T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORTOMORFİZMALAR

Hüseyin YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORTOMORFİZMALAR

Hüseyin YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Şebnem YILDIZ

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 29.03.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Emre TAŞ
Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Şebnem YILDIZ
Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi G. Canan HAZAR GÜLEÇ
Pamukkale Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hüseyin YILDIZ

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezini hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen, bana emek veren saygı değer hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Şebnem YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca benden emeğini esirgemeyen sevgili eşim Dr. Öğr. Üyesi Pınar YILDIZ'a ve oğlum Deniz'e gönülden teşekkür ederim.

Mart, 2019 Hüseyin YILDIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\forall$	:Her
$\in$	:Elemanıdır
$\notin$	:Elemanı değildir
$\leq$	:Küçük eşittir
$<$	:Küçüktür
$\geq$	:Büyük eşittir
$>$	:Büyüktür
$\Vert \cdot \Vert$	:Norm
$a \perp b$	:a ve b ayrık kümeler
B_x	:x vektörüyle üretilen band
ℓ_∞	:Sınırlı dizi uzayı
E^+	:E nin pozitif konisi
$A \oplus B$	:A ve B nin direk toplamı
E	:E de tanımlı tüm operatörler
$Orth(E)$	:E üzerindeki ortomorfizmalar
$x \vee y$	:$\sup(x, y)$ ya da x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	:$\inf(x, y)$ ya da x ve y nin infimumu
$f_n \uparrow f$	:f_n artandır ve $\sup f_n = f$
$f_n \downarrow f$	:f_n azalandır ve $\inf f_n = f$
$Z(E)$	:E nin merkezi
(x, y)	:Sıralı ikili
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$\emptyset$	:Boş küme
e	:Birim elemanı
D^d	:D kümesinin ayrık tümleyeni
$E^\sim$	:E nin sıra duali
$L_b(E)$	:Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
I	:Birim operatör
$Z(E^\sim)$	:E nin dualinin merkezi
c	:Yakınsak dizi uzayı
c_0	:Sıfıra yakınsayan dizi uzayı
$\vert x \vert$	:x in modülü
x^+	:x in pozitif kısmı
x^-	:x in negatif kısmı
$\subset$	:Alt küme
$\supset$	:Kapsar
P_B	:B bandı üzerine izdüşüm
$N(E)$	:Bir Arşimedyan f-cebirinin sıfır kuvvetli elemanlarının kümesi
$E^{\sim\sim}$	:E nin ikinci sıra duali

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTOMORFİZMALAR

Hüseyin YILDIZ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şebnem YILDIZ

Bu çalışmada pozitif operatörlerin önemli bir sınıfı olan ortomorfizmalar kümesinden yararlanarak merkezcil operatörler hakkında bilgi verilmiştir. Ortomorfizmalar uzayı ve vektör latisin merkezi arasındaki ilişkiler karşılaştırılmıştır. Merkezcil operatörler ve bunların sıra dualleri ile ilgili güncel bilgilerden yararlanarak merkezin genişletilmesi sağlanmıştır.
Bir Banach latiste $Orth(E) = Z(E)$ olduğu durumlar incelenerek buradaki merkez sıra duallerine genişletilmiştir. Bunun yanında biortomorfizmalar incelenmiştir.

Mart 2019, 64 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Riesz Uzayı, f-cebiri, Dedekind Tam, Vektör Latis, Ortomorfizma, Merkezcil Operatör, Biortomorfizmalar.

ABSTRACT

MSc THESIS

ORTHOMOPHİSMS

Hüseyin YILDIZ

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr Şebnem YILDIZ

In this study, it has provided information about central operators by practising upon orthomorphisms which is an important class of positive operators. It has been compared the relationships between the orthomorphisms space and the center of vector lattice. It is provided the expansion of the center by utilizing central operators and updated information about their order dual.
By examining some cases about $Orth(E) = Z(E)$ in Banach lattice, this centre has been extended to its order duals. Moreover biorthomophisms have been examinated.

March 2019, 64 Pages.

Keywords: Riesz Space, f-algebra, Dedekind Complete, Vector Lattice, Orthomorphisms, Central Operator, Biorthomorphisms.

1. GİRİŞ

Pozitif operatörler konusunun ortaya çıkması XIX. yy başlarındadır. Bu tarihten itibaren pozitif operatörler sistematik şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Riesz uzaylarının gelişimiyle matematikçilerin bu konudaki gelişmeleri daha da ilerlemiştir. 1930'lu yılların ortasında L. V. Kantorovitch, F. Riesz ve G. Birkhoff tarafından geliştirilmiştir.

Operatörlerin özel bir sınıfı olan ortomorfizmalar birçok yazar tarafından çalışılmıştır. H. Nakano bu operatörleri tanımlayan ilk yazardır. Bunun yanında G. Birkhoff'un çalışmalarında pozitif ortomorfizmalar gerekli pozitif operatörler olarak tanımlanırken A. Bigard ve K. Keimel tarafından ortomorfizmalar olarak tanımlanmıştır.

Ortomorfizmalar kümesinin önemli bir sınıfı olan merkezcil operatörler C. D. Aliprantis ve O. Burkinshaw 'un pozitif operatörler kitabında ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Biz çalışmamızda hem ortomorfizmaları hem de ortomorfizmaların önemli bir sınıfı olan merkezcil operatörleri ve biorthomorfizmaları incelemeye çalıştık. Bu incelemeyi yaparken E. Chil, M. Mohamed ve B. Hassen'in [9] "A relationship between the space of orthomorphisms and the centre of a vector lattice" ve Ö. Gök'ün [16] "On the adjoints of biorthomorphisms" yayınlarını inceledik. Ortomorfizmalar ve merkezcil operatörler Ö. Gök ve Ş. Yıldız [14] [15] çalışmalarında da incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. VEKTÖR UZAYI

Tanım 2.1. J boştan farklı bir küme ve J üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemleri tanımlayalım. J kümesinin elemanlarını $x, y, z, \ldots$ ile gösteriyoruz.

(i) Her $x, y \in J$ için $x + y \in J$ ve $xy \in J$ dır. (J nın toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalılık özelliği)

(ii) Her $x, y, z \in J$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme özelliği)

(iii) J içerisindeki bir tek sıfır elemanı bulunabilir ki her $x \in J$ için $x + 0 = 0 + x = x$ dir. (0, J nın birim elemanı)

(iv) Her $x, y \in J$ için bir tek $-x \in J$ bulunabilir ki $x + (-x) = 0$ dır.

(v) Her $x, y \in J$ için $x + y = y + x$ dir. (Toplama işleminin değişme özelliği)

(vi) Her $x, y \in J$ için $xy = yx$ dir. (Çarpma işleminin değişme özelliği)

(vii) Her $x, y, z \in J$ için $x(yz) = (xy)z$ dir. (Birleşme özelliği)

(viii) Her $x \in J$ için $x \cdot 1 = x$ eşirliğini sağlayan J nın bir tek $0 \neq 1$ (bir) elemanı vardır.

(ix) Her $0 \neq x \in J$ ya karşılık $xx^{-1} = 1$ eşitliğini sağlayan J içinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

(x) Her $x, y, z \in J$ için $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$ dir. (Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliği)

Bu aksiyomları sağlayan J kümesine **cisim** denir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi yukarıdaki aksiyomları sağladığından cisimdir[13].

Tanım 2.2. E boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde $x, y \in E$ ve $\alpha \in J$ için

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$$

(toplama ve çarpma) fonksiyonları varsa, E ye J cismi üzerinde bir **vektör** ya da **lineer uzay** denir[13].

Örnek 2.3. Reel sayılar kümesi ve kompleks sayılar kümesi bildiğimiz toplama ve çarpma işlemine göre vektör uzaylarıdır[13].

2.1.1. Kısmi Sıralama

X boştan farklı bir küme ve $x, y, \ldots$ X in elemanları olsun. Bütün (x, y) sıralı ikilileri X in bir **kartezyen çarpımı**dır ve bu kartezyen çarpım kümesi $X \times X$ şeklinde gösterilir. (x, y) sıralı ikilileri denklik bağıntısı olduğunda bu xRy şeklinde yazılır. Denklik bağıntısı olabilmesi için aşağıdaki şartların olması gereklidir[22].

(i) $\forall x \in X$ için xRx (yansıma özelliği)

(ii) $\forall x, y, z \in X$ için xRy ve yRz iken xRz (geçişme özelliği)

(iii) $\forall x, y \in X$ için xRy iken yRx (simetri özelliği)

R nin X de bir kısmi sıralı olabilmesi için R nin geçişme, yansıma ve ters simetri özelliklerinin aşağıdaki şekilde sağlanması gerekir.

(i) $\forall x \in X$ için xRx (yansıma özelliği)

(ii) $\forall x, y, z \in X$ için xRy ve yRz iken xRz (geçişme özelliği)

(iii) $\forall x, y \in X$ için xRy ve yRx iken $x = y$ (ters simetri özelliği)

Eğer R, X in bir kısmi sıralaması ise xRy için genellikle $x \leq y$ (ya da $y \geq x$) şeklinde yazarız. $x, y \in X$ elemanları ya $x \leq y$ ya da $x \geq y$ şeklinde ifade edilebiliyorsa bu elemanlara karşılaştırılabilir elemanlar denir. Eğer $x \leq y$ ya da $x \geq y$ şeklinde yazılamıyorsa, bu elemanlara karşılaştırılamaz elemanlar denir. Kısmi sıralı bir kümenin her eleman çifti karşılaştırılabiliyorsa buna **tam sıralı** denir. Aksi durumda X in her eleman çifti karşılaştırılamaz denir[22].

