T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ŞEKİL EĞRİLİĞİ, ŞEKİL TORSİYONU VE UYGULAMALARI

Betül KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ŞEKİL EĞRİLİĞİ, ŞEKİL TORSİYONU VE UYGULAMALARI

Betül KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 24.04.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Betül KORKMAZ

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin; şekil eğriliği, şekil torsiyonu ve bu kavramların eğriler teorisi ile ilgili uygulamaları çalışılmıştır. Bu tez çalışması Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü bünyesinde gerçekleştirilmiştir.

Lisans ve Lisansüstü ders sürecimce tanıdığım günden beri bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim her zaman bana örnek olan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA'ya büyük bir içtenlik ile teşekkür ederim.

Tez yazma sürecim boyunca sorularıma verdiği cevaplar ile bana yardımcı olan Arş. Gör. Hasan ALTINBAŞ'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan bana manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Nisan, 2019 Betül KORKMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	: $\mathbb{E}^n$ de iç çarpım
$\Vert \ \Vert$	: $\mathbb{E}^n$ de norm
$\times$	: $\mathbb{E}^3$ de vektörel çarpım
$\boldsymbol{T}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin teğet vektör alanı
$\boldsymbol{N}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin asli normal vektör alanı
$\boldsymbol{B}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin binormal vektör alanı
$\boldsymbol{\kappa}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin eğriliği
$\boldsymbol{\tau}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin torsiyonu
$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin şekil eğriliği
$\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin şekil torsiyonu
$\boldsymbol{s}$	: Yay uzunluğu parametresi
$\boldsymbol{u}$	: Teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi
$\boldsymbol{\alpha}$	: $\mathbb{E}^3$ de eğri
$\boldsymbol{\alpha}^*$	: $\mathbb{E}^3$ de eğri
$\boldsymbol{\beta}$	: $\mathbb{E}^3$ de eğri
γ	: Birim küre üzerinde birim hızlı eğri
$\boldsymbol{t}$	: Sabban çatısına göre γ eğrisinin teğet vektör alanı
$\boldsymbol{p}$	: Sabban çatısına göre γ eğrisinin binormal vektör alanı
$\boldsymbol{\epsilon}_{\gamma}$	: γ eğrisinin küresel evolütü
$\boldsymbol{k_g}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin geodezik eğriliği
$\boldsymbol{M}$	: $\mathbb{E}^3$ de Yüzey
$\boldsymbol{D}$	: $\mathbb{E}^3$ de bir eğrinin Darboux vektör alanı
$\mathbb{S}^{\mathbf{2}}$	: $\mathbb{E}^3$ de birim küre
$\boldsymbol{C^k}$	: k. mertebeden diferansiyellenebilen eğrilerin sınıfları

Kısaltmalar	**Açıklama**
$\boldsymbol{Sim}^+(\mathbb{E}^{\mathbf{3}})$	: $\mathbb{E}^3$ de tüm direkt benzerlik dönüşümlerinin grubu

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ŞEKİL EĞRİLİĞİ, ŞEKİL TORSİYONU VE UYGULAMALARI

Betül KORKMAZ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, şekil eğriliği ile şekil torsiyonu kavramları verilmiş ve bu kavramlar kullanılarak eğrilerin invaryantları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, şekil eğriliği ve şekil torsiyonu kavramları kullanılarak, birim küre üzerinde yatan bir eğri yardımıyla, 3-boyutlu Öklid uzayındaki diğer eğrilerin parametrik denklemlerini bulmak için bir yöntem verilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde verilen yöntem kullanılarak, slant helisler ve küresel helisler ile ilgili çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir. Son bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Nisan 2019, 58 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Şekil Eğriliği, Şekil Torsiyonu, Geometrik İnvaryantlar, Slant ve Küresel Helisler.

ABSTRACT

MSc THESIS

SHAPE CURVATURE, SHAPE TORSION AND ITS APPLICATIONS IN 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Betül KORKMAZ

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Asst. Prof. Bülent ALTUNKAYA

This thesis consists of six section. First section is devoted to the introduction. In the second section, the basic concepts for the thesis are given. In the third section, the concepts of shape curvature and shape torsion are given and by means of these concepts, invariants of curves are examined. In the fourth section, by using shape curvature and shape torsion, we give a method to determine parametric equations of curves in the 3-dimensional Euclidean space. In the fifth section, various characterizations related to slant helices and spherical helices have been obtained by using the method given in the fourth section. In the last section, discussion and results are given.

April 2019, 58 Pages.

Keywords: Shape Curvature, Shape Torsion, Geometric Invariants, Slant and Spherical Helices.

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, geometrinin temel konularından biridir. Frenet-Serret denklemleri yardımıyla bir eğrinin eğriliği ile torsiyonu tanımlanır ve eğrinin karakterini belirlemek için kullanılır. Örneğin;

$i)$ Eğriliği sıfır olan eğri bir doğrudur.
$ii)$ Eğriliği sıfırdan farklı ve torsiyonu sıfır olan eğri düzlemseldir [2].

Eğrilerin yerel kuramının temel teoremine göre, eğriliği ve torsiyonu bilinen bir eğri Öklid hareketleri altında tek olarak belirlenir [14]. Encheva ile Georgiev, bu teoremin başka bir versiyonunu elde etmek için şekil eğriliği ve şekil torsiyonu kavramlarını tanımladılar. Bu kavramlar yardımıyla, eğrilerin yerel kuramının temel teoremine benzer olarak şekil eğriliği ve şekil torsiyonu bilinen bir eğrinin Öklid hareketleri altında tek olarak bulunduğunu gösterdiler. Buna ek olarak, birim küre üzerinde yatan bir eğri yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayındaki başka eğrileri elde etmek için bir yöntem geliştirdiler [6].

Daha sonra Altunkaya ile Kula, şekil eğriliği ve şekil torsiyonu kavramlarını kullanarak hangi şartlar altında bir eğrinin slant helis veya küresel helis olacağını gösterdiler [1].

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen çalışmaların yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayında şekil eğriliği ile şekil torsiyonu kavramları ve bu kavramların uygulamaları incelenmiştir.

Bu tezde, üzerinde çalışılan tüm eğrilerin eğriliğinin sıfırdan büyük olduğu kabul edilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere,
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) |\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$ ile tanımlı $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi,

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. $\lambda \in \mathbb{R}$ için skalarla çarpma işlemi,

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Buna göre $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrik ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [14].

Teorem 2.1. x, y sıfırdan farklı ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos\theta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. θ, x ile y arasındaki açıdır [13].

Tanım 2.2. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir [14].

Tanım 2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| : I &\to \mathbb{R} \\ t &\to \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| (t) = \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $v = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin skalar hız fonksiyonu denir.
$v(t) = \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| \geq 0$ reel sayısına da α eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [11].

Tanım 2.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $s \in I$ için,

$$\left|\left|\frac{d\alpha(s)}{ds}\right|\right| = ||\alpha^{'}(s)|| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir ve s'ye α eğrisinin yay parametresi denir [11].

Teorem 2.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu,

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left|\left|\frac{d\alpha(v)}{dv}\right|\right| d(v), \quad t \in I$$

dır [14].

Tanım 2.5. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun.

$$T(s) = \alpha^{'}(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [14].

Tanım 2.6. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun. $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|T^{'}(s)\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [14].

Tanım 2.7. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun.

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T^{'}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir [14].

Tanım 2.8. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olsun.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir [14].

Tanım 2.9. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [14].

Tanım 2.10. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau &: I \to \mathbb{R} \\ \tau(s) &= -\langle B^{'}(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin torsiyon (burulma) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki torsiyonu denir [14].

Teorem 2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s), N(s), B(s)$ ise,

$$\begin{aligned} T^{'}(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N^{'}(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B^{'}(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

dir [14].

Teorem 2.4. Birim hızlı olmayan bir $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için Frenet vektör alanlarını $T(t), N(t)$, $B(t)$ ile eğrilik ve torsiyonu sırasıyla $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ ile gösterilirse aşağıdaki gibi tanımlanır [14].

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{\dfrac{d\alpha(t)}{dt}}{\left\|\dfrac{d\alpha(t)}{dt}\right\|} \\
B(t) &= \frac{\dfrac{d\alpha(t)}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha(t)}{dt^2}}{\left\|\dfrac{d\alpha(t)}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|} \\
N(t) &= B(t) \times T(t) \\
\kappa(t) &= \frac{\left\|\dfrac{d\alpha(t)}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|}{\left\|\dfrac{d\alpha(t)}{dt}\right\|^3} \\
\tau(t) &= \frac{\left\langle \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha(t)}{dt^2}, \dfrac{d^3\alpha(t)}{dt^3} \right\rangle}{\left\|\dfrac{d\alpha(t)}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|^2}
\end{aligned}
$$

Tanım 2.11. $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.
$k_g(s) = \langle \alpha^{''}(s), Y(s) \rangle$ eşitliği ile belirli $k_g(s)$ sayısına, (α, M) eğri yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir [14].

Tanım 2.12. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için,

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} \neq 0$$

ise α eğrisine regüler eğri (düzenli eğri) denir [14].

Tanım 2.13. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için,

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektör alanına α eğrisinin Darboux vektör alanı denir [11].

Teorem 2.5. $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisi çemberdir ancak ve ancak γ eğrisinin geodezik eğriliği $k_g' = 0$ dır [2].

Teorem 2.6. $\kappa > 0$ ve α regüler bir eğri olmak üzere, α eğrisi genel helistir ancak ve ancak

$$\frac{\tau}{\kappa}$$

oranı sabittir [1].

