T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Mehmet DAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Mehmet DAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Emre TAŞ

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 09.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Fatih DERİNGÖZ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Şerifenur CEBESOY
Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Emre TAŞ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet DAĞ

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm teşekkürlerin yaptıkları yanında az kalacağı kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Doç. Dr. Emre TAŞ'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca kıymetli zamanını benim hazırladığım çalışmaya ayırıp yazım aşamasında bütün gayretini gösteren ve yardımcı olan arkadaşım Koray ŞANTAŞ'a teşekkür ediyorum.

Son olarak çalışmamda desteğini ve bana olan güvenini benden esirgemeyen, bana hep destek olan sevgili eşime ve beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler.

Temmuz, 2019 Mehmet DAĞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\{\mathbf{T_j}\}$	: Operatör dizisi
$\mathbf{C[a,b]}$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbf{B_n}$	: $n.$ mertebeden Bernstein polinomu
$\mathbf{X(I)}$	: I üzerinde reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$\mathbf{C^\infty(I)}$	: I üzerinde her mertebeden türevlenebilir fonksiyonların uzayı
ρ	: Modüler fonksiyoneli
$\mathbf{L}^\rho\mathbf{(I)}$	: I üzerinde ρ tarafından üretilen modüler uzay
$\mathbf{E}^\rho\mathbf{(I)}$	: $L^\rho(I)$ uzayının sonlu elemanlarının uzayı
$\mathbf{\lvert I \rvert}$	: I kümesinin Lebesgue ölçüsü
$\chi_\mathbf{A}$	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\|\|_\rho$	: F-norm
$\mathbf{L}^\varphi\mathbf{(I)}$	: I üzerinde φ tarafından üretilen Orlicz uzayı
$\overline{\mathbf{A}}$	: A kümesinin kapanışı
$\rightrightarrows$	: düzgün yakınsama

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Mehmet DAĞ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emre TAŞ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, modüler uzaylar ve yaklaşım teorisi ile ilişkili temel kavramlar tanıtılıp bunlara ilişkin bilinen bazı sonuçlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, klasik Korovkin yaklaşım teoreminin modüler uzaylara genişlemesi incelenmiştir.

Son bölümde ise, üçüncü bölümde verilen sonuçların bazı ayrık operatörlere uygulamaları gözönüne alınmıştır.

Temmuz 2019, 47 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Korovkin teorisi, yaklaşım teorisi, pozitif lineer operatörler, modüler uzaylar.

ABSTRACT

MSc THESIS

KOROVKİN TYPE APPROXIMATION THEOREMS IN MODULAR SPACES

Mehmet DAĞ

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Emre TAŞ

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

In chapter two, the basic concepts of modular spaces and approximation theory have been recalled and some results concerning these concepts have also been considered.

In chapter three, the extension of classical Korovkin approximation theorem has been examined in modular spaces.

In the final chapter, some applications to discrete operators of the results given in chapter 3 have been considered.

July 2019, 47 Pages.

Keywords: Korovkin Theory, approximation theory, positive linear operators, modular spaces.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, pozitif lineer operatörler önemli bir rol oynamaktadır. Yaklaşım teorisinin gelişiminde 1885 yılında Karl Weierstrass'ın kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona cebirsel ve trigonometrik polinomlarla yaklaşımına ilişkin teoreminin ispatı kilit rol oynamıştır [22]. Bu ispat uzun ve karışık olduğundan birçok matematikçi daha basit ve anlaşılabilir bir ispat bulmak için çaba göstermiştir. Carl Runge (1885), Henri Lebesgue (1908), Edmund Landau (1908), Charles de la-Vallée-Poussin (1908), Lipot Fejér (1916) ve tabi ki, Sergej N. Bernstein (1912) bu teorem ile ilgilenen bazı büyük matematikçilerdir[18]. Bu kapsamda günümüzde de iyi bilinen Bernstein polinomları, her $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

