T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Neriman ACAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Neriman ACAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 24.04.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Neriman ACAR

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar hem akademik bilgi ve deneyimleri hem de insani değerleriyle bana her anlamda yol gösteren, yardımcı olan danışman hocam, Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK'a çok teşekkür ediyorum. Ayrıca yüksek lisansım boyunca beni destekleyen değerli aileme ve sevgili arkadaşım Miyase ASLANTAŞ'a sonsuz teşekkürler.

Nisan, 2019 Neriman ACAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	: n- boyutlu Öklid uzayı
$\boldsymbol{T_q}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$	: q noktasındaki $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının tanjant uzayı
$\boldsymbol{M}$	: $\mathbb{E}^n$ de hiperyüzey
$\boldsymbol{T_p(M)}$	: p noktasındaki M nin tanjant uzayı
$\boldsymbol{\chi(M)}$	: M nin vektör alanları uzayı
$\boldsymbol{D}$	: $\mathbb{E}^n$ deki konneksiyon
$\boldsymbol{\nabla}$	: Gradiyent operatörü
$\langle , \rangle$	: $\mathbb{R}^n$ deki iç çarpım fonksiyonu

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN EĞRİLİKLERİ VE BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Neriman ACAR

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, tezle ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde, öteleme yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları, şekil operatörü matrisi, ortalama eğriliği, Gauss eğriliği, asli eğrilikler ile ilgili bazı hesaplamalar yapılmıştır.
Dördüncü bölümde, öteleme yüzeyinin bazı noktalarının bir sınıflandırması verilmiştir.
Beşinci bölümde, küresel gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyleri tanımlanmıştır.
Sırasıyla teğetler, normaller ve binormaller gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyleri için çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir.
Son bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Nisan 2019, 69 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Öteleme Yüzeyleri, Gauss ve Ortalama Eğrilikleri, Küresel Gösterge Eğrileri.

ABSTRACT

MSc THESIS

CURVATURES AND SOME CHARACTERIZATIONS OF TRANSLATION SURFACES

Neriman ACAR

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
The second chapter, concepts and definitions which are needed in the further chapters are given.
The third chapter, some calculations about the coefficients of the first and second fundamental forms, the shape operator matrix, the mean curvature, the Gaussian curvature, the principal curvatures of the translation surface have been made.
The fourth chapter, a classification of some special points of the translation surface is given.
The fifth chapter, the translation surfaces generated by the spherical indicatrix curves are defined. Some characterizations about the translation surfaces generated by the tangents, principal normals and binormals indicatrices curves have been obtained, respectively.
In the last chapter, the results obtained from the thesis are given.

April 2019, 69 Pages.

Keywords: Translation Surfaces, Gauss and Mean Curvature, Spherical Indicatrix Curves.

1. GİRİŞ

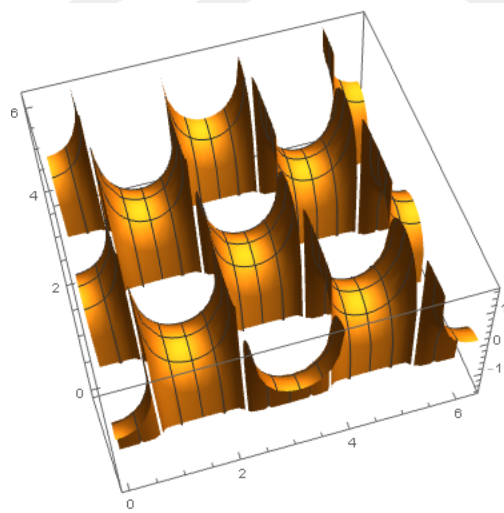
3-boyutlu Öklid uzayında bir öteleme yüzeyi,

$$X(u,v) = (u, 0, f(u)) + (0, v, g(v))$$

parametrizasyonuyla verilen bir yüzey olarak tanımlanır. Burada f ve g reel sayıların bir açık aralığı üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. 1835 yılında H. Scherk, düzlemlerin dışında, minimal öteleme yüzeyinin sadece

$$X(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{a}\log\left\|\frac{\cos(au)}{\cos(av)}\right\|\right), \text{ a sıfırdan farklı reel sabit}$$

parametrizayonuyla verilen Scherk yüzeyi olduğunu ispat etti.



Şekil 1.1. Scherk yüzeyi

Genel anlamda bir öteleme yüzeyi ise keyfi iki eğriden birinin, diğeri boyunca ötelenmesiyle elde edilen bir yüzey olarak tanımlanır. Bu nedenle öteleme yüzeyinin genel parametrizasyonu, α ve β $\mathbb{E}^3$ de iki eğri olmak üzere

$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) \tag{1.1}$$

şeklindedir.

Günlük hayatta mimari yapıların tasarlanmasında da karşımıza çıkan öteleme yüzeyleri birçok diferensiyel geometrici tarafından çalışılmıştır. 1992 yılında L. Verstraelen, J. Walrave ve S. Yaprak, n-boyutlu Öklid uzaylarında minimal öteleme yüzeylerini inceledi [15]. 1999 yılında H. Liu, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında sabit ortalama eğrilikli ve sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeylerini sınıflandırmıştır [12]. 2008 yılında M. I. Munteanu ve A. I. Nistor, 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin ikinci temel formunu, ikinci Gauss eğriliğini ve ikinci ortalama eğriliğini inceledi [13]. 2011 yılında M. Çetin, Y. Tunçer ve N. Ekmekçi, 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyinin eğriliklerini, yüzeyin üreteç eğrilerinin eğrilikleri cinsinden ifade etmiş ve çeşitli karakterizasyonlar elde etmiştir [3]. 2012 yılında M. Çetin, H. Kocayiğit ve M. Önder, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısına göre öteleme yüzeylerini inceledi [4]. Ayrıca M. Çetin ve Y. Tunçer 2015 yılında öteleme yüzeyine paralel olan yüzeylerin geometrik özelliklerini inceledi [5]. 2015 yılında A. T. Ali, H. S. Abdel Aziz ve A. H. Sorour, iki uzaysal eğri tarafından üretilen öteleme yüzeyinin eğriliklerini, yüzeyin üreteç eğrilerinin Frenet çatısını ve eğriliklerini kullanarak ifade etmiş ve yüzey üzerindeki bazı noktaların bir sınıflandırmasını vermiştir [1].

Bu tez çalışmasında, ilk olarak [1] ve [3] nolu çalışmalarda yer alan öteleme yüzeyleri ile ilgili bazı hesaplamalara yer verilmiştir. Daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayında küresel gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyleri tanımlanarak, bu tip yüzeyler için çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca Mathematica 10 programı kullanılarak bazı yüzey örneklerinin çizimleri yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

i) $\forall\, P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

ii) $\forall\, P \in A$ ve $\forall\, \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [10].

Tanım 2.2. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümüne (reel değerli fonksiyon) denir ve değeri $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v\rangle$ şeklinde gösterilir [9].

i) Simetri aksiyomu:

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \ \ \forall u, v \in V.$$

ii) Bi-lineerlik aksiyomu:

$$\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle \ \ \forall u_1, u_2, v \in V \ \ ve\ a, b \in \mathbb{R}$$

$$\langle u, av_1 + bv_2\rangle = a\langle u, v_1\rangle + b\langle u, v_2\rangle \ \ \forall u, v_1, v_2 \in V \ \ ve\ a, b \in \mathbb{R}$$

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$$\langle u, u\rangle \geq 0, \ \ \forall u \in V,$$

$$\langle u, u\rangle = 0 \iff u = \vec{0}.$$

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(p, q) \to \langle p, q\rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir [14].

Tanım 2.4. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle}$$

olsun. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \to \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır [14].

Tanım 2.5. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p, q \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay kimi zaman $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.6. $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $\langle , \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$ biçiminde tanımlanan bir iç çarpımdır. Dolayısıyla u ve v gibi iki vektör arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

biçiminde ifade edilebilir [10].

Tanım 2.7. $x_j : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, $x_j(p_1, p_2, ..., p_n) = p_j$ fonksiyonuna, $\mathbb{E}^n$ uzayında j inci dik koordinat fonksiyonu denir. Koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sıralı n lisine, $\mathbb{E}^n$ üstünde dik koordinat sistemi (veya Öklidyen koordinat sistemi) denir [14].

Tanım 2.8. f fonksiyonunun $\mathbb{E}^n$ in her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır, denir. $\mathbb{E}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{E}^n$ in her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur, denir. $\mathbb{E}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir [14].

Tanım 2.9. $q \in \mathbb{E}^n$ olsun. $v \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere q noktasından $q+v$ noktasına giden yönlü doğru parçası, q noktasında, v teğet vektörü diye adlandırılır ve q noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_q(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.10. $q, v, w \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere $T_q(\mathbb{E}^n)$ kümesinde toplama işlemi,

$$v_q + w_q = (v + w)_q$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalarla çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda v_q = (\lambda v)_q$$

eşitliğiyle tanımlanır.
$T_q(\mathbb{E}^n)$ kümesi yukarıda tanımlanan işlemlere göre $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_q(\mathbb{E}^n)$ vektör uzayına, $\mathbb{E}^n$ uzayının q noktasındaki teğet uzayı denir [14].

Tanım 2.11. $\mathbb{E}^n$ deki dik koordinat fonksiyonu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere $T_q(\mathbb{E}^n)$ uzayının doğal tabanı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(q), \frac{\partial}{\partial x_2}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q) \right\}$$

şeklindedir. Burada $\frac{\partial}{\partial x_j} = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, ..., \delta_{jn})$, $1 \leq j \leq n$ [14].

Tanım 2.12. $f \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ ve $v_q \in T_q(\mathbb{E}^n)$ olsun. Kuralı, $\varphi(t) = q + tv$ eşitliğiyle verilen $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f \circ \varphi$ fonksiyonunun sıfır noktasındaki türevine, f fonksiyonunun v_q yönündeki türevi denir ve $v_q[f]$ biçiminde gösterilir [14].

Tanım 2.13. $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_m)$ olsun. f_i fonksiyonları düzgün fonksiyonlar ise φ fonksiyonu da düzgündür, denir [14].

Tanım 2.14. $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_m)$ düzgün fonksiyon olsun. $v_q \in T_q(\mathbb{E}^n)$ için

$$\varphi_{*q}(v_q) = (v_q[f_1], v_q[f_2], ..., v_q[f_m])_{\varphi(q)}$$

eşitliğiyle tanımlı $\varphi_{*q} : T_q(\mathbb{E}^n) \to T_{\varphi(q)}(\mathbb{E}^m)$ fonksiyonuna, φ fonksiyonunun q noktasındaki türev dönüşümü denir [14].

Tanım 2.15. V, $\mathbb{E}^n$ uzayının açık bir alt kümesi olsun. V nin her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, V üstünde bir vektör alanı denir [14].

2.2. Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.16. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{E}^n \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir [14].

Tanım 2.17. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ eğrisi verilsin. $\mathbb{R}$ deki dik koordinat fonksiyonu x olmak üzere $T_t(\mathbb{R}^1)$ uzayının doğal tabanı $\left\{\frac{d}{dx}|_t\right\}$ olsun. $\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}|_t\right)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}|_t\right) = \alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t))_{\alpha(t)}$$

dır [14].

Tanım 2.18. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir [14].

Tanım 2.19. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to \mathbb{R} \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α nın $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [10].

Tanım 2.20. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisi birim hızlı eğridir denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [10].

Tanım 2.21. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere, a dan b ye α eğrisinin yay uzunluğu diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \;\; t \in I$$

reel sayısına denir [10].

Teorem 2.1. $\mathbb{E}^n$ de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır [10].

Tanım 2.22. $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$t(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $t(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [14].

Tanım 2.23. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \to \mathbb{R}$$

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|$$

fonsiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [14].

Tanım 2.24. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s)$$

eşitliğiyle belirli $n(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir [14].

Tanım 2.25. $\mathbb{E}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $b(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir [14].

Tanım 2.26. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları t, n, b olmak üzere,

$$\tau : I \to \mathbb{R}$$

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [14].