Teorem 2.7. $\kappa > 0$ ve α bir regüler eğri olmak üzere, α eğrisi slant helistir ancak ve ancak α eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliği,

$$\sigma(t) = \left(\frac{\kappa^2}{\upsilon(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d(\tau/\kappa)}{dt} \right)(t)$$

sabittir [1].

Teorem 2.8. $\kappa > 0$ ve α bir regüler eğri olmak üzere, α eğrisi yarıçapı r olan bir küre yüzeyinde yatar ancak ve ancak

$$r^2 = \left(\frac{1}{\kappa^2} + \left(\left(\frac{1}{\upsilon\tau} \right) \left(\frac{d(1/\kappa)}{dt} \right) \right)^2 \right)(t)$$

dir. Buradan,

$$\left(\frac{1}{\upsilon} \left[\frac{d\left(\frac{1}{\upsilon\tau} \left(\frac{d(1/\kappa)}{dt} \right) \right)}{dt} \right] + \frac{\tau}{\kappa} \right)(t) = 0$$

eşitliği elde edilir [1].

Tanım 2.14. Merkezi orijinde bulunan ve yarıçapı bir birim olan küreye $\mathbb{E}^3$ de birim küre denir. Birim küre,

$$\mathbb{S}^2 = \{P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{E}^3 | \langle \vec{P}, \vec{P} \rangle = 1)\}$$

ile gösterilir [4].

Tanım 2.15. $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$, yay parametresi s olan birim hızlı küresel bir eğri ve

$$t(s) = \gamma^{'}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

olsun.

$$p(s) = \gamma(s) \times t(s)$$

alırsak γ üzerinde $\{\gamma(s), t(s), p(s)\}$ ortonormal çatısını elde edebiliriz. Bu çatı γ eğrisinin Sabban Çatısı olarak isimlendirilir. Sabban çatısına göre γ eğrisinin geodezik eğriliği;

$$k_g(s) = \det(\gamma(s), t(s), t^{'}(s))$$

olmak üzere γ eğrisi için,

$$\begin{aligned} \gamma(s)^{'} &= t(s) \\ t^{'}(s) &= -\gamma(s) + k_g(s)p(s) \\ p^{'}(s) &= -k_g(s)t(s) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır [1].

Tanım 2.16. $\mathbb{E}^3$ de ortogonal matrislerin kümesi,

$$O(3) = \{A \in \mathbb{E}^3_3; A^T A = AA^T = I\}$$

biçiminde tanımlanır. $O(3)$ kümesi, matris çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir [5].

Tanım 2.17. V, n-boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. $\forall x \in V$ için,

$$\langle A(x), A(x)\rangle = \langle x, x\rangle$$

sağlıyorsa $A : V \to V$ lineer dönüşümü ortogonaldir [5].

Teorem 2.9. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile $0 = (0, 0, ..., 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir. Yani $A \in O(n)$ için $y = Ax$ dir [5].

Tanım 2.18. $\mathbb{E}^n_1$ ve $\mathbb{E}^n_2$ sırasıyla n-boyutlu V_1 ve V_2 iç çarpım uzayları ile tanımlanan birer Öklid uzayı olsunlar. $l : \mathbb{E}^n_1 \to \mathbb{E}^n_2$ afin dönüşümü, $\forall x, y \in V_1$ için,

$$\langle \psi(x), \psi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

olacak biçimde bir $\psi : V_1 \to V_2$ lineer dönüşümü varsa l bir izometridir [8].

Tanım 2.19. $\mathbb{E}^n$ in bir l izometrisi için $0 \in \mathbb{E}^n$ ve $l(0) = 0$ olacak biçimde bir O noktası varsa l'ya O etrafında dönme denir [8].

Tanım 2.20. $1 \leq i \leq n,\ t_i \in \mathbb{R}$ ve $v_i = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{E}^n$ olsun. $\mathbb{E}^n$ de bir g izometrisi,

$$g(v_i) = (v_1 + t_1, v_2 + t_2, ..., v_n + t_n)$$

ise g'ye öteleme denir [8].

Tanım 2.21.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{E}^n &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ x &\rightarrow y = (ha)x + c \end{aligned}$$

biçimindeki dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ de homotetik hareket denir [5].

Teorem 2.10. Ötelemeler ve dönmelere katı hareketler denir. Katı hareketler birleşme işlemine göre bir gruptur. θ, a ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta + a \\ y_2 &= x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta + b \end{aligned}$$

dönüşümleri birer katı harekettir. Bu dönüşümler altında bir şeklin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık değişmez [10].

Tanım 2.22. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri ve aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T^*(s), T(s)\rangle = 0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü denir [14].

Tanım 2.23. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri ve aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki teğet doğrusu $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T^*(s), T(s)\rangle = 0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir evolütü denir [14].

Tanım 2.24. Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının 1, e_1, e_2, e_3 gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim +1 bir reel sayıdır, diğer üç birim ise,

$i) e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$

$ii) e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$

$iii) e_2 \times e_1 = -e_3, e_3 \times e_2 = -e_1, e_1 \times e_3 = -e_2$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon,

$iv) q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. e_1, e_2, e_3 birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu S_q ile gösterilen skalar kısım ve V_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısıma ayrılabilir.

$v) S_q = d, \qquad V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$

O halde,

$vi) q = S_q + V_q$

yazılabilir. Reel kuaterniyon kümesini $\mathbb{H}$ ile gösterecek olursak,

Re$H = d$, Im$H = ae_1 + be_2 + ce_3$ dır.

$\mathbb{H} = \{q = d + ae_1 + be_2 + ce_3 | \, d, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinden birer özel hâl olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu vektör kümesi elde edilebilir. Bu küme üzerinde tanımlanan toplama ve çıkarma işlemleriyle beraber $\mathbb{H}$ bir vektör uzayıdır [8].

Tanım 2.25. $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ kuaterniyonunun normu,

$$N_q = \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

dir [15].

Tanım 2.26. $q = S_q + V_q$ kuaterniyonu için, $S_q = 0$ ise q'ya pür kuaterniyon denir [15].

Tanım 2.27. w bir pür kuaterniyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ w &\to \psi(w) = qwq^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ψ dönüşümü lineerdir. $N_q = 1$ olmak üzere $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ olduğundan eğer $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ ise,

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= (d^2 + a^2 - b^2 - c^2)e_1 + (2dc + 2ab)e_2 + (2ac - 2db)e_3 \\ \psi(e_2) &= (-2dc + 2ab)e_1 + (d^2 + b^2 - a^2 - c^2)e_2 + (2da + 2bc)e_3 \\ \psi(e_3) &= (2db + 2ac)e_1 + (2bc - 2da)e_2 + (d^2 + c^2 - a^2 - b^2)e_3 \end{aligned}$$

dir. ψ dönüşümünün matris gösterimi,

$$A_q = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & -2dc + 2ab & 2db + 2ac \\ 2dc + 2ab & d^2 + b^2 - a^2 - c^2 & 2bc - 2da \\ 2ac - 2db & 2bc - 2da & d^2 + c^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $A_q A_q^T = I$ ve $\det A_q = 1$ olduğundan A_q ortogonal matristir. Böylece,

$$\psi(w) = qwq^{-1}$$

lineer dönüşümü $\mathbb{R}^3$ bir dönme gösterir [15].

Teorem 2.11. g_1 : Im $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ fonksiyonu her ortogonal dönüşüm için,
(i) $g_1(u) = cuc^{-1}$, $g_1 \in O^+$ (Im $\mathbb{H}$)
(ii) $g_1(u) = -cuc^{-1}$, $g_1 \in O^-$ (Im $\mathbb{H}$)
özelliklerini sağlayan bir $c \in \mathbb{H}$ kuaterniyona karşılık gelir [5].

Teorem 2.12. $I = (a, b), \alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ iki birim hızlı eğri olsun. Bu iki eğrinin eğriliği $(\kappa > 0)$ ile torsiyonu (τ) birbirine eşit ise bir f Öklid hareketi altında α ve β eğrileri eştir [7].

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİREKT BENZERLİK DÖNÜŞÜMLERİ GRUBU ALTINDA EĞRİLERİN İNVARYANTLARI

Bir katı hareket ile homotetinin bileşiminden oluşan dönüşümlere benzerlik dönüşümleri denir. $\mathbb{E}^3$ de benzerlik dönüşümleri açı büyüklüklerini korurlar. Bir benzerlik dönüşümü yönü koruyorsa "direkt" korumuyorsa "indirekt" olarak adlandırılır. $\mathbb{E}^3$ deki tüm direkt benzerlik dönüşümlerinin grubu $Sim^+(\mathbb{E}^3)$ ile gösterilsin. Bu durumda herhangi bir $f \in Sim^+(\mathbb{E}^3)$ dönüşümü; h oranı $\lambda > 0$ olan merkezil (orijini merkez kabul eden) bir homoteti, g_1 orijini koruyan bir ortogonal dönüşüm ve g_2 bir öteleme olmak üzere,

$$f = g_2 \circ g_1 \circ h$$

biçiminde yazılır [6].

