T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN FONKSİYON UZAYLARINDA SINIRLILIĞININ BAZI UYGULAMALARI

Kemal ARIKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN FONKSİYON UZAYLARINDA SINIRLILIĞININ BAZI UYGULAMALARI

Kemal ARIKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 25.04.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Ali AKBULUT
Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kemal ARIKAN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezimin hazırlanması süresince her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi, tecrübe ve güler yüzü ile çalışmama ışık tutan, lisans dönemi içerisinde bende büyük emeği ve desteği olan ayrıca bana bu tezi vererek akademik anlamda kendimi geliştirmeye yönelik katkısı olan, yardımını hiçbir zaman esirgemeyen **Sayın Doç. Dr. Ali AKBULUT** hocama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez döneminde benden emeğini, maddi, manevi hiçbir desteğini esirgemeyen ailem ve eşime armağan ederim.

NİSAN, 2019 Kemal ARIKAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: **n-boyutlu Reel uzay**
$B(x,r)$	: **x merkezli, r yarıçaplı yuvar**
$\lvert B(x,r)\rvert$	: **B(x,r) yuvarının Lebesgue ölçüsü**
$\lVert\cdot\rVert_{L^p}$	: **Lebesgue normu**
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: **Lebesgue uzayı**
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	: **Zayıf Lebesgue uzayı**
$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$	: **lokal integrallenebilir fonksiyonlar uzayı**
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	: **Morrey uzayı**
$M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	: **Genelleştirilmiş Morrey uzayı**
$\mathcal{M}$	: **Hardy-Littlewood Maksimal operatörü**
$\mathcal{M}_\alpha$	: **Kesirli Maksimal operatörü**
T	: **Singüler integral operatörü**
I_α	: **Kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)**

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK ANALİZİN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN FONKSİYON UZAYLARINDA SINIRLILIĞININ BAZI UYGULAMALARI

Kemal ARIKAN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali AKBULUT

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümde Harmonik Analizde fonksiyon uzayları ve operatörler hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında integral operatörlerinin sınırlılıkları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise Harmonik Analizde integral operatörlerinin sınırlılığının bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

NİSAN 2019, 69 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: L_p uzayları, Morrey uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli,

ABSTRACT

MSc THESIS

SOME APPLICATIONS OF BOUNDEDNESS OF THE INTEGRAL OPERATORS ON HARMONIC ANALYSIS

Kemal ARIKAN

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Doç. Dr. Ali AKBULUT

This thesis is consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second and third sections, some basic concepts about function spaces and operators are given in Harmonic Analysis.

In the fourth chapter, the boundedness of integral operators in generalized Morrey spaces are investigated with full of details.

In the fifth chapter, some applications of boundedness of some integral operators of Harmonic Analysis are given.

APRIL 2019, 69 Pages.

Keywords: L_p spaces, Morrey spaces, Generalized Morrey spaces, Hardy-Littlewood maximal operator, Fractional maximal operator, Riezs potential

1. GİRİŞ

Harmonik Analizde fonksiyon uzaylarının modern teorisi son yüzyılda S.L. Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Mazya, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmektedir. Bu teorinin Harmonik Analizin problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde bir çok uygulamaları vardır.

Reel analizin klasik operatörlerinin sınırlılık teorisi Maksimal operatör, Kesirli Maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve Singüler operatörler Lebesgue uzayında daha önce çalışılmış olmasına rağmen Lebesgue uzayları ile birlikte Morrey uzaylarında önemli bir rol oynar.

Harmonik Analizde bu operatörlerin ağırlıklı eşitsizliklerini çalışmak önemli bir yere sahip olup, $L_p(\omega)$ Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılıklar R. Coifman, C. Fefferman, B. Muckenhoupt ve R. Wheeden tarafından elde edilmiştir. Harmonik Analizde önemli bir yere sahip olan Maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve Singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey uzaylarınaki sınırlılıkları ilk olarak Mizuhara, Nakai ve Guliyev tarafından araştırılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde Morrey uzaylarının, Genelleştirilimiş Morrey uzaylarının tanımı ve temel özellikleri verilerek, bu uzaylarda Harmonik Analizin bazı fonksiyonel operatorleri olan Maksimal, Riesz potansiyeli ve Singüler integral operatorlerinin sınırlılığı incelendi.

Son bölümde Harmonik Analizin integral operatörlerinin fonksiyon uzaylarında sınırlılıklarının bazı uygulamaları olarak Littlewood-Paley operatörü, Marcinkiewicz operatörü, Bochner-Riesz operatörü, $V^\gamma(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^\gamma\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$ Schrödinger tipli operatörleri ve bazı analitik yarı gruplarının kesirli kuvvetleri için yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez araştırma konusunda geçen bazı temel tanım ve teoremlere kısaca yer verildi.

2.1. Normlu Uzaylar

Bu kısımda normlu uzayların tez konusu ile ilgili tanımlarına, özelliklerine ve teoremlerine yer verildi.

Tanım 2.1. [**Norm, Normlu Vektör Uzayları**] X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde **norm** adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir **normlu vektör uzayı** denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [2].

Tanım 2.2. [**Denk Norm**] X, $\mathbf{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk norm** denir [42].

Tanım 2.3. **[Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık]** (x_n), (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir ve

$$x_n \to x_0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsaklık** denir [42].

Tanım 2.4. **[Çap, sınırlı küme, sınırlı dizi]** $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A) := \sup\Big\{\|x - y\| : x \in A,\ y \in A\Big\} \geq 0$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. Eğer bir $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine **sınırlı küme** denir. (x_n) dizisinin terimlerinin kümesi sınırlı ise diziye **sınırlı dizi** denir [2].

Tanım 2.5. **[Cauchy Dizisi]** $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun. $\forall\epsilon > 0$ için $m, n \geq n_\epsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ sayısına bağlı bir n_ϵ doğal sayısı varsa o zaman (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir [42].

Önerme 2.6. Cauchy dizisi ile ilgili aşağıdaki önermeler doğrudur .
(a) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
(b) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
(c) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır.
(d) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir [2].

Tanım 2.7. **[Banach Uzayları]** Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı **Banach uzayı** olarak adlandırılır [2].

Tanım 2.8. **[Üstten sınırlı, üst sınır, supremum]** $\forall n \in N$ için $x_n \leq$ M olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisi **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir ve $\sup x_n$ ile gösterilir [6].

Tanım 2.9. **[Alttan sınırlı, alt sınır, infimum]** $\forall n \in N$ için $x_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir ve $\inf x_n$ ile gösterilir [6].

Ayrıca infimum ve supremum özellikleri aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 2.10. *A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = a$ ve $\sup A = b$ olmak üzere a ve b sayılarının özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır .*
(i) $\forall x \in A$ için $x \geq a$ dır. Çünkü a alt sınırlıdır.
(ii) $\forall \delta > 0$ için

$$x < a + \delta \tag{2.1}$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır. Çünkü a alt sınırlarının en büyüğüdür. Eğer A nın hiçbir elemanı için (2.1) bağıntısı sağlanmasaydı A kümesinin bütün x elemanları için

$$x \geq a + \delta$$

olacaktı. Bu ise $a+\delta$ sayısının bir alt sınırı olduğunu ifade eder. Halbuki bu alt sınır, en büyük alt sınır olarak kabul edilen a sayısından daha büyüktür. Bu mümkün değildir.
(iii) $\forall x \in A$ için $x \leq b$ dir. Dolayısıyla b bir üst sınırdır.
(iv) $\forall \delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır[4].

Tanım 2.11. **[Artan Fonksiyon, Azalmayan Fonksiyon]** $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanların için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan fonksiyon** denir. Artan fonksiyon $\uparrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa da **azalmayan fonksiyon** denir [4].

Tanım 2.12. **[f^* Azalan Yeniden Düzenleme]** f fonksiyonunun $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) := \inf \left\{ \lambda \geq 0 \ : \ \alpha_f(\lambda) \leq t \right\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

2.2. Operatör Teorisi

Bu kısımda operatör kavramlarına ve bu operatörlerin tanım ve teoremlerine yer verildi.

Tanım 2.13. **[Operatör]** X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D nin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D den Y ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. A operatörünün x e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ yi, $A(x) \in Y$ ye götürdüğünü belirtmek için, $A : D \to Y$ gösterimi kullanır. Bu durumda D ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\Re = \Re(A) = \left\{ y \in Y : y = A(x), \ x \in D(A) \right\}$$

kümesine A operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir [2].

Tanım 2.14. **[Lineer Operatör]** X ve Y aynı $\mathbf{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin.

Eğer $D(A)$, X in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne **lineer operatör** denir [2].

Tanım 2.15. **[Birim Operatörü]** $A : X \to X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için

$$A(x) = x$$

ise A operatörüne **birim operatörü** veya **özdeşlik operatörü** denir. I_X veya I ile gösterilir [2].

Tanım 2.16. **[Sınırlılık]** X ve Y iki normlu uzay ve $D\,(A) \subset X$ olmak üzere $T : D\,(A) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D\,(A)$ için

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, A operatörüne **sınırlıdır** denir. Bir A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.17. **[Sürekli]** X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \to Y$ operatörü verilsin.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ olmak üzere $\forall x \in D(T),\ \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall(x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

şartları sağlanıyor ise bu durumda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir. Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$ nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir [2].