Tanım 2.27. $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\left\{ t(s), n(s), b(s) \right\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir [14].

Teorem 2.2. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları t, n, b ise

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n, \\ n' &= -\kappa t + \tau b, \\ b' &= -\tau n \end{aligned}$$

dir.
Bu teoremde elde edilen eşitliklere, α eğrisi için Frenet formülleri denir ve Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formunda da ifade edilebilir [14].

Teorem 2.3. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin eğriliği sıfır ise $\alpha(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ uzayında bir doğrunun alt kümesidir. Karşıt olarak $\alpha(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ uzayında bir doğrunun alt kümesi ise α eğrisinin eğriliği sıfırdır [14].

Teorem 2.4. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki dokunum düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemidir. Karşıt olarak $\tau = 0$ ise $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi düzlemseldir [14].

Tanım 2.28. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir u sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa, α ya bir eğilim çizgisi ve $Sp\{u\}$ ya da α eğilim çizgisinin eğilim ekseni denir [10].

Tanım 2.29. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise

$$H : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, α eğrisinin s noktasındaki 1. harmonik eğriliği denir [10].

Teorem 2.5. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Bu durumda α nın bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $H(s) =$ sabit olmasıdır [10].

Tanım 2.30. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te, bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü t olmak üzere, $\vec{PQ} = t$ alındığında, P noktası α eğrisi çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin teğetler göstergesi adı verilir [10].

Tanım 2.31. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te, bir α eğrisinin birim asli normal vektörü n olsun. α eğrisi çizilirken n vektörünün uç noktaları cümlesinin birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin asli normaller göstergesi denir [10].

Tanım 2.32. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te, α bir eğri olsun. α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü $\vec{PR} = b$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\theta$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken R noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin binormaller göstergesi denir [10].

2.3. Öklid Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.33. $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$ yüzey diye $\mathbb{E}^n$ deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in V \subset \mathbb{E}^n | f : V \to \mathbb{R}, \text{ V bir açık alt cümle} \right\}$$

$$x \to f(x) = c$$

$\forall p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ biçiminde tanımlanır. $\mathbb{E}^2$ de 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. $\mathbb{E}^3$ de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. $\mathbb{E}^n$ de bir $(n-1)$-yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [11].

Tanım 2.34. V, $\mathbb{E}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $X : V \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $X : V \to X(V)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $X(V)$ kümesine, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir basit yüzey denir [14].

Tanım 2.35. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyi $X = X(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. $\{X_u, X_v\}$ M yüzeyinin bir p noktasındaki tanjant vektör uzayı $T_p(M)$ nin baz vektörleri olmak üzere, M yüzeyinin p noktasındaki birim normal vektör alanı

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.36. $\mathbb{E}^n$ uzayının bir hiperyüzeyi M nin birim normal vektör alanı U verilsin. $\chi(M)$, M nin vektör alanları uzayı ve $\mathbb{E}^n$ deki Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = -D_X U$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir [8].

Teorem 2.6. $\mathbb{E}^n$ in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. Bu durumda,

i) $S : \chi(M) \to \chi(M)$ dir,

ii) S lineerdir [11].

Teorem 2.7. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde S şekil operatörü simetriktir. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle$$

dir [11].

Lemma 2.8. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyi $X = X(u,v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. $\{X_u, X_v\}$ M yüzeyinin bir p noktasındaki tanjant vektör uzayı $T_p(M)$ nin bir bazı ve U, M yüzeyinin birim normal vektör alanı verilsin. Bu durumda

$$S(X_u) = -U_u \text{ ve } S(X_v) = -U_v$$

olur [8].

Tanım 2.37. $\mathbb{E}^n$ in bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde şekil operatörü S olmak üzere, M üzerindeki temel formlar şu şekilde tanımlanır. $\mathbb{E}^n$ in q-yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M,R) \\ (X,Y) &\to I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [11].

Tanım 2.38. $X : U \to \mathbb{E}^n$ bir yüzey olsun. $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$E = \|X_u\|^2, \;\; F = \langle X_u, X_v \rangle, \;\; G = \|X_v\|^2$$

ile tanımlanır. O zaman $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, X yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu olarak adlandırılır. Buradaki E, F, G ye birinci temel formun katsayıları denir [8].

Tanım 2.39. $X : U \to \mathbb{E}^3$ bir regüler yüzey olsun.

$$\begin{aligned} l &= \langle -U_u, X_u \rangle = \langle U, X_{uu} \rangle, \\ m &= \langle -U_v, X_u \rangle = \langle U, X_{uv} \rangle = \langle U, X_{vu} \rangle = \langle -U_u, X_v \rangle, \\ n &= \langle -U_v, X_v \rangle = \langle U, X_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı l, m, n ye X yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları denir [8].

Teorem 2.9. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyi $X = X(u,v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. X in $\{X_u, X_v\}$ bazına göre S şekil operatörü

$$-S(X_u) = \frac{Fm - Gl}{EG - F^2}X_u + \frac{Fl - Em}{EG - F^2}X_v,$$

$$-S(X_v) = \frac{Fn - Gm}{EG - F^2}X_u + \frac{Fm - En}{EG - F^2}X_v$$

şeklinde verilir. Böylece şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{Fm-Gl}{EG-F^2} & -\frac{Fn-Gm}{EG-F^2} \\ -\frac{Fl-Em}{EG-F^2} & -\frac{Fm-En}{EG-F^2} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır [8].

Tanım 2.40. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\to \mathbb{R} \\ p &\to K(p) = detS(p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir [11].

Tanım 2.41. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\to \mathbb{R} \\ p &\to H(p) = \frac{1}{n-1} izS(p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir [11].
Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.10. $X : V \subset \mathbb{E}^2 \to M \subset \mathbb{E}^3$ bir dönüşüm olsun. X in Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \tag{2.2}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2} \tag{2.3}$$

olarak verilir [8].

Tanım 2.42. $\mathbb{E}^3$ te bir minimal yüzey, ortalama eğriliği sıfır olan regüler bir yüzeydir. Regüler bir yüzeyin flat (düz) yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart Gauss eğriliğinin sıfır olmasıdır [11].

Tanım 2.43. $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [11].

Teorem 2.11. k_1 ve k_2 asli eğrilikleri,

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

denkleminin kökleridir. Böylece

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \tag{2.4}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \tag{2.5}$$

dir [8].

Tanım 2.44. $\mathbb{E}^3$ te bir hiperyüzey M ve M yüzeyinin p noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ olsun.

i) $k_1(p)k_2(p) > 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir eliptik noktası denir.

ii) $k_1(p)k_2(p) = 0$ ve $k_1(p)$ ile $k_2(p)$ den en az biri sıfırdan farklı ise p noktasına M yüzeyinin bir parabolik noktası denir.

$k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir düzlemsel noktası denir.

iii) $k_1(p)k_2(p) < 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir hiperbolik noktası denir [14].

Tanım 2.45. M, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve M üzerinde bir eğri $\alpha : I \to M$ olsun. $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = v_p \in T_pM$ olmak üzere $k_n(v_p) = \langle S\big(\frac{v_p}{\|v_p\|}\big), \frac{v_p}{\|v_p\|}\rangle$ eşitliğiyle tanımlanan $k_n(v_p)$ sayısına, M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir [14].

Teorem 2.12. $v_p \in T_pM$ olsun. M yüzeyinin birim dik vektör alanı U olduğuna göre v_p vektörüne yapışık her bir $\alpha : I \to M$ eğrisi için

$$\langle S(v_p), v_p\rangle = \langle \alpha''(0), U(p)\rangle$$

dir [14].

Tanım 2.46. $\mathbb{E}^3$ de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri $\alpha : I \to M$ olsun. $\alpha(s_0) = p$ ve $\frac{d\alpha}{ds}(s_0) = X_p \in T_pM$ olmak üzere $II(X_p, X_p) = \langle S(X_p), X_p\rangle = 0$, $\forall p \in \alpha$ ise α eğrisine bir asimtotik eğri denir [11].

Tanım 2.47. M yüzeyinin bir p noktasında S_p lineer dönüşümü, birim dönüşümün bir sayı ile çarpımına eşit ise p noktasına yüzeyin bir göbek (umbilik) noktası denir [14].

Teorem 2.13. M yüzeyinin bir p noktasının umbilik nokta olması için gerek ve yeter şart $H^2 - K = 0$ olmasıdır [11].

Tanım 2.48. $\mathbb{E}^3$ te birim normali, belirli sabit bir vektörle sabit açı yapan yüzeylere, sabit açılı yüzeyler denir [2].

3. ÖTELEME YÜZEYİ

Bu bölümde ilk olarak [1] ve [3] nolu çalışmalarda yer alan M öteleme yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları, 2. temel formunun katsayıları, şekil operatörü matrisi, asli eğrilikleri, ortalama ve Gauss eğrilikleri ile ilgili hesaplamalara yer verilecektir.
$\mathbb{E}^3$, 3 boyutlu Öklid uzayında bir M öteleme yüzeyi

$$M : X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) \tag{3.1}$$

şeklinde parametrelendirilir. Burada u ve v sırasıyla üreteç eğrileri olan α ve β nın yay parametreleridir. $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ α eğrisinin Frenet çatısı, κ_α ve τ_α sırasıyla α nin eğriliği ve torsiyonu; $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ β eğrisinin Frenet çatısı, κ_β ve τ_β ise sırasıyla β nin eğriliği ve torsiyonu olmak üzere, (3.1) denkleminin u ve v ye göre kısmi türevi alınırsa M yüzeyinin $\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörleri

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \\ &= \alpha'(u) \\ &= t_\alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \\ &= \dot{\beta}(v) \\ &= t_\beta \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda yüzeyin birinci temel formunun katsayıları:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle t_\alpha, t_\alpha \rangle = 1, \tag{3.2}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \|t_\alpha\|\|t_\beta\| \cos[\phi(u,v)] = \cos[\phi(u,v)], \tag{3.3}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle t_\beta, t_\beta \rangle = 1 \tag{3.4}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\phi(u,v)$, α ve β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açıdır.
M öteleme yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} U(u,v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \\ &= \frac{t_\alpha \times t_\beta}{\|t_\alpha \times t_\beta\|} \\ &= \frac{t_\alpha \times t_\beta}{\|t_\alpha\|\|t_\beta\| \sin[\phi(u,v)]} \\ &= \frac{t_\alpha \times t_\beta}{\sin[\phi(u,v)]}, \ \sin[\phi(u,v)] \neq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ile verilir.
Öteleme yüzeyinin birim normal vektörü U ile α eğrisinin asli normal vektörü n_α arasındaki açı $\theta_\alpha(u,v)$ ve öteleme yüzeyinin birim normal vektörü U ile β eğrisinin asli normal vektörü n_β vektörü arasındaki açı $\theta_\beta(u,v)$ olmak üzere, yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} l &= \langle X_{uu}, U \rangle \\ &= \langle {t_\alpha}', U \rangle \\ &= \langle \kappa_\alpha n_\alpha, U \rangle \\ &= \kappa_\alpha \langle n_\alpha, U \rangle \\ &= \kappa_\alpha \|n_\alpha\|\|U\| \cos[\theta_\alpha(u,v)] \\ &= \kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)], \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} m &= \langle X_{uv}, U \rangle \\ &= \langle 0, U \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, U\rangle \\
&= \langle \dot{t_\beta}, U\rangle \\
&= \langle \kappa_\beta n_\beta, U\rangle \\
&= \kappa_\beta \langle n_\beta, U\rangle \\
&= \kappa_\beta \|n_\beta\| \|U\| \cos[\theta_\beta(u,v)] \\
&= \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)] \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

(3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) ve (3.8) numaralı eşitlikler, (2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa, M öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$
S = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\sin^2[\phi(u,v)]} & -\frac{\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)]\cos[\phi(u,v)]}{\sin^2[\phi(u,v)]} \\ -\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]\cos[\phi(u,v)]}{\sin^2[\phi(u,v)]} & \frac{\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)]}{\sin^2[\phi(u,v)]} \end{pmatrix} \qquad (3.9)
$$

elde edilir [3].