X bir kısmi sıralı küme, Y de X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $x_0 \in X$ elemanı $\forall y \in Y$ için $x_0 \geq y$ özelliğini sağlıyorsa x_0 elemanına Y nin bir üst sınırı denir. Eğer Y nin x_0 üst sınırı için Y nin herhangi bir $x_0^{'}$ üst sınırı $x_0^{'} \leq x_0$ oluyorsa $x_0^{'}$, Y nin **en küçük üst sınırı** ya da **supremumu**dur. Bu durumda x_0 tek bir şekilde belirlenir. x_0 ve $x_0^{'}$, Y nin supremumu iken $x_0 \leq x_0^{'}$ ve $x_0^{'} \leq x_0$ dır ve böylece $x_0 = x_0^{'}$ olur. $x_o^{'}$, Y nin supremumu ise $x_o = \sup Y$ ya da $x_o = \sup(y : y \in Y)$ şeklinde gösterilir. Aynı şekilde x_0, Y nin bir infimumu ise $x_0 = \inf(y : y \in Y)$ şeklinde gösterilir[22].

2.1.2. Latis

Tanım 2.4. Bir X kısmi sıralı kümesinin iki elemanlı her alt kümesinin supremum ve infimumu varsa X kümesine **latis(örgü)** denir[22].

X bir latis olsun. $x, y \in X$ içeren bir kümenin supremumunu $\sup(x, y)$ ya da $x \vee y$ şeklinde göstereceğiz. Benzer şekilde x ve y içeren bir kümenin infimumunu da $\inf(x, y)$ ya da $x \wedge y$ şeklinde göstereceğiz [22].

Bir sonlu kümenin elemanları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise supremumu $\sup(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ ya da $\vee_{n=1}^{n} x_i$ şeklinde gösterilirken infimumu da $\inf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ya da $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ ya da $\wedge_{n=1}^{n} x_i$ şeklinde gösterilir[22].

2.2. RİESZ UZAYI

Tanım 2.5. Bir E reel lineer uzayı üzerinde bir kısmi sıralama mevcut ise, E ye **sıralı vektör uzayı** denir. Bu sıralılık E nin cebirsel yapılarıyla uyumludur. Yani;

(i) $\forall h \in E$ için $f \leq g$ olduğunda $f + h \leq g + h$

(ii) $a \geq 0$ gerçek sayıları için $f \geq 0$ olduğunda $af \geq 0$ olur[22].

E sıralı vektör uzayında $\forall f, g \in E$ için $\sup(f, g)$ yine E de ise E sıralı vektör uzayına **Riesz uzayı** (vektör latis) denir[22].

Örnek 2.6. $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ için $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ şeklindeki n değerli reel sayıların toplama ve çıkarma aksiyomlarıyla reel lineer uzay olsun. Eğer $f \leq g$ ve $1 \leq k \leq n$ için $f_k \leq g_k$ şeklinde tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan kısmi sıralamaya göre bir Riesz uzayıdır[22].

Tanım 2.7. A, E sıralı vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Her $a \in A$ için $f \leq a \leq g$ yi sağlayan $f, g \in E$ varsa A ya **sıra sınırlı** denir[22].

Tanım 2.8. E sıralı vektör uzayı verilsin. $E^+ = \{f : f \in E, f \geq 0\}$ alt kümesine E nin **pozitif konisi** denir. E^+ nın elemanlarına da pozitif elemanlar denir[22].

Teorem 2.9. (Koni Özellikleri) E sıralı vektör uzayının E^+ pozitif konisinin özellikleri şunlardır:

(i) $f, g \in E^+$ ise $f + g \in E^+$

(ii) $f \in E^+$ ise her $a \geq 0$ değerleri için $af \in E^+$

(iii) $f, -f \in E^+$ ise $f = 0$ dır[22].

Teorem 2.10. E, E^+ pozitif konili sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır;

(i) $f \geq g \Leftrightarrow f - g \in E^+$

(ii) $f \geq g \Leftrightarrow f = \sup(f, g) \Leftrightarrow g = \inf(f, g)$

(iii) $f \geq g \Leftrightarrow af \geq ag, a > 0$ ve $f \geq g \Leftrightarrow af \leq ag, a < 0$

(iv) Eğer $\sup(f, g)$ var ise, $\inf(-f, -g)$ vardır ve $\inf(-f, -g) = -\sup(f, g)$ dır.

(v) Eğer $f, g \in E$ ise E de $\sup(f, g)$ vardır. Bu durumda $\inf(f, g)$ mevcut olur. Herhangi $h \in E$ için;

$$\sup(f + h, g + h) = \sup(f, g) + h$$

$$\inf(f + h, g + h) = \inf(f, g) + h \text{ dır.}$$

(vi) $\sup(f, g)$; için

$$\sup(af, ag) = a \sup(f, g),\ a \geq 0$$

$$\sup(af, ag) = a \inf(f, g),\ a \leq 0$$

$$\inf(af, ag) = a \inf(f, g),\ a \geq 0$$

$$\inf(af, ag) = a \sup(f, g),\ a \leq 0$$

elde edilir.

(vii) E bir Riesz uzayı ve $f, g, h \in E$ ise,

$$\sup\{\sup(f,g),h\} = \sup\{\sup(f,g),\sup(g,h)\} = \sup(f,g,h)$$

$\inf(f,g,h)$ da benzer şekilde gösterilir. Bundan dolayı Riesz uzayında elemanları sonlu herhangi bir kümenin supremumu ve infimumu vardır[22].

Tanım 2.11. E bir sıralı vektör uzayı ve E deki bir f elemanının $\sup(f,0)$ mevcut ise:

$$f^+ = \sup(f,0)$$

$$f^- = \sup(-f,0)$$

$$|f| = \sup(f,-f)$$

$$\inf(f,0) = -\sup(-f,0) = -f^-$$

şeklinde yazılır[22].

Teorem 2.12. E bir sıralı vektör uzayı ve E deki bir f elemanının $\sup(f,0)$ mevcut ise aşağıdakiler sağlanır;

(i) $f^+, f^- \in E^+$

$f^+ = (-f)^-$ ve $f^- = (-f)^+$; $|f| = |-f|$

(ii) $f = f^+ - f^-$ ile $\inf(f^+, f^-) = 0$ ise

$|f| = f^+ + f^-$ ve böylece $|f| \in E^+$

(iii) $0 \leq f^+ \leq |f|$ ve $0 \leq f^- \leq |f|$

(iv) $-f^- \leq f \leq f^+$

(v) $a \geq 0$ için $(af)^+ = af^+$ ve $(af)^- = af^-$

$a \leq 0$ için $(af)^+ = -af^-$ ve $(af)^- = -af^+$

a gerçek sayısı için $|af| = |a| \cdot |f|$

(vi) Eğer $f, g \in E$ ve $f^+ = \sup(f, 0)$ ile $g^+ = \sup(g, 0)$ varsa ancak ve ancak $f^+ \leq g^+$ ve $f^- \geq g^-$ sağlanıyorsa $f \leq g$ vardır[22].

İspat. (i), tanımdan dolayı açıktır.

(ii), $f^+ - f^- = \sup(f, 0) - f = \sup(0, -f) = f^-$ böylece $f = f^+ - f^-$ ek olarak;

$$0 = -f^- + f^- = \inf(f, 0) + f^- = \inf(f^+ - f^-, 0) + f^- = \inf(f^+, f^-)$$

Dahası;

$$|f| = \sup(f, -f) = \sup(2f, 0) - f = 2f^+ - (f^+ - f^-) = f^+ + f^-.$$

(iii), $f^+, f^- \in E^+$ ve $|f| = f^+ + f^-$ den $0 \leq f^+ \leq |f|$ ve $0 \leq f^- \leq |f|$ dir.

(iv), $f = f^+ - f^-$ olduğundan $-f^- = f - f^+ \leq f$ dir ve $f \leq f^+$.

(v), Teorem 2.10. de gösterilmiştir.

(vi), varsayalım ki $f \leq g$ olsun.

$$f^+ = \sup(f, 0) \leq \sup(g, 0) = g^+$$

$$f^- = -\sup(f, 0) \geq \sup(-g, 0) = g^-$$

Tersine, $f^+ \leq g^+$ ve $f^- \geq g^-$ ise $f = f^+ - f^- \leq g^+ - g^- = g$.

■

Teorem 2.13. E bir sıralı vektör uzayı olsun.

(i) Eğer $u, v \in E^+$ ve $\sup(u, v)$ var ise

$$0 \leq \inf(u, v) \leq \sup(u, v) \leq u + v$$

(ii) $u, v \in E^+, f = u - v$ ve $f^+ = \sup(f, 0)$ ise $f^+ \leq u$ ve $f^- \leq v$ böylece $f = f^+ - f^-$ iki pozitif elemanın farklı olarak pozitif ayrışmadır. $\inf(f^+, f^-) = 0$. Tersine $u, v \in E^+$ ile $f = u - v$ için $\inf(u, v)$ mevcut ise $\inf(u, v) = 0$ sağlanır. Bundan da $f^+ = \sup(f, 0)$ ve $u \in f^+$ ve $v \in f^-$ bulunur. Başka bir ifadeyle $f = u - v, \inf(u, v) = 0$ ise $f = u - v$ minimal ayrışmadır[22].

Tanım 2.14. Bir E Riesz uzayının S alt kümesi

$$y \in E, x \in S \text{ ve } |y| \leq |x| \text{ olduğunda } y \in S$$

ise S ye **katı(solid)** denir[23][2].

Tanım 2.15. Bir E Riesz uzayının G lineer alt uzayı

$$y \in E, x \in G \text{ ve } |y| \leq |x| \text{ olduğunda } y \in G$$

ise G lineer alt uzayına E nin **ideal**i denir.

Her $x \in G$ için $|x|, x^+, x^-$ G idealinin elemanlarıdır[25][23][30].

Örnek 2.16. s tüm diziler uzayında,

(i) ℓ_∞, s de idealdir.

(ii) c, ℓ_∞ nun Riesz alt uzayıdır fakat ideali değildir.

(iii) c_0 uzayı c ve ℓ_∞ nun idealidir[22].

Tanım 2.17. Bir E Riesz uzayında bir B idealinin her alt kümesinin E deki supremumu B nin elemanı ise B idealine **band** denir. Yani, bir $D \subseteq B$ kümesi için $\sup D = f$ iken $f \in B$ ise B idealine **band** denir. Bir $x \in E$ vektörüyle üretilen band $B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ şeklinde tanımlanır. B_x şeklindeki her band **temel band** olarak adlandırılır.[23][2].

