T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU BOYUTLU LEİBNİZ CEBİRLERİNİN YAPISI

Mücahit ÖZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU BOYUTLU LEİBNİZ CEBİRLERİNİN YAPISI

Mücahit ÖZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 24.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Kırıkkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Handan KÖSE
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mücahit ÖZKAYA

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; bu lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Kendisini tanıdığım günden bu yana yüksek lisansa başlamamda ve bu süre içerisinde bana gösterdiği sakin, sabırlı ve duyarlı hali ile her zaman bana örnek olmasının yanı sıra bir bilim insanının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim ve tecrübelerinden yararlanma- ma izin veren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU'na büyük bir içtenlikle teşekkürü borç bilirim. Lisans ve yüksek lisans öğretim dönemimde benden yardımlarını ve desteğini eksik etmeyen ileri de çok başarılı oalcağına yürekten inandığım değerli arkadaşım Kendal DORAK'a teşekür ederim. Son olarak hayatımın her döneminde ellerini üzerimden eksik etmeyen bana tüm yürekleriyle inanan aileme ve özellikle sevgili annem Hülya ÖZKAYA ve babam Ramazan ÖZKAYA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2019 Mücahit ÖZKAYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU BOYUTLU LEİBNİZ CEBİRLERİNİN YAPISI

Mücahit ÖZKAYA

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

Bu tezin ana amacı sonlu boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirlerinin yapısı hakkında bilgi vermektir. Bu amaç doğrultusunda, Lie cebirleri ve Lie cebirlerinin anti-komütatif olmayan genelleştirilmesi olan Leibniz cebirleri üzerine literatürdeki bir çok çalışma incelenmiş ve aralarındaki ilişki çalışılmıştır. Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Leibniz cebirlerinin tarihçesine ve tezin içeriğine yer verilmiştir. İkinci bölümde, Lie cebirleri ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, Lie cebirleri için verilen temel tanım ve teoremlerin benzerleri Leibniz cebirleri için de verilmiştir. Sonlu boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerine elde edilen sonuçlar dördüncü bölümde incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde, Leibniz cebirleri ve Leibniz çekirdeğinin yapı sabitleri incelenmiş ve elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Mayıs 2019, 50 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Lie Cebiri, Leibniz Cebiri, Leibniz Çekirdeği, Boyut, Yapı Sabitleri

ABSTRACT

MSc THESIS

THE STRUCTURE OF FINITE DIMENSIONAL LEIBNIZ ALGEBRAS

Mücahit ÖZKAYA

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

The main aim of this thesis is to give information about the structure of finite dimensional non-Lie Leibniz algebras. For this purpose, in literature many studies on Lie algebras and Leibniz algebras which are non-anti-commutative generalization of Lie algebras are investigated and the relationship between them is studied. This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, the history of Leibniz algebras and the contents of this thesis are given. In the second chapter, some basic definitions and theorems for Lie algebras are included. In the third chapter, the analogs of some basic definitions and theorems in Lie algebras are given for Leibniz algebras. In the fourth chapter, the results obtained on non-Lie Leibniz algebras is given. Finally, in the fifth chapter, the structure constans of Leibniz algebras and its Leibniz kernel are investigated and the results obtained are given.

May 2019, 50 Pages.

Keywords: Lie Algebra, Leibniz Algebra, Leibniz Kernel, Dimension, Structure Constants

1. GİRİŞ

Leibniz cebirleri ilk olarak 1960'lı yılların başında A.M. Bloh [6, 7] tarafından keşfedilmiş ve D-cebirleri olarak adlandırılmıştır. Ancak o zamanlarda gerekli ilgiyi göremediğinden geliştirilememiştir. Daha sonra 1993 yılında sol (sağ) Leibniz cebirleri, Lie cebirleri üzerine çalışmalar yapan J.L. Loday [17, 18] tarafından Lie cebirlerinin anti-komütatif olmayan genelleştirilmesi olarak tanıtılmıştır.

Leibniz cebirlerinin tanıtılmasından bu zamana kadar bir çok araştırmacı Lie cebirlerindeki önemli teorem ve sonuçların benzerlerini Leibniz cebirleri için de elde etmek amacıyla araştırmalar yapmıştır. Bunlara örnek olarak Lie Teoremi, Levi Teoremi, Engel Teoremi ve Cartan Kriteri gibi önemli teoremlerin benzerleri Leibniz cebirleri için de elde edilmiştir [3, 4, 5, 8, 12]. Literatürde bu sonuçların bazıları sol Leibniz cebirleri için bazıları da sağ Leibniz cebirleri için ispatlanmıştır. D. Barnes, Leibniz cebirlerinin yapısı üzerine çalışmalar yapmış [3] ve sol Leibniz cebirleri için Engel Teoremi [4] ile Levi Teoremi'ni [5] ispatlamıştır. Lie cebirlerindeki bazı sonuçların Leibniz cebirleri için de benzerlik göstermesine rağmen bazı sonuçlar benzerlik göstermemektedir. Ayrıca sağ Leibniz cebiri üzerinde uygun bir dönüşüm tanımlanarak bir sol Leibniz cebiri elde edilebileceğinden, sağ Leibniz cebiri için elde edilen bir sonucun sol Leibniz cebiri için de elde edilmesi mümkündür.

Bu tezde özellikle sonlu boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerinde çalışılmış ve tezin amacına uygun olarak Lie cebirlerindeki bazı önemli teorem ve sonuçların Leibniz cebirleri için de sağlanıp sağlanmadığı incelenmiştir. Literatürde bir ve iki boyutlu Leibniz cebirleri üzerine bir çok çalışma olmasına rağmen boyutu üç ve üçten büyük olan Leibniz cebirleri daha karmaşık olduğundan bu cebirler üzerine fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu tezin ana amacı üç boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerinde incelemeler yapmak ve bu şekildeki bir Leibniz cebirinin izomorf olduğu en az bir Leibniz cebirinin var olduğunu göstermektir. Son olarak bu tezin bir diğer amacı Lie cebirlerinin yapı sabitleri kullanılarak Leibniz cebirleri için de yapı sabitlerini tanımlamak ve sağlaması gereken koşulları belirlemektir.

Bu tez beş bölümden oluşup şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, Lie cebirleri için ileri ki bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremler [10, 13, 26] kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde Lie cebirleri için verilen temel tanım ve teoremlerin benzerleri Leibniz cebirleri için de [1, 3, 8, 11, 12, 15, 23, 24] kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu boyutlu Leibniz cebirleri tanımlanmış ve bu cebirler üzerine literatürde yapılmış olan bir çok çalışma incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda bir boyutlu Leibniz cebirinin abelyen olduğu ve bir boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirlerinin var olmadığı gösterilmiştir. İki boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirlerinin en az bir nilpotent veya çözülebilir Leibniz cebirine izomorf olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölüm sonunda üç boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerine I. Demir, K.C. Misra ve E. Stitzinger'in [8] makalesinde elde edilmiş bazı sonuçlar incelenerek üç boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerine elde edilen ana sonuç verilmiştir.

Beşinci bölümde, öncelikle yapı sabitleri kavramı tanımlanmış ve literatürde Lie cebirlerinin yapı sabitleri üzerine yapılmış olan çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra literatürde Leibniz cebirlerinin yapı sabitleri üzerine yapılmış çalışmalar incelenmiş ve Lie olmayan Leibniz cebirlerinin yapı sabitlerinin sağlaması gereken koşullar belirlenmiştir. Ayrıca bir Leibniz cebirinin Leibniz çekirdeğinin yapı sabitleri üzerine elde edilen sonuç verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Lie cebirleri ve Leibniz cebirlerinin yapılarının karşılaştırılabilmesi için gerekli olan temel tanım, teorem ve notasyonlar [10, 13, 26] kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

2.1. Cebir

Tanım 2.1. A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} m : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto m(x, y) = xy \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan dönüşüm her $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in A$ ve $\lambda, \mu \in F$ için

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ (\lambda x_1 + \mu x_2)y = \lambda x_1 y + \mu x_2 y \\ &\text{(ii)}\ x(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x y_1 + \mu x y_2 \end{aligned}$$

bilineerlik koşullarını sağlıyorsa (A, m) ikilisine bir cebir ve m ye A üzerinde bir çarpım denir.

Tanım 2.2. A, F cismi üzerinde bir cebir ve B, A nın bir alt uzayı olsun. Her $x, y \in B$ için $xy \in B$ ise B ye A nın bir alt cebiri denir ve $B \leq A$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. A, F cismi üzerinde bir cebir ve B, A nın bir alt uzayı olsun. Her $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy, yx \in B$ ise B ye A nın bir ideali denir ve $B \trianglelefteq A$ ile gösterilir.

Uyarı 2.4. Her ideal bir alt cebir olmasına rağmen her alt cebir bir ideal değildir.

Tanım 2.5. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$(xy)z = x(yz)$$

ise A ya birleşmeli (asosyatif) cebir denir.

Tanım 2.6. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için

$$xy = yx$$

ise A ya değişmeli (komütatif) cebir denir.

Tanım 2.7. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x \in A$ için

$$x^2 = xx = 0$$

ise A ya anti-komütatif cebir denir.

A, F cismi üzerinde bir anti-komütatif cebir olsun. O zaman her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= xy + yx \end{aligned}$$

dir ve $xy = -yx$ elde edilir. Sonuç olarak bir anti-komütatif cebir bu özelliği her zaman sağlar.

Diğer taraftan kabul edilsin ki A, F cismi üzerinde bir cebir ve her $x, y \in A$ için $xy = -yx$ olsun. $x = y$ alınırsa $x^2 = -x^2$ olup $2x^2 = 0$ elde edilir. Bu durumda cismin karakteristiği ikiden farklı ise $x^2 = 0$ dır. Yani, A bir anti-komütatif cebirdir. Ancak cismin karakteristiği iki olduğunda x^2 sıfırdan farklı değerler alabileceğinden A bir anti-komütatif cebir olmayabilir. Dolayısıyla her $x, y \in A$ için $xy = -yx$ özelliğine sahip A cebirinin bir anti-komütatif cebir olup olmaması doğrudan cismin karakteristiğine bağlıdır.

Uyarı 2.8. Tez boyunca üzerinde çalışılan F cisminin karakteristiği sıfır olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.9. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \quad \text{(Jacobi özdeşliği)} \tag{2.1}$$

sağlanıyorsa A cebirine Jacobi özdeşliğini sağlar denir.

A, F cismi üzerinde bir anti-komütatif cebir olsun. O zaman Jacobi özdeşliği (2.1)

$$
\begin{aligned}
(xy)z + (yz)x + (zx)y &= 0 \\
0 &= -(xy)z - (yz)x - (zx)y \\
0 &= z(xy) + x(yz) + y(zx)
\end{aligned}
$$

şeklinde de ifade edilebilir.

2.2. Lie cebiri

Tanım 2.10. L, F cismi üzerinde bir cebir olsun. O zaman L cebiri

(L_1) her $x \in L$ için $xx = 0,$ (anti-komütatif)

(L_2) her $x, y, z \in L$ için $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (Jacobi özdeşliği)

koşullarını sağlıyorsa L ye Lie cebiri denir.