Teorem 3.1. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun.

i) t_α ve t_β teğet vektörleri arasındaki ϕ açısının u ve v değişkenlerine bağlı olması için gerek ve yeter şart α ve β eğrilerinin non-dejenere eğriler olmasıdır ($\kappa_\alpha \neq 0$, $\kappa_\beta \neq 0$).

ii) t_α ve t_β teğet vektörleri arasındaki ϕ açısının sadece u değişkenine bağlı olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin non-dejenere ve β eğrisinin dejenere olmasıdır ($\kappa_\alpha \neq 0$, $\kappa_\beta = 0$).

iii) t_α ve t_β teğet vektörleri arasındaki ϕ açısının sadece v değişkenine bağlı olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin dejenere ve β eğrisinin non-dejenere olmasıdır ($\kappa_\alpha = 0$, $\kappa_\beta \neq 0$).

iv) t_α ve t_β teğet vektörleri arasındaki ϕ açısının sabit olması için gerek ve yeter şart α ve β eğrilerinin dejenere eğriler olmasıdır ($\kappa_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta = 0$) [1].

İspat.

i) t_α ve t_β vektörleri arasındaki ϕ açısı, u ve v değişkenlerine bağlı olsun. Bu durumda

$$\langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \cos[\phi(u, v)]$$

olur. Böylece t_α u ya bağlı ve t_β v ye bağlı teğet vektörler olup α ve β eğrileri non-dejenere eğrilerdir.

Tersine α ve β eğrileri non-dejenere eğriler ($\kappa_\alpha \neq 0$ ve $\kappa_\beta \neq 0$) olsun. Bu durumda α ve β eğrilerinin teğet vektörleri sabit vektörler değildir. O zaman $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle = f(u, v)$ olur. Böylece bu iki vektör arasındaki ϕ açısı da u ve v değişkenlerine bağlı olur.

ii) t_α ve t_β vektörleri arasındaki ϕ açısı, sadece u değişkenine bağlı olsun. Bu durumda

$$\langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \cos[\phi(u, v_0)]$$

olur. Böylece t_α teğet vektörü u ya bağlı ve t_β teğet vektörü sabit olup α eğrisi non-dejenere eğri, β eğrisi ise dejenere bir eğri olur.

Tersine α eğrisi non-dejenere eğri ve β eğrisi dejenere eğri olsun. α eğrisi non-dejenere bir eğri olduğundan $\kappa_\alpha \neq 0$ dır. O zaman α eğrisinin teğet vektörü sabit bir vektör değildir. Diğer bir deyişle t_α teğet vektörü u değişkenine bağlı olur. Diğer taraftan β eğrisi dejenere bir eğri olduğundan $\kappa_\beta = 0$ dır. Bu durumda

$$\|\dot{t}_\beta\| = 0$$
$$\dot{t}_\beta = 0$$

Her iki tarafın integrali alınırsa

$$t_\beta = \text{sbt vektör}$$

elde edilir. t_α ve t_β teğet vektörlerinin iç çarpımı alınırsa

$$\underbrace{\langle t_\alpha, t_\beta \rangle}_{\textit{u ya bağlı}} = \cos[\phi(u, v_0)]$$

Böylece ϕ açısı sadece u değişkenine bağlı olur.

iii) t_α ve t_β vektörleri arasındaki ϕ açısı, sadece v değişkenine bağlı olsun. Bu durumda

$$\langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \cos[\phi(u_0, v)]$$

olur. Böylece t_α teğet vektörü sabit ve t_β teğet vektörü v değişkenine bağlı olup α eğrisi dejenere eğri, β eğrisi ise non-dejenere bir eğri olur.

Tersine α eğrisi dejenere eğri ve β eğrisi non-dejenere eğri olsun. β eğrisi non-dejenere bir eğri olduğundan $\kappa_\beta \neq 0$ dır. O zaman β eğrisinin teğet vektörü sabit bir vektör değildir. Böylece t_β teğet vektörü v değişkenine bağlı olur. Diğer taraftan α eğrisi dejenere bir eğri olduğundan $\kappa_\alpha = 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|t'_\alpha\| &= 0 \\ t'_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa

$$t_\alpha = \text{sbt vektör}$$

elde edilir. t_α ve t_β teğet vektörlerinin iç çarpımı alınırsa

$$\underbrace{\langle t_\alpha, t_\beta \rangle}_{\textit{v ye bağlı}} = \cos[\phi(u_0, v)]$$

Böylece ϕ açısı sadece v değişkenine bağlı olur.

iv) i şıkkının ispatından bu şıkkın ispatı açıktır.

Lemma 3.2. Eğer öteleme yüzeyinin iki üreteç eğrisinin eğrilikleri sıfır ($\kappa_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta = 0$) ise θ_α, θ_β ve ϕ sabittir [1].

Önerme 3.3. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin asli eğrilikleri k_1 ve k_2, Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H aşağıdaki şekilde verilir [3].

$$k_1 = \frac{\kappa_\alpha \cos\theta_\alpha + \kappa_\beta \cos\theta_\beta}{2\sin^2\phi}\left(1 + \left[1 - \frac{4\kappa_\alpha\kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta \sin^2\phi}{(\kappa_\alpha \cos\theta_\alpha + \kappa_\beta \cos\theta_\beta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.10}$$

$$k_2 = \frac{\kappa_\alpha \cos\theta_\alpha + \kappa_\beta \cos\theta_\beta}{2\sin^2\phi}\left(1 - \left[1 - \frac{4\kappa_\alpha\kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta \sin^2\phi}{(\kappa_\alpha \cos\theta_\alpha + \kappa_\beta \cos\theta_\beta)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.11}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta}{\sin^2\phi}, \tag{3.12}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\kappa_\alpha \cos\theta_\alpha + \kappa_\beta \cos\theta_\beta}{2\sin^2\phi}. \tag{3.13}$$

İspat. (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitlikleri (2.2) ve (2.3) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (3.12) ve (3.13) denklemleri elde edilir. (3.12) ve (3.13) denklemleri (2.4) ve (2.5) denklemlerinde yerine yazılırsa (3.10) ve (3.11) denklemleri elde edilir.

Teorem 3.4. Eğer öteleme yüzeyinin üreteç eğrilerinden biri dejenere eğri ise o zaman öteleme yüzeyi flat yüzeydir [1].

İspat. Eğer üreteç eğrilerinden biri dejenere eğri ise $\kappa_\alpha = 0$ veya $\kappa_\beta = 0$ dir. Bu durumda (3.12) denkleminden $K = 0$ olur. Böylece Tanım 2.42 den öteleme yüzeyi flat yüzeydir.

Lemma 3.5. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. $\cos[\theta_\alpha(u,v)]$ ve $\cos[\theta_\beta(u,v)]$ sıfırdan farklı olmak üzere M yüzeyinin flat yüzey olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır.

i) ϕ açısı sadece u nun bir fonksiyonudur.

ii) ϕ açısı sadece v nin bir fonksiyonudur.

iii) ϕ açısı sabittir [1].

İspat. Öteleme yüzeyi flat yüzey ise $K = 0$ dır. Bu durumda (3.12) denkleminden

$$\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos[\theta_\alpha(u,v)] \cos[\theta_\beta(u,v)] = 0$$

elde edilir. $\cos[\theta_\alpha(u,v)]$ ve $\cos[\theta_\beta(u,v)]$ sıfırdan farklı olduğundan

i) $\kappa_\alpha \neq 0$ ve $\kappa_\beta = 0$ olması durumunda Teorem 3.1 in (ii) şıkkından ϕ açısı sadece u değişkenine bağlı olur.

ii) $\kappa_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta \neq 0$ olması durumunda Teorem 3.1 in (iii) şıkkından ϕ açısı sadece v değişkenine bağlı olur.

iii) $\kappa_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta = 0$ olması durumunda Teorem 3.1 in (iv) şıkkından ϕ açısı sabittir.

Teorem 3.6. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M nin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\cos[\theta_\beta(u,v)]} = -\frac{\kappa_\beta}{\kappa_\alpha} \tag{3.14}$$

olmasıdır [3].

İspat. M öteleme yüzeyi minimal olsun. Bu durumda $H = 0$ olur. (3.13) denkleminden

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)] + \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)] &= 0, \\ \kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)] &= -\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)], \\ \frac{\cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\cos[\theta_\beta(u,v)]} &= -\frac{\kappa_\beta}{\kappa_\alpha} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.7. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi minimal yüzey olsun. Bu durumda

$$\theta_\beta(u,v) = \cos^{-1}\left[-\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\kappa_\beta}\right]$$

eşitliği elde edilir [1].

İspat. M öteleme yüzeyi minimal olsun. Bu durumda (3.14) denkleminden

$$\begin{aligned}
\cos[\theta_\beta(u,v)] &= -\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\kappa_\beta} \\
\theta_\beta(u,v) &= \cos^{-1}\left[-\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\kappa_\beta}\right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 3.8. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer M minimal ise M nin Gauss eğriliği

$$K = -\left(\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\sin[\phi(u,v)]}\right)^2$$

dir [3].

İspat. M minimal öteleme yüzeyi olsun. (3.14) denkleminden

$$\cos[\theta_\beta(u,v)] = -\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\kappa_\beta}$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos[\theta_\alpha(u,v)]\dfrac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\kappa_\beta}}{\sin^2[\phi(u,v)]} \\
&= -\frac{{\kappa_\alpha}^2 \cos^2[\theta_\alpha(u,v)]}{\sin^2[\phi(u,v)]} \\
&= -\left(\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]}{\sin[\phi(u,v)]}\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. ÖTELEME YÜZEYİ ÜZERİNDEKİ BAZI NOKTALARIN SINIFLANDIRMASI

Bu bölümde, [1] numaralı çalışmada yer alan, öteleme yüzeyi üzerindeki bir noktanın eliptik, hiperbolik, parabolik, düzlemsel ve umbilik nokta olması durumlarını inceleyeceğiz.

4.1. Öteleme Yüzeyinin Eliptik, Hiperbolik ve Parabolik Noktaları

Bu alt başlıkta, (3.12) denklemi kullanılarak, (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin eliptik, hiperbolik, parabolik ve düzlemsel noktaları belirlenecektir.

Teorem 4.1. M, (3.1) parametrizasyonuyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. $p \in M$ noktasının sırasıyla eliptik, hiperbolik ve parabolik nokta olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumların sağlanmasıdır [1].

i) p noktası yüzeyin bir eliptik noktası olması için gerek ve yeter şart $K > 0$ olmasıdır. Bu durumda (3.12) denkleminden $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta > 0$ olur ve yüzeyin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 aynı işarete sahiptir. Eğer κ_α ve κ_β aynı işaretli ise $\cos\theta_\alpha$ ve $\cos\theta_\beta$ da aynı işaretlidir. Bu durumda θ_α ve $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ya da θ_α ve $\theta_\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ dir. Eğer κ_α ve κ_β zıt işaretli ise $\cos\theta_\alpha$ ve $\cos\theta_\beta$ da zıt işaretlidir. $\theta_\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ve $\theta_\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ya da $\theta_\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ve $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ dir. Ayrıca p noktasının yüzeyin bir eliptik noktası olması durumunda $(\kappa_n)_\alpha (\kappa_n)_\beta > 0$ olur. Bu durumda α ve β eğrilerinin normal eğrilikleri aynı işaretli olur.

ii) p noktası yüzeyin bir hiperbolik noktası olması için gerek ve yeter şart $K < 0$ olmasıdır. Bu durumda (3.12) denkleminden $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta < 0$ olur ve yüzeyin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 zıt işarete sahiptir. Eğer κ_α ve κ_β aynı işaretli ise $\cos\theta_\alpha$ ve $\cos\theta_\beta$ zıt işaretlidir. $\theta_\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ve $\theta_\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ya da $\theta_\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ve $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ dir. Eğer κ_α ve κ_β zıt işaretli ise $\cos\theta_\alpha$ ve $\cos\theta_\beta$ aynı işaretlidir. θ_α ve $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ya da θ_α ve $\theta_\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ dir. Ayrıca p noktasının yüzeyin bir hiperbolik noktası olması durumunda $(\kappa_n)_\alpha (\kappa_n)_\beta < 0$ olur. Bu durumda α ve β eğrilerinin normal eğrilikleri zıt işaretli olur.

iii) p noktası yüzeyin bir parabolik noktası olması için gerek ve yeter şart $K = 0$ olmasıdır. (3.12) denkleminden $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta = 0$ olur. Bu durumda $\kappa_\alpha = 0$ veya $\kappa_\beta = 0$ veya $\cos\theta_\alpha \cos\theta_\beta = 0$ dır. Eğer $\cos\theta_\alpha = 0$ ise, $\theta_\alpha = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece α eğrisi bir asimtotik doğrultudur. Benzer şekilde, $\cos\theta_\beta = 0$ ise, $\theta_\beta = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece β eğrisi bir asimtotik doğrultudur. Ayrıca p noktasının yüzeyin bir parabolik noktası olması durumunda $(\kappa_n)_\alpha (\kappa_n)_\beta = 0$ olur. Bu durumda $(\kappa_n)_\alpha = 0$ veya $(\kappa_n)_\beta = 0$ dır.