Tanım 2.18. E bir Riesz uzayında;

(i) E nin K lineer alt uzayı, K nın her f, g eleman çiftinin K da $\sup(f, g)$ ve $\inf(f, g)$ u varsa K ya E nin bir Riesz alt uzayı denir.

(ii) E nin A lineer alt uzayında $f \in A$ ve $g \in E$ için $|g| \leq |f|$ olduğunda $g \in A$ oluyorsa A ya E nin bir ideali denir.

(iii) E deki A ideali $f_n \in A(n = 1, 2, \ldots)$ ve $f = \sup f_n$ iken $f \in A$ oluyorsa, A ideali bir σ-**ideal**dir[22].

Tanım 2.19. A ve B, E Riesz uzayındaki idealler olsun.

(i) $A + B$ nin cebirsel toplamı idealdir. $A + B$ de $f \geq 0$ olsun. $f_1 \in A, f_2 \in B$ için $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ olduğunda $f = f_1 + f_2$ şeklinde ayrışması vardır.

(ii) $\forall f_1 \in A, f_2 \in B$ için $f_1 \perp f_2$ oluyorsa ancak ve ancak $A \cap B = \{0\}$ olduğunda $A \perp B$ dir. Yani ancak ve ancak $A+B$ bir direkt toplam $A \oplus B$ dir. Bu durumda $f_1 \in A, f_2 \in B$ için $f = f_1 + f_2$ ayrışması $f \in A \oplus B$, tektir ve $f_1 \geq 0$ ve $f_2 \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ sağlanır.

(iii) $A \perp B$ ve $A \oplus B$ deki f, g elemanları için $f = f_1 + f_2$ ve $g = g_1 + g_2$ ayrışmasına sahipse $f \leq g$ için $f_1 \leq g_1$, $f_2 \leq g_2$ dir[22].

2.2.1. Monoton Diziler ve Yönlü Kümeler

Tanım 2.20. E sıralı vektör uzayındaki dizi $(f_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ ise artan $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ ise azalandır ve sırasıyla $f_n \uparrow$ ya da $f_n \downarrow$ şeklinde gösterilir. E de $f_n \uparrow$ ve

$f = \sup f_n$ mevcut ise $f_n \uparrow f$ ya da $f_n \uparrow_n f$ yazacağız. E de $f_n \downarrow$ ve $f = \inf f_n$ mevcutsa $f_n \downarrow f$ yazacağız[22].

Teorem 2.21. (i) Eğer $f_n \uparrow f$ ise $n_1 < n_2 < \ldots$ olacak şekilde her $(f_{n_k} : k = 1, 2, \ldots)$ altdizisi için $f_{n_k} \uparrow f$ dir. n_0 keyfi fakat sabit bir doğal sayı olduğunda $(f_n : n \geq n_0)$ altdizi için sağlanır.

(ii) $f_n \uparrow f$ ve $a \geq 0$ reel sayısı için $af_n \uparrow af$ dır.

(iii) $f_n \uparrow f$ ve $g_n \uparrow g$ ise $f_n + g_n \uparrow f + g$ dir.

(iv) $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow$ ve $f_n + g_n \uparrow f + g$ ise $g_n \uparrow g$ dir[22].

Sonuç 2.22. Her E Riesz uzayı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) (Baskın ayrışma özelliği) $n = 1, \ldots, p$ için $z_n \in E^+$ olacak şekilde

$$0 \leq u \leq z_1 + \cdots + z_p$$

verilsin. $u = u_1 + \cdots + u_p$ ve $u_n \leq z_n$ olacak şekilde $u_1, \ldots, u_p \in E^+$ mevcuttur.

(ii) (Riesz interpolasyon özelliği) Eğer $u, v, z_1, z_2 \in E^+$ ve $u + v = z_1 + z_2$ ise

$$u_1 + u_2 = u \qquad v_1 + v_2 = v$$

$$u_1 + v_1 = z_1 \qquad u_2 + v_2 = z_2$$

olacak şekilde $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E^+$ mevcuttur[22].

Tanım 2.23. E sıralı vektör uzayının indeksli alt uzayı $\{f_\tau : \tau \in \{\tau\}\}$, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \{\tau\}$, $f_{\tau_3} \geq f_{\tau_1}$ ve $f_{\tau_3} \geq f_{\tau_2}$ geçerli ise **yukarı yönlü** denir, $\{f_\tau : \tau \in \{\tau\}\}$, $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \{\tau\}$, $f_{\tau_3} \leq f_{\tau_1}$ ve $f_{\tau_3} \leq f_{\tau_2}$ geçerli ise **aşağı yönlü** denir. Bunu sırasıyla $f_\tau \uparrow f$ ya da $f_\tau \uparrow_\tau f$ şeklinde yazacağız. Eğer E de $f_\tau \uparrow$ ve $f = \sup f_\tau$ mevcut ise $f_\tau \uparrow f$ yada $f_\tau \uparrow_\tau f$ yazılır. Eğer E de $f_\tau \downarrow$ ve $f = \inf f_\tau$ mevcut ise $f_\tau \downarrow f$ yada $f_\tau \downarrow_\tau f$ yazılır[22].

2.2.2. Ayrıklık

Tanım 2.24. E nin f ve g elemanları için eğer $\inf(|f|, |g|) = 0$ ise bu elemanlar **ayrıktır** denir. Bu $f \perp g$ şeklinde gösterilir[22].

Tanım 2.25. (i) Eğer A, E Riesz uzayının bir ideali ise $A^d = \{0\}$ dir. Yani $A^{dd} = E$, $\forall f \neq 0 \in E$ ve burada $0 \neq g \in A$ ise $|g| \leq |f|$ dir.

(ii) Eğer A, E Riesz uzayının bir ideali ise $(A \oplus A^d)^d = 0$ dır ve böylece $(A \oplus A^d)^{dd} = E$ dir[22].

Tanım 2.26. Eğer D, bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi ise D ile üretilen band $\{D\}$ şeklinde gösterilir[22].

Tanım 2.27. Bir E Riesz uzayının bir D Riesz alt uzayında her $0 < x \in E$ ($0 \leq x$ ve $x \neq 0$) için

$$0 < y \leq x$$

olacak şekilde bir $y \in D$ varsa D Riesz alt uzayına E de **sıra yoğundur** denir[2].

Tanım 2.28. E de herhangi bir A ideali için, $A \oplus A^d$ ideali yarı sıra yoğundur[22].

Tanım 2.29. (Riesz homomorfizması) İki Riesz uzayı arasında bir $T : E \to F$ operatörü $\forall x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ eşitliğini sağlanıyorsa bu operatöre bir **latis (ya da Riesz) homomorfizması** denir[2].

Bir latis homomorfizması eğer bire bir ise bir **latis(ya da Riesz) izomorfizması**dır. E ve F iki Riesz uzayları E den F ye bir latis izomorfizma varsa E ve F iki Riesz uzayları **Riesz(ya da latis) izomorfik** denir[2].

Teorem 2.30. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \to F$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir[2].

(i) T bir latis homomorfizmasıdır.

(ii) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$ dır.

(iii) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ dir.

(iv) E de $x \wedge y = 0$ ise E de $T(x) \wedge T(y) = 0$ dır.

(v) Her $x \in E$ için $T(|x|) = |T(x)|$ dir.

İspat. (i)⇒(ii): T bir latis homomorfizması ise her $x \in E$ için

$$T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = T(x) \vee 0 = T(x^+) = (Tx)^+ \text{ dır.}$$

(ii)⇒(iii): $T(x\wedge y) = T(x-(x-y)^+) = T(x)-T(x-y)^+ = T(x)-(Tx-Ty)^+ = T(x)\wedge T(y)$.

(iii)⇒(iv): Eğer $x \wedge y = 0$ ise $T(x) \wedge T(y) = T(x \wedge y) = T(0) = 0$ dır.

(iv)⇒(v): $x^+ \wedge x^- = 0$ alınarak:

$|T(x)| = |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-)$

$|T(x)| = T(x^+) \vee T(x^-) = T(x^+) + T(x^-) = T(x^+ + x^-) = T(|x|)$ olarak bulunur. ■

2.2.3. Pozitif Operatörler

Tanım 2.31. (i) E ve F ($\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$) aynı skaler cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı olsun.

$$T : E \to F$$

dönüşümü her $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalerleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa T dönüşümüne bir **lineer operatör** denir[11].

(ii) Bir T operatörü her $0 \leq x$ için $0 \leq Tx$ oluyorsa T lineer operatörüne **pozitif operatör** denir[13].

Tanım 2.32. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T : E \to F$ bir operatör olsun. Eğer E de $x_a \to 0$ iken F de $Tx_a \to 0$ oluyorsa T ye **sıra sürekli operatör** denir[2].

2.2.4. Arşimedyan Riesz Uzayı

Tanım 2.33. (Arşimedyan) Arşimedyan özelliği, $\forall x > 0$ reel sayısı için nx dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde sınırsızdır ve bu ifade aynı zamanda $\mathbb{R}$ de $\forall x > 0$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ dır. Bir Riesz uzayı veya bir sıralı vektör uzayı $\forall x \in E^+$ için E de $n^{-1}x \downarrow 0$ olduğunda E Riesz uzayına (ya da sıralı vektör uzayına) **Arşimedyan Riesz uzayı** veya **Arşimedyan sıralı vektör uzayı** denir[2].

Tanım 2.34. Bir E Riesz uzayı her $u \in E^+$ için $(n^{-1}u : n = 1, 2, \ldots)$ azalan dizisi $n^{-1}u \downarrow 0$ özelliğini sağlanıyorsa E Riesz uzayına Arşimedyandır denir[22].

Teorem 2.35. (i) Bir E Riesz uzayının Arşimedyan olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall u \in E^+$, $\varepsilon_n u \downarrow 0$ dır ve bu dizi ($\varepsilon_n : n = 1, 2, \ldots$) gerçek sayıları içerir.

(ii) $f, g \in E^+$ verilsin $n = 1, 2, \ldots$ için $ng \leq f, g = 0$ sağlanırsa E Riesz uzayı Arşimedyandır.

(iii) $f, g \in E$ verilsin $n = 1, 2, \ldots$ için $ng \leq f, g \leq 0$ sağlanırsa E Riesz uzayı Arşimedyandır.