inşa edilmiştir. Bu polinomlar yardımıyla Bernstein, Weierstrass'ın teoreminin kolayca anlaşılır ve kısa bir ispatını vermeyi başarmıştır. Daha sonra Bernstein polinomları yerine daha genel operatörler konulabilir mi sorusu akla gelmiştir ve devamında pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Bohman [7], Korovkin [12] ve Popoviciu [19] birbirinden bağımsız olarak $\{T_j\}$ operatör dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli koşullar nedir sorusuna cevap vermiştirler. Böylece pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutan Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır. Öncelikle Korovkin teoremini hatırlayalım. 1953 yılında Korovkin $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ olmak üzere $\{T_je_k\}$ dizisi $k = 0,1,2$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde e_k fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $C[0,1]$ uzayındaki her f fonksiyonu için $\{T_jf\}$ dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu ispatlamıştır [12]. Korovkin'in bu çalışmasında, Bernstein'ın yaptığı Weierstrass teoreminin ispatından esinlenilmiştir. Daha sonra Korovkin teoremi birçok matematikçi tarafından çeşitli açılardan genişletilmiştir [1], [8], [14].

Diğer taraftan C. Bardaro ve I. Mantellini [4] Korovkin teoremini modüler uzaylara genişletmiştirler.

Bu yüksek lisans tezi yukarıdaki çalışmaların bir derlemesinden oluşmakta olup amacımız Korovkin teoremini modüler uzaylara genişletmektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde pozitif lineer operatörlere ilişkin bazı temel tanım ve özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.1. X ve Y, reel fonksiyonların iki uzayı olsun. Eğer her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

ise $T : X \to Y$ dönüşümüne lineer operatör denir.
Ayrıca eğer her $f \geq 0, f \in X$ için $Tf \geq 0$ ise T dönüşümü pozitif operatördür denir [18].

Önerme 2.2. $T : X \to Y$ pozitif lineer bir operatör olsun.

(i) $f \leq g$ koşulunu sağlayan her $f, g \in X$ için $Tf \leq Tg$, (Monotonluk)

(ii) her $f \in X$ için $|Tf| \leq T|f|$

gerçeklenir [18].

Tanım 2.3. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak biçimde reel bir c sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir.

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ifadesine de T operatörünün normu denir [13].

Sıradaki sonuç, pozitif lineer operatörlerin bir dizisinin birim operatöre yakınsaklığı için bir gerek ve yeter koşul vermektedir. Bu sonuç birbirlerinden bağımsız olarak üç matematikçi tarafından ispat edilmiştir. 1951 yılında T. Popoviciu [19], 1952 yılında H. Bohman [7] ve 1953 yılında P.P. Korovkin [12]. Literatürde "Bohman-Korovkin Teoremi" olarak bilinen bu sonucu hatırlatalım.

Teorem 2.4. $T_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $[a,b]$ üzerinde

$$T_n(e_j(t);x) \rightrightarrows e_j(x), \quad j = 0,1,2$$

ise her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ üzerinde

$$T_n(f(t);x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir.

$[a,b] = [0,1]$ olmak üzere literatürde Bernstein polinomları olarak bilinen aşağıdaki örnek için Teorem 2.4. gerçeklenir.

Örnek 2.5.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; f \in C[0,1] \text{ ve } x \in [0,1]$$

biçiminde tanımlanan Bernstein polinomları için

$$B_n(1;x) = 1, \quad B_n(t;x) = x$$
$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

olduğundan $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif lineer operatörler dizisi için Teorem 2.4. gerçeklenir [15].

Yukarıdaki sonuçtan dolayı $e_j(x) = x^j, \quad j = 0,1,2$ fonksiyonları, sürekli fonksiyonların uzayında pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu fonksiyonlar genellikle Korovkin test fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır. Bu sonuç birçok matematikçi için ilham kaynağı olmuştur ve farklı yakınsaklık kavramları ile farklı uzaylar göz önüne alınarak genelleştirilmiştir.

Şimdi de bu tez boyunca kullanacağımız modüler uzay kavramına ilişkin temel tanım ve özellikleri verelim.

$I = [a, b]$, reel sayıların kapalı ve sınırlı bir aralığı ile Lebesgue ölçüsünü göz önüne alalım. $f : I \to \mathbb{R}$ hemen hemen eşitliğini sağlayan reel değerli ölçülebilir tüm fonksiyonların uzayını $X(I)$ ile, sürekli tüm fonksiyonların uzayını $C(I)$ ile ve her mertebeden türevlenebilir tüm fonksiyonların uzayını da C^∞ ile gösterelim.