Eğer $\cos\theta_\alpha = 0$ ve $\cos\theta_\beta = 0$ ise, $\theta_\alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ ve $\theta_\beta = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ dir. Bu durumda p noktası yüzeyin düzlemsel noktası ve $k_1 = k_2 = 0$ dır.

4.2. Öteleme Yüzeyinin Umbilik Noktaları

p noktası (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin umbilik noktası ise o zaman yüzeyin şekil operatörü matrisi, birim matrisin bir katıdır. Diğer bir deyişle şekil operatörü matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlar birbirine eşit, diğerleri sıfır olmalıdır. Bu durumda (3.9) denkleminden

$$\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)] = \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)] \tag{4.1}$$

$$\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)]\cos[\phi(u,v)] = 0 \tag{4.2}$$

$$\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)]\cos[\phi(u,v)] = 0 \tag{4.3}$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.2) ve (4.3) eşitliklerinde eğer $\cos[\phi(u,v)] = 0$ ise (4.1) denkleminden, p noktasının (3.1) parametrizasyonuyla verilen yüzeyin umbilik noktası olması için gerek ve yeter şart $\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)] = \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)]$ olmasıdır. Diğer bir deyişle $(\kappa_n)_\alpha = (\kappa_n)_\beta$ dır.

Eğer $\cos[\phi(u,v)] \neq 0$ ise (4.2) ve (4.3) eşitliklerinden $\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u,v)] = 0$ ve $\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u,v)] = 0$ olur ve (4.1) denklemi de sağlanır. Böylece aşağıdaki dört durum elde edilir:

i) $\kappa_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta = 0$ dır. Bu durumda $K = H = 0$ ve p noktası bir düzlemsel noktadır.

ii) $\kappa_\alpha = 0$ ve $\cos\theta_\beta = 0$ dır ($\theta_\beta = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$). Bu durumda $K = H = 0$ ve p noktası bir düzlemsel noktadır.

iii) $\cos\theta_\alpha = 0$ ve $\kappa_\beta = 0$ dır ($\theta_\alpha = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$). Bu durumda $K = H = 0$ ve p noktası bir düzlemsel noktadır.

iv) $\cos\theta_\alpha = 0$ ve $\cos\theta_\beta = 0$ dır ($\theta_\alpha = \theta_\beta = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$). Bu durumda $K = H = 0$ ve p noktası bir düzlemsel noktadır.

Böylece yukarıdaki durumların bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2. $\cos[\phi(u,v)] \neq 0$ olmak üzere, eğer (3.1) parametrizasyonuyla verilen yüzey bir flat yüzey değilse, o zaman öteleme yüzeyi üzerinde umbilik nokta yoktur [1].

Önerme 4.3. p noktası, (3.1) parametrizasyonuyla verilen yüzeyin umbilik noktası olsun. Bu durumda

$$\frac{\left[\kappa_\alpha^2 \cos^2[\theta_\alpha(u,v)] + \kappa_\beta^2 \cos^2[\theta_\beta(u,v)] + 2\kappa_\alpha\kappa_\beta \cos[\theta_\alpha(u,v)]\cos[\theta_\beta(u,v)](1 - 2\sin^2[\phi(u,v)])\right]}{4\sin^4[\phi(u,v)]} = 0$$

eşitliği elde edilir [1].

İspat. p noktası, (3.1) parametrizasyonuyla verilen yüzeyin umbilik noktası olsun. Teorem 2.13 den $H^2 - K = 0$ dır. Böylece (3.12) ve (3.13) denklemlerinden yukardaki eşitlik elde edilir.

4.3. Öteleme Yüzeyinin Singüler Noktaları

Teorem 4.4. (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin bir $X(u_0, v_0)$ noktasının singüler nokta olması için gerek ve yeter şart $\sin[\phi(u,v)] = 0$ olmasıdır [1].

İspat. $X(u_0, v_0)$ noktası, (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyi üzerinde bir singüler nokta olsun. Bu durumda $\|X_u \times X_v\| = 0$ dır. Yani

$$\underbrace{\|X_u \times X_v\|}_{0} = \underbrace{\|X_u\|}_{1}\underbrace{\|X_v\|}_{1} \sin[\phi(u, v)].$$

Böylece $\sin[\phi(u, v)] = 0$ olur.

Tersine $\sin[\phi(u, v)] = 0$ olsun. Bu durumda

$$\|X_u \times X_v\| = \underbrace{\|X_u\|}_{1}\underbrace{\|X_v\|}_{1} \underbrace{\sin[\phi(u, v)]}_{0}.$$

Böylece $\|X_u \times X_v\| = 0$ elde edilir. Buradan $X(u_0, v_0)$ noktası, M yüzeyi üzerinde bir singüler nokta olur.

Teorem 4.5. Eğer (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin bir $X(u_0, v_0)$ noktası, bir singüler nokta ise;

i) α ve β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

ii) α ve β üreteç eğrileri, dejenere eğrilerdir ($\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 0$) [1].

İspat.

i) (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin bir $X(u_0, v_0)$ noktası, singüler nokta olsun. Bu durumda Teorem 4.4. den $\sin[\phi(u, v)] = 0$ dır. Eğer $\sin[\phi(u, v)] = 0$ ise $\phi(u, v) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ olur. Böylece α ve β üreteç eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ dir.

ii) (3.1) parametrizasyonuyla verilen M öteleme yüzeyinin bir $X(u_0, v_0)$ noktası, singüler nokta olsun. Bu durumda (i) şıkkından α ve β üreteç eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı $\phi(u, v) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ olup sabittir. Böylece Teorem 3.1 in (iv) şıkkından α ve β eğrileri dejenere eğrilerdir.

Örnek 4.1. M, dairesel helis eğrileri tarafından üretilen ve minimal olmayan bir öteleme yüzeyi olsun.

$$\alpha(u) = \left(\sin\frac{u}{2}, \cos\frac{u}{2} - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2}\right),$$

$$\beta(v) = \left(\cos\frac{v}{3} - 1, \sin\frac{v}{3}, \frac{2\sqrt{2}v}{3}\right)$$

şeklinde verilsin.Bu durumda

$$X_u = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}, -\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$X_{uu} = -\frac{1}{4}\left(\sin\frac{u}{2}, \cos\frac{u}{2}, 0\right).$$

Benzer şekilde

$$X_v = \left(-\frac{1}{3}\sin\frac{v}{3}, \frac{1}{3}\cos\frac{v}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$
$$X_{vv} = -\frac{1}{9}\left(\cos\frac{v}{3}, \sin\frac{v}{3}, 0\right)$$

şeklinde elde edilir.

Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları;

$$E = 1, \quad F = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\sin\left[\frac{3u+2v}{6}\right], \quad G = 1$$

olarak hesaplanır. Yüzeyin birim normal vektörü

$$U = \frac{\left(-4\sin\frac{u}{2} - \sqrt{6}\cos\frac{v}{3}, -4\cos\frac{u}{2} - \sqrt{6}\sin\frac{v}{3}, \sqrt{2}\cos\left[\frac{3u+2v}{6}\right]\right)}{\sqrt{23 + \cos\left[\frac{3u+2v}{3}\right] + 8\sqrt{6}\sin\left[\frac{3u+2v}{6}\right]}}$$

ile verilir. Yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
l &= \frac{4+\sqrt{6}\sin\left[\frac{3u+2v}{6}\right]}{4.\sqrt{23+\cos\left[\frac{3u+2v}{3}\right]+8\sqrt{6}\sin\left[\frac{3u+2v}{3}\right]}},\\
m &= 0,\\
n &= \frac{\sqrt{6}+4\sin\left[\frac{3u+2v}{6}\right]}{9.\sqrt{23+\cos\left[\frac{3u+2v}{3}\right]+8\sqrt{6}\sin\left[\frac{3u+2v}{3}\right]}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Orijinde

$$E=G=1, \qquad F=\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad l=\frac{1}{2\sqrt{6}}, \qquad m=0, \qquad n=\frac{1}{18}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda $ln-m^2>0$, buradan $K>0$ olur. Böylece orijin bir eliptik noktadır.

5. EĞRİLERİN KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de, verilen eğrilerin küresel gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyleri tanımlandı. Bu yüzeylerin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları, şekil operatörü matrisleri, Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplandı. Ayrıca bu tip yüzeyler için çeşitli karakterizasyonlar elde edildi.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3, u \to \alpha(u)$ ve $\beta : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3, v \to \beta(v)$, birim hızlı non-dejenere eğriler olmak üzere $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ ve $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta, \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ sırasıyla α ve β eğrilerinin Frenet elemanları olsun.

5.1. Eğrilerin Teğet Gösterge Eğrileri Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri

α ve β, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı non-dejenere iki eğri olmak üzere bu eğrilerin sırasıyla t_α ve t_β teğet gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_1 : X(u,v) = t_\alpha(u) + t_\beta(v) \tag{5.1}$$

şeklinde verilir. (5.1) denkleminin u ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa M_1 yüzeyinin $\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörleri

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \\ &= t'_\alpha(u) \\ &= \kappa_\alpha n_\alpha \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_v &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \\
&= \dot{t_\beta}(v) \\
&= \kappa_\beta n_\beta
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Bu durumda M_1 yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle \kappa_\alpha n_\alpha, \kappa_\alpha n_\alpha \rangle = \kappa_\alpha^2, \tag{5.2}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle \kappa_\alpha n_\alpha, \kappa_\beta n_\beta \rangle = \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos[\phi(u,v)], \tag{5.3}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle \kappa_\beta n_\beta, \kappa_\beta n_\beta \rangle = \kappa_\beta^2 \tag{5.4}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\phi(u,v)$, α ve β eğrilerinin asli normal vektörleri arasındaki açıdır.

M_1 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü

$$
\begin{aligned}
U(u,v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \\
&= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \times n_\beta)}{\|\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \times n_\beta)\|} \\
&= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \times n_\beta)}{\kappa_\alpha \kappa_\beta \|n_\alpha\| \|n_\beta\| \sin[\phi(u,v)]} \\
&= \frac{n_\alpha \times n_\beta}{\sin[\phi(u,v)]}, \ \sin[\phi(u,v)] \neq 0
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

ile verilir.