(iv) Bir Arşimedyan Riesz uzayının herhangi bir Riesz altuzayı Arşimedyandır[22].

İspat. (i), Arşimedyan Riesz uzayında $\forall u \in E^+$, $\varepsilon_n u \downarrow 0$ dır.

(ii), E Arşimedyan olsun ve farzedelim ki $\forall n = 1, 2, \ldots$ için $0 \leq nv \leq u$ sağlansın.

$$0 \leq v \leq n^{-}u \downarrow 0$$

olduğundan $v = 0$ dır.

(iii), E, Arşimedyan ve $n = 1, 2, \ldots$ için $ng \leq f$ sağlanıyor ise, $\forall n$ için $ng \leq f^+$ dır ve $g \leq 0$ için $g \leq n^- f^+ \downarrow 0$.

(iv), Bir Arşimedyan Riesz uzayı, Riesz uzayının altuzayı olduğundan, Arşimedyan Riesz uzayının herhangi bir Riesz altuzayı da Arşimedyandır. ■

Tanım 2.36. Bir E Riesz uzayında bir $e > 0$ vektörü için e ile üretilen band $B_e = E$ yi sağlıyorsa veya $\forall x \in E$ için $x \wedge ne \uparrow x$ oluyorsa $e > 0$ vektörüne **zayıf sıra birim** denir. Bir $e > 0$ vektörü Arşimedyan Riesz uzayında zayıf sıra birimli olması için gerek ve yeter koşul $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır[2].

2.2.5. Normlu Uzay-Banach Uzayı

Tanım 2.37. Üzerine bir norm tanımlanmış olan E vektör uzayına bir **normlu uzay** adı verilir. Bir tam normlu uzaya ise **Banach uzayı** denir. Bir E vektör uzayı üzerindeki $\|x\| : E \to \mathbb{R}$ ile gösterilen norm, x ve y ise E de keyfi vektörler ve a bir skaler olmak üzere, aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur:

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|ax\| = |a|\|x\|$

(vi) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$(Üçgen Eşitsizliği)

E üzerindeki bir norm, E üzerinde,

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad (x,y \in E)$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından oluşturulan metrik olarak adlandırılır. Tanımlamış olduğumuz normlu uzayları $(E, \|\cdot\|)$ ile göstereceğiz [11].

Tanım 2.38. $(E, ||.||)$ normlu bir uzay olsun. $f : \mathbb{N} \to E$ tanımlı fonksiyonuna E içinde bir dizi adı verilir. Bu da $(f(n)) = (x_n)$ şeklinde gösterilir [11].

Tanım 2.39. $(E, ||.||)$ normlu bir uzay ve (x_n), E içinde bir dizi olsun.

$\lim x_n = x \in E \Leftrightarrow$ verilen $\forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n \geq n_0$ olduğunda $||x_n - x|| < \varepsilon$ sağlanır. Bunu sağlayan diziye **yakınsak dizi** denir[11].

Tanım 2.40. (i) $(E, ||.||)$ normlu bir uzay ve (x_n), E içinde bir dizi olsun.

Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunduğunda her $n, m \geq n_0$ için $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir[11].

(ii) Eğer E içinde her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak ise E uzayına bir **Banach uzayı** veya **Tam uzay** denir[11].

Örnek 2.41. ℓ_∞ sınırlı dizilerin uzayı üzerindeki supremum normuna göre bir Banach uzayıdır. Yani $x = (x_n) \in \ell_\infty$ için,

$$||x|| = \sup_n |x_n| \text{ dır[2].}$$

2.2.6. Riesz Cebiri ve $f-$cebiri

Tanım 2.42. E bir vektör uzayı olmak üzere $(x, y) \to xy$ çarpımı ile $\forall x, y, z \in E$ ve $\alpha \in K$ için;

(i) $(xy)z = x(yz)$ ve $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$

(ii) $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

özelliklerini sağlıyorsa E vektör uzayına **cebir** denir[1].

Tanım 2.43. (i) E bir Riesz uzayı ve birleşme özelliğine sahip bir cebir olsun. $x, y \geq 0$ ve $x, y \in E$ için $xy \geq 0, (|x \cdot y| \leq |x||y|)$ oluyorsa E ye bir **Riesz cebiri (latis cebiri)** denir.

(ii) Bir E Riesz cebiri $\forall x, y \geq 0 \in E$ için $xy = yx$ ise E ye **değişmeli**dir denir.

(iii) E bir Riesz cebiri olmak üzere $0 \leq z \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken

$$xz \wedge y = zx \wedge y = 0$$

oluyorsa E ye bir f**-cebiri** denir[2][28].

Tanım 2.44. Bir E f-cebirinin bazı esas özellikleri şunlardır:

(i) Bir pozitif eleman ile çarpımı Riesz homomorfizmasıdır.

Bir $u \in E^+$ ve her $x, y \in E$ için

$u(x \wedge y) = (ux) \wedge (uy)$ ve $(x \wedge y)u = (xu) \wedge (yu)$,

$u(x \vee y) = (ux) \vee (uy)$ ve $(x \vee y)u = (xu) \vee (yu)$ dir.

(ii) Bir $u \in E^+$ ve her $x \in E$ için $ux^+ = (ux)^+$ ve $x^+u = (xu)^+$ dır.

(iii) Her $x, y \in E$ için $|xy| = |x| \cdot |y|$ dir.

(iv) Eğer $x, y, z \in E$ için $x \perp y$ ise $zx \perp y$ ve $xz \perp y$ dir.

(v) Eğer $x, y \in E$ için $x \perp y$ ise $xy = 0$ dır.

(vi) Her $x \in A$ için $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ dır[28].

Tanım 2.45. E ve F bir K cismi üzerinde iki cebir olmak üzere her $k \in K$ ve $x, y \in E$ için $\phi : E \to F$ fonksiyonu

(i) $\phi(kx) = k\phi(x)$

(ii) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

(iii) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ ye **cebir homomorfizması** denir[21].

Tanım 2.46. E Riesz uzayı üzerine bir norm olsun. Eğer $x, y \in E$ için

$$|x| < |y| \text{ iken } \|x\| \leq \|y\|$$

ise E deki norma bir **Riesz norm** ya da **Latis norm** denir. Riesz normla donatılmış herhangi bir Riesz uzayına **normlu Riesz uzayı** denir. Tam normlu Riesz uzayına da **Banach latisi** denir[2].

2.2.7. Dedekind Tamlık Özelliği

Tanım 2.47. E kısmi sıralı bir küme olsun.

(i) E in boştan farklı her alt kümesinin supremum ve infimumu varsa E tam sıralı bir küme olarak adlandırılır.

(ii) Üstten sınırlı boştan farklı her alt kümenin supremumu ve alttan sınırlı boştan farklı her alt kümenin infimumu varsa buna **Dedekind tam** denir.

(iii) Üstten sınırlı boştan farklı her sonlu ya da sayılabilir bir alt kümenin supremumu vardır ve alttan sınırlı boştan farklı sonlu ya da sayılabilir her alt kümenin infimumu vardır. Buna **Dedekind σ-tam** denir[22].

Teorem 2.48. E in boştan farklı her üstten sınırlı alt kümesinin supremumu var ise E ye **Dedekind tam** denir[22].

İspat. X in her alt kümesi boştan farklı ve supremuma sahip olsun. Y nin de X in bir alt kümesi olduğunu varsayalım ve alttan sınırlı olsun. $\inf Y$ yi ispatlayalım. Bunun sonunda Y nin bütün alt kümeleri $E(Y)$ nin boştan farklı ve sınırlı olduğunu gösterelim. Böylece $l_0 = \sup E(Y)$ bulunur. Bu sebeple $l \in E(Y)$ ve $\forall y \in Y$ için $l \leq y$ herhangi bir $y \in Y$, $E(Y)$ nin üstten sınırı olur. Böylece $l_0 \leq y$ bulunur. Bu da l_0, Y nin bir alt sınırıdır.

En küçük ve en büyük kısmi sıralı kümelerde tam sıralılık ve Dedekind tamlık durumları birbirine eşittir. ■

Tanım 2.49. E nin boştan farklı her alttan sınırlı alt kümesinin infimumu varsa E Riesz uzayına **Dedekind tam** denir[22].

Örnek 2.50. c_0 dizi uzayı bir Dedekind tam Banach latisdir[23].

Örnek 2.51. $\mathbb{R}$ sıralama bağıntısına göre Dedekind tamdır[22].

Örnek 2.52. $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi $x = (x_1, x_2)$,$y = (y_1, y_2) \in X$ olmak üzere "$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$" şeklinde tanımlanan sıralama bağıntısına göre Dedekind tamdır[22].

2.2.8. İzdüşüm Özellikleri

Tanım 2.53. Bir E vektör uzayında $P : E \to E$ operatörü $P^2 = P$ özelliğini sağlıyorsa P operatörüne **izdüşüm (projeksiyon)** denir[22].

Teorem 2.54. E Riesz uzayında $A \oplus B = E$ olacak şekilde A ve B idealleri var ise , $B = A^d$ ve $A = B^d$ dir. Böylece $A = A^{dd}$ ve $B = B^{dd}$ dir. Bunun sonucu olarak A ve B her biri, bir diğerinin ayrık tümleyeni olan banddır[22].

İspat. $A \oplus B = E$ olduğundan dolayı $A \cap B = \{0\}$, böylece $A \perp B$, bunun sonucu olarak $B \subset A^d$ dır. B içinde A^d $0 \leq u \in A^d$ olsun. u nun ayrışma özelliğinden $0 \leq u_1 \in A$ ve $0 \leq u_2 \in B$ için $u = u_1 + u_2$ yazabiliriz.

$$0 \leq u_1 \leq u \in A^d$$

olduğundan dolayı $u_1 \in A^d$. Diğer yandan $u_1 \in A$ dır. $u_1 = 0$ ve böylece $u = u_2 \in B$ dir. Böylece $A^d \subset B$ kanıtlanmıştır. Sonuç olarak $B = A^d$. ■

Teorem 2.55. A, E Riesz uzayının bir lineer alt uzayı ise $A \oplus A^d = E$, böylece $A = A^{dd}$ dir[22].