Orijini koruyan herhangi bir ortogonal dönüşüm birim kuaterniyonlar yardımıyla da ifade edilebilir. Yani n bir birim kuaterniyon olmak üzere,

$$g_1(q) = nqn^{-1} \qquad\qquad (q \in \mathrm{Im}\mathbb{H})$$

biçiminde yazılır. Bu çarpımı yazarken p kuaterniyonunun reel kısmı sıfır kabul edilir. Dolayısıyla $a \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere,

$$f(q) = \lambda nqn^{-1} + a$$

biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{E}^3 \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

C^3 sınıfından bir eğri olsun. f direkt benzerlik dönüşümü altında α eğrisinin görüntüsü α_0 ile gösterilsin.

$$\begin{aligned} \alpha_0 : I &\to \mathbb{E}^3 \\ t &\to \alpha_0(t) = \lambda n \alpha(t) n^{-1} + a \end{aligned}$$

eşitliğiyle α_0 eğrisi ifade edilir. α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\alpha(v)}{dv} \right\| dv$$

dir. Dolayısıyla α_0 eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu,

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\alpha_0(v)}{dv} \right\| dv \\ &= \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\lambda d\alpha(v)}{dv} \right\| dv \\ &= \lambda s(t) \end{aligned}$$

dir. Buradan $s_0(t) = \lambda s(t)$ eşitliğinin s_0'a göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda \frac{ds}{ds_0} \\ \frac{ds}{ds_0} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\dfrac{ds}{ds_0}$ sabittir. s ve s_0 yay uzunluğu parametreleri ile sırasıyla, α ve α_0 eğrileri parametrelendirilsin. Birim hızlı α eğrisinin eğriliği ve torsiyonu,

$$\kappa(s) = \|\alpha^{''}(s)\| \qquad \text{ve} \qquad \tau(s) = \frac{\det(\alpha^{'}(s), \alpha^{''}(s), \alpha^{'''}(s))}{\|\alpha^{''}(s)\|^2}$$

dir. α_0 eğrisinin eğriliği $\kappa_0(s_0) = \kappa_0(\lambda s)$ ve torsiyonu $\tau_0(s_0) = \tau_0(\lambda s)$ hesaplamak için α_0 eğrisinin s'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_0}{ds} &= \lambda n \frac{d\alpha}{ds} n^{-1} \\ \frac{d\alpha_0}{ds_0}\frac{ds_0}{ds} &= \lambda \frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha_0}{ds_0} &= \frac{d\alpha}{ds} \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar türev alınırsa,

$$\frac{d^2\alpha_0}{ds_0^2}\frac{ds_0}{ds} = \frac{d^2\alpha}{ds^2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin normu alınırsa,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d^2\alpha_0}{ds_0^2}\right\| \lambda &= \left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\| \\ \kappa_0 \lambda &= \kappa \\ \kappa_0 &= \frac{1}{\lambda}\kappa \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{d^2\alpha_0}{ds_0^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2\alpha}{ds^2}$$

ifadesinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\alpha_0}{ds_0^3}\frac{ds_0}{ds} &= \frac{1}{\lambda}\frac{d^3\alpha}{ds^3} \\ \frac{d^3\alpha_0}{ds_0^3} &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^3\alpha}{ds^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$\tau_0 = \frac{\det\left(\dfrac{d\alpha_0}{ds_0}, \dfrac{d^2\alpha_0}{ds_0^2}, \dfrac{d^3\alpha_0}{ds_0^3}\right)}{\left\|\dfrac{d^2\alpha_0}{ds_0^2}\right\|^2}$$

$$\tau_0 = \frac{\det\left(\dfrac{d\alpha}{ds}, \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d^2\alpha}{ds^2}, \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{d^3\alpha}{ds^3}\right)}{\dfrac{1}{\lambda^2}\left\|\dfrac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|^2}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda}\tau$$

bulunur. Böylece,

$$\kappa_0 = \frac{1}{\lambda}\kappa, \qquad \tau_0 = \frac{1}{\lambda}\tau \tag{3.1}$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\kappa_0 = \frac{ds}{ds_0}\kappa$$
$$\kappa_0 ds_0 = \kappa ds$$

ve

$$\tau_0 = \frac{ds}{ds_0}\tau$$
$$\tau_0 ds_0 = \tau ds$$

eşitlikleri elde edilir.

Öklid uzayındaki bir eğri, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilebilir [12]. Eğer α ve α_0 eğrileri sırasıyla, teğetler göstergelerinin yay uzunluğu parametreleri u ve u_0 olacak şekilde parametrelendirilirse $du = \kappa ds$ ifadesi direkt benzerlik dönüşümü grubu altında,

$$du = \kappa_0 ds_0 = du_0 = \kappa ds \tag{3.2}$$

dir [6].

Lemma 3.1. Teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ile parametrelendirilen α eğrisinin Frenet vektör alanları $T(u), N(u), B(u)$ olsun. O zaman α eğrisinin Frenet-Serret denklemleri,

$$\frac{d\alpha(u)}{du} = \frac{1}{\kappa(u)}T(u), \qquad \frac{dT(u)}{du} = N(u), \qquad \frac{dN(u)}{du} = -T(u) + \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}B(u),$$
$$\frac{dB(u)}{du} = -\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}N(u)$$

dur. Ayrıca,

$$\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} = -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}\frac{d\alpha(u)}{du} + \frac{1}{\kappa(u)}N(u) \tag{3.3}$$

dur. Benzer şekilde, Frenet vektör alanları $T_0(u_0), N_0(u_0), B_0(u_0)$ olmak üzere $\alpha_0 = f \circ \alpha$ eğrisi için,

$$\frac{d^2\alpha_0(u_0)}{du_0^2} = -\frac{d\kappa_0(u_0)}{\kappa_0(u_0)du}\frac{d\alpha_0(u_0)}{du_0} + \frac{1}{\kappa_0(u_0)}N_0(u_0)$$

ve

$$-\frac{d\kappa_0(u_0)}{\kappa_0(u_0)du_0} = -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\tau_0(u_0)}{\kappa_0(u_0)} = \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$$

eşitlikleri sağlanır [6].

İspat. Bir α eğrisinin, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ve Frenet vektörler alanları $T(u), N(u), B(u)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha(u)}{du} &= \frac{d\alpha(u)}{ds}\frac{ds}{du} = T(u)\frac{1}{\kappa(u)} \\
\frac{dT(u)}{du} &= \frac{dT(u)}{ds}\frac{ds}{du} \\
\frac{dT(u)}{du} &= N(u)\kappa(u)\frac{1}{\kappa(u)} = N(u)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dN(u)}{du} &= \frac{dN(u)}{ds}\frac{ds}{du} \\
\frac{dN(u)}{du} &= (-\kappa(u)T(u) + \tau(u)B(u))\frac{1}{\kappa(u)} = -T(u) + \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}B(u) \\
\frac{dB(u)}{du} &= \frac{dB(u)}{ds}\frac{ds}{du} \\
\frac{dB(u)}{du} &= -\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}N(u)
\end{aligned}
$$

dur. $\dfrac{d\alpha(u)}{du} = T(u)\dfrac{1}{\kappa(u)}$ eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} &= \frac{d(1/\kappa(u))}{du}T(u) + \frac{1}{\kappa(u)}\frac{dT(u)}{du} \\
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} &= -\frac{d\kappa(u)}{\kappa^2(u)du}\frac{d\alpha(u)}{du}\kappa(u) + \frac{1}{\kappa(u)}N(u) \\
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} &= -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}\frac{d\alpha(u)}{du} + \frac{1}{\kappa(u)}N(u)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde, α_0 eğrisinin de Frenet-Serret denklemleri bulunur. (3.1) ve (3.2) deki eşitlikler kulanılırsa,

$$
-\frac{d\kappa_0(u_0)}{\kappa_0(u_0)du_0} = -\frac{d\frac{1}{\lambda}\kappa(u)}{\frac{1}{\lambda}\kappa(u)du} = -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}
$$

ve

$$
\frac{\tau_0(u_0)}{\kappa_0(u_0)} = \frac{\frac{1}{\lambda}\tau(u)}{\frac{1}{\lambda}\kappa(u)} = \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}
$$

elde edilir.

Lemma 3.2. $\mathbb{E}^3$ de direkt benzerlik dönüşümü grubu altında $\widetilde{\kappa}(u) = -\dfrac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}$ ve $\widetilde{\tau}(u) = \dfrac{\tau(u)}{\kappa(u)}$ fonksiyonları invaryanttır. (3.3) deki eşitliği ve α eğrisinin Frenet- Serret denklemleri kullanılırsa,

$$
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} = \widetilde{\kappa}(u)\,\frac{d\alpha(u)}{du} + \frac{1}{\kappa(u)}N(u), \qquad \frac{dT(u)}{du} = N(u),
$$

$$\frac{dN(u)}{du} = -T(u) + \widetilde{\tau}(u)B(u), \qquad \frac{dB(u)}{du} = -\widetilde{\tau}(u)N(u)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca $\widetilde{\kappa}(u)$ ve $\widetilde{\tau}(u)$ fonksiyonları,

$$\widetilde{\kappa}(u) = \frac{\langle \frac{d^2\alpha(u)}{du^2}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle}{\langle \frac{d\alpha(u)}{du}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle} \tag{3.4}$$

$$\widetilde{\tau}(u) = \det\left(\frac{d\alpha(u)}{du}, \frac{d^2\alpha(u)}{du^2}, \frac{d^3\alpha(u)}{du^3}\right)\left[\frac{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|^2}{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|^2\left\|\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\right\|^2 - \left(\langle \frac{d\alpha(u)}{du}, \frac{d^2\alpha(u)}{du^2} \rangle\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{3.5}$$

dir [6].