α eğrisinin asli normal vektörü n_α, β eğrisinin ortonormal baz vektörleri $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ cinsinden ve β eğrisinin asli normal vektörü n_β, α eğrisinin ortonormal baz vektörleri $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ cinsinden yazılırsa

$$n_\alpha = \mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta \tag{5.6}$$

ve

$$n_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha \tag{5.7}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \langle n_\alpha, t_\beta \rangle = \sin[\phi(u,v)]\cos[\gamma(u,v)], \\
\mu_2 &= \langle n_\alpha, n_\beta \rangle = \cos[\phi(u,v)], \\
\mu_3 &= \langle n_\alpha, b_\beta \rangle = \sin[\phi(u,v)]\sin[\gamma(u,v)]
\end{aligned} \tag{5.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \langle n_\beta, t_\alpha \rangle = \sin[\phi(u,v)]\cos[\theta(u,v)], \\
\lambda_2 &= \langle n_\beta, n_\alpha \rangle = \cos[\phi(u,v)], \\
\lambda_3 &= \langle n_\beta, b_\alpha \rangle = \sin[\phi(u,v)]\sin[\theta(u,v)]
\end{aligned} \tag{5.9}$$

dır. Ayrıca M_1 yüzeyinin birim normal vektörü aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir: (5.5) denkleminde (5.7) denklemi yerine yazılırsa M_1 yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_1 = \sin[\theta(u,v)]t_\alpha - \cos[\theta(u,v)]b_\alpha \tag{5.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.5) denkleminde (5.6) denklemi yerine yazılırsa M_1 yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_2 = -\sin[\gamma(u,v)]t_\beta + \cos[\gamma(u,v)]b_\beta \tag{5.11}$$

olarak elde edilir.

$\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörlerinin ikinci dereceden kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u^2} \\
&= (\kappa_\alpha n_\alpha)' \\
&= {\kappa_\alpha}' n_\alpha + \kappa_\alpha {n_\alpha}' \\
&= {\kappa_\alpha}' n_\alpha + \kappa_\alpha(-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \\
&= -{\kappa_\alpha}^2 t_\alpha + {\kappa_\alpha}' n_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha b_\alpha, \\
X_{uv} &= X_{vu} = 0
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_{vv} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial v^2} \\
&= \dot{(\kappa_\beta n_\beta)} \\
&= \dot{\kappa_\beta} n_\beta + \kappa_\beta \dot{n_\beta} \\
&= \dot{\kappa_\beta} n_\beta + \kappa_\beta(-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta) \\
&= -{\kappa_\beta}^2 t_\beta + \dot{\kappa_\beta} n_\beta + \kappa_\beta \tau_\beta b_\beta
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Böylece M_1 yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$
\begin{aligned}
l &= \langle X_{uu}, U \rangle \\
&= \langle X_{uu}, U_1 \rangle \\
&= \langle -{\kappa_\alpha}^2 t_\alpha + {\kappa_\alpha}' n_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha b_\alpha, \sin[\theta(u,v)] t_\alpha - \cos[\theta(u,v)] b_\alpha \rangle \\
&= -{\kappa_\alpha}^2 \Big[\cos[\theta(u,v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\Big], \qquad (5.12) \\
m &= \langle X_{uv}, U \rangle \\
&= 0, \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, U\rangle \\
&= \langle X_{vv}, U_2\rangle \\
&= \langle -{\kappa_\beta}^2 t_\beta + \dot{\kappa_\beta} n_\beta + \kappa_\beta \tau_\beta b_\beta, -\sin[\gamma(u,v)]t_\beta + \cos[\gamma(u,v)]b_\beta\rangle \\
&= {\kappa_\beta}^2 \Big[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\Big]
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

olarak hesaplanır.

Önerme 5.1. M_1, (5.1) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M_1 yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$
S = \begin{pmatrix} -\frac{\left(\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\right)}{\sin^2[\phi(u,v)]} & -\frac{\kappa_\beta\left(\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\right)\cos[\phi(u,v)]}{\kappa_\alpha \sin^2[\phi(u,v)]} \\ \frac{\kappa_\alpha\left(\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\right)\cos[\phi(u,v)]}{\kappa_\beta \sin^2[\phi(u,v)]} & \frac{\left(\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\right)}{\sin^2[\phi(u,v)]} \end{pmatrix} \tag{5.15}
$$

şeklinde elde edilir.

İspat. (5.2), (5.3), (5.4), (5.12), (5.13) ve (5.14) numaralı eşitlikler, (2.1) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (5.15) eşitliğiyle ile verilen S şekil operatörü matrisi elde edilir.

Önerme 5.2. M_1, (5.1) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M_1 in Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H aşağıdaki şekilde verilir.

$$
K = -\frac{\Big[\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\Big]\Big[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\Big]}{\sin^2[\phi(u,v)]}, \tag{5.16}
$$

$$
H = \frac{-\Big[\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\Big] + \Big[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\Big]}{2\sin^2[\phi(u,v)]}. \tag{5.17}
$$

İspat. (5.2), (5.3), (5.4), (5.12), (5.13) ve (5.14) eşitlikleri (2.2) ve (2.3) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (5.16) ve (5.17) eşitlikleri ile verilen denklemler elde edilir.

Teorem 5.3. (5.1) parametrizasyonuyla verilen M_1 öteleme yüzeyi flat olsun. Bu durumda

$$\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\theta(u,v)]=0 \text{ veya } \cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\gamma(u,v)]=0 \tag{5.18}$$

elde edilir.

İspat. M_1 yüzeyi flat olsun. Bu durumda $K = 0$ dır. (5.16) denklemi kullanılırsa (5.18) de verilen eşitlikler elde edilir.

Teorem 5.4. M_1 yüzeyi flat ise, θ açısı sadece u nun bir fonksiyonu veya γ açısı sadece v nin bir fonksiyonudur.

İspat. M_1 yüzeyi flat olsun. O zaman (5.18) eşitliği sağlanır.
Eğer $\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\theta(u,v)] = 0$ ise $\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\tan[\theta(u,v)]$ dır. Bu durumda θ açısı sadece u nun bir fonksiyonu olur. Benzer şekilde, eğer $\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\gamma(u,v)] = 0$ ise $\dfrac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\tan[\gamma(u,v)]$ dır. Bu durumda γ açısı sadece v nin bir fonksiyonu olur.

Teorem 5.5. M_1 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri helis ise o zaman θ veya γ açıları sabittir.

İspat. α ve β eğrileri helis olsun, o zaman $\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} =$ sbt ve $\dfrac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} =$ sbt olur. Ayrıca M_1 yüzeyi flat olduğundan (5.18) deki birinci denklemden $\tan[\theta(u,v)] = -\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} =$ sbt olup $\theta =$ sbt olur. Benzer şekilde (5.18) deki ikinci denklemden $\tan[\gamma(u,v)] = -\dfrac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} =$ sbt olup $\gamma =$ sbt olur. Böylece θ veya γ açıları sabit olur.

Teorem 5.6. M_1 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri düzlemsel eğriler ise $\theta = \pi k$ veya $\gamma = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

İspat. α ve β eğrileri düzlemsel eğriler olsun, o zaman $\tau_\alpha = 0$ ve $\tau_\beta = 0$ dır. Ayrıca M_1 yüzeyi flat olduğundan (5.18) eşitliğinden $\sin[\theta(u,v)] = 0$ veya $\sin[\gamma(u,v)] = 0$ olur. Eğer $\sin[\theta(u,v)] = 0$ ise, $\theta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ elde edilir. Benzer şekilde, eğer $\sin[\gamma(u,v)] = 0$ ise, $\gamma = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ olur.

Teorem 5.7. M_1 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri helis ise, o zaman M_1 yüzeyi sabit açılı bir yüzeydir.

İspat. Varsayalım ki M_1 yüzeyi flat ve α ve β eğrileri helis olsun. Teorem 5.5 den, θ veya γ sabit açıdır. Genelliği bozmadan, kabul edelim ki $\theta = \theta_0$ sabit olsun. α helis olduğundan, α eğrisinin birim teğet vektörü t_α, birim sabit bir doğrultu u_α ile sabit açı yapar. Yani
$\langle t_\alpha, u_\alpha \rangle = \cos\delta_0 =$ sbt tir. Bu durumda u_α birim sabit doğrultusu

$$u_\alpha = \cos\delta_0 t_\alpha + \sin\delta_0 b_\alpha \tag{5.19}$$

şeklinde ifade edilir. (5.10) ve (5.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\langle U_1, u_\alpha \rangle &= \sin\theta_0 \cos\delta_0 - \cos\theta_0 \sin\delta_0 \\ &= \text{sbt}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Tanım 2.48 den ispat tamamlanır.

Teorem 5.8. (5.1) parametrizasyonuyla verilen M_1 öteleme yüzeyi minimal olsun. Bu durumda

$$\left[\cos[\theta(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u,v)]\right] - \left[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u,v)]\right] = 0 \tag{5.20}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. M_1 yüzeyi minimal olsun. Bu durumda $H = 0$ dır. (5.17) denklemi kullanılırsa (5.20) de verilen eşitlik elde edilir.

Teorem 5.9. M_1 yüzeyi minimal olsun. Eğer α ve β eğrileri düzlemsel eğriler ise n_α ve b_β arasındaki açı ile b_α ve n_β arasındaki açı aynıdır.

İspat. α ve β eğrileri düzlemsel eğriler olsun, o zaman $\tau_\alpha = 0$ ve $\tau_\beta = 0$ dır. M_1 yüzeyi minimal olduğundan, (5.20) eşitliğiden $\sin[\theta(u,v)] = \sin[\gamma(u,v)]$ olur. Bu durumda (5.8) ve (5.9) denklemleri eşittir. Böylece n_α ve b_β arasındaki açı ile b_α ve n_β arasındaki açı aynı olur.

Örnek 5.1.

$$\alpha(u)=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sqrt{1+u^2},2u,\ln(u+\sqrt{1+u^2})\Big)$$

ve

$$\beta(v)=\frac{1}{2}\Big(v+\sqrt{1+v^2},(v+\sqrt{1+v^2})^{-1},\sqrt{2}\ln(v+\sqrt{1+v^2})\Big)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin teğet gösterge eğrileri

$$t_\alpha(u)=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},2,\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\Big)$$

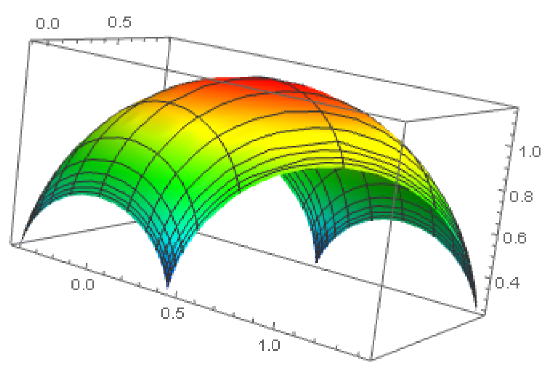
ve

$$t_\beta(v)=\frac{1}{2}\Big(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

dir. Bu durumda t_α ve t_β teğet gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_1(u,v)=\Big(\frac{u}{\sqrt{5+5u^2}}+\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{2\sqrt{1+v^2}},\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})},\frac{1}{\sqrt{5+5u^2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.1. Teğet gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 1

Örnek 5.2.

$$\alpha(u)=\left(\cos\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right],\frac{2u}{\sqrt{5}},\sin\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right]\right)$$

ve

$$\beta(v)=\frac{1}{2}\Big(v+\sqrt{1+v^2},(v+\sqrt{1+v^2})^{-1},\sqrt{2}\ln(v+\sqrt{1+v^2})\Big)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin teğet gösterge eğrileri

$$t_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\sin\Big[\frac{u}{\sqrt{5}}\Big], 2, \cos\Big[\frac{u}{\sqrt{5}}\Big]\Big)$$

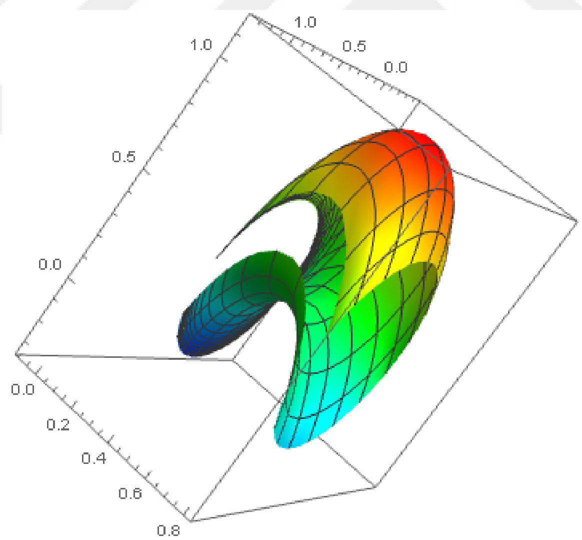
ve

$$t_\beta(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

dir. Bu durumda t_α ve t_β teğet gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_1(u,v) = \Big(-\frac{\sin\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right]}{\sqrt{5}} + \frac{v+\sqrt{1+v^2}}{2\sqrt{1+v^2}}, \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})}, \frac{\cos\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right]}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.2. Teğet gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 2

5.2. Eğrilerin Asli Normal Gösterge Eğrileri Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri

α ve β, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı non-dejenere iki eğri olmak üzere bu eğrilerin sırasıyla n_α ve n_β asli normal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_2 : X(u,v) = n_\alpha(u) + n_\beta(v) \tag{5.21}$$

şeklinde verilir. (5.21) denkleminin u ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa M_2 yüzeyinin $\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörleri

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \\ &= n'_\alpha(u) \\ &= -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \\ &= \dot{n}_\beta(v) \\ &= -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta \end{aligned}$$

olarak bulunur.