Teorem 2.18. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır [2].

Tanım 2.19. [Gömme] X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \Re(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$I : X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir **gömme operatörü** denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [39].

2.3. Ölçü Teorisi

Bu kısımda Ölçü Teorisi ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verildi.

Tanım 2.20. **[Cebir ve $\sigma-$Cebir]** X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A},\ E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebirdir** denir.
Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir **σ-cebir** denir [40].

Tanım 2.21. [**Borel Cebiri**] Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği(veya doğurduğu) σ-cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine **Borel cebiri** denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir [40].

Tanım 2.22. [**Ölçülebilir Uzay, Ölçü Uzayı, Ölçülebilir Küme**] X, boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ de $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de bir **ölçü uzayı** denir. $\mathcal{A}$ daki her bir eleman da **ölçülebilir küme** olarak adlandırılır [40].

Tanım 2.23. [**Ölçü, Sonlu Ölçü, σ-sonlu, Olasılık Ölçüsü**] $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye **sonlu ölçü** denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne **σ-sonlu** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir [40].

Tanım 2.24. [**Dış Ölçü**] X boştan farklı bir küme olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in \mathrm{P}(X),\ \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir [40].

Tanım 2.25. **[Lebesgue Dış Ölçüsü, Lebesgue Ölçülebilir]** $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i \ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alınırsa, bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

Caratheodary Ölçümü ise E kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir [40].

Tanım 2.26. [Dağılım Fonksiyonu] (X, μ) bir ülçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$(veya $\mathbb{C}$) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu\left(\left\{x \in X : \ |f(x)| > \lambda\right\}\right)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir [7].

Tanım 2.27. [Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrengement Invariant) Uzayları] $\rho(X, \Sigma, \mu)$, σ-sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in M_0^+(X, \mu)$ olmak üzere

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına **yeniden düzenleme altında değişmeyen (rearrengement invariant) uzayları** denir [7].

Tanım 2.28. [Hemen Hemen Her Yerde (h.h.y)] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.
Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir [6].

Tanım 2.29. **[Homojen Fonksiyon]** λ ve α iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α**. dereceden homojen fonksiyon** denir [39].

Tanım 2.30. **[Örtü, Açık Örtü, Alt Örtü, Sonlu Alt Örtü]** Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup\limits_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir **örtüsüdür** denir. Bu $\bigcup\limits_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup\limits_i$, A kümesinin **açık örtüsüdür** denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün **alt örtüsü** adı verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye **sonlu alt örtü** denir [2].

Tanım 2.31. **[Kompaktlık]** X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine **kompakttır** denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [2].

Tanım 2.32. **[Destek]** (X, ϱ) bir metrik uzayı ve $f : X \to [0, \infty]$ olsun. $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışına f fonksiyonunun **desteği** denir ve

$$\operatorname{supp} f = \left\{ \overline{x \in X : \ f(x) \neq 0} \right\}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f **kompakt destekli fonksiyon** adını alır [39].

Teorem 2.33. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter şart s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır [39].

3. HARMONİK ANALİZDE FONKSİYON UZAYLARI

3.1. L_p Uzayları (Lebesgue Uzayları)

Fonksiyonel analizde, Banach uzayının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını Lebesgue uzayı ($L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı) oluşturur. Fonksiyonel analizin önemli konularından biri olan $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayının, Fonksiyonel analizin iç problemlerinin çözülmesinde olduğu gibi kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde uygulamaları vardır. Bu bölümde Fonksiyonel analizde, Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını olan Lebesgue uzayının tanımı ve özellikleri incelendi. Bunun yanı sıra gerekli olan bazı teoremlere yer verildi.

Tanım 3.1. [L_p **Uzayları (Lebesgue Uzayları)**] (X, μ) bir ölçü uzayı ve $M, f : X \to \mathbb{C}$ tanımlı μ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X) := \left\{ f \in M : \int\limits_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L_p normu

$$\|f\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L_p ye **Lebesgue uzayları** denir. Burada

$$ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf \left\{ \lambda : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \right\}$$

dir [39].

Teorem 3.2. **[Hölder eşitsizliği]** $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_{p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $f, g \in L_1(\Omega)$ olur ve

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Teorem 3.3. **[Minkowski eşitsizliği]** $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L_p$ olsun. Bu durumda $(f + g) \in L_p$ olmak üzere

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği gözönüne alındığında L_p uzaylarının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L_p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$(L1)$ $\|f\|_{L_p} \geq 0$

$(L2)$ $\|f\|_{L_p} = 0 \Rightarrow$ h.h.y $f(x) = 0$

$(L3)$ $\|\alpha f\|_{L_p} = |\alpha| \|f\|_{L_p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$(L4)$ $\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L_p bir normlu uzaydır.

Teorem 3.4. **[Young eşitsizliği]** $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $p' = \dfrac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Tanım 3.5. [**L_p uzaylarında yakınsaklık**] $f_n,\ f \in L_p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L_p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L_p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L_p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0$$

olmasıdır [39].

Teorem 3.6. $1 \leq p < \infty$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. L_p uzayları

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır [40].

Teorem 3.7. [**Fubini**] f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|\, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$, $f(\cdot, y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y)\, dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot)\, dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir [39].

Teorem 3.8. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p uzaylarındaki basit fonksiyonların kümesi L_p uzaylarında yoğundur [40].

Tanım 3.9. [Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık] $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall\ f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq A \|f\|_{L_p}$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall\ \alpha > 0$ için

$$\mu\Big\{x :\ |Tf(x)| > \alpha\Big\} \leq \left(\frac{A\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right)^q, \qquad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir [43].

Tanım 3.10. **[Lokal İntegrallenebilme]** f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal(veya yerel) integrallenebilir** adı verilir ve

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f|\, d\mu \ < \ \infty,\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \infty,\ K \ \subset \ \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [40].

Teorem 3.11. $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

gömme koşulları elde edilir [40].

Tanım 3.12. **[L^p_w Uzayları (Ağırlıklı Lebesgue Uzayları)]** $1 \leq p \leq \infty$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. f fonksiyonları bütün ölçülebilir norma sahip ise bu durumda $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ uzayları

$$\|f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ **uzayları** denir. $p = \infty$ durumunda ise $L^\infty(\omega) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L^\infty_\omega} \equiv \|f\|_{L^\infty_\omega(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\omega(x)$$

ile tanımlanır [40].

Şimdi, $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzaylarının $[L_p(\Omega)]^*$ dual uzayını ifade eden tanımı aşağıda verelim.

Tanım 3.13. [Dual Uzayı] $g \in L_{p'}$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ için

$$\Phi_g(f) := \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L_p(\Omega)]^*$$

ve

$$\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$$

olarak tanımlanır [39].

Lemma 3.14. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin bir boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p > 1$ ve $M > 0$ olmak üzere öyle keyfi bir $f \in L_p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L_1(\Omega)$$

ve

$$\left|\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq M\|f\|_p$$

şeklindedir. Bu durumda $g \in L_{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \leq M$ biçiminde olur [40].

Tanım 3.15. **[Maksimal Operatör]** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\mathcal{M}f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonu

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır [46].

Tanım 3.16. **[Kesirli Maksimal Operatör]** $0 \leq \alpha < n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, M_α kesirli Maksimal operatörü

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) := \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır [46].

Teorem 3.17. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $\mathcal{M}f$ Maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall\ \alpha > 0$ için

$$m\left\{x : \mathcal{M}f(x) > \alpha\right\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $\mathcal{M}f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir [46].

Tanım 3.18. [Riesz Potensiyeli] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere, I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır [46].

Teorem 3.19. $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $d = \text{diam}(\Omega) = \sup \Big\{ |x-y| \ ; \ x, y \in \Omega \Big\}$, $0 < \alpha < \dfrac{n}{p}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\Omega)} \leq \overline{c}(p, \alpha, n) \|f\|_{L_p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\overline{c}(p, \alpha, n)$ pozitif sabiti

$$\overline{c}(p, \alpha, n) = c \frac{n}{\alpha[n - \alpha p]} (p')^{1/q}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir [36].

Tanım 3.20. [Singüler İntegral]

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \text{supp} f$$

Calderón-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür ve $L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca $K(x, y)$

$$\Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x = y \Big\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ için

$$|K(x, y)| \leq c_1 |x - y|^{-n}.$$

(ii) $2\ |x-x'| \leq |x-y|$ için

$$|K(x,\ y)-K(x',\ y)|+|K(y,\ x)-K(y,\ x')| \leq c_1\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır [11].

Önerme 3.21. T Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir [17].

Teorem 3.22. **[Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi]** (X,μ) ve (Y,v) ölçü uzayı $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T $L_{p_0}(X,\mu)+L_{p_1}(X,\mu)$ den Y ye zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli alt lineer operatör olsun. O halde $p_0<p<p_1$ için T kuvvetli (p,p) tiplidir [15].