İspat. Bir α eğrisinin, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ve Frenet vektörler alanları $T(u), N(u), B(u)$ olsun. $\widetilde{\kappa}(u) = -\dfrac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}$ ve $\widetilde{\tau}(u) = \dfrac{\tau(u)}{\kappa(u)}$ eşitlikleri, Lemma 3.1 deki Frenet-Serret denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} &= -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}\frac{d\alpha(u)}{du} + \frac{1}{\kappa(u)}N(u) = \widetilde{\kappa}(u)\frac{d\alpha(u)}{du} + \frac{1}{\kappa(u)}N(u) \\
\frac{dT(u)}{du} &= N(u) \\
\frac{dN(u)}{du} &= -T(u) + \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}B(u) = -T(u) + \widetilde{\tau}(u)B(u) \\
\frac{dB(u)}{du} &= -\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}N(u) = -\widetilde{\tau}(u)N(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\langle \frac{d^2\alpha(u)}{du^2}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle = \langle \frac{d\alpha(u)}{du}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle \widetilde{\kappa}(u) + \langle N(u), \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle \frac{1}{\kappa(u)}$$

$$\frac{\langle \frac{d^2\alpha(u)}{du^2}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle}{\langle \frac{d\alpha(u)}{du}, \frac{d\alpha(u)}{du} \rangle} = \widetilde{\kappa}(u)$$

ve

$$\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}=\frac{\left\langle \frac{d\alpha(u)}{du}\times\frac{d^2\alpha(u)}{du^2},\frac{d^3\alpha(u)}{du^3}\right\rangle}{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\times\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\right\|^2}\frac{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|^3}{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\times\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\right\|}$$

$$\widetilde{\tau}(u)=\det\left(\frac{d\alpha(u)}{du},\frac{d^2\alpha(u)}{du^2},\frac{d^3\alpha(u)}{du^3}\right)\left[\frac{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|}{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\times\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\right\|}\right]^3$$

dur. Vektörel çarpım özeliklerinden,

$$\widetilde{\tau}(u)=\det\left(\frac{d\alpha(u)}{du},\frac{d^2\alpha(u)}{du^2},\frac{d^3\alpha(u)}{du^3}\right)\left[\frac{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|^2}{\left\|\frac{d\alpha(u)}{du}\right\|^2\left\|\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\right\|^2-\left(\langle\frac{d\alpha(u)}{du},\frac{d^2\alpha(u)}{du^2}\rangle\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

Tanım 3.1. Teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ile parametrelendirilen, $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi C^3 sınıfından bir eğri olsun. Eğer $\kappa(u)$, $\tau(u)$ sırasıyla α eğrisinin eğriliği ve torsiyonu ise $\widetilde{\kappa}(u) = -\frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}$ fonksiyonuna α eğrisinin şekil eğriliği, $\widetilde{\tau}(u) = \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$ fonksiyonuna da α eğrisinin şekil torsiyonu denir. $(\widetilde{\kappa}(u), \widetilde{\tau}(u))$ çiftine de α eğrisinin şekli denir.

Ayrıca s yay uzunluğu parametresi kullanılarak α eğrisinin şekil eğriliği ile şekil torsiyonu,

$$\widetilde{\kappa}(s)=-\frac{d\kappa(s)}{ds}\frac{ds}{du}\frac{1}{\kappa(s)}=-\frac{\kappa^{'}(s)}{\kappa^2(s)}=\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^{'}=\frac{(\ln||\alpha''(s)||^{-1})'}{||\alpha''(s)||}$$

ve

$$\widetilde{\tau}(s)=\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}=\frac{\det(\alpha^{'}(s),\alpha^{''}(s),\alpha^{'''}(s)}{||\alpha''(s)||^3}$$

biçiminde yazılır. Herhangi bir t parametresi kullanılarak α eğrisinin şekil eğriliği ile şekil torsiyonu,

$$\widetilde{\kappa}(t) = -\frac{d\kappa(t)}{dt}\frac{dt}{du}\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{3\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\times\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|^2\left\langle\frac{\alpha(t)}{dt},\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\rangle - \left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|^2\left\langle\frac{d\alpha(t)}{dt}\times\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2},\frac{\alpha(t)}{dt}\times\frac{d^3\alpha(t)}{dt^3}\right\rangle}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\times\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|^3}$$

ve

$$\widetilde{\tau}(t) = \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|^3 \det\left(\frac{d\alpha(t)}{dt},\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2},\frac{d^3\alpha(t)}{dt^3}\right)}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\times\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}\right\|^3}$$

biçiminde yazılır [6].

Teorem 3.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $i = 1, 2$ olmak üzere, $\alpha_i : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u olan C^3 sınıfından eğri olsun. Eğer $\forall u \in I$ için α_1 ve α_2 eğrilerinin şekil eğriliği ile şekil torsiyonu birbirine eşitse o zaman $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ olacak biçimde $\mathbb{E}^3$ de bir f direkt benzerlik dönüşümü vardır [6].

İspat. $i = 1, 2$ ve $\kappa_i \neq 0$ olsun. α_i eğrisinin eğriliği ile torsiyonu sırasıyla κ_i, τ_i ve şekil eğriliği ile şekil torsiyonu da sırasıyla $\widetilde{\kappa}_i$, $\widetilde{\tau}_i$ olsun. λ sıfırdan büyük bir reel sayı olmak üzere, $\widetilde{\kappa}_1 = \widetilde{\kappa}_2$ eşitliğinden $d\kappa_1/\kappa_1 = d\kappa_2/\kappa_2$ yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafında integrali alınırsa $\ln \kappa_1 = \ln \kappa_2 + \ln \lambda$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\forall u \in I$ için, $\kappa_1 = \lambda\kappa_2$ eşitliği vardır. Benzer şekilde $\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau}_2$ olduğundan $\tau_1 = \lambda\tau_2$ eşitliği bulunur. $u_0 \in I$ olmak üzere, α_i eğrisinin Frenet vektör alanı T_i, N_i, B_i olsun. $||T_i|| = 1$, $||N_i|| = 1$, $||B_i|| = 1$ olduğundan,

$$h(\alpha_1(u_0)) = \alpha_2(u_0)$$

ve

$$\begin{aligned} h(T_1(u_0)) &= T_2(u_0) \\ h(N_1(u_0)) &= N_2(u_0) \\ h(B_1(u_0)) &= B_2(u_0) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\mathbb{E}^3$ de yönü koruyan bir h Öklid hareketi vardır.

$$\phi(u) = ||h(T_1(u)) - T_2(u)||^2 + ||h(N_1(u)) - N_2(u)||^2 + ||h(B_1(u)) - B_2(u)||^2$$

ile tanımlanan $\phi : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$||h(T_1)||^2 = ||T_1||^2 = 1, \qquad ||h(N_1)||^2 = ||N_1||^2 = 1, \qquad ||h(B_1)||^2 = ||B_1||^2 = 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{du} h(T_1(u)), h(T_1(u)) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d}{du} h(N_1(u)), h(N_1(u)) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d}{du} h(B_1(u)), h(B_1(u)) \right\rangle &= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dT_2}{du}(u), T_2(u) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{dN_2}{du}(u), N_2(u) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{dB_2}{du}(u), B_2(u) \right\rangle &= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\phi(u)$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi(u)}{du} = 2 &\left\langle \frac{d}{du} h(T_1(u)) - \frac{d}{du} T_2(u), h(T_1(u)) - T_2(u) \right\rangle \\
+2 &\left\langle \frac{d}{du} h(N_1(u)) - \frac{d}{du} N_2(u), h(N_1(u) - N_2(u) \right\rangle \\
+2 &\left\langle \frac{d}{du} h(B_1(u)) - \frac{d}{du} B_2(u), h(B_1(u)) - B_2(u) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(u)}{du} &= -2\left\langle h\left(\frac{dT_1}{du}(u)\right), T_2(u)\right\rangle - 2\left\langle \frac{dT_2}{du}(u), h(T_1(u))\right\rangle \\ &\quad -2\left\langle h\left(\frac{dN_1}{du}(u)\right), N_2(u)\right\rangle - 2\left\langle \frac{dN_2}{du}(u), h(N_1(u))\right\rangle \\ &\quad -2\left\langle h\left(\frac{dB_1}{du}(u)\right), B_2(u)\right\rangle - 2\left\langle \frac{dB_2}{du}(u), h(B_1(u))\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{dT_i(u)}{du} = N_i(u)$, $\frac{dN_i(u)}{du} = -T_i(u) + \widetilde{\tau}_i(u)B_i(u)$ ve $\frac{dB_i(u)}{du} = -\widetilde{\tau}_i(u)N_i(u)$ eşitlikleri kulanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(u)}{du} &= -2\widetilde{\tau}_1(u)\langle h(B_1(u)), N_2(u)\rangle - 2\widetilde{\tau}_2(u)\langle B_2(u), h(N_1(u))\rangle \\ &\quad +2\widetilde{\tau}_1(u)\langle h(N_1(u)), B_2(u)\rangle + 2\widetilde{\tau}_2(u)\langle N_2(u), h(B_1(u))\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. $\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau}_2$ ise $\forall u \in I$ için, $\frac{d\phi(u)}{du} = 0$ dır. Diğer taraftan $\phi(u_0) = 0$ olduğundan $\forall u \in I$ için $\phi(u) = 0$ dır. Yani,

$$h(T_1(u)) = T_2(u), \qquad h(N_1(u)) = N_2(u), \qquad h(B_1(u)) = B_2(u)$$

olur. $\lambda = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ pozitif reel sayı olmak üzere, $g : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ve $g = \lambda h$ ile tanımlanan g fonksiyonu $\mathbb{E}^3$ de bir direkt benzerlik dönüşümüdür. $\forall u \in I$ için $\psi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$\psi(u) = \left\|\frac{d}{du}g(\alpha_1(u)) - \frac{d}{du}\alpha_2(u)\right\|^2$$

