space Visualization of 4D Objects*, Master of Science, Arizona State University, August.
- [9]. Kubota, K. K., 1972, Pythagorean triples in unique factorization domains, *The American Mathematical Monthly*, 79(5), 503-505.
- [10]. Lancret, M. A., 1806, Mémoire sur les courbes a double courbure, *Mémoires présentés allnstitut*, 1, 416-454.



- [11]. Larson, R., 2012, *Elementary Linear Algebra*, The Pennsylvania State University, Boston.
- [12]. Mağden, A., 1990, *R-4 Uzayında Bazı Özel Eğriler Ve Karakterizasyonları*, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 34.
- [13]. Öztürk, G., Arslan, K. ve Hacısalihoglu, H. H., 2008, A characterization of ccr-curves in  $\mathbb{R}^m$ , *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 57(4), 217–224.
- [14]. Ramis, Ç., 2013, *PH eğrileri ve uygulamaları*, Yüksek lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [15]. Sabuncuoğlu, A., 2004, *Lineer Cebir*, Nobel Yayınları, 2.baskı, Ankara.
- [16]. Sabuncuoğlu, A., 2014, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınları, 5.baskı, Ankara.

## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Betül ÇELİK
Doğum Yeri	Kırşehir
Doğum Tarihi	04.05.1992
Uyruğu	T.C.
Telefon	...
E-Posta Adresi	betul.celik1992@gmail.com



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2015