L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in L$ için anti-komütatif özelliği kullanılarak Jacobi özdeşliği (2.1)

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= -(yz)x - (zx)y \\
&= x(yz) + y(zx)
\end{aligned}
$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan $(xy)z \neq x(yz)$ olarak bulunur. Böylece Lie cebirleri birleşmeli olmayan cebirlerdir.

A, F cismi üzerinde bir birleşmeli cebir ve A üzerinde

$$
\begin{aligned}
[\ ,\ ] : A \times A &\to A \\
(x, y) &\mapsto [x, y] = xy - yx
\end{aligned}
$$

olacak şekilde bir çarpım tanımlansın. Bu çarpıma Lie çarpımı ya da x ile y nin Lie komütatörü denir. Ayrıca A tanımlanan bu yeni çarpım ile birlikte bir cebirdir.

Lemma 2.11. A, F cismi üzerinde bir birleşmeli cebir olsun. O zaman $(A, [\ ,\ ])$ ikilisi bir Lie cebiridir.

Tanım 2.12. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $x, y \in L$ için $[x, y] = 0$ ise L ye abelyen Lie cebiri denir.

Tanım 2.13. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve A ile B, L nin alt uzayları olsun. $[A, B]$, her $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $[a, b]$ formundaki elemanlar tarafından gerilen bir alt uzaydır. Bu alt uzaya A ile B nin Lie çarpım uzayı denir.

Tanım 2.14. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve K, L nin bir alt uzayı olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ise K ya L nin bir Lie alt cebiri denir ve $K \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I, L nin bir alt uzayı olsun. Her $x \in L$ ve $y \in I$ için $[x, y] \in I$ ise I ya L nin bir ideali denir ve $I \trianglelefteq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.16. L, F cismi üzerinde bir abelyen olmayan Lie cebiri olsun. L nin tüm idealleri yalnızca $\{0\}$ ve kendisi ise L ye basit Lie cebiri denir.

Lemma 2.17. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I ile J, L nin idealleri olsun. O zaman $[I, J] = \text{Span}\{[x, y] |\ x \in I, y \in J\}$ çarpım uzayı L nin bir idealidir.

Tanım 2.18. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I, L nin bir ideali olsun. O zaman $x \in L$ için $x + I = \{x + a |\ a \in I\}$ koset olmak üzere tüm kosetlerin kümesi $L/I = \{x + I |\ x \in L\}$ bir vektör uzayıdır. Her $x + I, y + I \in L/I$ için

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I$$

şeklinde tanımlanan çarpım ile birlikte L/I bir cebirdir ve bu cebire bölüm cebiri denir. Ayrıca L/I bir Lie cebiridir.

Tanım 2.19. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve S, L nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$C_L(S) = \{x \in L |\ \text{her } s \in S \text{ için } [x, s] = 0\}$$

alt uzayına S nin L içerisindeki merkezleyeni denir.

Tanım 2.20. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun.

$$C_L(L) = C(L) = \{x \in L| \text{ her } y \in L \text{ için } [x,y] = 0\}$$

alt uzayına L nin merkezi denir.

Lemma 2.21. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. O zaman L nin merkezi $C(L)$, L nin bir idealidir.

Tanım 2.22. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve V, L nin bir alt uzayı olsun.

$$N_L(V) = \{x \in L| \text{ her } v \in V \text{ için } [x,v] \in V\}$$

alt uzayına V nin L içerisindeki normalleyeni denir.

Lemma 2.23. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve V, L nin bir alt uzayı olsun. O zaman V nin L içerisindeki normalleyeni $N_L(V)$, L nin bir Lie alt cebiridir. Ayrıca V, L nin bir ideali ise $N_L(V)$ de L nin bir idealidir.

Tanım 2.24. L_1 ile L_2, F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun.

$$\begin{aligned} \varphi : L_1 &\to L_2 \\ [x,y] &\mapsto \varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan lineer dönüşüm Lie homomorfizmi olarak adlandırılır. φ dönüşümü birebir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, hem birebir hem de örten ise φ ye Lie izomorfizmi denir ve $L_1 \cong L_2$ ile gösterilir.

Lemma 2.25. L_1 ile L_2, F cismi üzerinde iki Lie cebiri ve $\varphi : L_1 \to L_2$ bir Lie homomorfizmi olsun. O zaman

(i) Kerφ, L_1 in bir idealidir.

(ii) Imφ, L_2 nin bir Lie alt cebiridir.

Tanım 2.26. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamına A nın izi denir ve tr$A$ ile gösterilir.

Tanım 2.27. F cismi üzerinde

$$M(n, F) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n}|,\ a_{ij} \in F\}$$

vektör uzayı matrislerin bilinen çarpma işlemi ile birlikte bir birleşmeli cebirdir ve Lemma 2.11. den $(M(n, F), [\ ,\ ])$ ikilisi bir Lie cebiridir. Bu cebire matris Lie cebiri denir ve $gl(n, F)$ ile ifade edilir. Ayrıca

$$sl(n, F) = \{A \in gl(n, F)|\ \mathrm{tr}A = 0\}$$

alt uzayı $gl(n, F)$ nin bir Lie alt cebiridir ve bu cebir özel lineer Lie cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 2.28. V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$gl(V) = \{f|\ f : V \to V \text{ lineer dönüşüm}\}$$

vektör uzayı bir birleşmeli cebirdir. Lemma 2.11. den dolayı bu cebir Lie çarpımı ile birlikte bir Lie cebiridir ve genel lineer Lie cebir olarak adlandırılır.

V, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazına sahip bir vektör uzayı olsun. $gl(V)$, V den V ye tanımlı lineer dönüşümlerin vektör uzayı olmak üzere her lineer dönüşüme bir matris karşılık gelir. Her lineer dönüşüme matris karşılık getiren $\varphi : gl(V) \to gl(n, F)$ dönüşümü bir Lie izomorfizmidir. Yani, $gl(V) \cong gl(n, F)$ dir.

Tanım 2.29. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin V vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \rho\ :\ L\ &\to\ gl(V) \\ [x, y] &\mapsto \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan Lie homomorfizmine L nin bir temsili denir. Ayrıca temsilin çekirdeği $\mathrm{Ker}\rho = \{0\}$ ise ρ ya bir faithful temsil denir.

L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. $ad : L \to gl(L)$ dönüşümü bir Lie homomorfizmidir. Her $x \in L$ için

$$adx : L \to L$$

dönüşümü lineerdir. Ayrıca ad dönüşümü bir Lie homomorfizmi olduğundan L nin bir temsilidir ve adjoint temsili olarak adlandırılır.

Tanım 2.30. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve V bir vektör uzayı olsun. Her $l \in L$ ve $v \in V$ için $(l, v) \mapsto lv$ olarak tanımlanan $\theta : L \times V \to V$ dönüşümü

(M_1) bilineer,

(M_2) her $x, y \in L, v \in V$ için $[x, y].v = xyv - yxv$

koşullarını sağlıyorsa V ye bir L-modül denir.

V bir L-modül olmak üzere her $x \in L$ ve $v \in V$ için $\rho(x)v = xv$ olacak şekilde tanımlanan $\rho : L \to gl(V)$ dönüşümü, (M_1) ve (M_2) koşullarından dolayı L nin V vektör uzayı üzerinde bir temsilidir.

Diğer taraftan U, V nin bir alt uzayı olmak üzere $\tau : L \to gl(U)$, U üzerinde L nin bir temsili olsun. O zaman her $l \in L$ ve $u \in U$ için $\tau(l)u = lu$ dönüşümü ile birlikte U bir L-modüldür. Böylece temsil ile modül arasında birebir bir ilişki elde edilir.

Tanım 2.31. V bir L-modül ve U, V nin bir alt uzayı olsun. Her $x \in L$ ve $u \in U$ için $xu \in U$ ise U ya bir L-alt modül denir.

Tanım 2.32. V bir L-modül olsun. V nin tüm L-alt modülleri sadece $\{0\}$ ve kendisi ise V ye indirgenmez L-modül denir.

Tanım 2.33. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. $L^1 = L$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için $L^{k+1} = [L, L^k]$ olarak tanımlansın. O zaman $i \geq 1$ için $L^i \trianglelefteq L$ ve $L^{i+1} \subseteq L^i$ olup L nin ideallerinin

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^i \supseteq L^{i+1} \supseteq \ldots$$

bir azalan serisi elde edilir. Bu şekilde elde edilen seriye L nin alt merkezi serisi denir. $n > 0$ tamsayısı için $L^n = 0$ ise L ye nilpotent Lie cebiri denir. Ayrıca $c > 0$ tamsayısı için $L^c \neq 0$ ve $L^{c+1} = 0$ ise c ye L nin nilpotentlik sınıfı denir.

Teorem 2.34. [10] L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) L nilpotent ise L nin tüm Lie alt cebirleri ve homomorfik görüntüleri de nilpotenttir.

(ii) L nilpotent ise L nin merkezi, $C(L) \neq 0$ dır.

Tanım 2.35. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin nilpotent maksimal idealine L nin nilradikali denir ve nil(L) ile gösterilir.

Tanım 2.36. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. $L^{(0)} = L$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$ olarak tanımlansın. O zaman $i \geq 0$ için $L^{(i)} \trianglelefteq L$ ve $L^{(i+1)} \subseteq L^{(i)}$ olup L nin ideallerinin

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(i)} \supseteq L^{(i+1)} \supseteq \ldots$$

bir azalan serisi elde edilir. Bu şekilde elde edilen seriye L nin türetilmiş serisi denir. $m \geq 0$ tamsayısı için $L^{(m)} = 0$ ise L ye çözülebilir Lie cebiri denir.

Teorem 2.37. [10] L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) L çözülebilir ise L nin tüm Lie alt cebirleri ve homomorfik görüntüleri de çözülebilirdir.

(ii) L, bölüm cebiri L/I çözülebilir olacak şekilde bir I idealine sahipse çözülebilirdir.

(iii) I ile J, L nin çözülebilir iki ideali olsun. O zaman $I + J$ ideali de çözülebilirdir.

Tanım 2.38. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin çözülebilir maksimal idealine L nin radikali denir ve rad(L) ile gösterilir.

Tanım 2.39. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin sıfırdan farklı çözülebilir ideali yoksa yani, rad$(L) = 0$ ise L ye yarı-basit Lie cebiri denir.

Lemma 2.40. L, F cismi üzerinde bir nilpotent Lie cebiri olsun. O zaman L çözülebilirdir.

Tanım 2.41. V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $x \in gl(V)$ olsun. $n > 0$ tamsayısı için $x^n = 0$ ise x elemanına nilpotent lineer dönüşüm denir.

Teorem 2.42. (Engel Teoremi, [10]) V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve L, $gl(V)$ nin nilpotent lineer dönüşümlerinden oluşan bir Lie alt cebiri olsun. O zaman L, V de sıfır olmayan vektörü sıfırlar yani, her $x \in L$ için $x(v) = 0$ olacak şekilde $0 \neq v \in V$ vardır.