Tanım 2.6. $\rho : X(I) \to \overline{\mathbb{R}_0^+}$ fonksiyoneli

(1°) $\rho[f] = 0 \Leftrightarrow f = 0$, I içinde hemen hemen her yerde,

(2°) her $f \in X(I)$ için $\rho[-f] = \rho[f]$

(3°) her $f, g \in X(I)$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak biçimde her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\rho[\alpha f + \beta g] \leq \rho[f] + \rho[g]$,

koşullarını sağlıyorsa $X(I)$ üzerinde bir modülerdir denir.

(3°) koşulu yerine

(3°)$'$ $\alpha + \beta = 1$ olacak biçimdeki her $\alpha, \beta \geq 0$ için $\rho[\alpha f + \beta g] \leq \alpha\rho[f] + \beta\rho[g]$

alınırsa ρ modülerine konveks modüler denir [4].

$(3°)$ ve $(3°)'$ koşulları tümevarım ile herhangi sonlu sayıda terime genişletilebilir. Yani $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ koşulunu sağlayan $\alpha_j \geq 0$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_j \in X(I)$ için $(3°)$,

$$\rho\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j\Big] \leq \sum_{j=1}^{n} \rho[f_j]$$

ifadesine ve $(3°)'$ ise

$$\rho\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j\Big] \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho[f_j]$$

ifadesine denktir.

Tanım 2.7. Her $f, g \in X(I)$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak biçimdeki $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho[\alpha f + \beta g] \leq N\alpha\rho[Nf] + N\beta\rho[Ng]$$

koşulunu sağlayan bir $N \geq 1$ sabiti varsa ρ modüleri, N-quasi konvekstir denir [4].

Tanım 2.8. Negatif olmayan her $f \in X(I)$ fonksiyonu ve $0 < a \leq 1$ için

$$\rho[af] \leq Na\rho[Nf]$$

olacak biçimde bir $N \geq 1$ sabiti varsa ρ modüleri N-quasi yarı konvekstir denir [4].

$X(I)$ uzayının

$$L^\rho(I) := \{f \in X(I) : \lim_{\lambda \to 0^+} \rho[\lambda f] = 0\}$$

biçiminde tanımlanan altvektör uzayına ρ tarafından üretilen modüler uzay adı verilir. ρ, N-quasi yarı konveks ise $L^\rho(I)$ uzayı,

$$L^\rho(I) = \{f \in X(I) : \rho[\lambda f] < +\infty, \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için } \}$$

biçiminde bir karakterizasyona sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir [17]. Açıkça görüleceği gibi her N-quasi konveks modüler, N-quasi yarı konvekstir. $L^\rho(I)$ uzayının bir alt uzayı

$$E^\rho(I) := \{f \in L^\rho(I) : \rho[\lambda f] < \infty \text{ her } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

olup $L^\rho(I)$ uzayının sonlu elemanlarının uzayı olarak adlandırılır [4].

Aşağıda modülerlere ilişkin bazı tanımları vereceğiz.

Tanım 2.9. ρ bir modüler olsun.

(1°) Her $f, g \in X(I)$ ve $|f| < |g|$ için $\rho[f] \leq \rho[g]$ ise ρ monoton,

(2°) χ_I, I kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\chi_I \in L^\rho(I)$ ise ρ sonlu,

(3°) ρ, sonlu ve her $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ için $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki $|B| < \delta$ olacak biçimdeki herhangi bir ölçülebilir $B \subset I$ altkümesi için $\rho(\lambda\chi_B) < \varepsilon$ ise ρ mutlak sonlu,

(4°) $\chi_I \in E^\rho(I)$ ise ρ kuvvetli sonlu,

(5°) $\rho[f] < \infty$ olacak biçimdeki her $f \in X(I)$ için "her $\varepsilon > 0$ için ve $|B| < \delta$ olan herhangi bir ölçülebilir $B \subset I$ altkümesi için $\rho[\alpha f \chi_B] < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı mevcuttur" koşulunu sağlayan $\alpha > 0$ mevcut ise ρ mutlak süreklidir denir [5],[17].