İspat. A^{dd} nin A içine olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır. Bu amaçla $f \in A^{dd}$ verilsin. Hipotezten $f_1 \in A \subset A^{dd}$ ve $f_2 \in A^d$ ile $f = f_1 + f_2$ ayrışması mevcuttur. $A^{dd} \oplus A^d$ idealindeki herhangi bir element için bu ayrışma vardır. $A^{dd} \oplus A^d$ direkt toplamındaki f in ayrışması $f = f_1 + f_2$ vardır ve bunun sonucunda $f \in A^{dd}$ ve $f_2 = 0$ dır. Bu $f = f_1 \in A$ gösterimidir ve böylece A^{dd}, A ya dahildir. ■

Tanım 2.56. E Riesz uzayındaki herhangi bir A bandı $A \oplus A^d = E$ özelliğine sahipse buna **izdüşüm (projeksiyon) band** denir. Bu durumda keyfi bir $f \in E$ için $f = f_1 + f_2$ ise bu toplamdaki $f_1 \in A$ ve $f_2 \in A^d$ elemanları f in bileşenleridir[22].

Tanım 2.57. E deki her band bir izdüşüm band ise E Riesz uzayı **izdüşüm özelliğine sahiptir** denir ve E deki her temel band bir izdüşüm band ise E Riesz uzayına **temel izdüşüm özelliğine sahiptir** denir [22].

Tanım 2.58. (i) Her Dedekind tam Riesz uzayı izdüşüm özelliğine sahiptir.

(ii) Bir E Riesz uzayı ancak ve ancak $\forall u \in E^+$ ve E deki her A bandı için $\sup(v : v \in A, 0 \leq v \leq u)$ elemanı mevcutsa izdüşüm özelliğine sahiptir ve bu eleman A daki u nun bir bileşenidir.

(iii) Bir E Riesz uzayı ancak ve ancak $\forall u, v \in E^+$ çifti için $\sup(\inf(u, nv) : n = 1, 2, \ldots)$ mevcutsa temel izdüşüm özelliğine sahiptir ve bu eleman v tarafından üretilen temel banddaki u nun bileşenidir.

(iv) (ii) nin sonucu olarak E izdüşüm özelliğine sahip bir Riesz uzayıdır, bu ancak ve ancak temel bandda bulunan her band bir izdüşüm bandı olduğundadır[22].

Teorem 2.59. Bir E Riesz uzayındaki $T : E \to E$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) T bir sıra izdüşümdür.

(ii) T izdüşümü $0 \leq T \leq I$ özelliğini sağlar[2].

2.2.9. Lineer fonksiyoneller

Tanım 2.60. (i) E bir vektör uzayı ve $\mathbf{K}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. $f : E \to \mathbf{K}$ lineer operatörüne **lineer fonksiyonel** denir.

(ii) E sıralı vektör uzayı olsun. $f : E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli $\forall x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ oluyorsa f ye **pozitif lineer fonksiyonel** denir.

(iii) f lineer fonksiyoneli E nin sıra sınırlı alt kümelerini $\mathbb{R}$ nin sıra sınırlı alt kümelerine götürüyorsa f ye **sıra sınırlı lineer fonksiyonel** denir.

(iv) E üzerindeki tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayına E nin **sıra duali** denir ve $E^\sim$ şeklinde gösterilir.

(v) $\mathbb{R}$ bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $E^\sim$ de bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

(vi) $f, g \in E^\sim$ için $f \geq g$ ise her $x \in E^+$ için $f(x) \geq g(x)$ dir[23].

2.3. ORTOMORFİZMALAR

2.3.1. Ortomorfizmanın Temel Özellikleri

Tanım 2.61. Bir E Riesz uzayı üzerinde bir $T : E \to E$ operatörü E deki bütün bandları değişmez bırakıyorsa yani E nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ özelliğini sağlıyorsa T ye **band koruyan operatör** denir[2].

Teorem 2.62. E de bir T operatörü için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

(i) T band koruyandır.

(ii) E nin boştan farklı her alt kümesi için $T(D^d) \subset D^d$.

(iii) $Tu \perp v$ olması için E de $u \wedge v = 0$ olmalıdır.

(iv) $Tf \perp g$ olması için E de $f \perp g$ olmalıdır.

(v) $\forall f \in E$ için $Tf \in \{f\}^{dd}$.

Eğer bu koşullar sağlanıyorsa $\forall f \in E$ için $|Tf| = \{|T(|f|)|\}$ sağlanır[28].

İspat.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) D^d bir grup olduğundan (i)$\Longrightarrow$(ii) açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) eğer $u \wedge v = 0$ ise $u \in \{v\}^d$. Bundan dolayı $Tu \in \{v\}^d$ dir. Örneğin $Tu \perp v$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) g, $\{f\}^d$ de herhangi bir eleman olsun. $f \perp g$, olduğundan $Tf \perp g$ dir.

$Tf \in \{f\}^{dd}$ şekinde gösterilir.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) B, E de herhangi bir grup ve $f \in B$ olsun. Böylece $Tf \in \{f\}^{dd} \subset B$ olur[28].

■

Farz edelim ki (i)-(v) koşulları sağlansın ve $f \in E$ yi göz önüne alalım. $f^+ \perp f^-$ nin sonucu olarak $\pi f^+ \perp f^-$ gelir ve bundan dolayı $\pi f^+ \perp \pi f^-$ olur. Diğer taraftan;

$$|\pi f^+ + \pi f^-| = |\pi f^+ - \pi f^-| \text{ dir.}$$

Örneğin $|\pi f| = |\pi(|f|)|$[28].

Tanım 2.63. (i) Sıra sınırlı band koruyan operatöre **ortomorfizma** denir.

(ii) Bir E Riesz uzayında tüm ortomorfizmaların kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.

(iii) Tüm E den E ye sıra sınırlı lineer operatörler uzayı $L_b(E)$ dir.

(iv) Tüm E den E ye sıra sınırlı lineer operatörlerin uzayı $L_b(E)$ olmak üzere $Orth(E)$, $L_b(E)$ nin bir vektör alt uzayıdır.

$$Orth(E) = \{T \in L_b(E) : x \perp y \Rightarrow Tx \perp y\}$$

(v) Tüm E den E ye sıra sınırlı lineer operatörlerin uzayı $L_b(E)$ ve E den E ye band koruyan operatörler $S(E)$ olsun. $Orth(E)$ kümesi

$$Orth(E) = S(E) \cap L_b(E)$$

şeklinde ifade edilir[2].

T bir ortomorfizmadır. Ancak ve ancak $Tu \wedge v$, E deki $u \wedge v$ için $Tu \wedge v$ olmalıdır. $Orth(E)$ ile E de bütün ortomorfizmaların kümesini ifade edelim. E deki bütün sınırlı lineer operatörler uzayı $L_b(E)$ dir. $L_b(E)$ de bulunan kısmi sıralılara göre örneğin, $\forall u \in E^+$ için $\pi_1 \leq \pi_2$ iken $\pi_1 u \leq \pi_2 u$ ise $Orth(E)$ vektör uzayı bir sıralı vektör uzayıdır. Eğer $L_b(E)$ de $0 \leq \pi_1 \leq \pi_2$ ve π_2 ortomorfizma ise π_1 de ortomorfizmadır. E bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğunda, $L_b(E)$ uzayı da Dedekind tam Riesz uzayıdır[28].

Herhangi $u \in E^+$ için $\pi^+ u = \sup(\pi w : 0 \leq w \leq u)$ dır[28].

Teorem 2.64. Bir Arşimedyan Riesz uzayı üzerinde bir $T : E \to E$ operatörü için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir[2].

(i) T band koruyandır.

(ii) $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ dir.

(iii) Her bir $x \in E$ için $Tx \in B_x$ dir.

İspat. (i)$\Rightarrow$ (ii), $x \perp y$ için $y \perp B_x$. $T(B_x) \subseteq B_x$ dolayısıyla $y \perp T(B_x)$ dir. Özellikle $Tx \perp y$ dir.

(ii)$\Rightarrow$ (iii), $x \in E$ olsun. $y \perp B_x$ sağlansın. Herhangi bir $y \in B_x^d$ için $x \perp y$ dir ve böylece $\forall y \in B_x^d$ için $Tx \perp y$ dir. Bu sebeple $T_x \in B_x^{dd} = B_x$.

(iii)$\Rightarrow$ (i), B, E nin bir bandı olsun. $x \in B$ ise $B_x \subseteq B$ ve böylece $T_x \in Bx \subseteq B$. Bu $T(B) \subseteq B$ dir ve böylece T band koruyandır.

■

Lemma 2.65. (Meyer) E ve F ikilisi Riesz uzayı ve F Arşimedyan olsun. Bir $T : E \to F$ sıra sınırlı operatör ayrıklığı koruyan ise $\forall x, y \in E^+$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır[2];

$$(Tx)^+ \wedge (Ty)^- = 0$$

Teorem 2.66. Bir sıra sınırlı $T : E \to F$ operatörü iki Riesz uzayı ile F Arşimedyan arasında ayrıklık koruyan ise var olan modül $\forall x \in E$ için

$$|T|(|x|) = |T(|x|)| = |T(x)|$$

sağlanır[2].

Teorem 2.67. (Bigard-Keimel-Conrad-Diem) E bir Arşimedyan Riesz uzayı ise $Orth(E)$, cebir ve latis işlemleri altında bir Arşimedyan Riesz uzayıdır. Bu eğer $S, T \in Orth(E)$ ise $\forall x \in E^+$ için

$$[S \vee T] = S(x) \vee T(x)$$

$$[S \wedge T] = S(x) \wedge T(x)$$

sağlanır[2].

İspat. $T : E \to E$ bir ortomorfizma olsun. T nin modülü vardır ve herhangi bir $x \in E^+$ için $|T|(x) = |Tx|$ sağlanır. Açık bir biçimde $|T|$ bir ortomorfizmadır ve bu $Orth(E)$ bir Riesz uzay olduğunu gösterir. Bu iki formülden yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler ispatlanır;

$$S \vee T = \tfrac{1}{2}(S + T + |S - T|)$$

$$[S \wedge T](x) = S(x) \wedge T(x).$$

■

Teorem 2.68. Arşimedyan Riesz uzayı üzerinde her ortomorfizma sıra süreklidir[2].