Teorem 2.43. (Lie Teoremi, [25]) L, F cismi üzerinde bir çözülebilir Lie cebiri olsun. O zaman L nin her indirgenmez temsilinin boyutu 1 dir.

Teorem 2.44. **(Levi Teoremi, [13])** L, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir Lie cebiri ve $\text{rad}(L) = R$ olsun. O zaman L nin $L = R + S$ olacak şekilde bir S yarı-basit Lie alt cebiri vardır.

Tanım 2.45. V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Her $\lambda, \mu \in F$ ve $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ için $\beta : V \times V \to F$ dönüşümü

$$\begin{aligned} \beta(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \lambda\beta(u_1, v) + \mu\beta(u_2, v) \\ \beta(u, \lambda v_1 + \mu v_2) &= \lambda\beta(u, v_1) + \mu\beta(u, v_2) \\ \beta(u, v) &= \beta(v, u) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa β ya V üzerinde bir simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.46. L, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir Lie cebiri ve β, L üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$\beta([x, y], z) + \beta(y, [x, z]) = 0$$

ise β ya L-invaryant denir.

Tanım 2.47. L, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir Lie cebiri olsun.

$$\begin{aligned} \kappa : L \times L &\to F \\ (x, y) &\mapsto \kappa(x, y) = \text{tr}(adx\ ady) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme Killing form denir.

Lemma 2.48. Killing form κ, L üzerinde bir L-invaryant simetrik bilineer formdur.

Teorem 2.49. **(Cartan Kriteri, [10])** V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $L \subseteq gl(V)$ yani, L lineer olsun. O zaman L nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $x \in L$ ve $y \in [L, L]$ için $\text{tr}(xy) = 0$ olmasıdır.

3. LEİBNİZ CEBİRLERİNİN YAPISI

Bu bölümde, Lie cebirleri için verilen temel tanım, teorem ve notasyonlar Lie cebirlerinin anti-komütatif olmayan genelleştirilmesi olan Leibniz cebirleri için de [1, 3, 11, 12, 15, 22, 23, 24] kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

3.1. Leibniz Cebirleri

Tanım 3.1. L, F cismi üzerinde " $+$ " ve "[,]" ikili işlemleri ile birlikte bir cebir olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \tag{3.1}$$

Leibniz özdeşliğini sağlıyorsa L ye sol Leibniz cebiri denir.

Tanım 3.2. R, F cismi üzerinde " $+$ " ve "[,]" ikili işlemleri ile birlikte bir cebir olsun. Her $x, y, z \in R$ için

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y] \tag{3.2}$$

Leibniz özdeşliğini sağlıyorsa R ye sağ Leibniz cebiri denir.

F cismi üzerinde herhangi bir cebirin sağ Leibniz cebiri olması sol Leibniz cebiri olmasını gerektirmez. Benzer şekilde bir sol Leibniz cebiri olması da sağ Leibniz cebiri olmasını gerektirmemektedir. Yani, sağ Leibniz cebirleri ile sol Leibniz cebirlerinin sınıflandırılmaları farklıdır ve bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.3. L, F cismi üzerinde $\{x, y\}$ bazına sahip bir cebir olsun. L cebiri üzerindeki çarpım

$$[x,x] = y, [x,y] = y,$$
$$[y,x] = 0, [y,y] = 0$$

olarak tanımlansın. Her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned}
[[x, y], x] &= [x, [y, x]] - [y, [x, x]] \\
[y, x] &= [x, 0] - [y, y] \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Leibniz özdeşliği (3.1) sağlanır yani, L bir sol Leibniz cebiridir. Ancak bazı $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned}
[x, [x, x]] &= [[x, x], x] - [[x, x], x] \\
[x, y] &= [y, x] - [y, x] \\
y &\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan Leibniz özdeşliği (3.2) sağlanmaz. Dolayısıyla L bir sağ Leibniz cebiri değildir.

Tanım 3.4. L, F cismi üzerinde bir cebir olsun. L cebiri hem sol Leibniz cebiri hem de sağ Leibniz cebiri ise L ye simetrik Leibniz cebiri denir.

Uyarı 3.5. Bundan sonra Leibniz cebiri ile sol Leibniz cebiri ifade edilecek ve sol Leibniz cebirleri üzerinde çalışılacaktır.

R, F cismi üzerinde bir sağ Leibniz cebiri olsun. R cebiri üzerinde $(x, y) = [y, x]$ olacak şekilde $(\ ,\ ) : R \times R \to R$ çarpımı tanımlansın. O zaman her $x, y, z \in R$ için

$$\begin{aligned}
((x, y), z) = ([y, x], z) &= [z, [y, x]] \\
&= [[z, y], x] - [[z, x], y] \\
&= [(y, z), x] - [(x, z), y] \\
&= (x, (y, z)) - (y, (x, z))
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece R sağ Leibniz cebiri tanımlanan bu yeni çarpım ile birlikte bir sol Leibniz cebiridir. Benzer şekilde uygun bir çarpım tanımlanarak sol Leibniz cebirinden bir sağ Leibniz cebiri de elde edilebilir.

L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. O zaman anti-komütatif özelliği kullanılarak Jacobi özdeşliği (2.1) den

$$\begin{aligned}[[x,y],z] &= -[[y,z],x] - [[z,x],y] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]]\end{aligned}$$

Leibniz özdeşliği (3.1) elde edilir. Yani, her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir.

Diğer taraftan L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve her $x \in L$ için $[x,x] = 0$ olsun. O zaman her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned}0 &= [x+y, x+y] \\ &= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ &= [x,y] + [y,x]\end{aligned}$$

dir. Buradan $[x,y] = -[y,x]$ elde edilir. Bu eşitlik Leibniz özdeşliği (3.1) de kullanılarak

$$\begin{aligned}0 &= [[x,y],z] - [x,[y,z]] + [y,[x,z]] \\ &= [[x,y],z] + [[y,z],x] - [[x,z],y] \\ &= [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Jacobi özdeşliği (2.1) elde edilir. Yani, her $x \in L$ için $[x,x] = 0$ koşulu ile birlikte L bir Lie cebiridir.

Tanım 3.6. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. Her $x, y \in L$ için $[x,y] = 0$ ise L ye bir abelyen Leibniz cebiri denir.

L, F cismi üzerinde bir abelyen Leibniz cebiri olsun. O zaman her $x \in L$ için $[x,x] = 0$ olduğundan L anti-komütatiftir. Ayrıca Leibniz özdeşliği (3.1), $[x,x] = 0$ koşulu ile birlikte Jacobi özdeşliği (2.1) i sağlar. Böylece her abelyen Leibniz cebiri bir Lie cebiridir.

Lemma 2.11. de olduğu gibi Leibniz cebirleri de birleşmeli cebirlerle ilişkilendirilebilir. Ancak bu ilişkilendirme Lie cebirlerindekinden biraz daha karmaşıktır.

L, F cismi üzerinde bir birleşmeli cebir ve $f^2 = f$ olacak şekilde $f : L \to L$ bir endomorfizm olsun. L üzerindeki çarpım $[x, y] = f(x)y - yf(x)$ olmak üzere her $x, y, z \in L$ için

$$\begin{aligned}
[[x,y],z] &= [f(x)y - yf(x), z] \\
&= f(f(x)y - yf(x))z - zf(f(x)y - yf(x)) \\
&= (f^2(x)f(y) - f(y)f^2(x))z - z(f^2(x)f(y) - f(y)f^2(x)) \\
&= f(x)f(y)z - f(y)f(x)z - zf(x)f(y) + zf(y)f(x), \\
[x,[y,z]] &= [x, f(y)z - zf(y)] \\
&= f(x)(f(y)z - zf(y)) - (f(y)z - zf(y))f(x) \\
&= f(x)f(y)z - f(x)zf(y) - f(y)zf(x) + zf(y)f(x), \\
[y,[x,z]] &= [y, f(x)z - zf(x)] \\
&= f(y)(f(x)z - zf(x)) - (f(x)z - zf(x))f(y) \\
&= f(y)f(x)z - f(y)zf(x) - f(x)zf(y) + zf(x)f(y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$$

Leibniz özdeşliği (3.1) in sağlandığı görülür. Yani L, tanımlanan bu yeni çarpım ile birlikte bir Leibniz cebiridir. Ayrıca L cebirinin Lie cebiri olması için gerek ve yeter koşul $f = id$ (birim fonksiyon) olmasıdır.

Tanım 3.7. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve K, L nin bir alt uzayı olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ise K ya L nin bir Leibniz alt cebiri denir ve $K \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 3.8. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve I, L nin bir alt uzayı olsun. Her $x \in I$ ve $y \in L$ için I alt uzayı, $[x, y] \in I$ ise sol ideal, $[y, x] \in I$ ise sağ ideal olarak adlandırılır ve sırasıyla $[I, L] \trianglelefteq L$, $[L, I] \trianglelefteq L$ ile gösterilir. I alt uzayı hem sol ideal hem de sağ ideal ise L nin bir ideali denir ve $I \trianglelefteq L$ ile gösterilir.

Leibniz cebiri L bir I idealine sahipse L/I bölüm cebirinden bahsedilebilir. O zaman $x \in L$ için $x + I = \{x + a |\ a \in I\}$ koset olmak üzere tüm kosetlerin kümesi $L/I = \{x + I |\ x \in L\}$ bir vektör uzayıdır. Her $x+I, y+I \in L/I$ için

$$\begin{aligned}[x+I, y+I] &= [x,y]+[x,I]+[I,y]+[I,I] \\ &= [x,y]+I\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan çarpım ile birlikte bir cebirdir ve bölüm cebiri olarak adlandırılır. Ayrıca her $x+I, y+I, z+I \in L/I$ için

$$\begin{aligned}[[x+I, y+I], z+I] &= [[x,y]+I, z+I] = [[x,y],z]+I \\ [x+I,[y+I,z+I]] &= [x+I,[y,z]+I] = [x,[y,z]]+I \\ [y+I,[x+I,z+I]] &= [y+I,[x,z]+I] = [y,[x,z]]+I\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$[[x+I,y+I],z+I] = [x+I,[y+I,z+I]] - [y+I,[x+I,z+I]]$$

Leibniz özdeşliği (3.1) in sağlandığı görülür. Böylece L/I bir Leibniz cebiridir.

Tanım 3.9. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $L^2 = [L,L] = \text{Span}\{[x,y] |\, x,y \in L\}$ çarpım uzayı L cebirinin bir Leibniz alt cebiridir ve türetilmiş alt cebir olarak adlandırılır.

Tanım 3.10. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $\text{Leib}(L) = \text{Span}\{[x,x] |\, x \in L\}$ alt uzayı L cebirinin bir idealidir ve bu ideal Leibniz çekirdeği olarak adlandırılır.