$|I| < \infty$ durumunda ρ, kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli ise mutlak sonludur. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ sabitlensin. $|I| < \infty$ ve ρ kuvvetli sonlu olduğundan $1 \in E^\rho(I)$ olur. Kolaylık için $\alpha = 1$ olduğunu varsayalım. $f(x) = 1$ sabit fonksiyonu için ρ modülerinin mutlak sürekliliğinin tanımındaki sabit δ ve $|B| < \delta$ olacak biçimde ölçülebilir B altkümesini göz önüne alalım. Bu durumda ρ modülerinin mutlak sürekliliğinden

$$\rho[\lambda\chi_B] = \rho[\lambda\chi_B\chi_I] < \varepsilon$$

olup istenilen elde edilir [5].

Tanım 2.10. X reel bir vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli, her $f, g, f_n \in X$ ve her $c_n, c \in \mathbb{R}$ için

(1°) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(2°) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(3°) $c_n \to c, \|f_n - f\| \to 0$ iken $\|c_n f_n - cf\| \to 0, n \to \infty$

özelliklerini gerçekliyor ise $\|\cdot\|$ bir F-normdur denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de F-normlu lineer uzay denir [5].

Önerme 2.11. $\rho : X(I) \to \overline{\mathbb{R}_0^+}$ bir modüler olsun. $L^\rho(I)$

$$\|f\|_\rho := \inf\{u > 0 : \rho(f/u) \leq u\}$$

biçiminde tanımlanan Luxemburg F-norm adı verilen F-normu ile bir F-normlu uzaydır [5].

Şimdi de bazı modüler uzay örnekleri verelim.

Örnek 2.12. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

(i) φ, konveks bir fonksiyon

(ii) $\varphi(0) = 0, u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \to \infty} \varphi(u) = +\infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Φ ile gösterelim. $\varphi \in \Phi$ ve $f \in X(I)$ için

$$\rho^\varphi[f] = \int_I \varphi(|f(s)|)ds$$

fonksiyonelini tanımlayalım. Bu ρ^φ fonksiyoneli, $X(I)$ üzerinde bir konveks modülerdir [4].

Gerçekten,

(i)

$$\begin{aligned}\rho^{\varphi}[f]=0 &\Leftrightarrow \int_I \varphi(|f(s)|)ds=0\\ &\Leftrightarrow \text{ hemen her } s\in I \text{ için } \varphi(|f(s)|)=0\\ &\Leftrightarrow \text{ hemen her } s\in I \text{ için } |f(s)|=0\\ &\Leftrightarrow f=0 \text{ hemen her yerde}\end{aligned}$$

(ii) $\rho^{\varphi}[-f]=\int_I \varphi(|(-f)(s)|)ds=\int_I \varphi(|f(s)|)ds=\rho[f]$

(iii) $\alpha+\beta=1,$ olacak biçimdeki her $\alpha,\beta\geq 0$ için φ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}\rho^{\varphi}[\alpha f+\beta g] &= \int_I \varphi(|(\alpha f+\beta g)(s)|)ds\\ &= \int_I \varphi(|\alpha f(s)+\beta g(s)|)ds\\ &\leq \int_I \varphi(\alpha|f(s)|+\beta|g(s)|)ds\\ &\leq \int_I [\alpha\varphi(|f(s)|)+\beta\varphi(|g(s)|)]ds\\ &= \alpha\int_I \varphi(|f(s)|)ds+\beta\int_I \varphi(|g(s)|)ds=\alpha\rho^{\varphi}[f]+\beta\rho^{\varphi}[g]\end{aligned}$$

elde edilir. O halde ρ^{φ}, konveks bir modülerdir.

$$L^{\varphi}(I)=\{f\in X(I):\rho^{\varphi}[\lambda f]<\infty \text{ bazı } \lambda>0 \text{ için }\}$$

altuzayına φ tarafından üretilen Orlicz uzayı denir [17]. ρ^{φ} modüleri Tanım 2.9. daki bütün koşulları gerçekler.