ile tanımlansın. O zaman $\psi(u)$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(u)}{du} &= 2\left\langle \frac{d^2}{du^2}g(\alpha_1(u)) - \frac{d^2}{du^2}\alpha_2(u), \frac{d}{du}g(\alpha_1(u)) - \frac{d}{du}\alpha_2(u)\right\rangle \\ &= 2\left\langle g\left(\frac{d^2\alpha_1}{du^2}(u)\right), g\left(\frac{d\alpha_1}{du}(u)\right)\right\rangle - 2\left\langle g\left(\frac{d^2\alpha_1}{du^2}(u)\right), \frac{d\alpha_2}{du}(u)\right\rangle \\ &\quad -2\left\langle \frac{d^2\alpha_2}{du^2}(u), g\left(\frac{d\alpha_1}{du}(u)\right)\right\rangle + 2\left\langle \frac{d^2\alpha_2}{du^2}(u), \frac{d\alpha_2}{du}(u)\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. h fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa,

$$\frac{d\psi(u)}{du} = -2\lambda^2\frac{\widetilde{\kappa}_1(u)}{\kappa_1^2(u)} - 2\frac{\widetilde{\kappa}_2(u)}{\kappa_2^2(u)} + 2\lambda\frac{\widetilde{\kappa}_1(u)}{\kappa_1(u)\kappa_2(u)} + 2\lambda\frac{\widetilde{\kappa}_2(u)}{\kappa_1(u)\kappa_2(u)}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\widetilde{\kappa}_1(u) = \widetilde{\kappa}_2(u)$ ve $\kappa_1(u) = \lambda\kappa_2(u)$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{d\psi(u)}{du} = -4\frac{\widetilde{\kappa}_2(u)}{\kappa_2^2(u)} + 4\frac{\widetilde{\kappa}_2(u)}{\kappa_2^2(u)} = 0$$

elde edilir. $g \circ \alpha_1$ ve α_2 eğrileri için Lemma 3.1 deki eşitlikler kullanılırsa,

$$\frac{d}{du}g(\alpha_1(u_0)) = \frac{\lambda}{\kappa_1}T_2(u_0) \text{ ve } \frac{d}{du}\alpha_2(u_0) = \frac{1}{\kappa_2}T_2(u_0)$$

olduğundan $\psi(u_0) = 0$ dir. Böylece, $\forall u \in I$ için $\psi(u) = 0$ dır. Yani,

$$\frac{d}{du}\alpha_2(u) \equiv \frac{d}{du}g(\alpha_1(u))$$

olur. $\alpha_2(u) = g(\alpha_1(u)) + r$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{R}^3$ sabit vektörü vardır. Bu r vektörü ile $g_1 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ öteleme hareketi tanımlanabilir. O zaman $f = g_1 \circ g$ direkt benzerlik dönüşümü altında α_2 eğrisi α_1 eğrisinin görüntüsüdür.

4. BİRİM KÜRE ÜZERİNDE YATAN BİR EĞRİ YARDIMIYLA BAŞKA EĞRİLERİ OLUŞTURMA

$\gamma : I \to \mathbb{S}^2$, yay uzunluğu parametresi u olan birim hızlı küresel bir eğri olsun. γ eğrisinin teğet vektörü,

$$t(u) = \frac{d\gamma(u)}{du}$$

olur.

$$p(u) = \gamma(u) \times t(u)$$

olmak üzere $\{\gamma(u), t(u), p(u)\}$ ortogonal çatısına γ eğrisinin Sabban çatısı denir. γ eğrisinin geodezik eğriliği $k_g(u) = \det\left(\gamma(u), t(u), \frac{dt(u)}{du}\right)$ olmak üzere γ eğrisi için,

$$\frac{d\gamma(u)}{du} = t(u), \qquad \frac{dt(u)}{du} = -\gamma(u) + k_g(u)p(u), \qquad \frac{dp(u)}{du} = -k_g(u)t(u) \tag{4.1}$$

eşitlikleri yazılır. a sabit vektör, $b \in \mathbb{R}$ ve $k : I \to \mathbb{R}$, C^1 sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi,

$$\alpha(u) = b \int e^{\int k(u)d(u)} \gamma(u)du + a \tag{4.2}$$

ile tanımlanabilir [6].

$$\frac{\dfrac{d\alpha(u)}{du}}{\left\| \dfrac{d\alpha(u)}{du} \right\|} = \gamma(u)$$

olduğundan u'nun α eğrisinin teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi olduğu açıktır. Yukarıdaki varsayımlar altında $\mathbb{E}^3$ deki bütün eğriler bu denklem ile tanımlanabilir.

Önerme 4.1. $\alpha(u) = b\int e^{\int k(u)d(u)}\gamma(u)du + a$ ile tanımlanan eğri şekil eğriliği $\widetilde{\kappa}(u) = k(u)$ ve şekil torsiyonu $\widetilde{\tau}(u) = k_g(u)$ olan bir eğridir. Bu yöntemle, $\mathbb{E}^3$ deki tüm eğriler elde edilir [6].

İspat. $\Rightarrow$ İlk olarak $\alpha(u) = b\int e^{\int k(u)d(u)}\gamma(u)du + a$ eğrisinin diferansiyel denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha(u)}{du} &= be^{\int k(u)du}\gamma(u)\\
\frac{d^2\alpha(u)}{du^2} &= be^{\int k(u)du}\left(k(u)\gamma(u) + \frac{d\gamma(u)}{du}\right)\\
\frac{d^3\alpha(u)}{du^3} &= be^{\int k(u)du}\left[\left(k^2(u) + \frac{dk(u)}{du}\right)\gamma(u) + 2k(u)\frac{d\gamma(u)}{du} + \frac{d^2\gamma(u)}{du^2}\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\forall u \in I$ için, $||\gamma(u)|| = 1$ ve $||d\gamma(u)/du|| = 1$ olduğundan,

$$\langle\gamma(u), \frac{d\gamma(u)}{du}\rangle = 0 \text{ ve } \gamma(u) \times \frac{d\gamma(u)}{du} \neq 0$$

dır. Böylece,

$$\frac{d\alpha(u)}{du} \times \frac{d^2\alpha(u)}{du^2} = b^2e^{2\int k(u)du}\left(\gamma(u) \times \frac{d\gamma(u)}{du}\right) \neq 0$$

dır. Yani α eğrisinin eğriliğinin sıfırdan büyük olduğu görülür. (3.4) ve (3.5) deki eşitlikler kullanılarak,

$$\widetilde{\kappa}(u) = k(u)$$

ve

$$\widetilde{\tau}(u) = \det\left(\gamma(u), \frac{d\gamma(u)}{du}, \frac{d^2\gamma(u)}{du^2}\right) = k_g(u)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ile parametrelendirilen $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. α eğrisinin eğriliği ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ tanımlanırsa o zaman,

$$\widetilde{\kappa} = -\frac{d\kappa}{\kappa du} \qquad \text{ve} \qquad \widetilde{\tau} = \frac{\tau}{\kappa}$$

sırasıyla $\widetilde{\kappa}$ ile $\widetilde{\tau}$ α eğrisinin şekil eğriliği ve şekil torsiyonudur.

$$\gamma(u) = T(u) = \frac{d\alpha(u)}{du} / \left\| \frac{d\alpha(u)}{du} \right\| = \kappa(u)\frac{d\alpha(u)}{du}$$

olduğundan $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ eğrisi, α eğrisinin teğetler göstergesidir.

Böylece u'nun, γ eğrisinin yay uzunluğu parametresi ve $k_g(u) = \det\left(\gamma(u), t(u), \frac{dt(u)}{du}\right) = \widetilde{\tau}(u)$'nun γ eğrisinin geodezik eğriliği olduğu açıktır. a_0 sabit vektör ve b_0 reel sayı olmak üzere eğer $k(u) = \widetilde{\kappa}(u)$ ise o zaman,

$$\begin{aligned}
\int e^{\int k(u)du}\gamma(u)du &= \int e^{\int \widetilde{\kappa}(u)d(u)}T(u)du \\
&= \int e^{-\int \frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)du}du}T(u)du \\
&= \int e^{-\int \frac{d\kappa(u)}{\kappa(u)}}T(u)du \\
&= e^{b_0}\int \frac{1}{\kappa(u)}T(u)du \\
&= e^{b_0}\int \frac{d\alpha(u)}{du}du = e^{b_0}\alpha(u) + a_0
\end{aligned}$$

dır. Böylece α eğrisinin denklemi,

$$\alpha(u) = b\int e^{\int k(u)du}\gamma(u)du + a$$

dır.

Sonuç 4.1. $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ küresel eğrisi çemberdir ancak ve ancak

$$\alpha(u) = b\int e^{\int k(u)d(u)}\gamma(u)du + a$$

eşitliği ile tanımlanan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi silindirik helistir [6].

İspat. $\Rightarrow$ γ küresel eğrisi bir çember olsun. O halde γ eğrisinin geodezik eğriliği k_g sabittir. Önerme 4.1 den,

$$k_g = \widetilde{\tau}(u) = \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$$

olduğundan $\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$ sabittir. Dolayısıyla $\alpha(u) = b \int e^{\int k(u)d(u)}\gamma(u)du + a$ eğrisi silindirik helistir.