Leibniz özdeşliği (3.1) den her $[x,x] \in \text{Leib}(L)$ ve $y \in L$ için

$$[[x,x],y] = [x,[x,y]] - [x,[x,y]] = 0 \tag{3.4}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}[[x,x]+y,[x,x]+y] &= [[x,x],[x,x]] + [[x,x],y] + [y,[x,x]] + [y,y] \\ &= [y,[x,x]] + [y,y]\end{aligned}$$

olduğundan $[y,[x,x]] \in \text{Leib}(L)$ elde edilir. Böylece $\text{Leib}(L)$, L cebirinin bir idealidir. Ayrıca

$x \in L$ olmak üzere her $x + \text{Leib}(L) \in L/\text{Leib}(L)$ için

$$\begin{aligned}[x + \text{Leib}(L), x + \text{Leib}(L)] &= [x, x] + \text{Leib}(L) \\ &= 0 + \text{Leib}(L) \\ &= \text{Leib}(L)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $L/\text{Leib}(L)$ bir Lie cebiridir.

Uyarı 3.11. Lie cebirlerinde olduğu gibi Leibniz cebirlerinde de iki idealin toplamı ve kesişimi idealdir. Ancak iki idealin çarpımının ideal olması gerekmediği aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.12. L, F cismi üzerinde $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$ bazına sahip bir Leibniz cebiri olsun. $A = Fx_2 \oplus Fx_4 \oplus Fx_5$ ile $B = Fx_3 \oplus Fx_4 \oplus Fx_5$, L nin alt uzayları olmak üzere L cebiri üzerinde

$$\begin{aligned}&[x_1, x_2] = x_2,\ \ [x_1, x_4] = x_4,\ \ [x_1, x_5] = x_5,\ \ [x_2, x_1] = -x_2, \\ &[x_2, x_3] = x_4,\ \ [x_3, x_2] = x_5,\ \ [x_4, x_1] = x_5,\ \ [x_5, x_1] = -x_5\end{aligned}$$

ve diğer durumlar sıfır olacak şekilde bir çarpım tanımlansın. A ile B, L cebirinin ideali olmalarına rağmen $[A, B] = \text{Span}\{[x, y] |\ x \in A, y \in B\}$ çarpım uzayı L cebirinin bir ideali değildir. $1 \leq i \leq 5$ ve $\alpha_i, \beta_i \in F$ için $x = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5$, $y = \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 + \beta_3 x_5$ olacak şekilde her $x \in A, y \in B$ olmak üzere $[x, y] \in [A, B]$ ve

$$\begin{aligned}[x, y] &= [\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5, \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 + \beta_3 x_5] \\ &= \alpha_1 \beta_1 x_4\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda $[A, B] = \text{Span}\{x_4\}$ ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\gamma_i \in F$ olmak üzere $z = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5 \in L$ için

$$\begin{aligned}[[x, y], z] &= [\alpha_1\beta_1 x_4, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5] = \alpha_1\beta_1\gamma_1 x_5, \\ [x, [y, z]] &= [\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5, [\beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 + \beta_3 x_5, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5]] \\ &= [\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5, \beta_1\gamma_2 x_5 + \beta_2\gamma_1 x_5 - \beta_3\gamma_1 x_5] = 0, \\ [y, [x, z]] &= [\beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 + \beta_3 x_5, [\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 x_5, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5]] \\ &= [\beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 + \beta_3 x_5, -\alpha_1\gamma_1 x_2 + \alpha_1\gamma_3 x_4 + \alpha_2\gamma_1 x_5 - \alpha_3\gamma_1 x_5] = -\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_5\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada yapılan işlemler sonunda Leibniz özdeşliği (3.1) sağlanmasına rağmen $[[x, y], z] \notin [A, B]$ olduğundan $[A, B]$ çarpım uzayı L cebirinin bir ideali değildir.

Tanım 3.13. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $[L, L] \neq \text{Leib}(L)$ ve L nin tüm idealleri sadece $\{0\}$, Leib(L) ve kendisi ise L ye basit Leibniz cebiri denir.

Tanım 3.14. L_1 ile L_2, F cismi üzerinde iki Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{aligned} \varphi &: L_1 \to L_2 \\ [x, y] &\mapsto \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan lineer dönüşüme Leibniz homomorfizmi denir. φ dönüşümü hem birebir hem de örten ise Leibniz izomorfizmi olarak adlandırılır ve $L_1 \cong L_2$ ile gösterilir.

Lemma 3.15. L_1 ile L_2, F cismi üzerinde iki Leibniz cebiri ve $\varphi : L_1 \to L_2$ bir Leibniz homomorfizmi olsun. O zaman

(i) Kerφ, L_1 in bir idealidir.

(ii) Imφ, L_2 nin bir Leibniz alt cebiridir.

İspat (i) Leibniz homomorfizminin çekirdeği Ker$\varphi = \{x \in L_1 |\ \varphi(x) = 0\}$ olmak üzere her $x \in$ Kerφ ve $y \in L_1$ için

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = 0$$

ve

$$\varphi([y, x]) = [\varphi(y), \varphi(x)] = 0$$

olduğundan $[x, y], [y, x] \in$ Kerφ elde edilir. Böylece Kerφ, L_1 Leibniz cebirinin bir idealidir.
(ii) Leibniz homomorfizminin görüntü kümesi Im$\varphi = \{\varphi(x) |\ x \in L_1\}$ olarak tanımlanır. O zaman $x, y \in$ Imφ için $\varphi(x_1) = x$ ve $\varphi(y_1) = y$ olacak şekilde $x_1, y_1 \in L_1$ vardır. φ, Leibniz homomorfizmi olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi([x_1, y_1]) &= [\varphi(x_1), \varphi(y_1)] \\ &= [x, y] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $[x, y] \in \mathrm{Im}\varphi$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathrm{Im}\varphi$, L_2 Leibniz cebirinin bir Leibniz alt cebiridir. ■

Tanım 3.16. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve S, L nin bir Leibniz alt cebiri olsun. S nin L içerisindeki sol merkezleyeni

$$C_L^l(S) = \{x \in L | \text{ her } s \in S \text{ için } [x, s] = 0\}$$

alt uzayı ve S nin L içerisindeki sağ merkezleyeni

$$C_L^r(S) = \{x \in L | \text{ her } s \in S \text{ için } [s, x] = 0\}$$

alt uzayı olarak tanımlanır. $C_L(S) = C_L^l(S) \cap C_L^r(S)$ alt uzayına ise S nin L içerisindeki merkezleyeni denir.

Tanım 3.17. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun.

$$C^l(L) = \{x \in L | \text{ her } y \in L \text{ için } [x, y] = 0\}$$

alt uzayı sol merkez ve

$$C^r(L) = \{x \in L | \text{ her } y \in L \text{ için } [y, x] = 0\}$$

alt uzayı sağ merkez olarak tanımlanır. $C(L) = C^l(L) \cap C^r(L)$ alt uzayına ise L nin merkezi denir.

Leibniz cebirinin merkezi $C(L)$, bir abelyen Leibniz cebiridir. Ayrıca sol merkez ideal olmasına rağmen sağ merkezin ideal olması gerekmediği aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.18. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. Her $x \in C^l(L)$ ve $y, z \in L$ için

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = 0$$

ve

$$[[y, x], z] = [y, [x, z]] - [x, [y, z]] = 0$$

olduğundan $[x,y],[y,x] \in C^l(L)$ olarak bulunur. Böylece sol merkez $C^l(L)$, L nin bir idealidir. Diğer taraftan $x \in C^r(L)$ ve $y,z \in L$ için

$$[z,[x,y]] = [[z,x],y] + [x,[z,y]] \neq 0$$

elde edilir. Buradan $[x,y] \notin C^r(L)$ olduğundan sağ merkez L nin bir ideali değildir. Ancak sağ merkez $C^r(L)$, L nin Leibniz alt cebiridir. Ayrıca bu örnekten Leib(L), sol merkezin Leibniz alt cebiri olduğu görülmektedir. Böylece Leibniz cebiri $L/C^l(L)$ bir Lie cebiridir.

Lemma 3.19. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. L nin merkezi $C(L)$, L nin bir ideali ve $L/C(L)$ bir Lie cebiridir.

Tanım 3.20. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve V, L nin bir alt uzayı olsun. V nin L içerisindeki sol normalleyeni

$$N_L^l(V) = \{x \in L | \text{ her } v \in V \text{ için } [x,v] \in V\}$$

alt uzayı ve sağ normalleyeni

$$N_L^r(V) = \{x \in L | \text{ her } v \in V \text{ için } [v,x] \in V\}$$

alt uzayı olarak tanımlanır. $N_L(V) = N_L^l(V) \cap N_L^r(V)$ alt uzayına ise V nin L içerisindeki normalleyeni denir.

Leibniz cebiri L nin sol normalleyeninin Leibniz alt cebiri olduğu ancak sağ normalleyenin Leibniz alt cebiri olması gerekmediği aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 3.21. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve V, L nin bir alt uzayı olsun. Her $x,y \in N_L^l(V)$ ve $z \in L$ için

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$$

olduğundan $[x,y] \in N_L^l(V)$ elde edilir. Böylece L nin sol normalleyeni bir Leibniz alt cebiridir. Ancak her $x,y \in N_L^r(V)$ ve $z \in L$ için $[x,y] \notin N_L^r(V)$ olduğundan sağ normalleyeni bir Leibniz alt cebiri değildir.

Lemma 3.22. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve V, L nin bir alt uzayı olsun. L cebirinin normalleyeni $N_L(V)$ bir Leibniz alt cebiridir.

Tanım 3.23. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve $x \in L$ olsun. L cebiri üzerinde her $y \in L$ için $L_x(y) = [x, y]$ şeklinde tanımlanan $L_x : L \to L$ dönüşümüne sol çarpım operatörü denir. Benzer şekilde her $y \in L$ için $R_x(y) = [y, x]$ olarak tanımlanan $R_x : L \to L$ dönüşümüne sağ çarpım operatörü denir.

Sol çarpım operatörlerinin vektör uzayı $A(L) = \{L_x | \ x \in L\}$ komütatör çarpımı ile birlikte bir Lie cebiridir.

Tanım 3.24. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve M bir vektör uzayı olsun. M vektör uzayı, $[\ ,\ ] : L \times M \to M$ ve $[\ ,\ ] : M \times L \to M$ olacak şekilde iki bilineer dönüşüm ile birlikte her $x, y \in L$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & [x, [y, m]] = [[x, y], m] + [y, [x, m]] \\ \text{(ii)} \quad & [x, [m, y]] = [[x, m], y] + [m, [x, y]] \\ \text{(iii)} \quad & [m, [x, y]] = [[m, x], y] + [x, [m, y]] \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa M ye bir L-modül denir.

M vektör uzayının tüm endomorfizmlerinin birleşmeli cebiri $gl(M)$ ile gösterilsin. M bir L-modül ise $\lambda_x : m \mapsto [x, m]$ ve $\rho_x : m \mapsto [m, x]$ dönüşümleri de M nin endomorfizmidir. Ayrıca L den $gl(M)$ ye $\lambda : x \mapsto \lambda_x$ ve $\rho : x \mapsto \rho_x$ şeklinde tanımlanan dönüşümler lineerdir.