İspat. $T : E \to E$ bir Arşimedyan Riesz uzayında bir pozitif operatör olsun ve E de $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. $\forall\alpha$ ve bir $x \in E$ için $0 \leq x_\alpha \leq x$ sağlanır.

Şimdi farzedelim ki $\forall\alpha$ için $0 \leq y \leq T(x_\alpha) \leq T(x)$ olacak şekilde bir $y \in E^+$ olsun. Herbir $\epsilon > 0$ için $(x_\alpha - \epsilon x)^+ \wedge (x_\alpha - \epsilon x)^- = 0$ sağlandığından dolayı şunu görebiliriz;

$$0 \leq (y - \epsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \epsilon x)^- \leq T(x_\alpha - \epsilon x)^+ \wedge (x_\alpha - \epsilon x)^- = 0 \text{ dır.}$$

Bu nedenle, $\forall\epsilon > 0$ için;

$$0 = (y - \epsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \epsilon x)^- \uparrow_\alpha (y - \epsilon Tx)^+ \wedge \epsilon x \text{ dır.}$$

Burada $(y - \epsilon Tx)^+ \wedge x = 0$ bulunur. E, Arşimedyan olduğundan dolayı, buradaki sonuç $y \wedge x$ dir. Sonuç olarak eğer T operatörü sıra sürekli ise $y = y \wedge T(x) = 0$ dır ve bunun sonucunda E de $T(x_\alpha) \downarrow 0$ sağlanmış olur. ■

Teorem 2.69. Eğer E bir Dedekind tam Riesz uzayı ise $Orth(E)$, $L_b(E)$ de birim operatörlerle üretilen banddır[2].

İspat. B_I, I birim operatörle üretilen band olsun. $0 \leq T \in Orth(E)$ olsun. I, $Orth(E)$ Arşimedyan Riesz uzayındaki bir zayıf sıra birimli olduğundan dolayı $T \wedge nI \uparrow T$ dir. $(T \wedge nI) \subseteq B_I$ dan $T \in B_I$ elde ederiz. Bunun sonucu olarak $Orth(E) \subseteq B_I$ dır. Böylece $Orth(E) = B_I$ dır. ■

Tanım 2.70. (Birkhoff-Pierce) Bir E Riesz uzayı birleşmeli çarpım altında $x, y \in E^+$ için $xy \in E^+$ özelliğini sağlıyorsa, E cebirine bir **Riesz cebiri** denir[2].

Bir E Riesz cebiri her bir $z \in E^+$ olduğunda $x \wedge y = 0$ için, $(x, z) \wedge y = (z, x) \wedge y$ özelliğini sağlıyorsa E ye bir f**-cebiri** denir[2].

E bir f-cebir olsun. Her bir $y \in E^+$ için $x \to xy$ ve $x \to yx$ (E den E ye) olan fonksiyonlar birer pozitif ortomorfizmadır.$\forall y \in E$ için,

$$x \to xy = xy^+ - xy^- \text{ ve } x \to yx = y^+x - y^-x$$

fonksiyonları E üzerinde birer ortomorfizmadır[2].

Teorem 2.71. Bir f-cebirinde $x \perp y$ ise $xy = yx = 0$ dır[2].

İspat. $x \wedge y = 0$ olsun. Buradan $(xy) \wedge y = 0$ ve $xy = (xy) \wedge (xy) = 0$ dır. Eğer $x \perp y$ ise

$$xy = (x^+ - x^-)(y^+ - y^-) = x^+y^+ - x^-y^+ - x^+y^- + x^-y^- = 0 \text{ dır.}$$

İfadesinin simetriği kullanılarak;

$$yx = (y^+ - y^-)(x^+ - x^-) = y^+x^+ - y^-x^+ - y^+x^- + y^-x^- = 0$$

$yx = 0$ bulunur. ■

3. ORTOMORFİZMALAR VE VEKTÖR LATİSİN MERKEZİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

E üzerindeki bütün ortomorfizmaların $Orth(E)$ koleksiyonu bir Arşimedyan vektör latisdir ve f-cebirdir. Bu özellikler $Orth(E)$ koleksiyonunu zenginleştirir. E bir f-cebiri olduğunda $\forall x, y \in E$ için $\pi_x(y) = xy$ tarafından tanımlanmış π_x fonksiyonu, E üzerinde bir ortomorfizmadır. Eğer E, birimli bir f-cebiri ise $x \to \pi_x$ dönüşümü E den $Orth(E)$ ye bir latis ve cebir izomorfizmasıdır. Bu nedenle $\forall \pi \in Orth(E)$ için $\pi = \pi_x$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır ve ancak ve ancak $x \in E^+$ olduğunda π bir pozitif ortomorfizmadır.

$$Orth(E) = \{\pi \in L_b(E) : x \perp y \Rightarrow \pi x \perp y\} \text{ dir[2].}$$

Eğer E bir birimli f-cebiri ise

$$E = Orth(E) \text{ dir.}$$

Özellikle;

$$Orth(Orth(E)) = Orth(E) \text{ dir.}$$

İzdüşüm bandları merkezcil operatörlerdir(Teorem 2.59. den). Eğer E temel izdüşüm özelliğini sağlıyorsa E birçok izdüşüm bandı içerir ve böylece merkez genişletilir[9].

Tanım 3.1. Bir E Riesz uzayında her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda |x|$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ skaleri bulunabiliyorsa $T : E \to E$ operatörüne **merkezcil operatör** denir. Tüm merkezcil operatörlerin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir. $Z(E)$ kümesi $Orth(E)$ kümesinin bir altcebiri ve aynı zamanda altlatisidir[29][31].

Teorem 3.2. Eğer E Dedekind σ-tam ve $x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ sağlanıyorsa $Ty = x$ olacak şekilde bir $T \in Z(E)$ vardır[9].

Bir E Arşimedyan vektör latisinin merkezi $Z(E)$

$$\| T \| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |T| \leq \lambda I_E\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir $u \in E^+$ için $Z(E)$ üzerinde

$$\| T \|_u = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |Tu| \leq \lambda u\} \text{ dur.}$$

$u \in E^+$ ve $v \in \{u\}^{dd}$ için

$$\| T \| = \sup\{\| T \|_u : u \in E^+\}$$

ve $\| T \|_v \leq \| T \|_u$ dur[9].

Teorem 3.3. E bir vektör latis olsun. $Z(Orth(E))$ ve $Z(E)$ cebir ve latis izomorfiktir. Özellikle $Z(Orth(E))$, $Z(E)$ ile birlikte tanımlanacaktır[9].

İspat.

$$\sigma : Z(E) \to Z(Orth(E))$$

$$\pi \to \sigma_\pi$$

şeklinde bir lineer fonksiyon tanımlanır. $\forall \pi^{'} \in Orth(E)$ için

$$\sigma_\pi(\pi^{'}) = \pi \circ \pi^{'} \text{ dır.}$$

Bu şekilde tanımlanan σ bir latis ve cebir izomorfizmadır. σ aynı zamanda cebir homomorfizmasıdır. σ nın bir latis homomorfizma olduğunu ispatlayalım. $\pi^{'} \in (Orth(E))^+$ olsun. $Orth(E)$ nin bir f-cebiri olduğundan yararlanarak;

$$|\sigma_\pi(\pi^{'})| = |\pi \circ \pi^{'}| = |\pi| \circ \pi^{'} = \sigma_{|\pi|}(\pi^{'}),$$

bundan dolayı bütün $\pi \in Z(E)$ için;

$$|\sigma_\pi| = \sigma_{|\pi|} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak σ bir latis homomorfizmasıdır. $\sigma_\pi = 0$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)$ ise

$$\sigma_\pi(I_E) = \pi = 0(I_E, E \text{ üzerinde birimdir)dır.}$$

Böylece σ içine bir fonksiyondur. Şimdi σ nın örten bir fonksiyon olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\varphi \in Z(Orth(E))$ yi alalım. İddia ediyoruz ki; $\sigma_{\varphi(I_E)} = \varphi$ dir. $\forall \pi^{'} \in Orth(E)$ için;

$$\varphi(I_E) \circ \pi^{'} = \varphi(\pi^{'})$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için $\forall \pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$ için

$$\psi : Orth(E) \times Orth(E) \to Orth(E)$$

bilineer fonksiyonu tanımlayalım;

$$\psi(\pi_1, \pi_2) = \varphi(\pi_1) \circ \pi_2$$

burada ψ nin sıra sınırlı olduğunu görülür. $\varphi \in Z(Orth(E))$ olduğu için $Orth(E)$ deki $\pi_1 \perp \pi_2$ için $\varphi\pi_1 \perp \pi_2$ dir. Bundan dolayı $\varphi(\pi_1) \circ \pi_2 = 0$ dır. Çünkü bu bileşke bir f-cebir çarpımıdır. ψ ortosimetriktir ve bu nedenle ψ simetriktir[9]. Bunun sonucu olarak;

$$\psi(\pi_1, \pi_2) = \psi(\pi_2, \pi_1) \text{ dir.}$$

$\forall \pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$ için şöyle yazabiliriz;

$$\varphi(\pi_1) \circ \pi_2 = \varphi(\pi_2) \circ \pi_1$$

Özellikle $\forall \pi^{'} \in Orth(E)$ için $\varphi(I_E) \circ \pi^{'} = \varphi(\pi^{'}) \circ I_E = \varphi(\pi^{'})$. Buradan

$$\sigma_{\varphi(I_E)} = \varphi \text{ dır.}$$

Bu nedenle σ latis ve cebir izomorfizmasıdır ve

$$Z(Orth(E)) = Z(E)$$

diye yazabiliriz[9].