İspat. $f \in L_p$ olsun. $\forall\lambda>0$ için

$$f_0 = \ f\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}$$

$$f_1 = \ f\chi_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}}$$

olmak üzere $f=f_0+f_1$ şeklinde yazılabilir. O halde $f_0 \in L_{p_0}(\mu)$ ve $f_1 \in L_{p_1}(\mu)$ olur.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= |T(f_0+f_1)(x)| \\ &\leq |Tf_0(x)+Tf_1(x)| \\ &\leq |Tf_0(x)|+|Tf_1(x)| \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\alpha_{Tf}(\lambda) \leq \alpha_{Tf_0}(\lambda/2)+\alpha_{Tf_1}(\lambda/2)$$

gerçeklenir.

1. Durum: $p_1 = \infty$ olsun. $A_1\|Tg\|_\infty \leq A_1\|g\|_\infty$ olmak üzere $c = \dfrac{1}{2A_1}$ seçilirse, bu durumda $\alpha_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$ olur. Zayıf (p_0, p_0) eşitsizliğinden

$$\alpha_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\alpha_{Tf_0}(\lambda/2)d\lambda \\
&\leq p\int_0^1 \lambda^{p-1}\left(\frac{2A_0}{\lambda}\right)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda \\
&= p\int_0^1 \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{f(x)/c} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu \\
&= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\frac{\lambda^{p-p_0}}{p-p_0}\Bigg|_0^{f(x)(2A_1)}\right)d\mu \\
&= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum: $p_1 < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\alpha_{Tf_i}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_i\|_{p_i}\right)^{p_i}, \quad i = 0, 1$$

olur. Bu durumda

$$\|Tf\|_p^p \leq \ p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu d\lambda$$

$$+ \ p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_1)^{p_1} \int\limits_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} d\mu d\lambda$$

$$= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p \ .$$

Teorem 3.23. T Calderón-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda p ye bağlı olmayan $c > 0$ sabiti için

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ c\left(\tfrac{p}{p-1} + \tfrac{p}{2-p} \right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 < p < 2,$$

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ c\left(p + \tfrac{p}{p-2} \right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \qquad p > 2$$

gerçeklenir [36].

Not: $T \equiv T_0$ herhangi bir kompakt destekli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \notin suppf$ için

$$|Tf(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \tag{3.4}$$

özelliğini sağlayan altlineer bir operatör olsun burada c_0, f ve x den bağımsızdır. Benzer şekilde kabul edelim ki T_α herhangi bir kompakt destekli, $\alpha \in (0,n)$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \notin suppf$ için

$$|T_\alpha f(x)| \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

özelliğini sağlayan bir altlineer bir operatör olsun c_0, f ve x den bağımsız olduğu durumda bazı $\alpha \in (0, n)$ için eşitsizliği sağlar [22].

3.2. Banach Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda Banach fonksiyon uzaylarının tanım ve bazı temel özellikleri verildi.

Tanım 3.24. [Banach Fonksiyon Normu] (R, μ) bir ölçü uzayı, $M^+, f : R \to [0, \infty]$ tanımlı $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. M^+ daki f, g, f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$ fonksiyonları, $\forall a \geq 0$ sabiti ve $\mu-$ ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için

(P_1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow$ h.h.y. $f = 0$,

(P_2) $\rho(af) = a\rho(f)$,

(P_3) $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$,

(P_4) h.h.y. $0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$,

(P_5) h.h.y. $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$,

(P_6) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$,

(P_7) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$, (burada C_E, $0 < C_E < \infty$, E ve ρ ya bağlı fakat f ye bağlı değildir)

özellikleri sağlanıyorsa ρ ya **Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu)** denir [7].

Tanım 3.25. [Banach Fonksiyon Uzayları] (R, μ) bir ölçü uzayı, M de R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde M deki

f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına **Banach fonksiyon uzayı** denir.
$\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

şeklinde ifade edilir [7].

Örnek 3.26. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L_p uzayları bir Banach fonksiyon uzayıdır.

Teorem 3.27. ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|.\|_X$ Tanım 3.25. deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzaydır. S de R üzerinde tanımlı μ-basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X \hookrightarrow M_0 \tag{3.5}$$

içermeleri sağlanır.
Özel olarak, X te $f_n \to f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n in bir alt dizisi h.h.y. f ye μ-noktasal yakınsaktır [7].

Lemma 3.28. $X = X(\rho)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ olsun.
(i) (Fatou Özelliği)
$0 \leq f_n \uparrow f$, $\quad(\mu$ -h.h.y.$)\quad$ olmak üzere $\qquad$ a) $f \notin X \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_X \uparrow \infty$

b) $f \in X \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$.

(ii) (Fatou Lemması)
$f_n \to f$ (μ-h.h.y.) ve $\liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty \quad \Rightarrow \quad \|f\|_X \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X$ sağlanır [7].

Teorem 3.29. X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ X te $f \in X$ e yakınsaktır ve

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

gerçeklenir. Özel olarak X tamdır [7].

Tanım 3.30. **[Mutlak Sürekli Norm]** X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi ve f, X uzayında bir fonksiyon olsun.
Eğer h.h.y. $E_n \to \varnothing$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\|f\chi_{E_n}\| \to 0$$

oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna **mutlak sürekli norma sahiptir** denir [7].

3.3. $M_{p,\lambda}$ Uzayları (Morrey Uzayları)

Morrey uzaylar 1938 yılında kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin doğruluk problemi konusunda C. Morrey tarafından kullanıldı. Bu bölümde Morrey uzayının tanımı ve bazı teoremlere yer verildi. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme olsun. $\overline{B}(x,\ r) = B(\mathrm{x},r) \cap \Omega$, $x \in \Omega, r > 0$, ve $|A|$ $\mathbb{R}^n$. de ölçülebilir kümelerin Lebesgue ölçüsünü simgeler.

Tanım 3.31. **[Morrey uzayları]** $1 \leq p < \infty$ ve $\lambda \geq 0$ olsun. $M_{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey uzayı

$$M_{p,\lambda}(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) : \sup_{x\in\Omega; r>0} \frac{1}{r^{\lambda}} \int_{\overline{B}(x,r)} |f(y)|^p \mathrm{d}y < \infty\} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır.

Bu

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega; r>0} \left(\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \tag{3.7}$$

normuna göre Banach uzaydır.
$\lambda > n$ için $M_{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$ ve $M_{p,0}(\Omega) \cong L_p(\Omega)$ ve $M_{p,n}(\Omega) \cong L_\infty(\Omega)$ olur.

Bu uzaylar için bazı durumlarda $M_{p,q}$, formülünden kullanıldığına dikkat edelim farklı bir harf olan M seçimi dışında ikinci bir paremetre ayrıca (3.7) farklı olarak normda değişik biçimde kullanılır. Öyleki,

$$\|f\|_{M_{p,\mathrm{q}}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega; r>0} r^{\frac{n}{\mathrm{q}}-\frac{n}{p}} \|f\|_{M_p(\widetilde{B}(x,r))}$$

olur [26].

Teorem 3.32. [Hölder Eşitsizliği] $f \in M_{p,\lambda}(\Omega)$ ve $g \in M_{q,\mu}(\Omega)$ olsun.

$$\|fg\|_{M_{r,\nu}(\Omega)} \leq \|f\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} \|g\|_{M_{\mathrm{q},\mu}(\Omega)}, \tag{3.8}$$

Bu durumda $1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$ ve

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

$$\frac{\nu}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{q} \tag{3.9}$$

olur [26].

Hölder eşitsizliğinin $\widetilde{B}(x,r)$ integralleri üzerinde uygulanmasıyla Morrey uzayları için Gömme teoremi şöyledir:

Teorem 3.33. [Gömme Teoremi] $1 \leq p \leq q < \infty$ ve λ, ν negatif olmayan sayılar olsun. Bu durumda

$$M_{q,\nu}(\Omega) \hookrightarrow M_{p,\lambda}(\Omega) \tag{3.10}$$

koşulu ile $|\Omega|$ sonlu ise

$$\frac{\lambda - n}{p} \leq \frac{\nu - n}{q} \tag{3.11}$$

$|\Omega|$ sonsuz ise

$$\frac{\lambda - n}{p} = \frac{\nu - n}{q} \tag{3.12}$$

olur.

(3.11) koşulu ile "iyi tanımlı" Ω kümelerinde gömme (3.10) koşulu için gerekli ve yeterlidir. $\Omega = Q_0$ de küp olduğu durumda L.C. Piccinini [38] incelemiştir. Ayrıca Y. Furusho [19] da Morrey uzayının $M_r^{p,\lambda}, p, r \in [1,\ \infty)$ değişikliği için benzer bir sonuç elde etmiştir. Bu değişiklik şu şekilde ifade edlilebilir. $\overline{S}$, Q_j, kesişmeyen parelel alt küplerinin sonlu sayılarında oluşan tam sistemlerini oluşturan

$$S = \{Q_j : \cup Q_j \subset Q_0\}$$

ve

$$\|u\|_{M(p,\lambda)}(Q_j) = \sup_{Q \subset Q_j} |Q|^{\frac{\lambda - n}{np}} \|u\|_{M_p(Q)},$$

ve

$$\|u\|_{M_r^{p,\lambda}(Q_0)} = \sup_{S \in \overline{S}} \{ \sum_{Q_j \in S} \|u\|^r_{MQ_j}(p, \lambda)\}^{1/r};$$

$n/r - \lambda/p \leq 1$ ve $n/s - \mu/q \leq 1$ durumunda $M_r^{p,\lambda} \hookrightarrow M_s^{q,\mu}$ gömme işleminin geçerliliği için gerek ve yeter şart ispatlanmıştır [26].