Tanım 3.25. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve M bir vektör uzayı olsun. $\lambda(x) = \lambda_x$ ve $\rho(x) = \rho_x$ olmak üzere $\lambda : L \to gl(M)$ ve $\rho : L \to gl(M)$ şeklinde tanımlanan iki lineer dönüşüm her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \rho_y \rho_x = \rho_{[x,y]} - \lambda_x \rho_y \\ \text{(ii)} \quad & \rho_y \lambda_x = \lambda_x \rho_y - \rho_{[x,y]} \\ \text{(iii)} \quad & \lambda_{[x,y]} = \lambda_x \lambda_y - \lambda_y \lambda_x \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa (ρ, λ) ikilisine M vektör uzayı üzerinde L nin bir temsili denir.

(ρ, λ) ikilisine L-modül M nin bir birleşmeli temsili denir ve çekirdeği Ker$(\rho, \lambda) =$ Ker$\rho \cap$Kerλ olarak ifade edilir.

L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve (ρ, λ) ikilisi L nin bir temsili olsun. Her $x \in L$ ve $m \in M$ için

$$[m, x] = \rho_x(m) \text{ ve } [x, m] = \lambda_x(m)$$

olmak üzere M, $[\ ,\ ] : M \times L \to M$ ve $[\ ,\ ] : L \times M \to M$ şeklinde tanımlanan çarpımlar ile birlikte bir L-modüldür.

Diğer taraftan M bir L-modül olsun. Her $x \in L$ ve $m \in M$ için

$$\rho_x(m) = [m, x] \text{ ve } \lambda_x(m) = [x, m]$$

şeklinde tanımlanan (ρ, λ) ikilisi L nin bir temsilidir. Böylece Lie cebirlerinde olduğu gibi Leibniz cebirlerinde de temsil ile modül arasında birebir bir bağıntı olduğu görülür.

Tanım 3.26. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve M bir L-modül olsun. N, M nin bir alt uzayı olmak üzere her $n \in N$ ve $x \in L$ için $[x, n], [n, x] \in N$ ise N ye bir L-alt modül denir.

Tanım 3.27. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve M bir L-modül olsun. M nin tüm L-alt modülleri sadece $\{0\}$ ve kendisi ise M ye bir indirgenmez L-modül denir.

Lemma 3.28. M, Leibniz cebiri L nin bir indirgenmez modülü ve (ρ, λ) bir birleşmeli temsili olsun. O zaman $L/\text{Ker}(\rho, \lambda)$ bir Lie cebiridir ve her $x \in L$ için $\lambda_x = 0$ veya $\lambda_x = -\rho_x$ dir.

L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $L^1 = L$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için $L^{k+1} = [L, L^k]$ olmak üzere L nin ideallerinin

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^k \supseteq L^{k+1} \supseteq \ldots$$

bir azalan serisi elde edilir. Bu seriye L nin alt merkezi serisi denir.

Tanım 3.29. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $n > 0$ tamsayısı için $L^n = 0$ ise L ye nilpotent Leibniz cebiri denir. $L^m \neq 0$ ve $L^{m+1} = 0$ olacak şekilde $m > 0$ tamsayısı varsa m ye L nin nilpotentlik sınıfı denir.

Tanım 3.30. L, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir Leibniz cebiri olsun. O zaman L nin bir maksimal nilpotent ideali vardır. Bu ideale L nin nilradikali denir ve nil(L) ile gösterilir.

L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $L^{(0)} = L$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$ olmak üzere L nin ideallerinin

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(k)} \supseteq L^{(k+1)} \supseteq \ldots$$

bir azalan serisi elde edilir. Bu seriye L nin türetilmiş serisi denir.

Tanım 3.31. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. $n \geq 0$ tamsayısı için $L^{(n)} = 0$ ise L ye çözülebilir Leibniz cebiri denir.

Tanım 3.32. L, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir Leibniz cebiri olsun. O zaman L nin bir maksimal çözülebilir ideali vardır. Bu ideale L nin radikali denir ve rad(L) ile gösterilir.

Teorem 3.33. [11] L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. Her i, j pozitif tamsayısı için $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$ dir. O zaman her $k \geq 2$ tamsayısı için $L^{(k)} \subseteq L^{2^{k-1}}$ bulunur. Dolayısıyla her nilpotent Leibniz cebiri çözülebilirdir.

Sonuç 3.34. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. L nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul türetilmiş alt cebiri L^2 nin nilpotent olmasıdır.

Tanım 3.35. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. L nin maksimal çözülebilir ideali Leib(L) ise L ye yarı-basit Leibniz cebiri denir.

Lie cebirlerindeki Lie Teoremi'nin Leibniz cebirleri için benzeri aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.36. (Lie Teoremi, [8]) L, F cismi üzerinde bir çözülebilir Leibniz cebiri ve M bir indirgenmez L-modül olsun. O zaman M nin boyutu 1 dir.

İspat Leibniz cebiri L çözülebilir olduğundan Lie cebiri $A(L)$ de çözülebilirdir. Lie cebirleri için Lie Teoremi'nden m, $A(L)$-invaryant olacak şekilde $0 \neq m \in M$ vardır. M indirgenmez L-modül olduğundan Lemma 3.28. den her $x \in L$ için $[m, x] = 0$ veya $[x, m] = -[m, x]$ dir. Her iki durumda da $[x, m], [m, x] \in$ Span$\{m\}$ olup Span$\{m\}$ bir L-alt modüldür. Fakat M indirgenmez L-modül kabulünden Span$\{m\} = M$ olarak bulunur yani, M nin boyutu 1 dir. ■

Aşağıdaki teoremde Lie cebirlerindeki Levi Teoremi'nin benzeri Leibniz cebirleri için verilmiştir.

Teorem 3.37. (Levi Teoremi, [5]) L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve L nin çözülebilir radikali $\text{rad}(L) = R$ olsun. O zaman L nin $L = S + R$ olacak şekilde yarı-basit Lie cebiri olan bir S Leibniz alt cebiri vardır.

Lie cebirlerindeki Cartan Kriteri'nin benzeri Leibniz cebirleri için aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.38. (Cartan Kriteri, [8]) L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. O zaman L nin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $x \in [L, L] = L^2$ ve $y \in L$ için $\text{tr}(L_x L_y) = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.39. (Engel Teoremi, [4]) L, F cismi üzerinde bir sonlu boyutlu Leibniz cebiri ve (ρ, λ), her $x \in L$ için ρ_x nilpotent olacak şekilde sıfırdan farklı M vektör uzayı üzerinde L nin bir birleşmeli temsili olsun. O zaman her $x \in L$ için λ_x nilpotent ve $\lambda_x(m) = \rho_x(m) = 0$ olacak şekilde $0 \neq m \in M$ mevcuttur.

Tanım 3.40. L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. Her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} \kappa : L \times L &\to F \\ (x, y) &\mapsto \kappa(x, y) = \text{tr}(adxady) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme Killing form denir ve L üzerinde invaryant simetrik bilineer formdur.

4. SONLU BOYUTLU LEİBNİZ CEBİRLERİ

Bu bölümde ilk olarak sonlu boyutlu Leibniz cebirleri tanımlanmıştır. L.A. Kurdachenko [16] ile I. Demir, K.C. Misra ve E. Stitzinger'in [8] bir boyutlu ve iki boyutlu Leibniz cebirleri üzerine yapmış oldukları çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra üç boyutlu Lie olma- yan Leibniz cebirleri üzerine I. Demir, K.C. Misra ve E. Stitzinger'in [8] makalesi baz alınarak üç boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerine elde edilen ana sonuç verilmiştir.

Leibniz cebiri L bir vektör uzayı olduğundan L cebirinin boyutundan bahsedilebilir. Dolayısıyla L vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise sonlu boyutlu Leibniz cebiri aksi takdirde sonsuz boyutlu Leibniz cebiri denir. Leibniz cebiri L nin boyutu boy$L$ ile gösterilir.

L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve $x \in L$ olsun. $x^1 = x$ ve k pozitif tamsayısı için $x^{k+1} = [x, x^k]$ olacak şekilde $x^k \in L$ tanımlanır. Benzer olarak $L^1 = L$ ve $k \geq 1$ tamsayısı için $L^{k+1} = [L, L^k]$ ile L^k tanımlanır. $L^2 = 0$ ise L ye abelyen Leibniz cebiri denir. Ayrıca Leibniz özdeşliği (3.1) ve (3.4) ifadesinden her $k > 1$ tamsayısı için $L_{x^k} = 0$ dır.

Tanım 4.1. L, F cismi üzerinde bir tek x elemanı tarafından üretilen n-boyutlu Leibniz cebiri olsun. O zaman $L = \text{Span}\{x, x^2, \ldots, x^n\}$ ve bazı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ için $[x, x^n] = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ dir. Leibniz özdeşliği (3.1) ve (3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= [x, [x^n, x]] \\ &= [[x, x^n], x] + [x^n, [x, x]] \\ &= [\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n, x] \\ &= \alpha_1 [x, x] + \alpha_2 [x^2, x] + \ldots + \alpha_n [x^n, x] \\ &= \alpha_1 [x, x] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $\alpha_1 = 0$ ve $L^2 = \text{Span}\{x^2, \ldots, x^n\} = \text{Leib}(L)$ elde edilir. Bu Leibniz cebirine n-boyutlu devirli Leibniz cebiri denir.

Önerme 4.2. [12] L, nilpotentlik sınıfı n olan Leibniz cebiri ve boy$L^2 = n - 1$ olsun. O zaman L, bir tek x elemanı tarafından üretilen devirli Leibniz cebiridir.

4.1. Bir ve İki Boyutlu Leibniz Cebirleri

Bu kısımda [8, 9, 16] kaynaklarından yararlanılarak bir boyutlu Leibniz cebirleri ve iki boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri incelenmiş ve bu cebirler üzerine elde edilmiş sonuçlar verilmiştir.

Lemma 4.3. [9] L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri ve boy$L = 1$ olsun. O zaman L abelyen Lie cebiridir.

İspat L, F cismi üzerinde 1-boyutlu Leibniz cebiri olduğundan $L = \text{Span}\{x\}$ ve $\alpha \in F$ için $[x, x] = \alpha x$ dir. Bu durumda (3.4) ifadesinden yararlanılarak

$$0 = [[x, x], x] = [\alpha x, x] = \alpha[x, x] = \alpha^2 x$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha = 0$ yani, $[x, x] = 0$ olduğundan L abelyen Lie cebiridir. ■

Lemma 4.3. ün sonucu olarak Lie olmayan Leibniz cebiri L için Leib$(L) \neq 0$ ve Leib$(L) \neq L$ olduğundan 1-boyutlu Lie olmayan Leibniz cebiri mevcut değildir.

Lemma 4.4. [16] L, F cismi üzerinde Lie olmayan Leibniz cebiri ve boy$L = 2$ olsun. O zaman Leibniz cebiri L ye izomorf olmayan bir Leibniz cebiri mevcuttur.