■

Teorem 3.4. E bir vektör latis olsun. Eğer bir $Orth(E)$ Banach latis ise

$$Orth(E) = Z(E) \text{ dir[9].}$$

İspat. $Orth(E)$ nin bir Banach latis olmasından;

$$Orth(Orth(E)) = Z(Orth(E)) \text{ dir.}$$

Diğer yandan, $Orth(E)$ nin bir birim elemanlı f-cebiri olmasından

$$Orth(Orth(E)) = Orth(E) \text{ dir.}$$

Yukarıdaki Teorem 3.3. den

$$Orth(E) = Z(E) \text{ dir.}$$

Sonuç olarak $\pi \in Z(Orth(E))$ ise ((Teorem 4,[9]), buradan

$$Orth(Orth(E)) = Z(Orth(E)) \text{ dır.}$$

$$Orth(Orth(E)) = Orth(E) \text{ den,}$$

$$Z(Orth(E)) = Z(E) \text{ dır.}$$

Bunun sonucundan;

$$Orth(E) = Z(E)$$

elde edilir[9]. ■

E vektör latis olsun ve $E^{\sim}$ de sıra duali olduğunu daha önce belirtilmiştir. E üzerinde tüm pozitif lineer operatörlerinin farklarını $L_r(E)$ olarak ifade edeceğiz. Eğer $T \in L_r(E)$ ise,

$$\text{Bir } x \in E \text{ ve } f \in E^{\sim} \text{ için } \tilde{T}f(x) = fT(x)$$

ifadesi $\tilde{T} \in L_r(E^{\sim})$ tanımlar. $T \in Z(E)$(veya $T \in Orth(E)$) ancak ve ancak $\tilde{T} \in Z(E^{\sim})$(veya $\tilde{T} \in Orth(E^{\sim})$) dir[9].

Teorem 3.5. E bir vektör latis olsun.

(a) $Orth(E^{\sim})$ bir Banach uzayıdır.

(b) $Orth(E^{\sim}) = Z(E^{\sim})$ dir.

(c) $Orth(E) = Z(E)$ dir.

Bu durumlar için aşağıdaki diagram doğrudur[9].

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c)$$

İspat. $E^{\sim}$, Dedekind tam olduğundan $(a) \Leftrightarrow (b)$ yi elde ediyoruz. Şimdi $(b) \Rightarrow (c)$ yi kanıtlayacağız. $Orth(E) \subset Z(E)$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten de $T \in Orth(E)$ yi alalım, $\tilde{T} \in Orth(E^{\sim}) = Z(E^{\sim})$ olduğundan $T \in Z(E)$ yi elde ederiz. Bundan dolayı $Orth(E) = Z(E)$ dir[9]. ■

E, bütün $\mathbb{R}$ reel sayıların kümesi üzerine bir Arşimedyan vektör latisi (Riesz uzayı) olsun. Bir $E \times E \to E$ lineer tasviri herbir değişkende ayrı olarak ortomorfizma ise bu lineer tasvire **biortomorfizma** denir. Başka bir ifadeyle, ayrı olarak band koruyan ve ayrı olarak sıra sınırlı olan operatörlere **biortomorfizma** denir[6][8][16]. $E \times E$ den E ye bütün biortomofizmaların kümesi $Orth(E, E)$ tarafından gösterilir.

Biortomorfizmalar, R. Yılmaz, K. Rowlands[27], K. Boulabair, W. Brahmi [6] tarafından tanıtılmıştır. Biliyoruz ki E bir yarıasal f-cebiri ise $Orth(E)$, $Orth(E, E)$ in bir vektör alt latistir ve eğer E bir yarıasal Dedekind tam f-cebiri ise $Orth(E), Orth(E, E)$ de bir sıra idealdir[6]. Eğer E, bir Arşimedyan vektör latis ise $Orth(E)$ de bir Arşimedyan vektör latisdir. $Orth(E)$ deki latis işlemleri noktasal verilir. Yani $T, S \in Orth(E)$ ve $0 \leq x \in E$ ise,

$$(T \wedge S)(x) = T(x) \wedge S(x) \text{ ve } (T \vee S)(x) = T(x) \vee S(x).$$

E üzerindeki ortomorfizmalar değişmelidir. $T : E \times E \to E$ bir bilineer fonksiyon olsun ve $T(x, .) : E \to E$ ve $T(., x) : E \to E$ operatörleri $\forall y \in E$ için;

$$T(x, .)(y) = T(x, y) \text{ ve } T(., x) = T(x, y)$$

şeklinde tanımlanır[7][24][26].

Şunu söyleyebiliriz ki; $T : E \times E \to E$, E üzerinde bir bilineer fonksiyonu eğer $\forall x \in E$ için $T(x, .) \in Orth(E)$ ve $T(., x) \in Orth(E)$ ise bu bilineer fonksiyon bir ortomorfizmadır. $Orth(E, E)$ deki latis işlemleri aşağıdaki ilişkileri verir;

$A, B \in Orth(E, E)$, $0 \leq x$ ve $0 \leq y \in E$ ise;

$$(A \wedge B)(x, y) = A(x, y) \wedge B(x, y) \text{ ve } (A \vee B)(x, y) = A(x, y) \vee B(x, y) \text{ dir.}$$

Bir $T : E \times E \to E$ bilineer fonksiyonu eğer $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $T(x, y) = 0$ ise **ortosimetriktir** denir. Eğer $\forall x, y \in E$ için $T(x, y) = T(y, x)$ oluyorsa T **simetriktir** denir. $\forall x \in E$ için $T(x, .)$ ve $T(., x)$ operatörleri ayrıklığı koruyan ise T operatörü ayrı olarak ayrıklığı koruyandır. E üzerindeki bir biortomorfizma bir ortosimetriktir tasvirdir ve ayrıca simetriktir[16]

Ortomorfizmaların bu değişme özelliğini kullanarak aşağıdaki eşitliklerdeki sonuçları çıkarabiliriz $\forall A, B \in Orth(E, E)$ ve $x, y, z \in E$ için;

$$A(B(x, y), z) = A(x, B(y, z)) = B(x, A(y, z))$$

özdeşlikleri geçerlidir[5][18][19][20].

Bir f-cebirinin tanımından E, tüm $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerine birleşmeli bir cebir olsun. E aynı zamanda sıra ve çarpım özelliğine uyumlu bir vektör latis ise E ye bir **latis sıralı cebir** denir. Eğer E, $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in E$ için $(xz) \wedge y = (zx) \wedge y = 0$ ifadesini sağlıyorsa bir E latis sıralı cebirine f-cebiridir denir.

Bir E Arşimedyan f-cebirinin bütün nilpotent elemanlarının kümesi $N(E)$ tarafından ifade edilir. Yani;

$$N(E) = \{x \in E : x^2 = 0\} \text{ dır.}$$

Bir E Arşimedyan f-cebiri eğer $N(E) = \{0\}$ ise yarıasaldır[20]. Yani E nin yarıasal olabilmesi için gerek ve yeter şart E nin sıfırdan farklı nilpotent elemanlarının olmamasıdır. E deki bütün pozitif elemanlarının kümesini E^+ ile gösterildiğini daha önce göstermiştik[16].

Teorem 3.6. E bir Arşimedyan vektör latis olsun.

Eğer $e \in E^+$ ise $Orth(E, E)$, $\forall A, B \in Orth(E, E)$ ve $x, y \in E$ için:

$$(A *_e B)(x, y) = A(x, B(e, y))$$

şeklinde tanımlanan çarpıma göre bir Arşimedyan f-cebiridir[6].

Farzedelim ki E bir Arşimedyan vektör latisi ve bu $E^{\sim}$ ayrık sıra dualine sahip olsun. $E^{\sim\sim}$ tarafından E in sıra biduali gösterilsin. E in sıra sürekli sıra biduali $E_n^{\sim\sim}$ tarafından gösterilir. Biliniyor ki E in sıra biduali ve sıra sürekli biduali denktir[20].

Teorem 3.7. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir vektör latis olsun. $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ bir Dedekind tam vektör latisdir[6].

İspat. $T \in Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ olsun. $|T|$ ve T^+,T^- $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ e aittir. E in ikinci sıra dualinin Dedekind tamlığı $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ nın Dedekind tamlığıdır [6]. ■

E bir birimli f-cebir ve $A \in Orth(E, E)$ olsun. $A : E \times E \to E$ fonksiyonu bir bilineer ayrı ortomorfizmadir[16].

Herhangi bir A cebiri için (birleşmeli fakat değişmeli olmak zorunda değil) A^{**} cebir bidualinde bir çarpım tanıtılabilir. Buna **Arens çarpımı** denir. Bu 3 adımda tamamlanır. $a, b \in A$, $f \in A^*$ ve $F, G \in A^{**}$ verilsin, $f \cdot a \in A^*$, $G \cdot f \in A^*$ ve $F \cdot G \in A^{**}$ için aşağıdaki eşitlikleri tanımlanır;

(1) $(f \cdot a)(b) = f(ab)$

(2) $(G \cdot f)(b) = G(f \cdot b)$

(3) $(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$ dir[3][4][10][12][17].

Arens çarpımını kullanarak aşağıdaki bilineer fonksiyonlarını kuracağız[3].

1-) $\forall x, y \in E, f \in E^{\sim}$ için , $A^{\sim} : E^{\sim} \times E \to E^{\sim}, A^{\sim}(f, x)(y) = f(A(x, y))$

2-) $\forall x \in E$ için , $A^{\sim\sim} : E^{\sim\sim} \times E^{\sim} \to E^{\sim}$, $A^{\sim\sim}(G, f)(x) = G(A^{\sim}(f, x))$

3-) $\forall f \in E^{\sim}$ için , $A^{\sim\sim\sim} : E^{\sim\sim} \times E^{\sim\sim} \to E^{\sim\sim}, A^{\sim\sim\sim}(G, F)(f) = G(A^{\sim\sim}(F, f))$

Biliyoruz ki E birim elemanlı f-cebir ise $E^{\sim\sim}$ ikinci sıra duali de birim elemanlı f-cebirdir ayrıca birimli Dedekind tam f-cebirdir. $K(T) = \{F \in E^{\sim\sim} : T(F, F) = 0\}$ kümesini tanımlarız.

Önerme 3.8. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir f- cebiri ve $T \in Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ olsun. Bu küme

$$K(T) : \{\forall G \in E^{\sim\sim} \text{ için } F \in E^{\sim\sim} : T(F, G) = 0\}$$

Ayrıca $K(T)$ bir sıralı idealdir[6].