3.4. $\mathrm{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Uzayı (Genelleştirilmiş Morrey Uzayları)

Bu kısımda Genelleştirilmiş Morrey Uzayın tanımı ve özellikleri ile ilgili bilgilere yer verildi.

$M_{p,\lambda}$ tanımında (3.7) eşitliğinde r^λ güç fonksiyonu yerine herhangi bir ölçülebilen pozitif ağırlık fonksiyonu alınırsa bu fonksiyon Genelleştirilmiş Morrey uzayı olur.

Tanım 3.34. $\omega(x,r)$ nin $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilen bir ağırlıklı fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega(x,r)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

şeklinde gösterilir.

Sonlu yarı normlar ile $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün fonskiyon uzayına, $M_{p,\omega}$ **Genelleştirilmiş Morrey uzayı** olarak adlandırılır [3].

Tanım 3.35. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için $p \in (0,\infty)$ ise

$$\left(\int_t^\infty \left(\frac{\operatorname{ess\,inf}_{r<s<\infty} \omega_1(x,s)}{r^m}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r}\right)^p \leq C\, \frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \tag{3.13}$$

ve $p = 0$ ise

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t<r<ß} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{r<s<ß} \omega_1(x,s)}{r^m} \leq C \frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir C sabiti $p \in [0,\infty)$, $m > 0$ için (ω_1, ω_2), $\mathcal{Z}_{p,n}$ sınıfına aittir [3].

Tanım 3.36. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için

$p \in (0, \infty)$ ise

$$\left(\int_t^\infty \left(\frac{\omega_1(x,r)}{r^m} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} \right)^p \leq C \frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \tag{3.15}$$

ve p =0 ise

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t<r<\infty} \frac{\omega_1(x,r)}{r^m} \leq C \frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \tag{3.16}$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa $p \in [0, \infty)$, $m > 0$ için (ω_1, ω_2) $\widetilde{\mathcal{Z}}_{p,m}$ sınıfına aittir [3].

Belirtelim ki $p \in [0, \infty)$, $m > 0$ için $\widetilde{\mathcal{Z}}_{p,m} \subset \mathcal{Z}_{p,m}$ dir.

$\mathcal{Z}_{p,m}$, $p \in [0, \infty)$, $m > 0$ sınıfları için aşağıdaki gömme teoremini verelim.

Lemma 3.37.

$$\bigcup_{0<p<\infty} \mathcal{Z}_{p,m} \subset \mathcal{Z}_{0,m}$$

[3].

İspat. Bazı $p \in (0, \infty)$ ler için $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{Z}_{p,m}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $s \in (t, \infty)$ için

$$\frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \gtrsim \left(\int_t^\infty \left(\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{r<\tau<\text{ß}} \omega_1(x,\tau)}{r^m} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} \right)^p$$

$$\gtrsim \left(\int_s^\infty \left(\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{r<\tau<\infty} \omega_1(x,\tau)}{r^m} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} \right)^p$$

$$\gtrsim \operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \omega_1(x,\tau) \left(\int_s^\infty \frac{dr}{r^{\frac{m}{p}+1}} \right)^p$$

$$\approx \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \omega_1(x,\tau)}{s^m}.$$

Böylece

$$\frac{\omega_2(x,t)}{t^m} \gtrsim \operatorname*{ess\,sup}_{t<s<\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{s<\tau<\infty} \omega_1(x,\tau)}{s^m}.$$

Bu da

$$\bigcup_{0<p<\infty} \mathcal{Z}_{p,m} \subset \mathcal{Z}_{0,m}$$

olduğunu ispatlar.

Uyarı 3.38. $\omega(t) = t^n$ olsun. Bu durumda $(\omega, \omega) \in \mathcal{Z}_{0,n}$; fakat $p \in (0,\infty)$ için $(\omega,\omega) \notin \mathcal{Z}_{p,n}$ [3].

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Bu bölümde, Harmonik Analizde fonksiyon uzaylarında önemli yere sahip olan Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında integral operatörlerinin sınırlılıkları ile ilgili teorem ve ispatlara yer verildi.

4.1. $\mathrm{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Bu kısımda Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Maksimal operatörün sınırlılığıyla ilgili tanım, teorem ve ilgili lemmalara yer verilerek operatörün sınırlılığı incelendi.

v negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ise, $L_{\infty,v}(0,\infty)$ ile

$$\|g\|_{L_{\infty,v}(0,\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v(t)g(t)$$

normuna sahip bütün sonlu normlu $g(t); t > 0$ fonksiyonlarının oluşturduğu sonlu normlu uzayı gösterilir ve

$$L_\infty(0,\infty) \equiv L_{\infty,1}(0,\infty).$$

$\mathfrak{M}(0,\infty)$ kümesi;$(0,\infty)$ üzerinde bütün Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların bir kümesi ve $\mathfrak{M}^+(0,\infty) \subset \mathfrak{M}(0,\infty)$ kümesi;$(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonların kümesi olsun. $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan, $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ daki tüm fonksiyonlarının konisi $\mathfrak{M}^+(0,\infty,\uparrow)$ kümesi ve

$$\mathbb{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+(0,\infty;\uparrow) : \lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

u; $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli bir foksiyon olsun, $g \in \mathfrak{M}(0,\infty)$ üzerindeki supremal operatör $\overline{S}_u$;

$$(\overline{S}_u g)(t) := \|u\, g\|_{L_\infty(t,\infty)}, \quad t \in (0,\infty)$$

şeklinde tanımlanır [12].

Aşağıdaki teorem Burenkov ve ark. [12] tarafından 2010 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 4.1. v_1, v_2 ve $\forall\ t > 0$ için $0 < \|v_1\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty$ şartını sağlayan negatif olmayan fonksiyonlar ve u; $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun.

Bu durumda $\overline{S}_u$ operatörü $\mathbb{A}$ konisi üzerinde $L_{\infty,v_1}(0,\infty)$ uzayından $L_{\infty,v_2}(0,\infty)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| v_2 \overline{S}_u \left(\|v_1\|^{-1}_{L_\infty(\cdot,\infty)} \right) \right\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty. \tag{4.1}$$

Genelleştirilimiş Morrey uzaylarında M sınırlılığı için Nakai [37] , Mizuhara [34], Burenkov ve ark. [8], [10] - [12] tarafından farklı sonuçlar elde edilmiştir. Şimdi sıradaki lemmaya bakalım;

Lemma 4.2. $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ deki herhangi bir $B = B(x,r)$ ve $\forall\ f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_p(B(x,2r))} + r^{\frac{n}{p}} \sup_{t>2r} t^{-n} \|f\|_{L_1(B(x,t))}, \tag{4.2}$$

$\forall\ f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_1(B(x,2r))} + r^n \sup_{t>2r} t^{-n} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \tag{4.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. [12]

İspat. $1 < p < \infty$ olsun, herhangi bir $B = B(x,r)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B)} \leq \|M(f\chi_{(2B)})\|_{L_p(B)} + \|M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})\|_{L_p(B)}$$

olduğu açıktır. $1 < p < \infty$ da $M : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sürekliliğinden

$$\|M(f\chi_{(2B)})\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)}$$

eşitsizliği elde edilir.

$y; B(x,r)$ den herhangi bir nokta olsun. Eğer $B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n \backslash (2B)\} \neq \emptyset$ ise bu durumda $t > r$ olur. Gerçekten $z \in B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n \backslash (2B)\}$ ise

$$t > |y-z| \geq |x-z| - |x-y| > 2r - r = r$$

olur. Diğer taraftan

$$B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n \backslash (2B)\} \subset B(x,2t)$$

olur. Gerçekten $z \in B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n \backslash (2B)\}$ ise bu durumda

$$|x-z| \leq |y-z| + |x-y| < t + r < 2t$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} M(f\chi_{\mathbb{R}^n \backslash (2B)})(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n \backslash (2B)\}} |f(z)| dz \\ &\leq 2^n \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2t)|} \int_{B(x,2t)} |f(z)| dz \\ &= 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)| dz. \end{aligned}$$

Bundan dolayı $\forall\, y \in B$ için

$$M(f\chi_{\mathbb{R}^n \backslash (2B)})(y) \leq 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)| dz. \tag{4.4}$$

Böylece

$$\|Mf\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + |B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right)$$

elde edilir. $p = 1$ olsun ve herhangi bir $B = B(x,r)$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B)} \leq \|M(f\chi_{(2B)})\|_{WL_1(B)} + \|M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})\|_{WL_1(B)}$$

olduğu açıktır. $M : L_1(\mathbb{R}^n) \to WL_1(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sürekliliğinden dolayı,

$$\|M(f\chi_{(2B)})\|_{WL_1(B)} \lesssim \|f\|_{L_1(2B)}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda (4.4) eşitsizliğinden (4.3) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.3. $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda herhangi $B = B(x,r) \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))}, \tag{4.5}$$

$\forall\ f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,r))} \lesssim r^n \sup_{t>2r} t^{-n} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \tag{4.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir [12].