İspat L, F cismi üzerinde Lie olmayan Leibniz cebiri ve boy$L = 2$ olsun. Bu durumda Leib$(L) \neq 0$ ve abelyen olduğundan Leib$(L) \neq L$ dir. Dolayısıyla $y = [x, x] \neq 0$ olacak şekilde en az bir $x \in L$ vardır. Böylece $[y, x] = [[x, x], x] = 0$ ve Leib(L), L nin ideali olduğundan her $0 \neq \beta \in F$ için $[x, y] = \beta y$ dir. $z = \beta^{-1}x$ alınırsa

$$\begin{aligned}
[x, z] &= [x, \beta^{-1}x] = \beta^{-1}[x, x] = \beta^{-1}y, \\
[z, x] &= [\beta^{-1}x, x] = \beta^{-1}[x, x] = \beta^{-1}y, \\
[y, z] &= [[x, x], z] = [x, [x, z]] - [x, [x, z]] = 0, \\
[z, y] &= [z, [x, x]] = [[z, x], x] - [[z, x], x] = 0, \\
[z, z] &= [\beta^{-1}x, \beta^{-1}x] = \beta^{-2}[x, x] = \beta^{-2}y
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $t = \beta^{-2}y$ alınırsa

$$[z, t] = [\beta^{-1}x, \beta^{-2}y] = \beta^{-3}[x, y] = \beta^{-2}y = t,$$

$$[t,z] = [\beta^{-2}y, \beta^{-1}x] = \beta^{-3}[y,x] = 0,$$
$$[t,t] = [\beta^{-2}y, \beta^{-2}y] = \beta^{-4}[y,y] = 0$$

elde edilir. Böylece $\{z,t\}$, L nin bir bazı olur. Sonuç olarak birbirine izomorf olmayan

$$[x,x] = y, [x,y] = \beta y, [y,x] = 0$$

çarpımları ile $L_1 = Fx \oplus Fy$ ve $z = \beta^{-1}x, t = \beta^{-2}y$ olmak üzere

$$[z,z] = t, [z,t] = t, [t,z] = 0$$

çarpımları ile $L_2 = Fz \oplus Ft$ Leibniz cebirleri bulunur. ■

Teorem 4.5. [8] L, F cismi üzerinde bir Lie olmayan Leibniz cebiri ve boy$L = 2$ olsun. O zaman L, $[x,x^2] = 0$ (L nilpotent) veya $[x,x^2] = x^2$ (L çözülebilir) olacak şekilde x elemanı tarafından üretilen bir devirli Leibniz cebirine izomorftur.

İspat L, F cismi üzerinde 2-boyutlu Lie olmayan Leibniz cebiri ise o zaman Leib$(L) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $x^2 = [x,x] \neq 0$ olacak şekilde $0 \neq x \in L$ vardır. Böylece Leib(L) = Span$\{x^2\}$ dir. Ayrıca Leib(L) abelyen olduğundan $[x^2,x^2] = 0$ ve bazı $\alpha \in F$ için $[x,x^2] = \alpha x^2$ dir. Bunun sonucunda L = Span$\{x,x^2\}$ elde edilir ve $\alpha = 0$ veya $\alpha \neq 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

1. Durum $\alpha = 0$ ise $[x,x^2] = 0$ elde edilir. Buradan L, x tarafından üretilen bir nilpotent devirli Leibniz cebiri olarak bulunur.

2. Durum $\alpha \neq 0$ ise x yerine $\frac{1}{\alpha}x$ alınarak

$$[\frac{1}{\alpha}x, x^2] = \frac{1}{\alpha}[x,x^2] = \frac{1}{\alpha}\alpha x^2 = x^2$$

elde edilir. Bu durumda L, x tarafından üretilen bir çözülebilir devirli Leibniz cebiridir. ■

Teorem 4.6. [8] L, F cismi üzerinde bir Lie olmayan Leibniz cebiri ve boy$L \leq 4$ olsun. O zaman L çözülebilirdir.

İspat L, F cismi üzerinde Lie olmayan Leibniz cebiri olduğundan Leib$(L) \neq 0$ dır. Böylece boy(Leib(L)) ≥ 1 ve boy(L/Leib(L)) ≤ 3 dür. Bu durumda L/Leib(L) ya çözülebilirdir ya da basittir. $L/\text{Leib}(L)$ çözülebilir ise $\text{Leib}(L)$ abelyen ideal olduğundan L çözülebilirdir. $L/\text{Leib}(L)$ basit Lie cebiri ise $\text{boy}(L/\text{Leib}(L)) = 3$ ve $sl(2, \mathbb{C})$ ye izomorftur. ■

4.2. Üç Boyutlu Leibniz Cebirleri

Boyutu üç ve üçten büyük olan Leibniz cebirlerinin yapısı, bir boyutlu ve iki boyutlu Leibniz cebirlerinin yapısına göre daha karmaşıktır. Bu kısımda I. Demir, K.C. Misra ve E. Stitzinger tarafından üç boyutlu Leibniz cebirleri üzerine yapılmış olan çalışma [8] incelenmiştir ve bu inceleme sonucunda bu makalede aşağıdaki iki önemli sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.7. **[8]** L, F cismi üzerinde bir Lie olmayan nilpotent Leibniz cebiri ve $\text{boy}L = 3$ olsun. Bu durumda

(1) $[x, x] = y, [x, y] = z,$

(2) $[x, x] = z,$

(3) $[x, y] = z, [y, x] = z,$

(4) $[x, y] = z, [y, x] = -z, [y, y] = z,$

(5) $[x, y] = z, [y, x] = \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$

şeklinde verilen sıfır olmayan çarpımlarla birlikte L, $\{x, y, z\}$ bazına sahip bir Leibniz cebirine izomorftur.

Teorem 4.8. **[8]** L, F cismi üzerinde bir Lie ve nilpotent olmayan çözülebilir Leibniz cebiri ve $\text{boy}L = 3$ olsun. Bu durumda

(1) $[z, x] = x,$

(2) $[z, x] = \alpha x, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, [z, y] = y, [y, z] = -y,$

(3) $[z, y] = y, [y, z] = -y, [z, z] = x,$

(4) $[z, x] = 2x, [y, y] = x, [z, y] = y, [y, z] = -y, [z, z] = x,$

(5) $[z, y] = y, [z, x] = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$

(6) $[z,x]=x+y,[z,y]=y,$

(7) $[z,x]=y,[z,y]=y,[z,z]=x$

şeklinde verilen sıfır olmayan çarpımlarla birlikte L, $\{x,y,z\}$ bazına sahip bir Leibniz cebirine izomorftur.

Aşağıdaki teoremle bu tezin üç boyutlu Lie olmayan Leibniz cebirleri üzerine N. Mansuroğlu ve M. Özkaya tarafından elde edilmiş olan ana sonucu verilmiştir.

Teorem 4.9. [19] L, F cismi üzerinde bir Lie olmayan Leibniz cebiri ve boy$L=3$ olsun. O zaman L ye izomorf olan en az bir Leibniz cebiri vardır.

İspat L nin F cismi üzerinde Lie olmayan bir Leibniz cebiri ve boy$L=3$ olduğunu kabul edelim. O zaman Leib$(L)\neq 0$ ve abelyen olduğundan Leib$(L)\neq L$ dir. Bu durumda $x\in$ Leib(L) ise $[x,x]=0$ dır. $x\notin$ Leib(L) ise $y=[x,x]\neq 0$ olacak şekilde en az bir $x\in L$ vardır. Böylece $y\in L$ için Leib(L), L nin ideali olduğundan $[x,y]\in$ Leib(L) elde edilir. Yani, $\beta\in F$ için $[x,y]=\beta y$ dir. O halde L den alınacak keyfi z elemanı için iki durum söz konusudur:

1. Durum: $z\in$ Leib(L) ise $[z,z]=0$ ve $u\notin$ Leib(L) için $0\neq[u,u]=z$ dir. Böylece iki durum daha ortaya çıkar.
(i) $u=x$ ise o zaman $z=[x,x]=y$ dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&[x,y]=[x,z]=\beta y,\\
&[y,x]=[z,x]=0,\\
&[z,z]=0
\end{aligned}
$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu ise L nin iki boyutlu Leibniz cebiri olması demektir ki bu da kabulümüzle çelişir.
(ii) $u\neq x$ ise yani, $z\neq y$ ise o zaman $L=Fx\oplus Fy\oplus Fz\oplus Fu$ dur. Böylece L dört boyutlu Leibniz cebiri olarak bulunur ve yine kabul ile çelişkiye düşülür.

2. Durum: $z\notin$ Leib(L) ise $L=Fx\oplus Fy\oplus Fz$ dir. Böylece $[y,z]=[[x,x],z]=0$ elde edilir. Leib(L), L nin ideali olduğundan bazı $\alpha,\gamma\in F$ için $[z,z]=\alpha y$ ve $[z,y]=\gamma y$ olacak şekilde

$[z,z],[z,y] \in \mathrm{Leib}(L)$ mevcuttur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[x,z] &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\
[z,x] &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z
\end{aligned}$$

dir. L den $u = \beta^{-1}x$ olacak şekilde yeni bir eleman alınırsa

$$\begin{aligned}
[u,x] &= [\beta^{-1}x, x] = \beta^{-1}[x,x] = \beta^{-1}y,\\
[x,u] &= [x, \beta^{-1}x] = \beta^{-1}[x,x] = \beta^{-1}y,\\
[u,y] &= [\beta^{-1}x, y] = \beta^{-1}[x,y] = \beta^{-1}\beta y = y,\\
[y,u] &= [y, \beta^{-1}x] = \beta^{-1}[y,x] = 0,\\
[u,z] &= [\beta^{-1}x, z] = \beta^{-1}[x,z] = \beta^{-1}(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)\\
&= \alpha_1 u + \beta^{-1}\alpha_2 y + \beta^{-1}\alpha_3 z,\\
[z,u] &= [z, \beta^{-1}x] = \beta^{-1}[z,x] = \beta^{-1}(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)\\
&= \beta_1 u + \beta^{-1}\beta_2 y + \beta^{-1}\beta_3 z,\\
[u,u] &= [\beta^{-1}x, \beta^{-1}x] = \beta^{-2}[x,x] = \beta^{-2}y
\end{aligned}$$

bulunur. L den $v = \beta^{-1}y$ olacak şekilde tekrar yeni bir eleman alınırsa

$$\begin{aligned}
[x,v] &= [x, \beta^{-1}y] = \beta^{-1}[x,y] = \beta^{-1}\beta y = \beta v,\\
[v,x] &= [\beta^{-1}y, x] = \beta^{-1}[y,x] = 0,\\
[v,y] &= [\beta^{-1}y, y] = \beta^{-1}[y,y] = 0,\\
[y,v] &= [y, \beta^{-1}y] = \beta^{-1}[y,y] = 0,\\
[v,z] &= [\beta^{-1}y, z] = \beta^{-1}[y,z] = 0,\\
[z,v] &= [z, \beta^{-1}y] = \beta^{-1}[z,y] = \beta^{-1}\gamma y = \gamma v,\\
[u,v] &= [\beta^{-1}x, \beta^{-1}y] = \beta^{-2}[x,y] = \beta^{-2}\beta y = \beta^{-1}y = v,\\
[v,u] &= [\beta^{-1}y, \beta^{-1}x] = \beta^{-2}[y,x] = 0,\\
[v,v] &= [\beta^{-1}y, \beta^{-1}y] = \beta^{-2}[y,y] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak L den $w = \beta^{-1}z$ olacak şekilde yeni bir eleman alınırsa