Önerme 3.9. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir f- cebiri ve $A \in Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ ve $F \in E^{\sim\sim}$ olsun. Ancak ve ancak $A(F, F) = 0$ ise $A(F, F) \in K(A)$ dır[6].

Bir E f-cebiri eğer $\forall x, y \in E$ için $xy = 0$ ise E ye aşikâr denir. Aksi halde E ye aşikâr olmayan bir f-cebiri denir[28].

Önerme 3.10. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir f- cebiri olsun. Aşağıdaki iddialar eşdeğerdir[6]:

(i) $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim}) \neq 0$.

(ii) $E^{\sim\sim}$ bir aşikâr olmayan f-cebirdir.

(iii) $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ bir aşikâr olmayan f-cebirdir.

Teorem 3.11. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir Arşimedyan birimli(e) f-cebiri olsun. $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ vektör latisi $*_e$ çarpımına göre bir yarıasal f-cebiridir[6].

E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir Arşimedyan birimli f-cebiri olsun ve $E^{\sim\sim}$ de ikinci sıra dualidir.

$$J : E \to Orth(E) \text{ ve } K : Orth(E) \to Orth(E^{\sim\sim}), K(f) = f''$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Burada f'', f in ikinci eşleniğidir. Eğer $T \in Orth(E^{\sim\sim})$ ise $\forall G, F \in E^{\sim\sim}$ için:

$$T^*(G, F) = T(GF) \text{ ile } T^* : E^{\sim\sim} \times E^{\sim\sim} \to E^{\sim\sim}$$

fonksiyonu tanımlayabiliriz. T^*, $E^{\sim\sim}$ üzerinde bir biortomorfizmadir. Bu yüzden $\forall T \in Orth(E^{\sim\sim})$ için $H(T) = T^*$ ile $H : Orth(E^{\sim\sim}) \to Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ fonksiyonunu tanımlarız. İşte bu H fonksiyonu bir bire bir latis homomorfizmasıdır. Bu nedenle $Orth(E^{\sim\sim})$, $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ içine bir vektör altlatisdir[6].

4. SONUÇLAR

Sonuç 4.1. Eğer E bir birimli f-cebiri ise $E = Orth(E)$ dir. Özellikle;

$$Orth(Orth(E)) = Orth(E) \text{ dir[9].}$$

Sonuç 4.2. Eğer E Dedekind σ-tam ve $x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ sağlanıyorsa $Ty = x$ olacak şekilde $T \in Z(E)$ vardır[9].

Sonuç 4.3. E bir vektör latis olsun. $Z(Orth(E))$ ve $Z(E)$ cebir ve latis izomorfiktir[9].

Sonuç 4.4. Bütün $\pi \in Z(E)$ için;

$$|\sigma_\pi| = \sigma_{|\pi|} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak σ bir latis homomorfizmasıdır[9].

Sonuç 4.5. $\forall \pi' \in Orth(E)$ için $\varphi(I_E) \circ \pi' = \varphi(\pi') \circ I_E = \varphi(\pi')$. Buradan

$$\sigma_{\varphi(I_E)} = \varphi \text{ dır.}$$

Bu nedenle σ latis ve cebir izomorfizmasıdır[9].

Sonuç 4.6. E bir vektör latis olsun. Eğer bir $Orth(E)$ Banach latis ise

$$Orth(E) = Z(E) \text{ dir[9].}$$

Sonuç 4.7. $\pi \in Z(Orth(E))$ ise ((Teorem 4,[9]), buradan

$$Orth(Orth(E)) = Z(Orth(E)) \text{ dır.}$$

$$Orth(Orth(E)) = Orth(E) \text{ den,}$$

$$Z(Orth(E)) = Z(E) \text{ dır.}$$

Bunun sonucundan;

$$Orth(E) = Z(E)$$

elde edilir[9].

Sonuç 4.8. Eğer $T \in L_r(E)$ ise,

$$\text{Bir } x \in E \text{ ve } f \in E^{\sim} \text{ için } \tilde{T}f(x) = fT(x)$$

ifadesi $\tilde{T} \in L_r(E^{\sim})$ tanımlar. $T \in Z(E)$(veya $T \in Orth(E)$) ancak ve ancak $\tilde{T} \in Z(E^{\sim})$(veya $\tilde{T} \in Orth(E^{\sim})$) dir[9].

Sonuç 4.9. E bir vektör latis olsun.

(a) $Orth(E^{\sim})$ bir Banach uzayıdır.

(b) $Orth(E^{\sim}) = Z(E^{\sim})$ dir.

(c) $Orth(E) = Z(E)$ dir [9].

Sonuç 4.10. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir f- cebiri ve $T \in Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ olsun. Bu küme

$$K(T) : \{\forall G \in E^{\sim\sim} \text{ için } F \in E^{\sim\sim} : T(F, G) = 0\}$$

Ayrıca $K(T)$ bir sıralı idealdir[6].

Sonuç 4.11. E, $E^{\sim}$ ayrık sıra dualli bir Arşimedyan birimli(e) f-cebiri olsun. $Orth(E^{\sim\sim}, E^{\sim\sim})$ vektör latisi $*_e$ çarpımına göre bir yarıasal f-cebiridir[6].

KAYNAKLAR

[1]. Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D., 2002, *An Invitation to Operator Theory*, Amer. Math. Soc.

[2]. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O., 2006, *Positive Operators*, Springer Science-Business Media.

[3]. Arens, R., 1951, The Ajoint of a Bilinear Operation, *Proc. Amer. Math. Sot.*, 2.

[4]. Arens, R., 1951, Operations Induced in Function Classes, *Monafsh. Math. 55*,1-19.

[5]. Boulabair, K. and Brahmi, W., 2014, Orthoproducts and f-representations of Archimedean l-groups, *Algebra Universalis*, 72, 81-89.

[6]. Boulabair, K.and Brahmi, W., 2016, Multiplicative Structure of Biorthomorphisms and Embedding of Orthomorphisms, *Indagationes Math.*, 27, 786-798.

[7]. Bu, Q., Buskes, G. and Kusraev, A. G.,2007, Bilinear Maps on Products of Vector Lattices, *Positivity*, 97-126.

[8]. Buskes, G., Page, R. and Yılmaz, R., 2010, A Note on Biorthomorphisms, *Vector Measures, Integration and Related Topics*, 201, 99-107.

[9]. Chil, E., Hassen, B. and Mohamed, M., 2015, A Relationship Between the Space of Orthomorphisms and the Centre of a Vector Lattice, *Positivity*, 19:457-465.

[10]. Cıvın, P., Yood, B., 1961, The Second Conjugate Space of a Banach Algebra as an Algebra, *Pacific J. Math.*, 11, 847-870.

[11]. Çakar, Ö. 2007, *Fonksiyonel Analize Giriş 1*, A,Ü Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

[12]. Day, M. M., Yood, B., 1957, Amenable Semigroups, *Illinois J. Math.*, 1, 509-544.

[13]. Gök, Ö., 1997 *Fonksiyonel Analize Giriş*, YTÜ yayını, FE. MAT-97.002.

[14]. Gök, Ö. and Pestil Yıldız, Ş., 2013, On the center of Banach f-modules, *Pure Math. Sci.*, 2(1), 49-54.

[15]. Gök, Ö. and Pestil Yıldız, Ş., 2013, Extended results on f-orthomorphisms over the second order dual of an f-algebra, *Pure Math. Sci.*, 2(3), 119-114.

[16]. Gök, Ö., 2017, On the Adjoints of Biorthomorphisms, *International Mathematical Forum*, 12(3), 97–102.

[17]. Gulick, S. L., 1966, The Bidual of A Locally Multiplicatively-convex Algebra, *Pacific J. Math.*, 17, 71-96.

[18]. Huijsmans, C. B., 1989, The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras II, *J. Operator Theory*, 22, 277-290.

[19]. Huijsmans, C. B. and De Pagter, B., 1982, Ideal Theory in f-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 269, 225-245.

[20]. Huijsmans, C. B. and De Pagter, B., 1984, The Order Bidual of Lattice Ordered Algebras, *J. Funct. Anal.*, 59, 41-64.

[21]. Hungerford, T. W., 1980, *Algebra*, Springer.

[22]. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., 1971, *Riesz Spaces Volume I*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, London.

[23]. Meyer, P. and Nieberg, 1991, *Banach Lattices*,Universitext, Springer, Berlin, xvi+395.

[24]. Page, R., 2005, *On Bilinear Maps of Order Bounded Variations*, PhD Thesis, University of Mississipi.

[25]. Schaefer, H. H., 1974, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, Berlin.

[26]. Swartz, C., 1989, Bilinear Mappings Between Lattices, *Bull. Math. Soc. Sci. Math.*, 33 (81), no. 2, 147-152.

[27]. Yılmaz, R. and Rowlands, K., 2006, On Orthomorphisms, Quasi-orthomorphisms and Quasi-multipliers, *J. Math. Anal. Appl.*, 313, 120-131.

[28]. Zaanen, A. C., 1983, *Riesz Spaces Volume II*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, New York, London.

[29]. Wickstead, A. W., 1981, Extremal Structure of Cones of Operators, *Quart. J. Math.*,v(2)32: 239-253.

[30]. Wickstead, A. W., 2002, *Vector and Banach Lattices*, Pure Mathematics Research Centre, Queen's University Belfast.

[31]. Wickstead, A. W., 2009, Banach Lattices with Topologically Full Center, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 11(2), 50-60.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Hüseyin YILDIZ
Doğum Yeri	Akçadağ
Doğum Tarihi	30.05.1989
Uyruğu	T.C.
Telefon	0 (533) 030 6653
E-Posta Adresi	huseyinyldz44@gmail.com
Web Adresi	...

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Erciyes Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2012

Yüksek Lisans	
Üniversite	...
Enstitü	...
Anabilim Dalı	...
Programı	...
Mezuniyet Yılı	...

Doktora	
Üniversite	...
Enstitü	...
Anabilim Dalı	...
Programı	...
Mezuniyet Yılı	...

Makale ve Bildiriler
...