Burada $u\geq 0, p\geq 1$ için $\varphi(u)=u^p$ alınırsa $L^{\varphi}(I)=L^p(I)$ olup

$$\begin{aligned}\|f\|_{\varphi} &= \inf\left\{u>0:\int_I \left|\frac{f(s)}{u}\right|^p ds\leq 1\right\}\\ &= \left\{\int_I |f(s)|^p ds\right\}^{1/p}=\|f\|_p\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.13. $\varphi : I \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ her $s \in I$ için $\varphi(s, \cdot) \in \Phi$ olacak biçimde bir fonksiyon olsun.

$$\rho[f] = \int_I \varphi(s, |f(s)|)ds$$

fonksiyoneli $X(I)$ üzerinde bir konveks modülerdir. Bu modüler tarafından üretilen $L^\rho(I)$ altuzayına bir genelleştirilmiş Orlicz uzayı veya Musielak-Orlicz uzayı adı verilir [5].

Eğer $\varphi(s, u)$, s değişkeninden bağımsız ise Musielak-Orlicz uzayı Orlicz uzayına indirgenir. Özel olarak, $p(s) \geq 1, s \in I$ için $\varphi(s, u) = |u|^{p(s)}$ alınırsa $L^\rho(I)$ uzayı değişken üslü Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayı ile çakışır.

3. MODÜLER KOROVKİN TEOREMİ

Klasik Korovkin teoreminde, $[0, 1]$ aralığında tanımlanan sürekli reel fonksiyonlar uzayı $C[0, 1]$ olmak üzere pozitif lineer operatörler dizisinin sadece $\{1, x, x^2\}$ fonksiyonları için yakınsaklığını elde ederek pozitif operatör dizisinin $C[0, 1]$ uzayındaki düzgün yakınsaklığını göstermiş oluruz. Bu sonuç yakınsaklığı en az hesaplama ile kontrol etmemizi sağlar. Korovkin, bu çalışmasında Weierstrass teoreminin Bernstein tarafından yapılan ispatından esinlenilmiştir. Burada f fonksiyonuna ilişkin Bernstein polinomlarının düzgün yakınsaklığı, yalnızca $\{1, x, x^2\}$ fonksiyonlarını belirterek oluşturulmuştur. Ayrıca Korovkin teoreminin $\{1, \cos x, \sin x\}$ test fonksiyonları kullanılarak trigonometrik bir versiyonu da bulunmaktadır.

Daha sonra Korovkin teoreminin bir kaç genişlemesi bu konudaki bazı temel kaynaklarda çeşitli şekillerde elde edilmiştir [1], [9], [14]. Diğer ilginç genellemeler [11], [21] çalışmalarında bulunabilir.

Son zamanlarda Korovkin teoreminin versiyonları L^p uzayları ya da soyut Lebesgue uzayları gibi farklı fonksiyonel uzaylarda elde edilmiştir.

Genel olarak L^p uzaylarında, tüm L^p fonksiyonları için bu uzayda yakınsama elde etmenin mümkün olmadığı, ancak ilgili pozitif lineer operatörlerin formuna bağlı olarak uygun alt uzayları düşünmenin gerekli olduğu unutulmamalıdır. Burada Korovkin teoremini modüler uzayların soyut uyarlamasına genişleteceğiz. Bu uzaylar, J. Musielak [17] ve daha sonra [7] çalışmasında yoğun bir şekilde ele alınmıştır. Modüler uzaylarda soyut yaklaşım teorisi lineer olmayan integral operatörlerinin genel durumu için geliştirilmiştir [5]. Bu uzaylar oldukça geniştir, örneğin L^p uzayları, Orlicz uzayları, Musielak-Orlicz uzayları gibi uzayları içerir. Bir modüler uzayın uygun bir altuzayında tanımlanan genel bir (T_n) pozitif lieer operatör dizisi için fonksiyonların öyle bir sınıfını bulabiliriz ki $e_i(t) = t^i, i = 0, 1, 2$ olmak üzere modüler uzaydaki Luxemburg normuna göre $(T_n e_i)$, e_i fonksiyonuna yakınsak ise bu sınıfın her fonksiyonu için modüler topolojiye göre $(T_n e_i)$, e_i fonksiyonuna yakınsaktır. Bu sonuç için anahtar araçlar, modüler uzaydaki sürekli fonksiyonlar uzayının bir yoğunluk özelliğidir ve sınıf üzerindeki $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerinde bir tür “yaklaşık” modüler süreklilik varsayımıdır. Bilhassa, özel bir durum olarak L^p uzaylarında ve Orlicz ya da Musielak-Orlicz uzaylarında Korovkin teoreminin bir versiyonu elde edilecektir. Burada, modüler uzaylarda Korovkin teoreminin bir boyutlu bir uzantısını elde edeceğiz ve kompakt bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığı ile çalışacağız.