$\Leftarrow$ $\alpha(u) = b \int e^{\int k(u)d(u)}\gamma(u)d(u) + a$ eğrisi silindirik helis ise $\frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$ sabittir. Önerme 4.1 den,

$$k_g = \widetilde{\tau}(u) = \frac{\tau(u)}{\kappa(u)}$$

olduğundan k_g sabittir. Dolayısıyla γ küresel eğrisi çemberdir.

Ayrıca, Darboux göstergesi ve küresel evolüt tanımları ile γ küresel eğrisi ile de (4.2) deki eşitlik tarafından tanımlanan eğri arasındaki ilişki gösterilir [12]. γ eğrisinin küresel evolütü,

$$\epsilon_{\gamma(u)} = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(u) + 1}}(k_g(u)\gamma(u) + p(u)) \tag{4.3}$$

dur. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u ile parametrelendirilen bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin Frenet vektör alanı T, N, B ise o zaman,

$$D(u) = \tau(u)T(u) + \kappa(u)B(u)$$

α eğrisinin Darboux vektörüdür. Darboux vektörünün birim vektörüne,

$$D^0(u) = \frac{D(u)}{||D(u)||} = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\tau}^2(u) + 1}}(\widetilde{\tau}(u)T(u) + B(u)) \tag{4.4}$$

küresel Darboux görüntüsü ya da α eğrisinin Darboux göstergesi denir.

Önerme 4.2. $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ küresel bir eğri ve (4.2) deki denklem ile tanımlanan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. O zaman α eğrisinin küresel Darboux görüntüsü ile γ eğrisinin küresel evolütü çakışıktır [6].

İspat.

$$T(u) = \gamma(u)$$
$$B(u) = \frac{\dfrac{d\alpha(u)}{du} \times \dfrac{d^2\alpha(u)}{du^2}}{\left\| \dfrac{d\alpha(u)}{du} \times \dfrac{d^2\alpha(u)}{du^2} \right\|} = \gamma(u) \times \frac{d\gamma}{du}(u) = p(u)$$

olduğu açıktır. Böylece (4.3) ve (4.4) deki eşitlikler kullanılırsa,

$$D^0(u) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(u) + 1}} (k_g(u)\gamma(u) + p(u)) = \epsilon_\gamma(u)$$

olduğu görülür.
Bazı başlangıç şartları altında, şekil eğriliği ve şekil torsiyonu tanımları ile $\mathbb{E}^3$ de eğriliği sıfırdan büyük bir eğri oluşturulabilir.

Teorem 4.1. $i = 1, 2$ olmak üzere $f_i = I \to \mathbb{R}$, C^1 sınıfından fonksiyon olsun. T^0, N^0, B^0 vektörleri, $\mathbb{E}^3$ de bir c_0 noktasında sağ-el ortonormal üçlüsü olsun. Merkezi c_0 noktası olan ve yönü koruyan bir homoteti dönüşümü altında aşağıdaki şartları sağlayan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi tektir.
$i)$ $\alpha(u_0) = c_0$ ve α eğrisinin c_0 noktasındaki Frenet çatısı $\{T^0, N^0, B^0\}$ olacak şekilde bir $u_0 \in I$ vardır.
$ii)$ $\forall u \in I$ için, $\widetilde{\kappa}(u) = f_1(u)$ ve $\widetilde{\tau}(u) = f_2(u)$ dur [6].

İspat. $\gamma(u)$, $t(u)$ ve $p(u)$ vektör alanlarının sırasıyla diferansiyel denklemleri,

$$\frac{d\gamma(u)}{du} = t(u), \quad \frac{dt(u)}{du} = -\gamma(u) + f_2(u)p(u), \quad \frac{dp(u)}{du} = -f_2(u)t(u) \tag{4.5}$$

ile tanımlansın. Eğer bu vektör alanlarının kordinatları matris formunda yazılırsa,

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & f_2(u) \\ 0 & -f_2(u) & 0 \end{bmatrix}$$

ve $X(u)$ satır matrisi olmak üzere (4.5) deki denklem sistemi,

$$\frac{dX}{du}(u) = A(u)X(u) \tag{4.6}$$

ile ifade edilir. $u_0 \in I$ için (4.6) daki sistemin tek çözümü $X(u_0) = (T^0(u_0), N^0(u_0), B^0(u_0))$ başlangıç şartını sağlayan,

$$X(u) = (\gamma(u), t(u), p(u)) \tag{4.7}$$

dur. Eğer $X(u)$ matrisinin tranpozu $X^T(u)$ ve E birim matris ise o zaman,

$$\frac{d}{du}(X^T(u)) = X^T(u)A^T(u)$$

ve

$$\frac{d}{du}(X(u)^T X(u)) = X(u)^T (A^T(u) + A(u))X(u) = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

dır. Çünkü $A(u)$ matrisi anti simetriktir. Fakat T^0, N^0, B^0 vektörleri ortonormal olduğundan,

$$X(u)^T X(u) = E$$

dır. Sonuç olarak $\forall u \in I$ için, yukarıdaki eşitlik vardır. Böylece $\gamma(u), t(u), p(u)$ vektör alanları sağ-el ortonormal alanları cinsinden ifade edilebileceği açıktır. Buradan $u \in I$ ve $b > 0$ olacak şekilde $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi;

$$\alpha(u) = c_0 + b\int\limits_{u_0}^{u} e^{\int f_1(u)du}\gamma(u)du$$

biçiminde yazılır.
Önerme 4.1 den, α eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T(u) = \gamma(u), N(u) = t(u), B(u) = p(u)\}$ ve $c_0 = \alpha(u_0)$ da Frenet çatısı $\{T^0(u_0) = \gamma(u_0), N^0(u_0) = t(u_0), B^0(u_0) = p(u_0)\}$ dır. Ayrıca α eğrisinin şekil eğrilği ve şekil torsiyonu sırasıyla f_1 ve f_2 dir.

Teorem 4.2. $i = 1,2$ ve $f_i = I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C^1 sınıfından olsun. $\mathbb{E}^3$ de direkt benzerlik dönüşümü altında şekil eğriliği f_1 ve şekil torsiyonu f_2 olan eğri tek olarak bulunur [6].

İspat. α_1 ve α_2 eğrilerinin, şekil eğriliği f_1 ve şekil torsiyonu f_2 olsun. Teorem 3.1 den, $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ olacak şekilde $\mathbb{E}^3$ de bir f direkt benzerlik dönüşümü vardır. Böylece, f Öklid hareketi altında α_1 ve α_2 eğrileri eştir. O zaman şekil eğriliği f_1 ve şekil torsiyonu f_2 olan eğri tektir.

4.1. Şekil Eğriliği ve Şekil Torsiyonu Yardımıyla Bir Eğriyi Elde Etme

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, teğetler göstergesinin yay uzunluğu parametresi u olan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, C^3 sınıfından bir eğri olsun. O zaman, α eğrisinin şekilleri C^1 sınıfından $\widetilde{\kappa}$ ile $\widetilde{\tau}$ fonksiyonlarıdır. T^0, N^0, B^0 vektörleri sabit bir sağ-el ortonormal üçlüsü olsun. T^0, N^0, B^0 başlangıç şartı ile,

$$\frac{d\gamma(u)}{du} = t(u), \qquad \frac{dt(u)}{du} = -\gamma(u) + \widetilde{\tau}(u)p(u), \qquad \frac{dp(u)}{du} = -\widetilde{\tau}(u)t(u) \tag{4.8}$$

diferansiyel denklemlerin tek çözümü bazı $u_0 \in I$ için $\gamma(u_0) = T^0$ olacak şekilde bir $\gamma = \gamma(u_0)$ küresel eğrisi ile yapılır.

$u_1 \in I$ sabiti için $\mu(u) = \int\limits_{u_1}^{u} \widetilde{\kappa}(u)du$ olsun. (4.2) deki denklem ile Önerme 1'i kullanırsak $\alpha(u_0) = c_0$ noktasından geçen ve şekilleri $(\widetilde{\kappa}(u), \widetilde{\tau}(u))$ olan,

$$\alpha(u) = c_0 + \int\limits_{u_0}^{u} e^{\mu(u)}\gamma(u)du \tag{4.9}$$

eğrisi bulunur [6]. Fakat genellikle bu diferansiyel denklemlerin analitik bir çözüm mümkün değildir.

Örnek 4.1. a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere, şekilleri $(0, a)$ olan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri olsun. Sonuç 4.1 den α eğrisi bir silindirik helistir. $\forall u \in I$ için $\mu(u) = 0$ dır. Başlangıç şartları,

$$T^0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right),\ \ N^0 = (1,0,0),\ \ B^0 = \left(0, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

olsun. O zaman $\gamma(0) = T^0$ olmak üzere (4.8) deki diferansiyel denklemlerden tanımlanan,

$$\gamma = \gamma(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sin(\sqrt{1+a^2}u), -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos(\sqrt{1+a^2}u), \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

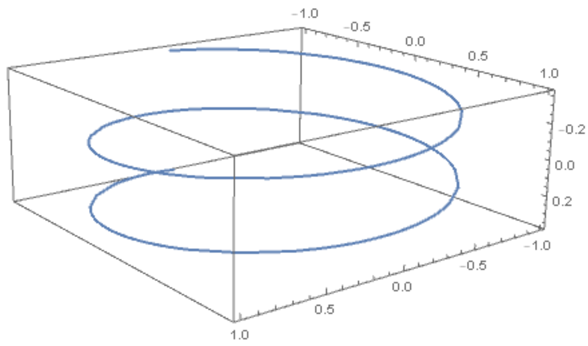
bir küresel eğridir. $\alpha(u) = c_0 + \int\limits_{u_0}^{u} e^{\mu(u)}\gamma(u)du$ eşitliği kullanılırsa,

$$\alpha(u) = \left(-\frac{1}{1+a^2}\cos(\sqrt{1+a^2}u), -\frac{1}{1+a^2}\sin(\sqrt{1+a^2}u), \frac{a}{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}u)\right)$$

elde edilir. $a = \dfrac{1}{17}$ için,

$$\alpha(u) = \left(-\frac{289}{290}\cos(\frac{\sqrt{290}}{17}u), -\frac{289}{290}\sin(\frac{\sqrt{290}}{17}u), \frac{u}{\sqrt{290}}\right)$$

dir [6].