α eğrisinin teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü, β eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ cinsinden yazılabilir:

$$t_\alpha = \lambda_1 t_\beta + \lambda_2 n_\beta + \lambda_3 b_\beta, \tag{5.22}$$

$$n_\alpha = \lambda_4 t_\beta + \lambda_5 n_\beta + \lambda_6 b_\beta, \tag{5.23}$$

$$b_\alpha = \lambda_7 t_\beta + \lambda_8 n_\beta + \lambda_9 b_\beta. \tag{5.24}$$

Benzer şekilde, β eğrisinin teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü, α eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ cinsinden yazılabilir:

$$t_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_4 n_\alpha + \lambda_7 b_\alpha, \tag{5.25}$$

$$n_\beta = \lambda_2 t_\alpha + \lambda_5 n_\alpha + \lambda_8 b_\alpha, \tag{5.26}$$

$$b_\beta = \lambda_3 t_\alpha + \lambda_6 n_\alpha + \lambda_9 b_\alpha. \tag{5.27}$$

Burada

$$\begin{aligned}
&\langle t_\alpha, t_\beta\rangle = \lambda_1,\ \langle t_\alpha, n_\beta\rangle = \lambda_2,\ \langle t_\alpha, b_\beta\rangle = \lambda_3,\\
&\langle n_\alpha, t_\beta\rangle = \lambda_4,\ \langle n_\alpha, n_\beta\rangle = \lambda_5,\ \langle n_\alpha, b_\beta\rangle = \lambda_6,\\
&\langle b_\alpha, t_\beta\rangle = \lambda_7,\ \langle b_\alpha, n_\beta\rangle = \lambda_8,\ \langle b_\alpha, b_\beta\rangle = \lambda_9
\end{aligned} \tag{5.28}$$

ve $\lambda_i = \lambda_i(u,v)$, $1 \leqslant i \leqslant 9$ dır. Bu durumda (5.21) parametrizasyonuyla verilen M_2 yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları:

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u\rangle\\
&= \langle -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha\rangle\\
&= \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2, && (5.29)\\
F &= \langle X_u, X_v\rangle\\
&= \langle -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta\rangle\\
&= \kappa_\alpha\kappa_\beta \underbrace{\langle t_\alpha, t_\beta\rangle}_{\lambda_1} - \kappa_\alpha\tau_\beta \underbrace{\langle t_\alpha, b_\beta\rangle}_{\lambda_3} - \tau_\alpha\kappa_\beta \underbrace{\langle b_\alpha, t_\beta\rangle}_{\lambda_7} + \tau_\alpha\tau_\beta \underbrace{\langle b_\alpha, b_\beta\rangle}_{\lambda_9}\\
&= \kappa_\alpha\kappa_\beta\lambda_1 - \kappa_\alpha\tau_\beta\lambda_3 - \tau_\alpha\kappa_\beta\lambda_7 + \tau_\alpha\tau_\beta\lambda_9\\
&= \kappa_\alpha\kappa_\beta\big(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3\big) - \tau_\alpha\kappa_\beta\big(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9\big), && (5.30)\\
G &= \langle X_v, X_v\rangle\\
&= \langle -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta, -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta\rangle\\
&= \kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 && (5.31)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

M_2 yüzeyinin birim normal vektörü

$$
\begin{aligned}
U(u,v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \\
&= \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG-F^2}} \\
&= \frac{(-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \times (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta)}{\sqrt{EG-F^2}} \\
&= \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta(t_\alpha \times t_\beta) - \kappa_\alpha\tau_\beta(t_\alpha \times b_\beta) - \tau_\alpha\kappa_\beta(b_\alpha \times t_\beta) + \tau_\alpha\tau_\beta(b_\alpha \times b_\beta)}{\sqrt{EG-F^2}} \\
&= \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta\left[(t_\alpha \times t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}(t_\alpha \times b_\beta)\right] - \tau_\alpha\kappa_\beta\left[(b_\alpha \times t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}(b_\alpha \times b_\beta)\right]}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

ile verilir. Burada

$$
EG - F^2 = (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) - \left[\kappa_\alpha\kappa_\beta\big(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3\big) - \tau_\alpha\kappa_\beta\big(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9\big)\right]^2 .
$$

Ayrıca M_2 yüzeyinin birim normal vektörü aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir: (5.32) denkleminde (5.25) ve (5.27) denklemleri yerine yazılırsa M_2 yüzeyinin birim normal vektörü

$$
U_1 = \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta\left[\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\big)t_\alpha - \left[\big(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9\big) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3\big)\right]n_\alpha + \big(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\big)b_\alpha\right]}{\sqrt{EG-F^2}}
$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (5.32) denkleminde (5.22) ve (5.24) denklemleri yerine yazılırsa M_2 yüzeyinin birim normal vektörü

$$
U_2 = \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta\left[\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\big(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8 - \lambda_2\big)t_\beta + \left[\big(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\big) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\big)\right]n_\beta + \big(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8 - \lambda_2\big)b_\beta\right]}{\sqrt{EG-F^2}}
$$

şeklinde elde edilir.

$\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörlerinin ikinci dereceden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u^2} \\
&= (-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha)' \\
&= -{\kappa_\alpha}' t_\alpha - \kappa_\alpha {t_\alpha}' + {\tau_\alpha}' b_\alpha + \tau_\alpha {b_\alpha}' \\
&= -{\kappa_\alpha}' t_\alpha - ({\kappa_\alpha}^2 + {\tau_\alpha}^2) n_\alpha + {\tau_\alpha}' b_\alpha, \\
X_{uv} &= X_{vu} = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_{vv} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial v^2} \\
&= (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta)^{\dot{}} \\
&= -\dot{\kappa_\beta} t_\beta - \kappa_\beta \dot{t_\beta} + \dot{\tau_\beta} b_\beta + \tau_\beta \dot{b_\beta} \\
&= -\dot{\kappa_\beta} t_\beta - ({\kappa_\beta}^2 + {\tau_\beta}^2) n_\beta + \dot{\tau_\beta} b_\beta
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$l = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\right) \\ -\left({\kappa_\alpha}^2 + {\tau_\alpha}^2\right)\left[\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9 - \lambda_7\right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3 - \lambda_1\right)\right] \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

$$m = 0, \tag{5.34}$$

$$n = -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} \kappa_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8\right) \\ +\left({\kappa_\beta}^2 + {\tau_\beta}^2\right)\left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\right)\right] \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

olarak hesaplanır.

Önerme 5.10. M_2, (5.21) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M_2 yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H aşağıdaki şekilde verilir.

$$K=-\frac{{\kappa_\alpha}^2{\kappa_\beta}^2}{(\sqrt{EG-F^2})^4}\begin{pmatrix}\kappa_\alpha\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\left(\lambda_4-\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\right)\\-\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9-\lambda_7\right)\\-\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3-\lambda_1\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\kappa_\beta\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'\left(\lambda_2-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8\right)\\+\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\left(\lambda_3+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\right)\\-\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\lambda_9+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\right)\end{pmatrix},\quad (5.36)$$

$$H=\frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{2(\sqrt{EG-F^2})^3}\begin{pmatrix}\kappa_\alpha\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2)\left(\lambda_4-\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\right)\\-\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9-\lambda_7\right)\\-\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3-\lambda_1\right)\\-\kappa_\beta\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left(\lambda_2-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8\right)\\-\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\left(\lambda_3+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\right)\\+\left({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\right)\left({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\right)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left(\lambda_9+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\right)\end{pmatrix}.\quad (5.37)$$

İspat. (5.29), (5.30), (5.31), (5.33), (5.34) ve (5.35) eşitlikleri (2.2) ve (2.3) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (5.36) ve (5.37) eşitlikleri ile verilen denklemler elde edilir.

Teorem 5.11. (5.21) parametrizasyonuyla verilen M_2 öteleme yüzeyi flat olsun. Bu durumda

$$\kappa_\alpha\Big(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\Big)'\big(\lambda_4-\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\big)-\big({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\big)\Big[\big(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9-\lambda_7\big)+\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3-\lambda_1\big)\Big]=0\quad (5.38)$$

veya

$$\kappa_\beta\Big(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\Big)'\big(\lambda_2-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8\big)+\big({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\big)\Big[\big(\lambda_3+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\big)-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\lambda_9+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\big)\Big]=0.\quad (5.39)$$

İspat. Kabul edelim ki M_2 flat olsun. Bu durumda $K=0$ olur. O zaman (5.36) denkleminden (5.38) ve (5.39) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 5.12. M_2 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri düzlemsel eğriler ise t_α ve b_β vektörleri ortogonal veya b_α ve t_β vektörleri ortogonaldir.

İspat. α ve β düzlemsel eğriler olsun, o zaman $\tau_\alpha = 0$ ve $\tau_\beta = 0$ dır. Ayrıca M_2 yüzeyi flat olduğundan (5.38) ve (5.39) eşitliklerinden $\lambda_3 = 0$ veya $\lambda_7 = 0$ elde edilir. Eğer $\lambda_3 = 0$ ise (5.28) eşitliğinden $\langle t_\alpha, b_\beta\rangle = 0$ olur. Böylece t_α ve b_β vektörleri ortogonaldir. Benzer şekilde, eğer $\lambda_7 = 0$ ise (5.28) eşitliğinden $\langle b_\alpha, t_\beta\rangle = 0$ olur. Buradan b_α ve t_β vektörleri ortogonaldir.

Teorem 5.13. (5.21) parametrizasyonuyla verilen M_2 öteleme yüzeyi minimal olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \kappa_\alpha\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2)\big(\lambda_4-\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_6\big) \\ -\big({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\big)\big({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\big)\big(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_9-\lambda_7\big) \\ -\big({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2\big)\big({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\big)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_3-\lambda_1\big) \\ -\kappa_\beta\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2)\big(\lambda_2-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\lambda_8\big) \\ -({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2)\big({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\big)\big(\lambda_3+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_1\big) \\ +({\kappa_\alpha}^2+{\tau_\alpha}^2)\big({\kappa_\beta}^2+{\tau_\beta}^2\big)\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big(\lambda_9+\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\lambda_7\big) \end{pmatrix} = 0 \qquad (5.40)$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Kabul edelim ki M_2 minimal bir yüzey olsun. Bu durumda $H = 0$ olur. O zaman (5.37) denkleminden (5.40) denklemi elde edilir.

Teorem 5.14. M_2 yüzeyi minimal olsun. Eğer α ve β eğrileri düzlemsel eğriler ise t_α ve b_β arasındaki açı ile b_α ve t_β arasındaki açı aynıdır.

İspat. α ve β düzlemsel eğriler olsun, o zaman $\tau_\alpha = 0$ ve $\tau_\beta = 0$ dır. Ayrıca M_2 yüzeyi minimal olduğundan (5.40) denkleminden $\lambda_3 = \lambda_7$ olur. (5.28) eşitliğinden $\langle t_\alpha, b_\beta\rangle = \langle b_\alpha, t_\beta\rangle$ olur.