$$\begin{aligned}
[x, w] &= [x, \beta^{-1}z] = \beta^{-1}[x, z] = \beta^{-1}(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) \\
&= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \\
[w, x] &= [\beta^{-1}z, x] = \beta^{-1}[z, x] = \beta^{-1}(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) \\
&= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w, \\
[y, w] &= [y, \beta^{-1}z] = \beta^{-1}[y, z] = 0, \\
[w, y] &= [\beta^{-1}z, y] = \beta^{-1}[z, y] = \beta^{-1}\gamma y = \gamma v, \\
[z, w] &= [z, \beta^{-1}z] = \beta^{-1}[z, z] = \beta^{-1}\alpha y = \alpha v, \\
[w, z] &= [\beta^{-1}z, z] = \beta^{-1}[z, z] = \beta^{-1}\alpha y = \alpha v, \\
[u, w] &= [u, \beta^{-1}z] = \beta^{-1}[u, z] = \beta^{-1}(\alpha_1 u + \beta^{-1}\alpha_2 y + \beta^{-1}\alpha_3 z) \\
&= \beta^{-1}(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w), \\
[w, u] &= [\beta^{-1}z, u] = \beta^{-1}[z, u] = \beta^{-1}(\beta_1 u + \beta^{-1}\beta_2 y + \beta^{-1}\beta_3 z) \\
&= \beta^{-1}(\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w), \\
[v, w] &= [\beta^{-1}y, \beta^{-1}z] = \beta^{-2}[y, z] = 0, \\
[w, v] &= [\beta^{-1}z, \beta^{-1}y] = \beta^{-2}[z, y] = \beta^{-2}\gamma y = \beta^{-1}\gamma v, \\
[w, w] &= [\beta^{-1}z, \beta^{-1}z] = \beta^{-2}[z, z] = \beta^{-2}\alpha y = \beta^{-1}\alpha v
\end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. L den seçtiğimiz elemanlar ile oluşan $\{u, v, w\}$ kümesi L nin bir bazıdır. Böylece birbirine izomorf olan

$$\begin{array}{lll}
[x, x] = y, & [y, y] = 0, & [z, z] = \alpha y, \\
[z, y] = \beta y, & [z, y] = \gamma y, & [x, z] = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\
[y, x] = 0, & [y, z] = 0, & [z, x] = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z
\end{array}$$

çarpımları ile $L_1 = Fx \oplus Fy \oplus Fz$ Leibniz cebiri ve $u = \beta^{-1}x, v = \beta^{-1}y, w = \beta^{-1}z$ olmak üzere

$$\begin{array}{lll}
[u, u] = \beta^{-1}v, & [v, v] = 0, & [w, w] = \beta^{-1}\alpha v, \\
[u, v] = v, & [w, v] = \beta^{-1}\gamma v, & [u, w] = \beta^{-1}(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w), \\
[v, u] = 0, & [v, w] = 0, & [w, u] = \beta^{-1}(\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w)
\end{array}$$

çarpımları ile de $L_2 = Fu \oplus Fv \oplus Fw$ Leibniz cebiri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5. YAPI SABİTLERİ

Bu bölümde ilk olarak sonlu boyutlu bir cebir için yapı sabitleri kavramı tanımlanmış ve Lie cebirleri için yapı sabitlerinin sağlaması gereken koşullar incelenerek verilmiştir. Literatürde Leibniz cebirlerinin yapı sabitleri üzerine az sayıda çalışma mevcut olup yapılmış olan bazı çalışmalar bu tezde incelenmiştir. Ayrıca Leibniz cebirlerinin ve Leibniz çekirdeğinin yapı sabitlerinin sağlaması gereken koşullar incelenmiş ve elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Tanım 5.1. A, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir cebir olsun.

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k,\ 1 \leq i, j, k \leq n, c_{ij}^k \in F \tag{5.1}$$

olacak şekilde $x_i x_j$ çarpımı, A cebirinin çarpım tablosunu belirler. Her $x, y \in A, 1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $\alpha_i, \beta_j \in F$ için $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ ve $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ şeklinde yazılabildiğinden

$$xy = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j c_{ij}^k x_k$$

olarak bulunur. Böylece n^3 tane c_{ij}^k sabitlerinin belirlenmesiyle A cebirinin çarpım tablosu belirlenir ve bu sabitlere yapı sabitleri denir.

Yapı sabitleri A cebirinin baz seçimine bağlı olduğundan farklı bazlara göre farklı yapı sabitleri elde edilir. Leibniz cebirlerinin yapı sabitlerinin belirlenmesinde kullanılmak üzere aşağıdaki iki lemma ile Lie cebirlerinin yapı sabitlerinin sağlaması gereken koşullar verilmiştir.

Lemma 5.2. [10] L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir cebir olsun. L cebirinin Lie cebir koşulları (L_1) ile (L_2) yi gerçeklemesi için gerek ve yeter koşul

(i) $x_i x_i = 0,$

(ii) $x_i x_j = -x_j x_i,$

(iii) $(x_i x_j)x_k + (x_j x_k)x_i + (x_k x_i)x_j = 0$

olmasıdır.

Lemma 5.3. [10] L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir cebir ve bu baza göre yapı sabitleri $1 \leq i, j, k, l, m \leq n$ için c_{ij}^k olsun. O zaman L cebirinin Lie cebiri olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{(i)} \ c_{ii}^{k} = 0,$$
$$\text{(ii)} \ c_{ij}^{k} = -c_{ji}^{k},$$
$$\text{(iii)} \ \sum_{l=1}^{n}(c_{ij}^{l}c_{lk}^{m} + c_{jk}^{l}c_{li}^{m} + c_{ki}^{l}c_{lj}^{m}) = 0$$

olmasıdır.

5.1. Leibniz Cebirlerinin Yapı Sabitleri

Bu kısımda ilk olarak bir cebirin yapı sabitlerinin Leibniz özdeşliği (3.1) i gerçeklemesi için literatürde yapılmış olan çalışmalar incelenmiştir ve aşağıdaki lemma ile sağlaması gereken koşul verilmiştir.

Lemma 5.4. **[22]** L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazına sahip bir cebir ve bu baza göre yapı sabitleri $1 \leq i, j, k \leq n$ için c_{ij}^{k} olsun. O zaman L cebirinin Leibniz özdeşliği (3.1) i sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m}c_{mk}^{s} - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p}c_{ip}^{s} + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l}c_{jl}^{s} = 0 \tag{5.2}$$

olmasıdır.

İspat L, F cismi üzerinde bir Leibniz cebiri olsun. O zaman L cebiri Leibniz özdeşliği (3.1) i sağlar. Yani

$$[[x_i, x_j], x_k] - [x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_i, x_k] = 0$$

dır. Bu durumda (5.1) eşitliği kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
0 &= [[x_i, x_j], x_k] - [x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_i, x_k]] \\
&= [\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m}x_m, x_k] - [x_i, \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p}x_p] + [x_j, \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l}x_l] \\
&= \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m}[x_m, x_k] - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p}[x_i, x_p] + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l}[x_j, x_l]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{mk}^{s} x_s - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p} \sum_{s=1}^{n} c_{ip}^{s} x_s + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} \sum_{s=1}^{n} c_{jl}^{s} x_s \\
&= \sum_{m,s=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{s} x_s - \sum_{p,s=1}^{n} c_{jk}^{p} c_{ip}^{s} x_s + \sum_{l,s=1}^{n} c_{ik}^{l} c_{jl}^{s} x_s \\
&= \sum_{s=1}^{n} (\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{s} - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p} c_{ip}^{s} + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} c_{jl}^{s}) x_s
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Burada her $1 \leq s \leq n$ için x_s ler lineer bağımsız olduğundan

$$
\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{s} - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p} c_{ip}^{s} + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} c_{jl}^{s} = 0
$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$
\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{s} - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p} c_{ip}^{s} + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} c_{jl}^{s} = 0
$$

olsun. O zaman Leibniz özdeşliği (3.1) in sağlandığını göstermek için ispatın gereklilik kısmında yapılan işlemlerin tersten yapılması yeterlidir. ■

Leibniz cebirleri, Lie cebirlerinin anti-komütatif olmayan genelleştirilmesi olduğundan yapı sabitleri benzer özellikler gösterebilir. Ancak herhangi bir Lie olmayan Leibniz cebiri ile Lie cebirinin yapı sabitleri birbirinden farklıdır.

Aşağıdaki lemma ile N. Mansuroğlu ve M. Özkaya tarafından Lie olmayan Leibniz cebirlerinin yapı sabitleri üzerine elde edilmiş sonuç verilmiştir.

Lemma 5.5. [20] L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazına sahip bir Lie olmayan Leibniz cebiri olsun. O zaman L nin yapı sabitleri

(i) bazı $1 \leq i \leq n$ ler için $c_{ii}^{m} \neq 0$,

(ii) bazı $1 \leq i, j \leq n$ ler için $c_{ij}^{m} + c_{ji}^{m} \neq 0$,

(iii) her $1 \leq i, j, k, s \leq n$ için $\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{s} - \sum_{p=1}^{n} c_{jk}^{p} c_{ip}^{s} + \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} c_{jl}^{s} = 0$

koşullarını sağlar.

İspat (i) L, Lie olmayan Leibniz cebiri ise bazı $1 \leq i \leq n$ için

$$0 \neq [x_i, x_i] = \sum_{m=1}^{n} c_{ii}^m x_m$$

olarak bulunur. $1 \leq m \leq n$ için x_m ler lineer bağımsız olduğundan $c_{ii}^m \neq 0$ elde edilir.

(ii) L, Lie olmayan Leibniz cebiri ise bazı $1 \leq i, j \leq n$ için $[x_i, x_j] \neq -[x_j, x_i]$ olduğundan $[x_i, x_j] + [x_j, x_i] \neq 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} 0 \neq [x_i, x_j] + [x_j, x_i] &= \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^m x_m + \sum_{m=1}^{n} c_{ji}^m x_m \\ &= \sum_{m=1}^{n} (c_{ij}^m + c_{ji}^m) x_m \end{aligned}$$

olarak bulunur. $1 \leq m \leq n$ için x_m ler lineer bağımsız olduğundan $c_{ij}^m + c_{ji}^m \neq 0$ elde edilir.

(iii) Lemma 5.4. den ispat açıkça görülmektedir. ■

Bu kısımda son olarak herhangi bir Lie olmayan Leibniz cebirinin Leibniz çekirdeğinin yapı sabitleri incelenmiştir.