Şekil 4.1. Silindirik Helis

5. SABBAN ÇATISINA GÖRE SLANT HELİSLERİN VE KÜRESEL HELİSLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ birim küre üzerinde birim hızlı bir eğri ve $k(s) : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C^1 sınıfından bir fonksiyon olmak üzere,

$$\alpha(s) = b \int e^{k(s)ds}\gamma(s)ds + a$$

eşitliği ile tanımlanan $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun.

4. bölümde, γ eğrisi çember ise α eğrisinin silindirik helis olduğu gösterildi. Buna benzer olarak, γ eğrisinin geodezik eğriliği k_g kullanılarak, Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan α eğrisi ile Sabban çatısı $\{\gamma, t, p\}$ olan γ eğrisi arasında başka ilişkilerde gösterilebilir.

Teorem 5.1. $\gamma(s)$ eğrisi geodezik eğriliği k_g olan, birim küre üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $b_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer $\gamma(s)$ eğrisi bir çemberse, $\alpha(s) = b \int e^{k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eğrisi bir küresel helistir ancak ve ancak $k(s) = -k_g \tan[(k_g)(s - b_1)]$ dir [1].

İspat. $\Rightarrow$ $\alpha(s) = b \int e^{k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eğrisi küresel bir helis olsun. Bu durumda,

$$\kappa(s) = \frac{1}{be^{\int k(s)ds}}, \qquad \tau(s) = \frac{k_g(s)}{be^{\int k(s)ds}}, \qquad v(s) = be^{\int k(s)ds} \tag{5.1}$$

eşitlikleri elde edilir. $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olsun. α küresel bir eğri olduğundan,

$$\left[\frac{1}{v}\left[\frac{1}{v\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right]' + \frac{\tau}{\kappa}\right](s) = 0$$

şartını sağlar. (5.1) deki eşitlikler küresellik şartında yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{(be^{\int kds})}\left[\frac{1}{(be^{\int kds})\dfrac{k_g}{be^{\int kds}}}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{be^{\int kds}}}\right)'\right]' + \frac{\dfrac{k_g}{be^{\int kds}}}{\dfrac{1}{be^{\int kds}}}\right)(s) = 0$$

$$\left(\frac{1}{be^{\int kds}}\left[\frac{1}{k_g}(be^{\int kds})'\right]' + k_g\right)(s) = 0$$

$$\left(\frac{1}{k_g e^{\int kds}}\left[k' e^{\int kds} + k^2 e^{\int kds}\right] + k_g\right)(s) = 0$$

$$-k_g^2 = k'(s) + k^2(s)$$

$$\frac{dk(s)}{ds} = -k_g^2 - k^2(s)$$

$$\frac{ds}{dk(s)} = \frac{-1}{k_g^2 + k^2(s)}$$

$$ds = \frac{-dk(s)}{k_g^2 + k^2(s)}$$

$$s - b_1 = \frac{-1}{k_g}\left(\arctan\left[\frac{k\,(s)}{k_g}\right]\right)$$

$$k(s) = -k_g \tan[(k_g)(s - b_1)]$$

elde edilir.

$\Leftarrow k(s) = -k_g \tan[(k_g)(s - b_1)]$ olsun. Bu eşitliğin integrali alınırsa,

$$\textstyle\int k(s)ds = \int -k_g \tan[(k_g)(s - b_1)]ds$$

elde edilir. $z = k_g(s - b_1) = k_g s - k_g b_1$ olsun. O zaman $k_g ds = dz$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int k(s)ds &= \int -\tan z dz \\ &= \ln\cos z + \ln b_2 \\ &= \ln[b_2 \cos(k_g(s - b_1))] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliği yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= b\int e^{\int k(s)ds}\gamma(s)ds + a \\
&= b\int e^{\int -k_g \tan[(k_g)(s-b_1)])ds}\gamma(s)ds + a \\
&= b\int e^{\ln[b_2\cos(k_g(s-b_1))]}\gamma(s)ds + a \\
&= b\int b_2\cos(k_g(s-b_1))\gamma(s)ds + a
\end{aligned}$$

ile k fonksiyonuna bağlı olmayan yeni bir eşitlik elde edilir. Sonuç 4.1 den, γ eğrisi çemberse α eğrisi helistir. Şimdi α eğrisinin küresel olduğunu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
r^2 &= \left(\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\upsilon\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)^2\right)(s) \\
&= \left(b^2e^{2\int kds} + \left(\frac{1}{be^{\int kds}\frac{k_g}{be^{\int kds}}}\left(\frac{1}{\frac{1}{be^{\int kds}}}\right)'\right)^2\right)(s) \\
&= \left(b^2e^{2\int kds} + \left(\frac{1}{k_g}\left(be^{\int kds}\right)'\right)^2\right)(s) \\
&= \left(b^2e^{2\int kds} + \frac{b^2k^2}{k_g^2}e^{2\int kds}\right)(s) \\
&= \left(b^2e^{2\int kds}\left(1+\frac{k^2}{k_g^2}\right)\right)(s) \\
&= b^2b_2^2\cos^2(k_g(s-b_1))\left(1+\frac{(-k_g\tan[(k_g)(s-b_1)])^2}{k_g^2}\right) \\
&= b^2b_2^2\cos^2(k_g(s-b_1))\left(\frac{1}{\cos^2(k_g(s-b_1))}\right) \\
&= b^2b_2^2
\end{aligned}$$

dır. α eğirisi yarıçapı $|bb_2|$ olan bir küre üzerinde yatar. Dolayısıyla α eğrisi küresel helistir.

Örnek 5.1. $\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{s}{(1/\sqrt{3})}\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{s}{1/\sqrt{3}}\right), \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ birim küre üzerinde birim hızlı ve geodezik eğriliği $\sqrt{2}$ olan bir eğri olsun. $b,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere Teorem 5.1 den,

$$k(s) = -\sqrt{2}\tan[(\sqrt{2})(s-b_1)]$$

ve

$$\alpha(s) = b\int b_2\cos(\sqrt{2}(s-b_1))\gamma(s)ds + a$$

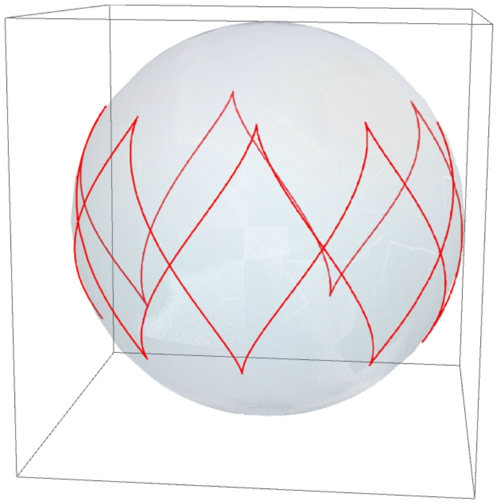
dır. $b = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ ve $a = (0,0,0)$ alınırsa, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ olmak üzere,

$$\alpha_1 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\sqrt{3}s)\sin(\sqrt{2}s) + 2\cos(\sqrt{2}s)\sin(\sqrt{3}s)$$

$$\alpha_2 = -\frac{2}{3}(3\cos(\sqrt{2}s)\cos(\sqrt{3}s) + \sqrt{6}\sin(\sqrt{2}s)\sin(\sqrt{3}s))$$

$$\alpha_3(s) = \frac{2\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{3}}$$

dir. Dolayısıyla α eğrisi, yarıçapı $r = 2$ olan küre üzerinde yatan küresel helistir [1].



Şekil 5.1. Küresel Helis

Teorem 5.2. $\gamma(s)$, birim küre üzerinde birim hızlı küresel bir eğri olsun. $b, m, n \in \mathbb{R}$ ve a sabit vektör olmak üzere, $\alpha(s) = b\int e^{\int k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak $\gamma(s)$ eğrisininin geodezik eğriliği,

$$k_g^2(s) = \frac{(ms+n)^2}{1-(ms+n)^2}$$

dir [1].

İspat. $\Rightarrow \alpha$ eğrisi slant helis olsun. O zaman α eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliği sabit bir fonksiyondur.