Örnek 5.3.

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{1+u^2}, 2u, \ln(u+\sqrt{1+u^2})\right)$$

ve

$$\beta(v) = \frac{1}{2}\left(v+\sqrt{1+v^2}, (v+\sqrt{1+v^2})^{-1}, \sqrt{2}\ln(v+\sqrt{1+v^2})\right)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin asli normal gösterge eğrileri

$$n_\alpha(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, 0, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

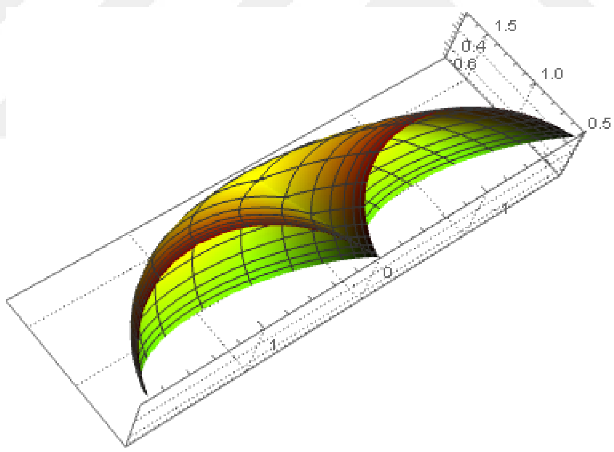
ve

$$n_\beta(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2+2v^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+2v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

dir. Bu durumda n_α ve n_β asli normal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_2(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+2v^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+2v^2}}, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.3. Asli normal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 1

Örnek 5.4.

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{1+u^2}, 2u, \ln(u+\sqrt{1+u^2})\right)$$

ve

$$\beta(v) = \left(\frac{5}{13}\cos[v], \frac{8}{13} - \sin[v], -\frac{12}{13}\cos[v]\right)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin asli normal gösterge eğrileri

$$n_\alpha(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, 0, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

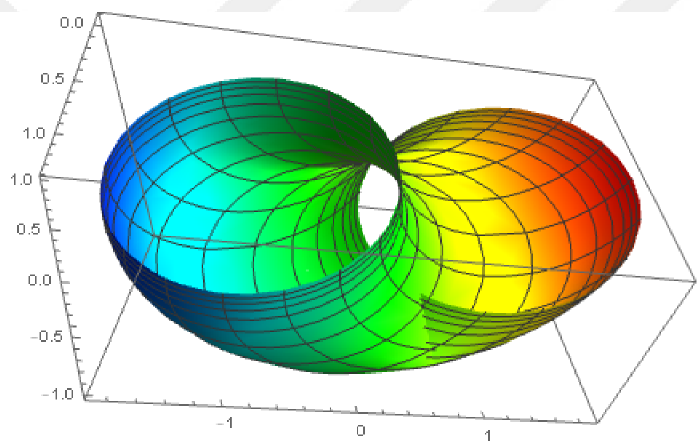
ve

$$n_\beta(v) = \left(-\frac{5}{13}\cos[v], \sin[v], \frac{12}{13}\cos[v] \right)$$

dir. Bu durumda n_α ve n_β asli normal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_2(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{5}{13}\cos[v], \sin[v], -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{12}{13}\cos[v] \right)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.4. Asli normal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 2

5.3. Eğrilerin Binormal Gösterge Eğrileri Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri

α ve β, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı düzlemsel olmayan iki eğri olmak üzere bu eğrilerin sırasıyla b_α ve b_β binormal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_3 : X(u,v) = b_\alpha(u) + b_\beta(v) \tag{5.41}$$

şeklinde verilsin. (5.41) denkleminin u ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa M_3 yüzeyinin $\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörleri

$$
\begin{aligned}
X_u &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial u} \\
&= b'_\alpha(u) \\
&= -\tau_\alpha n_\alpha
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_v &= \frac{\partial X(u,v)}{\partial v} \\
&= \dot{b_\beta}(v) \\
&= -\tau_\beta n_\beta
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

Bu durumda M_3 yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle -\tau_\alpha n_\alpha, -\tau_\alpha n_\alpha \rangle = \tau_\alpha^2, \tag{5.42}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle -\tau_\alpha n_\alpha, -\tau_\beta n_\beta \rangle = \tau_\alpha \tau_\beta \cos[\theta(u,v)], \tag{5.43}$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle -\tau_\beta n_\beta, -\tau_\beta n_\beta \rangle = \tau_\beta^2 \tag{5.44}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\theta(u,v)$, n_α ve n_β vektörleri arasındaki açıdır. M_3 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü

$$
\begin{aligned}
U(u,v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \\
&= \frac{\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \times n_\beta)}{\|\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \times n_\beta)\|} \\
&= \frac{\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \times n_\beta)}{\tau_\alpha \tau_\beta \|n_\alpha\| \|n_\beta\| \sin[\theta(u,v)]} \\
&= \frac{n_\alpha \times n_\beta}{\sin[\theta(u,v)]}, \ \sin[\theta(u,v)] \neq 0
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

olarak hesaplanır.

α eğrisinin asli normal vektörü n_α, β eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ cinsinden ve β eğrisinin asli normal vektörü n_β, α eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ cinsinden yazılırsa

$$n_\alpha = \mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta \tag{5.46}$$

ve

$$n_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha \tag{5.47}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \langle n_\alpha, t_\beta \rangle = \sin[\theta(u,v)]\cos[\phi(u,v)], \\ \mu_2 &= \langle n_\alpha, n_\beta \rangle = \cos[\theta(u,v)], \\ \mu_3 &= \langle n_\alpha, b_\beta \rangle = \sin[\theta(u,v)]\sin[\phi(u,v)] \end{aligned} \tag{5.48}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle n_\beta, t_\alpha \rangle = \sin[\theta(u,v)]\cos[\gamma(u,v)], \\ \lambda_2 &= \langle n_\beta, n_\alpha \rangle = \cos[\theta(u,v)], \\ \lambda_3 &= \langle n_\beta, b_\alpha \rangle = \sin[\theta(u,v)]\sin[\gamma(u,v)] \end{aligned} \tag{5.49}$$

dır. Ayrıca M_3 yüzeyinin birim normal vektörü aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir: (5.45) denkleminde (5.47) denklemi yerine yazılırsa M_3 yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_1 = \sin[\gamma(u,v)]t_\alpha - \cos[\gamma(u,v)]b_\alpha \tag{5.50}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (5.45) denkleminde (5.46) denklemi yerine yazılırsa M_3 yüzeyinin birim normal vektörü

$$U_2 = -\sin[\phi(u,v)]t_\beta + \cos[\phi(u,v)]b_\beta \tag{5.51}$$

olarak elde edilir.

$\{X_u, X_v\}$ tanjant vektörlerinin ikinci dereceden kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial u^2} \\
&= (-\tau_\alpha n_\alpha)' \\
&= -{\tau_\alpha}' n_\alpha - \tau_\alpha {n_\alpha}' \\
&= {\tau_\alpha}' n_\alpha - \tau_\alpha(-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \\
&= \kappa_\alpha \tau_\alpha t_\alpha - {\tau_\alpha}' n_\alpha - {\tau_\alpha}^2 b_\alpha, \\
X_{uv} &= X_{vu} = 0
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_{vv} &= \frac{\partial^2 X(u,v)}{\partial v^2} \\
&= \dot{(-\tau_\beta n_\beta)} \\
&= -\dot{\tau_\beta} n_\beta - \tau_\beta \dot{n_\beta} \\
&= -\dot{\tau_\beta} n_\beta - \tau_\beta(-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta) \\
&= \kappa_\beta \tau_\beta t_\beta - \dot{\tau_\beta} n_\beta - {\tau_\beta}^2 b_\beta
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Böylece M_3 yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$
\begin{aligned}
l &= \langle X_{uu}, U \rangle \\
&= \langle X_{uu}, U_1 \rangle \\
&= \langle \kappa_\alpha \tau_\alpha t_\alpha - {\tau_\alpha}' n_\alpha - {\tau_\alpha}^2 b_\alpha, \sin[\gamma(u,v)] t_\alpha - \cos[\gamma(u,v)] b_\alpha \rangle \\
&= \kappa_\alpha \tau_\alpha \big[\cos[\gamma(u,v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u,v)]\big], \qquad (5.52) \\
m &= \langle X_{uv}, U \rangle \\
&= 0, \qquad (5.53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, U\rangle \\
&= \langle X_{vv}, U_2\rangle \\
&= \langle \kappa_\beta\tau_\beta t_\beta - \dot{\tau}_\beta n_\alpha - {\tau_\beta}^2 b_\beta, -\sin[\phi(u,v)]t_\beta + \cos[\phi(u,v)]b_\beta\rangle \\
&= -\kappa_\beta\tau_\beta\big[\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u,v)]\big]
\end{aligned} \tag{5.54}
$$

olarak hesaplanır.

Önerme 5.15. M_3, (5.41) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M_3 yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$
S = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_\alpha\left(\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\gamma(u,v)]\right)}{\tau_\alpha\sin^2[\theta(u,v)]} & \frac{\kappa_\beta\left(\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\phi(u,v)]\right)\cos[\theta(u,v)]}{\tau_\alpha\sin^2[\theta(u,v)]} \\ -\frac{\kappa_\alpha\left(\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\gamma(u,v)]\right)\cos[\theta(u,v)]}{\tau_\beta\sin^2[\theta(u,v)]} & -\frac{\kappa_\beta\left(\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\phi(u,v)]\right)}{\tau_\beta\sin^2[\theta(u,v)]} \end{pmatrix} \tag{5.55}
$$

şeklinde elde edilir.

İspat. (5.42), (5.43), (5.44), (5.52), (5.53) ve (5.54) numaralı eşitlikler, (2.1) eşitliğinde yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (5.55) eşitliğiyle ile verilen S şekil operatörü matrisi elde edilir.

Önerme 5.16. M_3, (5.41) parametrizasyonuyla verilen öteleme yüzeyi olsun. M_3 yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H aşağıdaki şekilde verilir.

$$
K = -\frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta\left[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u,v)]\right]\left[\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u,v)]\right]}{\tau_\alpha\tau_\beta\sin^2\theta}, \tag{5.56}
$$

$$
H = \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta\left[\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\left[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u,v)]\right] - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\left[\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u,v)]\right]\right]}{2\tau_\alpha\tau_\beta\sin^2\theta}. \tag{5.57}
$$

İspat. (5.42), (5.43), (5.44), (5.52), (5.53) ve (5.54) eşitlikleri (2.2) ve (2.3) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (5.56) ve (5.57) eşitlikleri ile verilen denklemler elde edilir.

Teorem 5.17. (5.41) parametrizasyonuyla verilen M_3 öteleme yüzeyi flat olsun. Bu durumda

$$\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\gamma(u,v)]=0 \text{ veya } \cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\phi(u,v)]=0 \tag{5.58}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. M_3 yüzeyi flat olsun. Bu durumda $K=0$ dır. (5.56) denklemi kullanılırsa (5.58) de verilen eşitlikler elde edilir.

Teorem 5.18. (5.41) parametrizasyonuyla verilen M_3 öteleme yüzeyi flat ise, γ açısı sadece u nun bir fonksiyonu veya ϕ açısı sadece v nin bir fonksiyonudur.

İspat. M_3 yüzeyi flat olsun. O zaman (5.58) eşitliği sağlanır.
Eğer $\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}+\sin[\gamma(u,v)]=0$ ise $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}=-\tan[\gamma(u,v)]$ dır. Bu durumda γ açısı sadece u nun bir fonksiyonu olur. Benzer şekilde, eğer $\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}+\sin[\phi(u,v)]=0$ ise $\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}=-\tan[\phi(u,v)]$ dır. Bu durumda ϕ açısı sadece v nin bir fonksiyonudur.

Teorem 5.19. M_3 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri helis ise γ veya ϕ açıları sabittir.