İspat. $1 < p < \infty$ olsun. Tanımdan

$$\mathcal{M}_1 := |B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right),$$

$$\mathcal{M}_2 := \|f\|_{L_p(2B)}.$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\mathcal{M}_1 \lesssim |B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{B(x,t)} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$|B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{B(x,t)} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\gtrsim |B|^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{p}}} \right) \|f\|_{L_p(2B)} \approx \mathcal{M}_2$$

olur. Lemma 4.5. den dolayı

$$\|Mf\|_{L_p(B)} \leq \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$

(4.5) eşitsizliği ispatlanır.

$p = 1$ olsun. (4.6) eşitsizliğinden (4.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4. $p \in [1, \infty)$ ve $(\omega, \omega) \in \mathcal{Z}_{0,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için M, M_{p,ω_1} uzayından M_{p,ω_2} uzayına ve $p = 1$ için M, M_{1,ω_1} uzayından WM_{1,ω_2} uzayına sınırlıdır [3].

İspat. Lemma 4.3. ve Teorem 4.1. den dolayı $p \in (1, \infty)$ ise

$$\|Mf\|_{M_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \omega_2(x,r)^{-\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}} \left(\sup_{t>r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \right)$$

$$\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \omega_1(x,r)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))}$$

$$= \|f\|_{M_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir ve $p = 1$ ise

$$\|Mf\|_{W\mathcal{M}_{1,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega_2(x,r)^{-1} r^n \left(\sup_{t>r} t^{-n} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \right)$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega_1(x,r)^{-1} \|f\|_{L_1(B(x,t))}$$

$$= \|f\|_{M_{1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir.

4.2. $\mathrm{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Kesirli Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında M ve M_α nın sınırlılığı α için yeterli koşulları özellikle Burenkov ve Guliyev ark. tarafından son yıllarda ([3], [8]-[12], [23], [24], [33], [37]) elde edilmiştir. Bu kısımda ise Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Kesirli Maksimal operatörünün sınırlılığı incelendi.

Lemma 4.5. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\forall\ f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(B(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_p(B(x,2r))} + r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-n+\alpha} \|f\|_{L_1(B(x,t))}. \tag{4.7}$$

Ayrıca $\forall\ f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL_q(B(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_1(B(x,2r))} + r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-n+\alpha} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \tag{4.8}$$

[25].

İspat. $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. $f_1 = f\chi_{2B}$ ve $f_2 = f\chi_{\complement_{(2B)}}$ olduğunda $f = f_1 + f_2$ herhangi $B = B(x,r)$ için ,

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(B)} \leq \|M_\alpha f_1\|_{L_q(B)} + \|M_\alpha f_2\|_{L_q(B)}$$

olur. $M_\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sürekliliğinden dolayı $y \in B(y,t)$ olsun.

$$\|M_\alpha f_1\|_{L_q(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir. y; $B(y,t)$ de herhangi bir nokta olsun. $B(y,t) \cap {}^{\complement}(2B) \neq \emptyset$, ise $t > r$ dir. Ayrıca, $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(2B)$ ise

$$t > |y-z| \geq |x-z| - |x-y| > 2r - r = r$$

olur. Diğer taraftan $B(y,t) \cap {}^{\complement}(2B) \subset B(x,2t)$ dir. Ayrıca, $z \in B(y,t) \cap {}^{\complement}(2B)$ ise

$$|x-z| \leq |y-z| + |x-y| < t + r < 2t$$

elde edilir. Bu durumda

$$M_\alpha f_2(y) = \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(y,t)\cap {}^{\complement}(2B)} |f(z)|dz$$

$$\leq 2^{n-\alpha} \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,2t)} |f(z)|dz.$$

$$= 2^{n-\alpha} \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz$$

Böylece, $y \in B$ için

$$M_\alpha f_2(y) \leq 2^{n-\alpha} \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right)$$

olur. $p=1$ olsun. Herhangi bir $B=B(x,r)$ yuvarı için

$$\|M_\alpha f\|_{WL_q(B)} \leq \|M_\alpha f_1\|_{WL_q(B)} + \|M_\alpha f_2\|_{WL_q(B)}$$

olacağı açıktır.

$M_\alpha : L_1(\mathbb{R}^n) \to WL_q(\mathbb{R}^n)$ operatörünün sürekliliğinden dolayı

$$\|M_\alpha f_1\|_{WL_q(B)} \lesssim \|f\|_{L_1(2B)}$$

elde edilir. Bu durumda (4.9) eşitsizliği ile (4.8) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.6. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir $B=B(x,r)$ yuvarı ve $\forall\ f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(B(x,t))}. \tag{4.10}$$

Ayrıca $\forall\ f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_\alpha f\|_{WL_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \sup_{t>2r} t^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \tag{4.11}$$

[25].

İspat. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Tanımdan dolayı

$$\mathcal{M}_1 := |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,t)} |f(z)| dz \right),$$

$$\mathcal{M}_2 := \|f\|_{L_p(2B)}.$$

Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\mathcal{M}_1 \lesssim |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(x,t)} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$|B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(x,t)} |f(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\lesssim |B|^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|^{\frac{1}{q}}} \right) \|f\|_{L_p(2B)} \approx \mathcal{M}_2.$$

Lemma 4.5. den dolayı

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(B)} \leq \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$

(4.10) eşitsizliği ispatlanır.

$p = 1$ olsun. (4.11) eşitsizliğinden (4.8) elde edilir.

Teorem 4.7. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1, φ_2) olsun,

$$\sup_{r<t<\infty} t^\alpha \varphi_1(x,t) \leq C\varphi_2(x,r), \tag{4.12}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r den bağımsızdır. Bu durumda M_α, $p > 1$ için $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için M_α, $M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır [25].

İspat. Lemma 4.6. ve Teorem 4.1. den dolayı $p > 1$ ise

$$\|M_\alpha f\|_{M_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \left(\sup_{t>r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \right)$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \sup_{t>r} t^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \varphi_1(x,t) \Big(\varphi_1(x,r)^{-1} t^{\frac{-n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} \Big)$$

$$\lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \sup_{t>r} t^\alpha \varphi_1(x,t)$$

$$\lesssim \|f\|_{M_{p,\varpi_1}(\mathbb{R}^n)}$$

$p = 1$ ise

$$\|M_\alpha f\|_{WM_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \left(\sup_{t>r} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_1(B(x,t))} \right)$$

$$\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \sup_{t>r} t^\alpha \varphi_1(x,t)$$

$$\lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir.

4.3. $\mathrm{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Calderon-Zygmund Operatörü Tarafından Üretilen Altlineer Operatörün Sınırlılığı

Bu kısımda

$$(Hg)(t) := \frac{1}{t} \int_0^t g(r)dr, \;\; 0 < t < \infty$$

Hardy operatörünün sınırlılığıyla ilgili teoremlere yer verildi.

Teorem 4.8. Bütün negatif olmayan ve $(0, \infty)$ üzerinde artmayan g fonksiyonları için

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0} w(t)Hg(t) \leq c \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v(t)g(t)$$

eşitsizliği sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A := \sup_{t>0} \frac{w(t)}{t} \int_0^t \frac{dr}{\operatorname*{ess\,sup}_{0<s<r} v(s)} < \infty,$$

ve $c \approx A$ [14].

Lemma 4.9. $1 \leq p < \infty$, T (3.4) koşulunu sağlayan altlineer operatörü $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olsun.
Bu durumda $1 < p < \infty$ için herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve $\forall\ f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|Tf\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt,$$

$p = 1$ için herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve $\forall\ f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^{n} \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt, \tag{4.13}$$

eşitsizliği gerçeklenir [22].

İspat. $p \in (1, \infty)$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$ x_0 merkezlii r yarıçaplı yuvar ve r nin yarıçapı için $2B = B(x_0, 2r)$ olsun.

$$f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0, \tag{4.14}$$

ile gösterilir ve f fonksiyonu

$$f = f_1 + f_2$$

ile gösterilir ve bu durumda

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \leq \|Tf_1\|_{L_p(B)} + \|Tf_2\|_{L_p(B)}$$

eşitsizliği elde edlilir.
$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $Tf_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve T nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından $C > 0$, f den bağımsız olmak üzere

$$\|Tf_1\|_{L_p(B)} \leq \|Tf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= C\|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir. $x \in B$, $y \in \complement(2B)$ olmak üzere
$|x - x_0| \leq r$, $|x_0 - y| \geq 2r$ olduğunda $|x - x_0| \leq r \leq \frac{|x-x_0|}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - x_0 + x_0 - y| \\ &\leq |x - x_0| + |x_0 - y| \\ &\leq r + |x_0 - y| \\ &\leq \frac{3}{2}|x_0 - y| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x_0 - x + x - y| \\ &\leq |x_0 - x| + |x - y| \\ &\leq r + |x - y| \\ &\leq \frac{x - y}{2} + |x - y| \\ &\Rightarrow \frac{x - y}{2} \leq |x - y| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\frac{1}{2}|x_0 - y| \le |x - y|$$

$$\le \frac{3}{2}|x_0 - y|$$

olmasını gerektir. Buradan

$$|Tf_2(x)| \le 2^n c_0 \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir. Fubini teoreminden dolayı

$$\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \approx \int_{\complement_{(2B)}} |f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy$$

$$\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0 - y| < t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

sonucuna ulaşılır. Hölder eşitsizlğini uygulayarak

$$\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \tag{4.15}$$

elde edilir. Ayrıca, $p \in [1, \infty)$ için

$$\|Tf_2\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \tag{4.16}$$

doğrudur. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}.$$

olur. Diğer yandan

$$\|f\|_{L_p(2B)} \approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \tag{4.17}$$

$$\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \tag{4.18}$$

elde edilir. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

olur. $p = 1$ olsun. T nin $(1,1)$ zayıf sınırlılığından ve (4.17) den ;

$$\begin{aligned} \|Tf_1\|_{WL_1(B)} &\leq \|Tf_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L_1(2B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Bu durumda (4.16) ve (4.19) ile (4.13) eşitsizliğini elde edilir.