$m, n \in \mathbb{R}$ ve $\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{v(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)(s) = m$ olmak üzere,

$$m = \left(\frac{\kappa^2}{v(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)(s)$$
$$m = \frac{k_g'(s)}{(k_g^2(s)+1)^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden,

$$ms + n = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + 1}}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(ms+n)^2 &= \frac{k_g^2(s)}{k_g^2(s)+1} \\
(ms+n)^2 &= \frac{k_g^2(s)+1-1}{k_g^2(s)+1} \\
(ms+n)^2 &= 1 - \frac{1}{k_g^2(s)+1} \\
k_g^2(s) &= \frac{1}{1-(ms+n)^2} - 1 \\
k_g^2(s) &= \frac{(ms+n)^2}{1-(ms+n)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow \alpha(s) = b\int e^{\int k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eğrisinden,

$$\begin{aligned}
\alpha^{'}(s) &= be^{\int k(s)ds}\gamma(s) \\
\alpha^{''}(s) &= be^{\int k(s)ds}(k(s)\gamma(s) + \gamma^{'}(s)) \\
\alpha^{'''}(s) &= be^{\int k(s)ds}\left(\left(k^2(s) + k^{'}(s)\right)\gamma(s) + 2k(s)\gamma^{'}(s) + \gamma^{''}(s)\right) \\
\kappa(s) &= \frac{1}{be^{\int k(s)ds}} \\
\tau(s) &= \frac{k_g(s)}{be^{\int k(s)ds}} \\
\upsilon(s) &= be^{\int k(s)ds}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri α eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliğinde yerine yazarsak,

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{\upsilon(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}\right)(s)$$

$$\sigma(s) = \left(\frac{\frac{1}{v^2}}{v\left(\frac{1}{v^2} + \frac{k_g^2}{v^2}\right)^{\frac{3}{2}}} k_g^{'} \right)(s)$$

$$\sigma(s) = \frac{k_g^{'}(s)}{(k_g^2(s)+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.2}$$

elde edilir. $z(s) = ms + n$ olsun. O zaman $k_g^2(s) = \dfrac{(ms+n)^2}{1-(ms+n)^2}$ eşitliğinden,

$$k_g^2 = \frac{z^2(s)}{1-z^2(s)} \tag{5.3}$$

elde edilir. Bu denklemin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} 2k_g(s)k_g^{'}(s) &= \left(\frac{2zz^{'}(1-z^2) - (-2zz^{'})z^2}{(1-z^2)^2} \right)(s) \\ k_g(s)k_g^{'}(s) &= \left(\frac{zz^{'}}{(1-z^2)^2} \right)(s) \end{aligned}$$

$$k_g^{'}(s) = \left(\left(\frac{zz^{'}}{(1-z^2)^2} \right) \left(\epsilon \sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}} \right) \right)(s) \tag{5.4}$$

elde edilir. $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (5.3) ve (5.4) eşitlikler (5.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \frac{k_g^{'}(s)}{(k_g^2(s)+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left(\varepsilon \frac{\frac{\sqrt{1-z^2}zz^{'}}{|z|(1-z^2)^2}}{\left(\frac{z^2}{1-z^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}} \right)(s) \\ &= \left(\varepsilon \frac{\sqrt{1-z^2}zz^{'}}{|z|(1-z^2)^2}(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \right)(s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\varepsilon\frac{(1-z^2)zz'}{z|(1-z^2)^2}\frac{z}{|z|}z'\right)(s) \\
&= \varepsilon\frac{ms+n}{|ms+n|}m \\
&= \varepsilon m
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani, α eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliği sabit fonksiyondur. Sonuç olarak α eğrisi slant helistir.

Örnek 5.2. $\gamma(s) = (\sqrt{1-s^2}\cos(\sqrt{2}\arcsin(s)) + \frac{s\sin(\sqrt{2}\arcsin(s))}{\sqrt{2}}, \frac{s\cos(\sqrt{2}\arcsin(s))}{\sqrt{2}} - \sqrt{1-s^2}\sin(\sqrt{2}\arcsin(s)), \frac{s}{\sqrt{2}})$ eğrisini alalım.

$$
||\gamma'(s)|| = 1
$$

$$
||\gamma(s)|| = 1
$$

olduğundan γ eğrisi birim küre üzerinde yatan birim hızlı bir eğridir. γ eğrisinin geodezik eğriliği $k_g^2 = \frac{s^2}{1-s^2}$ dir. Teorem 5.2 den; $b = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{s}$ ve $a = (0,0,0)$ alınırsa α eğrisi,

$$
\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))
$$

olmak üzere,

$$
\alpha_1 = \frac{1}{28}(2\sqrt{1-s^2}(-1+4s^2)\cos(\sqrt{2}\arcsin(s) + \sqrt{2}s(-2+5s^2)\sin(\sqrt{2}\arcsin(s)))
$$

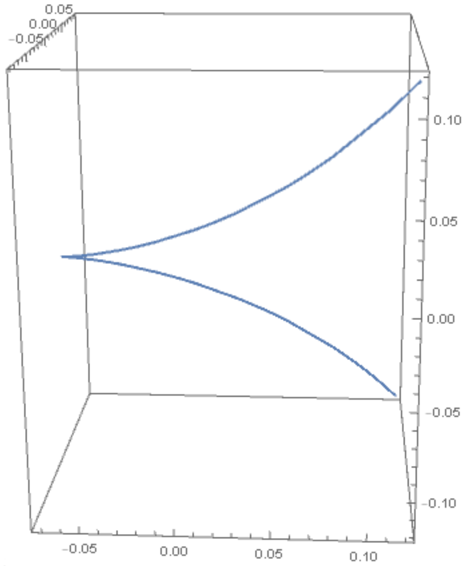
$$
\alpha_2 = \frac{1}{28}(\sqrt{2}s(-2+5s^2)\cos(\sqrt{2}\arcsin(s) + 2\sqrt{1-s^2}(-1+4s^2)\sin(\sqrt{2}\arcsin(s)))
$$

$$
\alpha_3 = \frac{s^3}{6\sqrt{2}}
$$

biçimindedir. α eğrisinin asli normal göstergesinin geodezik eğriliği,

$$
\sigma(s) = -1
$$

dir. Dolayısıyla, α eğrisi bir slant helistir.



Şekil 5.2. Slant helis

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}^3$ de verilen bir eğrinin şekil eğriliği, şekil torsiyonu ve bu kavramların eğrilerin temel teoremi ile ilgli uygulamaları çalışılmıştır. İlk olarak, $\mathbb{E}^3$ de direkt benzerlik dönüşümleri grubu altında eğrilerin invaryantlarına yer verilmiştir. Daha sonra [6] nolu çalışmadaki şekil eğriliği ve şekil torsiyonu tanımları yapılmıştır. Bu kavramlar kullanılarak eğrilerin temel teoremi ile ilgili başka bir versiyon verilmiştir. Buradan yola çıkarak birim küre üzerinde yatan birim hızlı bir eğri yardımıyla, $\mathbb{E}^3$ de eğriliği sıfırdan büyük olan başka bir eğrinin nasıl elde edildiği ile ilgili önermeler ve teoremler detaylı olarak ele alınmıştır. $\mathbb{E}^3$ de eğriliği sıfırdan büyük olan eğriler için elde edilen yöntemin örnek üzerinde uygulaması yapılmıştır. Son kısımda [1] nolu çalışmada yer alan slant ve küresel helisler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Sonuç olarak $\mathbb{E}^3$ deki bir α eğrisi ve birim küre üzerinde yatan birim hızlı bir γ eğrisi verildiğinde,

$i)$ γ eğrisi bir çemberdir ancak ve ancak $\alpha(s) = b\int e^{k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eşitliği ile elde edilen α eğrisinin küresel helis,

$ii)$ γ eğrisi bir küresel helistir ancak ve ancak $\alpha(s) = b\int e^{k(s)ds}\gamma(s)ds + a$ eşitliği ile elde edilen α eğrisinin slant helis olması için γ eğrisinin geodezik eğriliği ile ilgili karakterizasyonlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler verilerek uygulaması yapılmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında, γ eğrisinin küresel evolütü ile α eğrisinin Darboux görüntüsünün çakışık olduğuda da gösterilmiştir.
Bu çalışmadaki tüm örnekler Mathematica 10 programı kullanılarak yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1]. Altunkaya, B. ve Kula, L., 2015, Some characterizations of slant and spherical helisces of due to sabban frame, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 3(2), 64-73.

[2]. Babaarslan, M., 2013, *Sabit eğimli yüzeyler ve uygulamaları*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[3]. Camcı, Ç., 2007, *Kontak geometride eğriler teorisi*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[4]. Do Carmo, M. P., 1976, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[5]. Dodurgalı, S., 2011, *Uzay eğrilerinin şekil eğriliği*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[6]. Encheva, R. and Georgiev, G., 2003, Shape of space curves, *Journal for Geometry and Graphics*, 7(2), 145-155.

[7]. Gray, A., Abbena, E. and Salaman, S., 2006, *Modern Diffrential Geometry*, Chapman and Hall.

[8]. Hacısalihoğlu, H. H., 1993, *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.

[9]. Hacısalihoğlu, H. H., 1998, *Diferensiyel Geometri*, 3. baskı, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

[10]. Hacısalihoğlu, H. H., 1998, *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

[11]. Hacısalihoğlu, H. H., 2000, *Diferensiyel Geometri*, 4. baskı, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

[12]. Izumiya, S. and Takeuchi, N., 2002, Generic properties of helices and Bertrand curves, *Journal of Geometry*, 74(1), 97-109.

[13]. Sabuncuoğlu, A., 2004, *Lineer Cebir*, Nobel Yayınları, 2. baskı, Ankara.

[14]. Sabuncuoğlu, A., 2014, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınları, 5. baskı, Ankara.

[15]. Ward, J. P., 2012, Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications, *Springer Science and Busines Media*, 403.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Betül KORKMAZ
Doğum Yeri	Kırşehir
Doğum Tarihi	27.07.1992
Uyruğu	T.C
Telefon	...
E-Posta Adresi	rsbetul40@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2015

Makale ve Bildiriler
Kitap ve Kitap Bölümleri
6. Sınıf Matematik Dersi Kitabı, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, Devlet Kitapları 1. baskı, 2018.