L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazına sahip bir Lie olmayan Leibniz cebiri olsun. L nin Leibniz çekirdeği Leib(L) = Span$\{[x, x] | \ x \in L\}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i \in F$ olmak üzere $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şeklinde ifade edilebildiğinden

$$\begin{aligned} [x, x] &= [\sum \alpha_i x_i, \sum \alpha_i x_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 [x_i, x_i] + \sum_{i,j=1 (i \neq j)}^{n} \alpha_i \alpha_j [x_i, x_j] \\ &= \sum_{m,i=1}^{n} \alpha_i^2 c_{ii}^m x_m + \sum_{m,i,j=1 (i \neq j)}^{n} \alpha_i \alpha_j c_{ij}^m x_m \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca L, Lie olmayan Leibniz cebiri olduğundan $0 \neq [x, x] \in$ Leib(L) olacak şekilde en az bir $x \in L$ vardır. Böylece

$$0 \neq [x, x] = \sum_{m,i=1}^{n} \alpha_i^2 c_{ii}^m x_m + \sum_{m,i,j=1 (i \neq j)}^{n} \alpha_i \alpha_j c_{ij}^m x_m$$

dir. Dolayısıyla $c_{ii}^m \neq 0$ veya $c_{ij}^m \neq 0$ elde edilir.

Örnek 5.6. L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bazına sahip bir cebir olsun. L cebiri üzerindeki çarpım

$$\begin{aligned}
&[x_1, x_1] = x_2, \quad [x_1, x_2] = -x_2 - x_3, \quad [x_1, x_3] = x_2 + x_3,\\
&[x_1, x_4] = 0, \quad [x_2, x_1] = 0, \quad [x_4, x_1] = x_2 + x_3
\end{aligned}$$

ve diğer durumlar sıfır olarak tanımlansın. O zaman $0 \neq [x, x] = y \in \mathrm{Leib}(L)$ olacak şekilde en az bir $x \in L$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
y = [x, x] &= [\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i]\\
&= [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4]\\
&= [\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_1] + [\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2] + [\alpha_1 x_1, \alpha_3 x_3] + [\alpha_1 x_1, \alpha_4 x_4]\\
&+ [\alpha_2 x_2, \alpha_1 x_1] + [\alpha_2 x_2, \alpha_2 x_2] + [\alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3] + [\alpha_2 x_2, \alpha_4 x_4]\\
&+ [\alpha_3 x_3, \alpha_1 x_1] + [\alpha_3 x_3, \alpha_2 x_2] + [\alpha_3 x_3, \alpha_3 x_3] + [\alpha_3 x_3, \alpha_4 x_4]\\
&+ [\alpha_4 x_4, \alpha_1 x_1] + [\alpha_4 x_4, \alpha_2 x_2] + [\alpha_4 x_4, \alpha_3 x_3] + [\alpha_4 x_4, \alpha_4 x_4]\\
&= \alpha_1^2 [x_1, x_1] + \alpha_1 \alpha_2 [x_1, x_2] + \alpha_1 \alpha_3 [x_1, x_3] + \alpha_1 \alpha_4 [x_1, x_4]\\
&+ \alpha_2 \alpha_1 [x_2, x_1] + \alpha_2^2 [x_2, x_2] + \alpha_2 \alpha_3 [x_2, x_3] + \alpha_2 \alpha_4 [x_2, x_4]\\
&+ \alpha_2 \alpha_1 [x_3, x_1] + \alpha_3 \alpha_2 [x_3, x_2] + \alpha_3^2 [x_3, x_3] + \alpha_3 \alpha_4 [x_3, x_4]\\
&+ \alpha_4 \alpha_1 [x_4, x_1] + \alpha_4 \alpha_2 [x_4, x_2] + \alpha_4 \alpha_3 [x_4, x_3] + \alpha_4^2 [x_4, x_4]\\
&= \alpha_1^2 x_2 + \alpha_1 \alpha_2 (-x_2 - x_3) + \alpha_1 \alpha_3 (x_2 + x_3) + \alpha_4 \alpha_1 (x_2 + x_3)\\
&= (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_1) x_2 + (-\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_1) x_3
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $\mathrm{Leib}(L) = F x_2 \oplus F x_3$ ve $\mathrm{boy}(\mathrm{Leib}(L)) = 2$ elde edilir.

Leibniz çekirdeği $\mathrm{Leib}(L)$ nin yapı sabitlerini belirlemek için $u = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4$ ve $v = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4$ olacak şekilde $y_1 = [u, u], y_2 = [v, v] \in \mathrm{Leib}(L)$ alınsın. O zaman

$$\begin{aligned}
[y_1, y_1] &= [[u, u], [u, u]] = 0,\\
[y_1, y_2] &= [[u, u], [v, v]] = 0,\\
[y_2, y_1] &= [[v, v], [u, u]] = 0,\\
[y_2, y_2] &= [[v, v], [v, v]] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Leib(L) nin tüm yapı sabitlerinin sıfır olduğu görülür. Bu örnekle aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.7. [20] L, F cismi üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazına sahip bir Leibniz cebiri olsun. O zaman L cebirinin Leibniz çekirdeğinin tüm yapı sabitleri sıfırdır.

İspat Leibniz çekirdeği Leib(L), L nin abelyen ideali olduğundan (3.4) eşitliği kullanılarak her $y_1, y_2 \in$ Leib(L) için

$$\begin{aligned}[y_1, y_2] &= 0 \\ &= 0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Leib(L) nin tüm yapı sabitleri sıfırdır. ∎

KAYNAKLAR

[1]. Ayupov, Sh.A. and Omirov, B.A., 1998, On Leibniz algebras, *Algebra and Operator Theory*, 1-12.

[2]. Ayupov, Sh.A., Omirov, B.A. and Albeverio, S., 2005, On nilpotent and simple Leibniz algebras, *Communications in Algebra*, 33, 159-172.

[3]. Barnes, D., 2011, Some theorems on Leibniz algebras, *Communications in Algebra*, 39(7), 2463-2472.

[4]. Barnes, D., 2012, On Engel's theorem for Leibniz algebras, *Communications in Algebra*, 40(4), 1388-1399.

[5]. Barnes, D., 2012, Levi's theorem for Leibniz algebras, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 86, 184-185.

[6]. Bloh, A.M., 1965, A generalization of the concept of Lie algebras, *Doklady Akademii Nauk*, 165, 471-473.

[7]. Bloh, A.M., 1971, A certain generalization of the concept of Lie algebras, *Algebra and Number Theory Moskow. Gos. Ped. Inst Ućen.*, 375, 9-20.

[8]. Demir, I., Misra, K.C. and Stitzinger, E., 2014, On some structures of Leibniz algebras, *Recent Advances in Representation Theory, Quantum Groups, Algebraic Geometry, and Related Topics Contemporary Mathematics*, 623, 41-54.

[9]. Drensky, V. and Piacentini Cattaneo, G.M., 2002, Varieties of metabelian Leibniz algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*, 1, 31-50.

[10]. Erdmann, K. and Wildon, M.J., 2006, Introduction to Lie algebras, *Springer*.

[11]. Fialowski, A. and Mihálka, É.Z., Representation of Leibniz algebras, arXiv: 1502.07287v1 [math.RT].

[12]. Gorbatsevich, V., On some basic properties of Leibniz algebras, arXiv: 1302.3345v2 [math.RA].

[13]. Jacobson, N., 1979, Lie algebras, *Dover*.

[14]. Kurdaschenko, L.A., Otal, J. and Pypka, A.A., 2016, Relationships between factors of canonical central series of Leibniz algebras, *European Journal of Mathematics*, 2, 565-577.

[15]. Kurdaschenko, L.A. and Chupordia, V.A., 2017, On some minimal Leibniz algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*, 16, 1-16.

[16]. Kurdachenko, L.A., 2017, On the structure of some Leibniz algebras, *University of Salerno*, Lecture Notes.

[17]. Loday, J.L., 1993, Une version non commutative des algébres de Lie: des algébres de Leibniz, *L'Enseignement Mathématique*, 39, 269-293.

[18]. Loday, J.L. and Pirashvili, T., 1993, Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, *Mathematische Annalen*, 296, 139-158.

[19]. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M., 2018, On the structure constants of Leibniz algebras, *Internetional Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology*, 5(5), 67-69.

[20]. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M., 2019, A note on the structure constants of Leibniz algebras, *International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2018), AIP Conference Proceedings*, 2086, 030024-1030024-3.

[21]. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M., 2019, On low Dimensional Leibniz algebras, *International Journal of Scientific and Technological Research*, 5(2), 129-133.

[22]. Omirov, B. and Wagemann, F., Rigidity and cohomology of Leibniz algebras, arXiv: 1508.06877v4 [math.KT].

[23]. Patsourakos, A., 2007, On nilpotent properties of Leibniz algebras, *Communicaitons in Algebra*, 35, 3828-3834.

[24]. Patsourakos, A., 2008, On solvable Leibniz algebras, *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, 55, 59-63.

[25]. Premet, A. 2006, Lie algebras, *The University of Manchester*, Lecture Notes.

[26]. Ray, C.B., Combs, A., Gin, N., Hedges, A., Hird, J.T. and Zack, L., 2014, Nilpotent Lie and Leibniz algebras, *Communications in Algebra*, 42, 2404-2410.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mücahit ÖZKAYA
Doğum Yeri	Bursa
Doğum Tarihi	04.05.1991
Uyruğu	T.C.
E-Posta Adresi	muco.ozk@icloud.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2017
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	...

Makaleler ve Bildiriler
Makaleler
1. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M. "On the structure constants of Leibniz algebras", *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology*, 5(5), 67-69, 2018.
2. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M. "A note on the structure constants of Leibniz algebras", *International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2018), AIP Conference Proceedings*, 2086, 030024-1030024-3, 2019.
3. Mansuroğlu, N. and Özkaya, M. "On low dimensional Leibniz algebras", *International Journal of Scientific and Technological Research*, 5(2), 129-133, 2019.
Konferanslar ve Bildiriler
1. 4. Cemal Koç Cebir Günleri, ODTÜ, Ankara, Türkiye, 22-23 Nisan 2016.
2. 30. Ulusal Matematik Sempozyumu, Atılım Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 06-09 Eylül 2017.
3. "A note on three dimensional Leibniz algebra", Ischia Group Theory, Ischia, İtaly, 19-23 March 2018, (Poster sunumu).
4. "Leibniz cebirlerinin yapı sabitleri", 13. Ankara Matematik Günleri, TOBB ETÜ, Ankara, Türkiye, 27-28 Nisan 2018, (Poster sunumu).
5. "On Finite Dimensional Leibniz Algebras", 4th International Conference on Analysis and Its Applications, Kırşehir Ahi Evran University, Kırşehir, Turkey, 11-14 September 2018, (Sözlü sunum).
6. 1. Ankara Grup Teori Konferansı, ODTÜ, Ankara, Türkiye, 2-3 Mayıs 2019.
Proje
1. BAP, A4 Projesi, Proje başlığı: "Leibniz cebirlerinin yapı sabitleri", 2018 - 2019 Proje Yürütücüsü: Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU Proje Araştırmacısı: Mücahit ÖZKAYA Proje No: FEF.A4.18.009