Teorem 4.10. $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_{r}^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C\, \varphi_2(x,r), \tag{4.20}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r den bağımsızdır.

T, (3.4) koşulunu sağlayan altlineer operatörü $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olsun. Bu durumda T operatörü $p > 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına ve M_{p,φ_1} uzayından WM_{p,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Ayrıca $p > 1$ için

$$\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

[22].

İspat. Lemma 4.9. ve Teorem 4.8. den dolayı $p \in (1, \infty)$ için

$$\|Tf\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-\frac{n}{p}}} \|f\|_{L_p(B(x,t^{-\frac{p}{n}}))} dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{p}{n}})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_p(B(x,t^{-\frac{p}{n}}))} dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-\frac{p}{n}})^{-1}\, r\, \|f\|_{L_p(B(x,r^{-\frac{p}{n}}))}$$

$$= \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_1(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{1}{n}})^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_1(B(x,t^{-\frac{1}{n}}))} dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x, r^{-\frac{1}{n}})^{-1}\, r\, \|f\|_{L_1(B(x,r^{-\frac{1}{n}}))}$$

$$= \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

elde edilir.

4.4. $\mathrm{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Riesz Potansiyeli Tarafından Üretilen Altlineer Operatörün Sınırlılığı

Bu kısımda Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Riezs Potansiyeli tarafından üretilen altlineer operatörün sınırlılığı incelendi.

Lemma 4.11. $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, T_α, (3.4) koşulunu sağlayan altlineer operatör olsun ve $p > 1$ için T_α, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına, $p = 1$ için T_α, $L_1(\mathbb{R}^n)$ $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olsun.
Bu durumda $p > 1$ için $\forall B(x_0, r)$ yuvarı ve $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|T_\alpha f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt,$$

ayrıca $p = 1$ için $\forall$ $B(x_0, r)$ yuvarı ve $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|T_\alpha f\|_{WL_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt \tag{4.21}$$

eşitsizliği gerçeklenir. [22]

İspat. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve r nin yarıçapı için $B = B(x_0, r)$ olsun. $f_1 = f\chi_{2B}$ ve $f_2 = f\chi_{\complement_{(2B)}}$ olmak üzere f fonskiyonu

$$f = f_1 + f_2$$

olarak gösterilir. Böylece

$$\|T_\alpha f\|_{L_q(B)} \leq \|T_\alpha f_1\|_{L_q(B)} + \|T_\alpha f_2\|_{L_q(B)}$$

olur.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $T_\alpha f_1 \in L_q(\mathbb{R}^n)$ olur ve T_α nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$T_\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

uzayına sınırlıdır. $C > 0$, f den bağımsızdır.

$$\|T_\alpha f_1\|_{L_q(B)} \leq \|T_\alpha f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_p(2B)}$$

olur. $x \in B$, $y \in {}^{\complement}(2B)$ olması durumunda
$|x - x_0| \leq r$, $|x_0 - y| \geq 2r$ olduğunda $|x - x_0| \leq r \leq \frac{|x-x_0|}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|x - y| &= |x - x_0 + x_0 - y| \\
&\leq |x - x_0| + |x_0 - y| \\
&\leq r + |x_0 - y| \\
&\leq \frac{3}{2}|x_0 - y|
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
|x-y| &= |x_0 - x + x - y| \\
&\leq |x_0 - x| + |x-y| \\
&\leq r + |x-y| \\
&\leq \frac{x-y}{2} + |x-y| \\
&\Rightarrow \frac{x-y}{2} \leq |x-y|
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|x_0 - y| &\leq |x-y| \\
&\leq \frac{3}{2}|x_0 - y|
\end{aligned}
$$

olmasını gerektirir.

$$
|T_\alpha f_2(x)| \leq 2^{n-\alpha} c_1 \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy
$$

elde edilir. Fubini teoremi ile

$$
\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy &\approx \int_{\complement_{(2B)}} |f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| \leq t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada Hölder teoremi uygulanırsa

$$\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha}} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.22}$$

elde edilir. Ayrıca $p \in [1,\infty)$ için

$$\|T_\alpha f_2\|_{L_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.23}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\|T_\alpha f\|_{L_q(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

olur. Diğer yandan

$$\|f\|_{L_p(2B)} \approx r^{\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.24}$$

$$\leq r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.25}$$

olur. Bu durumda

$$\|T_\alpha f\|_{L_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

olur. $p = 1$ olsun. T_α nın $(1,q)$ zayıf sınırlılığından ve (4.24) ten ;

$$\|T_\alpha f_1\|_{WL_q(B)} \leq \|T_\alpha f_1\|_{WL_q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \tag{4.26}$$

$$= \|f\|_{L_1(2B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \tag{4.27}$$

olur. Bu durumda (4.23) ve (4.26) ten (4.21) eşitsizliğini elde edilir.

Teorem 4.12. $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \le C\, \varphi_2(x,r) \tag{4.28}$$

koşulunu sağlasın. Burada C, x ve r den bağımsızdır.

T_α, (3.4) koşulunu sağlayan $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde T_α, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına, $p = 1$ için T_α, $L_1(\mathbb{R}^n)$ uxayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına ye sınırlı altlineer bir operatör olsun. Bu durumda T_α, $p > 1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{q,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için $T_\alpha, M_{1,\varphi_1}$ uzayından WM_{q,φ_2} ye sınırlıdır.
Ayrıca $p > 1$ için

$$\|T_\alpha f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}},$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

olur [22].

İspat. Lemma 4.11. ve Teorem 4.8. ile $p > 1$ için

$$\|T_\alpha f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-\frac{n}{q}}} \|f\|_{L_p(B(x,t^{-\frac{q}{n}}))} dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{q}{n}})^{-1} \int_0^r \|f\|_{L_p(B(x,t^{-\frac{q}{n}}))} dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-\frac{q}{n}})^{-1}\, r^{\frac{q}{p}}\, \|f\|_{L_p(B(x,r^{-\frac{q}{n}}))} = \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-\frac{n}{q}}} \|f\|_{L_1(B(x,t^{-\frac{n}{q}}))} dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r^{-\frac{q}{n}})^{-1} \int_0^r \|f\|_{L_1(B(x,t^{-\frac{q}{n}}))} dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r^{-\frac{q}{n}})^{-1}\, r^q \, \|f\|_{L_1(B(x,r^{-\frac{q}{n}}))} = \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}.$$

5. HARMONİK ANALİZDE BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİNDEKİ SINIRLILIKLARININ BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde, Harmonik Analizin integral operatörlerinin fonksiyon uzaylarında sınırlılıklarının bazı uygulamaları olarak Littlewood-Paley operatörü, Marcinkiewicz operatörü, Bochner-Riesz operatörü, $V^{\gamma}(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^{\gamma}\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$ Schrödinger tipli operatörleri ve bazı analitik yarı gruplarının kesirli kuvvetleri için yer verilmiştir.

5.1. Littlewood-Paley Operatörü

Littlewood-Paley fonksiyonları klasik harmonik analizde önemli rol oynamaktadır. Örneğin Stein ([45],[46],[47]) tarafından Fatou tipinin tanjatsal olmayan yakınsaklığı ve Riesz dönüşümlerinin ve çarpanlarının sınırlılıkları çalışılmıştır.

Şimdi Littlewood-Paley operatörünün tanımını verelim.

Tanım 5.1. $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0 \tag{5.1}$$

sağlansın. g_ψ, genelleştirilmiş Littlewood-Paley g fonksiyonu $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ ve $F_t(f) = \psi_t * f$ olmak üzere

$$g_\psi(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

Lu vd. ([32]) tarafından Littlewood-Paley operatörü için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.2. $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, (5.1) koşulunu ve

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x+h) - \psi(x)| dx \leq C|h|^{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.3}$$

özelliklerini sağlasın. Burada C ve $\alpha > 0$ sabitleri x ve h dan bağımsızdır. Bu durumda g_ψ, $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

H uzayı,

$$H = \Big\{ h : \|h\| = \Big(\int_0^\infty |h(t)|^2 dt/t^2)^{1/2} \Big\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzay olsun. Böylece her bir sabit $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t(f)(x)[0, \infty)$ den H ya bir dönüşüm olarak ele alınırsa

$$g_\psi(f)(x) = \|F_t(f)(x)\|$$

olduğu açıktır. Dolaysıyla Minkowski eşitsizliği ve ψ üzerindeki koşullardan

$$g_\psi(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty |\psi_t(x-y)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty \frac{t^{-2n}}{(1+|x-y|/t)^{2(n+1)}} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$\leq " C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy$$

elde edilir. Şimdi Guliyev [22] tarafından elde edilen sonucu verelim.