İspat. α ve β eğrileri helis olsun, o zaman $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}=$ sbt ve $\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}=$ sbt olur. Ayrıca M_3 yüzeyi flat olduğundan (5.58) deki birinci denklemden $\tan[\gamma(u,v)]=-\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}=$ sbt olup $\gamma=$ sbt olur. Benzer şekilde (5.58) deki ikinci denklemden $\tan[\phi(u,v)]=-\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}=$ sbt olup $\phi=$ sbt olur. Böylece γ veya ϕ açıları sabit olur.

Teorem 5.20. M_3 yüzeyi flat olsun. Eğer α ve β eğrileri helis ise, o zaman M_3 yüzeyi sabit açılı bir yüzeydir.

İspat. Varsayalım ki M_3 yüzeyi flat ve α ve β eğrileri helis olsun. Teorem 5.19 dan, γ veya ϕ açıları sabittir. Genelliği bozmadan, kabul edelim ki $\gamma=\gamma_0$ sabit olsun. α helis olduğundan, α eğrisinin birim teğet vektörü t_α, birim sabit bir doğrultu u_α ile sabit açı yapar. Yani

$\langle t_\alpha, u_\alpha\rangle = \cos\psi_0 =$ sbt tir. Bu durumda u_α birim sabit doğrultusu

$$u_\alpha = \cos\psi_0 t_\alpha + \sin\psi_0 b_\alpha \tag{5.59}$$

şeklinde ifade edilir. (5.50) ve (5.59) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\langle U_1, u_\alpha\rangle &= \sin\gamma_0\cos\psi_0 - \cos\gamma_0\sin\psi_0\\ &= \text{sbt}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Tanım 2.48 den ispat tamamlanır.

Teorem 5.21. (5.41) parametrizasyonuyla verilen M_3 öteleme yüzeyi minimal olsun. Bu durumda

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\big[\cos[\gamma(u,v)]\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u,v)]\big] - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\big[\cos[\phi(u,v)]\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u,v)]\big] = 0 \tag{5.60}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. M_3 yüzeyi minimal olsun. Bu durumda $H = 0$ dır. (5.57) denklemi kullanılırsa (5.60) da verilen eşitlik elde edilir.

Örnek 5.5.

$$\alpha(u) = \left(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big], \sin\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big], 1\right)$$

ve

$$\beta(v) = \frac{1}{2}\left(v+\sqrt{1+v^2}, (v+\sqrt{1+v^2})^{-1}, \sqrt{2}\ln(v+\sqrt{1+v^2})\right)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin binormal gösterge eğrileri

$$b_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sin\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big]-\cos\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big], -\sin\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big]-\cos\big[\ln\big(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\big)\big], 2\right)$$

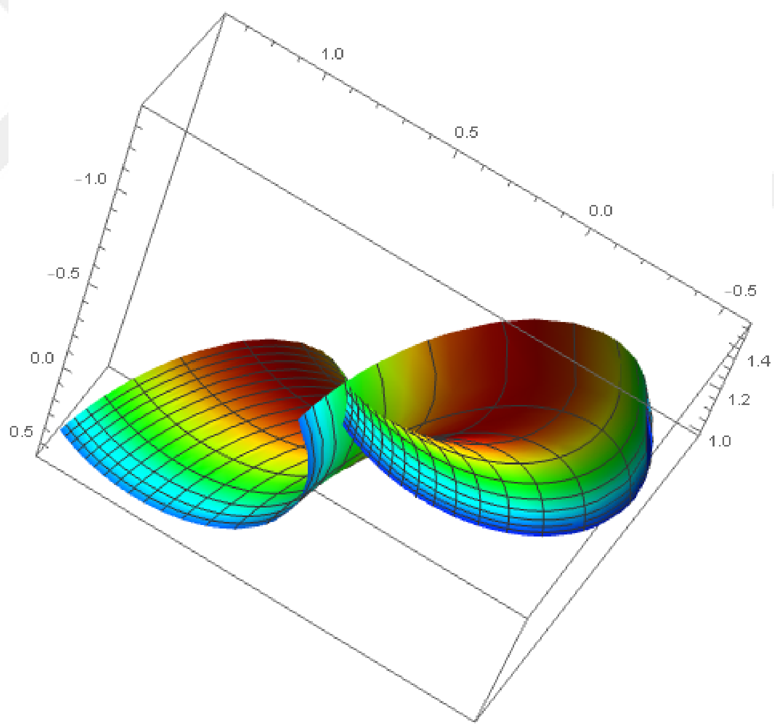
ve

$$b_\beta(v)=\frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})},\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+v^2}}\Bigg)$$

dir. Bu durumda b_α ve b_β binormal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_3(u,v)=\left(\begin{array}{c}\frac{\sin\left[\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]-\cos\left[\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]}{\sqrt{6}}-\frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v+\sqrt{1+v^2})},\\ \frac{-\sin\left[\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]-\cos\left[\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]}{\sqrt{6}}+\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{2\sqrt{1+v^2}},\\ \frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}}\end{array}\right)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.5. Binormal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 1

Örnek 5.6.

$$\alpha(u)=\left(\cos\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right],\frac{2u}{\sqrt{5}},\sin\left[\frac{u}{\sqrt{5}}\right]\right)$$

ve

$$\beta(v) = \frac{1}{2}\Big(v + \sqrt{1+v^2}, (v + \sqrt{1+v^2})^{-1}, \sqrt{2}\ln(v + \sqrt{1+v^2})\Big)$$

olmak üzere, α ve β eğrilerinin binormal gösterge eğrileri

$$b_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(- 2\sin\Big[\frac{u}{\sqrt{5}}\Big], -1, 2\cos\Big[\frac{u}{\sqrt{5}}\Big]\Big)$$

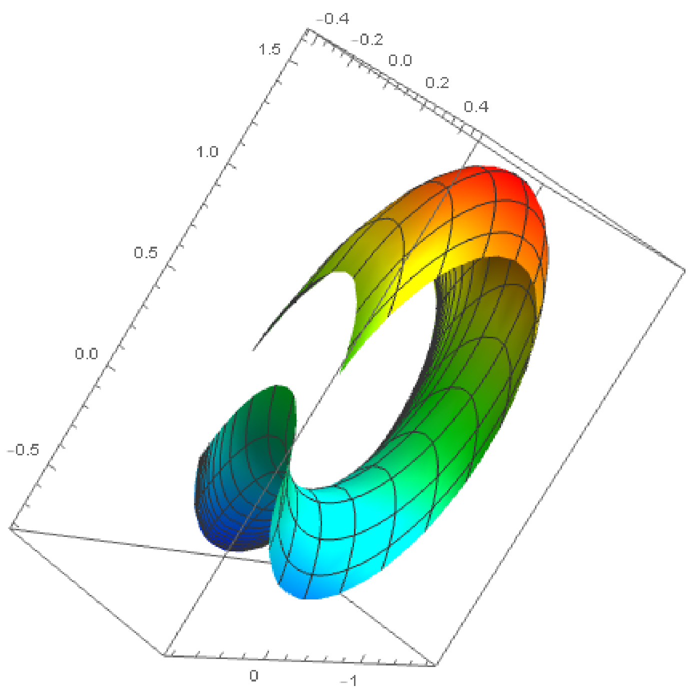
ve

$$b_\beta(v) = \frac{1}{2}\Big(- \frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, \frac{v + \sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

dir. Bu durumda b_α ve b_β binormal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi

$$M_3(u,v) = \Big(-\frac{2\sin\big[\frac{u}{\sqrt{5}}\big]}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{v + \sqrt{1+v^2}}{2\sqrt{1+v^2}}, \frac{2\cos\big[\frac{u}{\sqrt{5}}\big]}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}}\Big)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.6. Binormal gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyi 2

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında iki uzay eğrisi tarafından üretilen öteleme yüzeyleri çalışıldı. İlk olarak [3] nolu çalışmada yer alan öteleme yüzeyi ile ilgili bazı hesaplama lar detaylı olarak ele alındı. Bu anlamda öteleme yüzeyinin 1. temel formunun katsayıları, 2. temel formunun katsayıları, şekil operatörü matrisi, ortalama eğriliği, Gauss eğriliği, asli eğriliği gibi yüzeye ait bazı hesaplamalar, yüzeyi oluşturan üreteç eğrilerinin eğrilikleri cinsinden hesaplandı.

Daha sonra [1] nolu çalışmada yer alan öteleme yüzeyinin eliptik, hiperbolik, parabolik, düzlemsel, umbilik ve singüler noktaları gibi bazı özel noktalarının karakterizsyonlarına yer verildi.

Son olarak iki uzay eğrisinin küresel gösterge eğrileri tarafından üretilen öteleme yüzeyleri tanımlanarak, bu tip yüzeylerin 1. temel formunun katsayıları, 2. temel formunun katsayıları, şekil operatörü matrisi, ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği gibi yüzeye ait bazı hesaplamalar yapıldı. Böylesi yüzeylerin minimal ($H = 0$) ve flat ($K = 0$) olma durumları için çeşitli karakterizasyonlar elde edildi. Ayrıca Mathematica 10 programı kullanılarak bu yüzeyler için bazı örnekler verildi.

KAYNAKLAR

[1]. Ali, A.T., Abdel Aziz, H.S. and Sorour, A.H., 2015, On curvatures and points of the translation surfaces in Euclidean 3-space, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23, 167-172.

[2]. Cermelli P. and Di Scala A.J., 2007, Constant-angle surfaces in liquid crystals, *Philosophical Magazine*, 87(12), 1871-1888.

[3]. Çetin, M., Tuncer, Y. and Ekmekçi, N., 2011 Translation surfaces in Euclidean 3-space, *World Acad., Sci. Engin. Tech.*, 52, 864-868.

[4]. Çetin, M., Kocayiğit, H. and Önder, M., 2012 Translation surfaces according to Frenet frame in Minkowski 3-space, International J., *Physical Sci.*, 47, 6135-6143.

[5]. Çetin, M. and Tuncer, Y., 2015, Parallel surfaces to translation surfaces in Euclidean 3-space, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1.*, 2, 4754.

[6]. Dölek, Z., 2013, $\mathbb{E}^3$ *Öklid Uzayında Bazı Öteleme Yüzeyler*, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[7]. Aksoy, Ö., 2005, *Öteleme Yüzeyleri Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[8]. Gray, A., 1998, *Modern Diferential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Florida.

[9]. Hacısalihoğlu, H.H., 1998, *Lineer Cebir 1.Cilt*, 6.Baskı, Fen Fakültesi, Ankara.

[10]. Hacısalihoğlu, H.H., 2000, *Diferensiyel Geometri 1.Cilt*, 3.Baskı, Ertem Matbaa, Ankara.

[11]. Hacısalihoğlu, H.H., 2012, *Diferensiyel Geometri 2.Cilt*, 4.Baskı, Ertem Matbaa, Ankara.

[12]. Liu, H., 1999, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Geom.*, 64, 141-149.

[13]. Munteanu, I.M. and Nistor, A.I., 2011, On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in $\mathbb{E}^3$, *Houston J. Math.*, 37, 1087-1102.

[14]. Sabuncuoğlu, A., 1994, *Diferensiyel Geometri*, 5.Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

[15]. Verstraelen, L., Walrave, J. and Yaprak, S., 1994, The minimal translation surfaces in Euclidean space, *Soochow J. Math.*, 20(1), 77-82.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Neriman ACAR
Doğum Yeri	ANTALYA
Doğum Tarihi	03.02.1992
Uyruğu	T.C.
Telefon	
E-Posta Adresi	nerimanacar_07@hotmail.com
Web Adresi	...

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2013

Makale ve Bildiriler
Uluslararası Konferans ve Sempozyumlar
Acar, N., Kahraman Aksoyak, F. 2018, Translation Surfaces Generated by Spherical Indicatrices of Space Curves in Euclidean 3-Space, *16. Uluslararası Geometri Sempozyumu*, 4-7 Temmuz 2018 Manisa, Manisa Celal Bayar Üniversitesi (Poster sunum-Özet bildiri).