Sonuç 5.3. $1 \leq p < \infty$ olsun. (φ_1, φ_2), (4.20) koşulunu ve $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, (5.1)-(5.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda g_ψ Littlewood-Paley operatörü, $p > 1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve g_ψ operatörü, M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

5.2. Marcinkiewicz Operatörü

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ $\mathbb{R}^n$ de $d\sigma$ Lebesgue ölçüsü ile donatılmış birim küre olsun. Ω aşağıdakileri sağlasın.

(a) Ω, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyondur yani herhangi bir $\mu > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için

$$\Omega(\mu x) = \Omega(x).$$

(b) Ω, S^{n-1} üzerinde sıfır ortalamaya sahipdir yani

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0.$$

(c) $\Omega \in \mathrm{Lip}_\gamma(S^{n-1})$, $0 < \gamma \leq 1$ yani herhangi $x', y' \in S^{n-1}$ için

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq M|x' - y'|^\gamma$$

olacak şekilde herhangi bir $M > 0$ sabiti vardır.

1958 de, Stein [45] da μ_Ω, yüksek boyutlu Marcinkiewicz integrali

$$F_{\Omega,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)dy$$

olmak üzere

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Torchinsky [50] tarafından kesirli Marcinkiewicz integrali

$$F_{\Omega,\alpha,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\alpha}} f(y)dy.$$

olmak üzere

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,\alpha,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlamıştır.

$\alpha = 0$ ise

$$\mu_\Omega f = \mu_{\Omega,0} f$$

olur.

H uzay,

$$H = \Big\{h : \|h\| = \Big(\int_0^\infty |h(t)|^2 dt/t^3)^{1/2} < \infty\Big\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzay olsun. Bu durumda

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) = \|F_{\Omega,\alpha,t}(x)\|$$

olduğu açıktır. Minkowski eşitsizliği ve Ω üzerindeki koşuldan

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1-\alpha}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2} dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

elde edilir.

Böylece, $\mu_{\Omega,\alpha}$, (3.4) koşulunu sağlar. $\mu_{\Omega,\alpha}$, $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olduğu açıktır (bkz.[50]). Teorem 4.10. den dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.4. $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. (φ_1, φ_2), (4.28) koşulunu ve Ω, (a)–(c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mu_{\Omega,\alpha}$, M_{p,φ_1} uzayından M_{q,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{q,φ_2} uzayına sınırlıdır [22].

5.3. Bochner-Riesz Operatörü

$$B_t^\delta(f)\hat{}(\xi) = (1 - t^2|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi), \qquad \delta > (n-1)/2$$

ve

$$B_t^\delta(x) = t^{-n} B^\delta(x/t), \qquad t > 0$$

olsun. Maksimal Bochner-Riesz operatörü

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \sup_{t>0} |B_t^\delta(f)(x)|$$

şeklinde tanımlanır.(bkz [29],[30])
H uzayı,

$$H = \{h : \|h\| = \sup_{t>0} |h(t)| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzay olsun. Bu durumda

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \|B_t^\delta(f)(x)\|$$

olduğu açıktır. B_r^δ üzerindeki koşuldan (bknz [20])

$$|B_r^\delta(x-y)| \leq Cr^{-n}(1 + |x-y|/r)^{-(\delta+(n+1)/2)}$$

$$= C\left(\frac{r}{r+|x-y|}\right)^{\delta-(n-1)/2} \frac{1}{(r+|x-y|)^n}$$

$$\leq |x-y|^{-n}$$

elde edilir ve

$$B_{\delta,*}(f)(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy.$$

Böylece $B_{\delta,*}$, (3.4) koşulunu sağlar. Dolaysıyla $B_{\delta,*}$, $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Teorem 4.10. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.5. $1 \leq p < \infty$ için (φ_1, φ_2) (4.20) koşulu ve $\delta > (n-1)/2$ olsun. Bu durumda $B_{\delta,*}$ Bochner-Riesz operatörü $p > 1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır [22].

5.4. $V^\gamma(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^\gamma\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$Schrödinger Tipli Operatörler

$\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan V potansiyeli bazı $q_1 \geq n$ için $B_\infty(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına ait olmak üzere $-\Delta + V$ Schrödinger operatorü olsun. $M_{p,\varphi_1} \to M_{q,\varphi_2}$ Genelleştilmiş Morrey uzayları, $V^\gamma(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^\gamma\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$ oparetörlerinin komütatörleri için hesaplanmasıyla elde edilir.

Ters Hölder sınıfına ait nagatif olmayan potansiyeller ile $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında Schrödinger operatörlerinin incelenmesi Feferman[18], Shen [44], Torchinsky [50] gibi birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Shen [44] de $q \geq n/2$ için $B_q(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına ait olan negatif olamayan V potansiyeli için $-\Delta + V$ Schrödinger operatörünü inceledi ve $(-\Delta+V)^{i\gamma}$, $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$, $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ ve $\nabla(-\Delta+V)^{-1}$ operatörlerin L_p uzayında sınırlılığını ispatladı.

Kurata ve Sugano, Shen'in sonuçlarını düzgün eliptik operatörler için genelleşttirdi. [27]. Ayrıca Sugano [48] da Shein'in bazı sonuçlarını

$0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1$ için

$$V^{\gamma}(-\Delta + V)^{-\beta},$$

ve $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 \ \ ve \ \ \beta - \gamma \geq \frac{1}{2}$ için

$$V^{\gamma}\nabla(-\Delta + V)^{-\beta}$$

operatörlerine genişletti. Daha sonra, Lu [31] ve Li [28] tarafından Schrödinger operatörleri daha geniş kümelerde incelenmişdir.

Bu kısımda, M_{p,φ_1} Genelleştirilmiş Morrey uzayından M_{q,φ_2} Genelleştirilmiş Morrey uzayına

$$\mathcal{T}_1 = V^{\gamma}(-\Delta + V)^{-\beta}, \quad 0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1,$$

$$\mathcal{T}_2 = V^{\gamma}\nabla(-\Delta + V)^{-\beta}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1, \ \beta - \gamma \geq \frac{1}{2}.$$

operatörlerin sınırlılığı ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Li [28] tarafından verilen $V(-\Delta + V)^{-1}$ ve $V^{\frac{1}{2}}\nabla(-\Delta + V)^{-1}$ operatörleri, sırasıyla $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ nin özel durumlarıdır.

Ayrıca burada bir noktaya daha dikkat edilirse, Li [28] tarafından $\mathbb{R}^n$ üzerinde Schrödinger operatörü için temel çözüm yollarını kullanarak $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ve bunların adjoint operatörleri için noktasal hesaplamalar yapılmasına gerek duyulmuştur ve kesirli maksimal operatörlerin sınırlılığı $M_{p,\varphi_1} \to M_{q,\varphi_2}$ kullanılarak Genelleştirilmiş Morrey hesaplaması ile ispatlanmıştır.

$V \geq 0$ olsun. $\mathbb{R}^n$ de her B küresi için

$$\|V\|_{L_\infty(B)} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(x)dx$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcut ise $V \in B_\infty$. [28]

Fonksiyonel hesaplamadan dolayı

$$(-\Delta + V)^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} \left(-\Delta + V + \lambda\right)^{-1} d\lambda, \qquad 0 < \beta < 1$$

şeklinde yazılabilir.

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(-\Delta + V + \lambda)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, y, \lambda) f(y) dy,$$

den dolayı

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 0 < \beta < 1 \;\; \text{için} \;\; \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} \, \Gamma(x, y, \lambda) \, d\lambda \\ \quad \beta = 1\Gamma(x, y, 0) \qquad \text{için} \;\; \Gamma(x, y, 0). \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{T}_1 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_1(x, y) V(x)^\gamma f(y) dy.$$

Zhong [51] tarafından $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ için iki noktadaki hesaplamasıyla $V \in B_\infty$ potansiyeli ile Lemma 3.2 aşağıdaki teoremlerden ispatlanmıştır.

Teorem A. $V \in B_\infty$ ve $0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $\alpha = 2(\beta - \gamma)$ olmak üzere

$$|\mathcal{T}_1 f(x)| \lesssim M_\alpha f(x), \qquad |[b, \mathcal{T}_1] f| \lesssim M_{b,\alpha} f(x)$$

[22].

Teorem B. $V \in B_\infty$, $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ ve $\beta - \gamma \geq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda , herhangi bir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $\alpha = 2(\beta - \gamma) - 1$ olmak üzere

$$|\mathcal{T}_2 f(x)| \lesssim M_\alpha f(x), \qquad |[b, \mathcal{T}_2] f| \lesssim M_{b,\alpha} f(x)$$

[22].

Yukarıdaki teoremler $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ için Genelleştirilmiş Morrey sonuçlarını verecektir .

Sonuç 5.6. *$V \in B_\infty$, $0 \le \gamma \le \beta \le 1$ olsun. $1 \le p \le q < \infty$, $2(\beta - \gamma) = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ ve $\alpha = 2(\beta - \gamma)$ için (4.28) koşulunu sağlasın.*

Bu durumda, herhangi bir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$p > 1$ ise

$$\|\mathcal{T}_1 f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}},$$

$p = 1$ ise

$$\|\mathcal{T}_1 f\|_{WM_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

olur [22].

Sonuç 5.7. *$V \in B_\infty$, $0 \le \gamma \le \frac{1}{2} \le \beta \le 1$ ve $\beta - \gamma \ge \frac{1}{2}$ olsun. $1 \le p \le q < \infty$, $2(\beta - \gamma) - 1 = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ ve $\alpha = 2(\beta - \gamma) - 1$ için (4.28) koşulunu sağlasın.*

Bu durumda, her bir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $p > 1$ ise

$$\|\mathcal{T}_2 f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}},$$

ve $p = 1$ ise

$$\|\mathcal{T}_2 f\|_{WM_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

olur [22].

5.5. Bazı Analitik Yarı Gruplarının Kesirli Kuvvetleri

Şimdiye kadar verilen teoremler birçok operatörlere uygulanabilir. Bu kısımda Riesz potansiyeline uygulamasının bir örneğine yer verilmiştir.

L operatörü, $p_t(x,y)$ bir Gaussian üst sınırını sağlayan çekirdek yani, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t > 0$ için ve c_1, $c_2 > 0$ ler x, y ve t den bağımsız olmak üzere

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{c_1}{t^{n/2}} e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}} \tag{5.4}$$

ile e^{-tL} analitik bir semi-grup tarafından oluşturulan L_2 üzerinde lineer bir operatör olsun.

$0 < \alpha < n$ için L operatörünün $L^{-\alpha/2}$ kesirli kuvveti

$$L^{-\alpha/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-tL} f(x) \frac{dt}{t^{-\alpha/2+1}}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Belirtelim ki, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $L = -\triangle$ Laplacian ise bu durumda $L^{-\alpha/2}$, I_α Riesz potansiyeli dir [46].

Teorem 5.8. (5.4) şartını sağlasın. Ayrıca $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ için (φ_1, φ_2) (4.28) koşulunu sağlasın. Bu durumda $L^{-\alpha/2}$,

$p > 1$ ise M_{p,φ_1} uzayından M_{q,φ_2} uzayına,

$p = 1$ ise M_{1,φ_1} uzayından WM_{q,φ_2} uzayına sınırlıdır [22].

İspat. e^{-tL} yarı grup olduğundan, (5.4) koşulunu sağlayan bir $p_t(x,y)$ çekirdeğine sahiptir, bundan dolayı

$$|L^{-\alpha/2} f(x)| \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

(bkz.[22]). Böylece yukarıdaki teoremler den dolayı

$$\|L^{-\alpha/2}f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|I_\alpha(|f|)\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1]. Adams, D. R., 1975 *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42, 765-778.

[2]. Alp, M., Musayev, B., 2000, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.

[3]. Akbulut, A., Guliyev, S.V., 2010, Mustafayev, R. *On the boundedness of the Maksimal operator and singular integral operators* in Mathematica Bohemica, 1, 27-43.

[4]. Balcı, M., 1997, *Analiz I*, Balcı Yayınları, 23.

[5]. Balcı, M., 1997, *Analiz II*, Balcı Yayınları, 47.

[6]. Balcı, M., 1998, *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, 93.

[7]. Bennett, C., Sharpley, R., 1988, *Interpolation of Operators*, Academic Press.

[8]. Burenkov, V.I., H.V.Guliyev, 2004, *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces.* Studia Mathematica 163, 157-176.

[9]. Burenkov, V.I., H.V. Guliyev, V.S.Guliyev, 2006, *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces*, Dokl. Akad. Nauk 74 (1), 540-544.

[10]. Burenkov, V.I., H.V.Guliyev, V. S.Guliyev, 2007, *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces.* J. Comput. Appl. Math., 208, 280-301.

[11]. Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Tararykova, T.V., Serbetci, A., 2008, *Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Genuine Singular Integral Operators in Local Morrey-Type Spaces*, Doklady Akademii Nauk, 1, 11-14.

[12]. Burenkov, V.I., A. Gogatishvili, V.S. Guliyev, R.Ch. Mustafayev, 2010, *Boundedness of the fractional Maksimal operator in Morrey-type spaces.* Complex Variables and Elliptic Equations , 55

[13]. Capone, C.,Fiorenza, A., 2005, *On small Lebesgue spaces*, J. Funct. Spaces Appl., 3, 73-89.

[14]. Carro, M., L. Pick, J. Soria, V.D. Stepanov, 2001, *On embeddings between classical Lorentz spaces.* Math. Ineq. Appl., 4(3), 397-428.

[15]. Duandikoetxea, J., 2001, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math., AMS, Providence, RI, 1, 29.

[16]. Duong, X.T., Yan, L.X., 2004, *On commutators of fractional integrals.* Proc. Am. Math. Soc., 12, 3549-3557.

[17]. Dyn'kin, E.M., 1991, *Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory*, Commutative Harmonic Analysis I. Encyclopaedia of Math. Sci., 15, 167-259.

[18]. Fefferman, C., 1983, *The uncertainty principle.* Bull. Am. Math. Soc.,2, 129-206.

[19]. Furusho, Y., 1980, *On inclusion property for certain ($L^{p,\lambda}$) spaces of strong type.* Funkcial. Ekvac., 2, 197-205.

[20]. Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., 1985, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* North-Holland Mat., Amsterdam, 116.

[21]. Grafakos, 2004, *Loukas Classical and modern Fourier analysis.* Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 42-01.

[22]. Guliyev, V. S., Seymur S. Aliyev, Turhan Karaman and Parviz S. Shukurov, 2011, *Boundedness of Sublinear Operators and Commutators on Generalized Morrey Spaces Integr.* Equ. Oper. Integr. Equ. Oper., 71, 327-353.

[23]. Guliyev V.S., 2009, *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, 20.

[24]. Guliyev, V.S., J. Hasanov, Stefan Samko, 2010, *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey, spaces*, Math. Scand. 197 (2), 285–304.

[25]. Guliyev, V.S., and Parviz S. Shukurov, 2013, *On the Boundedness of the Fractional Maksimal Operator, Riesz Potential and Their Commutators in Generalized Morrey Spaces Operator Theory, Advances and Applications*, 229, 175-194.

[26]. Humberto Rafeiro, Natasha Samko and Stefan Samko, 2013, 3-4.

[27]. Kurata, K., Sugano, S., 2000, *A remark on estimates for uniformly elliptic operators on weighted Lp spaces and Morrey spaces.* Math. Nachr., (209), 137-150.

[28]. Li, H.Q., 1999, *Estimations Lp des operateurs de Schrödinger sur les groupes nilpotents.* J. Funct. Anal., 161, 152-218.

[29]. Liu, L.Z., Lu, S.Z., 2003, *Weighted weak type inequalities for Maksimal commutators of Bochner-Riesz operator.* Hokkaido Math. J., 32, 85-89.

[30]. Lu, S.Z., 1995, *Four Lectures on Real Hp Spaces.*World Scientific, River Edge.

[31]. Lu, G.Z., 1996, A Fefferman-Phong type inequality for degenerate vector fields and applications. Panamer. Math. J., 6, 37-57.

[32]. Lu, S., Ding, Y., Yan, D., 2006, *Singular Integrals and Related Topics.* World Scientific Publishing, Singapore.

[33]. Mizuhara, T., 1991, *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonic Analysis (S. Igari, editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo, 183–189.

[34]. Mizuhara, T., 2006, *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. Harmonic Analysis* (S. Igari, ed.). ICM 90 Satellite Proceedings, Springer, Tokyo, 183-189.

[35]. Meskhi, A.,2010, *Integral operators in grand Morrey spaces*, Math. FA., 2, 3-28.

[36]. Meskhi, A., 2011, *Maksimal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations, 56, 1003-1019.

[37]. Nakai, E., 1994, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces.* Math. Nachr. 166, 95-103.

[38]. Piccinini, L.C., 1969, *Inclusioni tra spazi di Morrey.* Boll. Un. Mat. Ital., 95-99.

[39]. Pick, L.; Kufner, A.; John, O., Fucik S., 2013., Function Spaces.

[40]. Royden, H. L., 1968, *Real Analysis*, MacMillan, New York, 2nd ed.

[41]. Rudin, W.,1976, *Principles of mathematical analysis. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics.* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland- Dusseldorf.

[42]. Rudin, W., 1991 *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics.* McGraw-Hill, Inc., New York.

[43]. Sadosky, C., 1979, *Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis*, Marcel Dekker Inc.

[44]. Shen, Z.W., 1995, *Lp estimates for Schrodinger operators with certain potentials.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 45(2), 513-546.

[45]. Stein, E. M., 1958, *On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz*, Trans. Amer. Math. Soc., 88, 430-466.

[46]. Stein, E.M., 1970, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[47]. Stein, E. M., 1993, Harmonic Analysis: *Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[48]. Sugano, S., 1998, *Estimates for the operators V0 with certain nonnegative potentials* V . Tokyo J. Math., 21(2), 441-452.

[49]. Torchinsky, A., 1986, *Real Variable Methods in Harmonic Analysis. Pure and Applied Math.*, Academic Press, New York, 23.

[50]. Torchinsky, A., Wang, S., 1990, *A note on the Marcinkiewicz integral.* Colloq.Math., 1, 235-243.

[51]. Zhong, J.P., 1993, *Harmonic analysis for some Schrodinger type operators.* PhD thesis, Princeton University.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kemal ARIKAN
Doğum Yeri	Altındağ/ANKARA
Doğum Tarihi	05/02/1991
Uyruğu	TÜRKİYE CUMHURİYETİ
Telefon	0505 059 1903
E-Posta Adresi	kemalmath1990@gmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015