Tanım 3.1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\rho(I)$ fonksiyonların bir dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \rho[\lambda(f_n - f)] = 0$$

olacak biçimde en az bir $\lambda > 0$ varsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir [4].

Bu kavram L^p uzaylarındaki norm yakınsaklığı genişletmektedir.

Tanım 3.2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna F-norm yakınsak (veya kuvvetli yakınsak) olması için gerek ve yeter şart her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \rho[\lambda(f_n - f)] = 0$$

olmasıdır [4].

Açıkça görüldüğü gibi modüler yakınsaklık kavramı, kuvvetli yakınsaklık kavramından daha zayıf olup bu iki kavram ρ modüleri, aşağıda tanımlayacağımız Δ_2-koşulunu sağlıyorsa birbirine denktir.

Eğer her $f \in X(I)$ için ρ modüleri

$$\rho[2f] \leq M\rho[f]$$

olacak biçimde en az bir $M > 0$ sabiti varsa ρ modüleri Δ_2-koşulunu sağlıyor denir.

Şimdi buna ilişkin aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3. $L^\rho(I)$ bir modüler uzay olsun. Δ_2-koşulu, kuvvetli yakınsaklık ve modüler yakınsaklığın $L^\rho(I)$ üzerinde denk olması için yeter koşuldur.

İspat (f_n) dizisinin f fonksiyonuna kuvvetli yakınsak olması bazı $\lambda > 0$ ve her $N = 1, 2, \ldots$ için

$$\lim_n \rho[2^N \lambda(f_n - f)] = 0$$

koşuluna denktir. (f_n), f fonksiyonuna modüler yakınsak olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty} \rho[\lambda(f_n - f)] = 0$$

olacak biçimde en az bir $\lambda > 0$ sayısı vardır. Tümevarım yardımıyla Δ_2-koşulu,

$$\rho[2^N \lambda(f_n - f)] \leq M^N \rho[\lambda(f_n - f)]$$

olmasını gerektirir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Örneğin, φ fonksiyonlarının Δ_2-regülerlik koşulunu sağlayan φ fonksiyonunun ürettiği her L^p ve Orlicz uzayları için bu koşul gerçeklenir. Burada φ fonksiyonunun Δ_2-regülerlik koşulunu sağlaması, her $u \geq 0$ için

$$\varphi(2u) \leq M\varphi(u)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti olması anlamına gelmektedir.

Modüler yakınsaklık $L^\rho(I)$ üzerinde modüler topoloji adı verilen bir topoloji doğurur. $\mathcal{A} \subset L^\rho(I)$ altkümesi gözönüne alındığında $\overline{\mathcal{A}}$ ile modüler topolojiye göre $\mathcal{A}$ kümesinin kapanışını göstereceğiz. Ayrıca (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsak olacak biçimde bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ dizisi varsa $f \in \overline{\mathcal{A}}$ olur.

ρ, monoton ve sonlu ise $C(I) \subset L^{\rho}(I)$ olduğu açıktır. Gerçekten, $\lambda > 0$ için ρ monoton olduğundan

$$\rho[\lambda f] \leq \rho[\lambda \|f\|_{\infty} \chi_I]$$

olup $\chi_I \in L^{\rho}(I)$ olduğundan

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \rho[\lambda f] = 0$$

gerçeklenir. Yani $f \in L^{\rho}(I)$ olup istenilen elde edilir.

Benzer şekilde ρ, monoton ve kuvvetli sonlu ise $C(I) \subset E^{\rho}(I)$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Şimdi de aşağıdaki önermeyi ispatsız olarak verelim.

Önerme 3.4. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, mutlak sonlu ve mutlak sürekli ise $\overline{C^{\infty}(I)} = L^{\rho}(I)$ gerçeklenir [16].

$D \subset L^{\rho}(I), C^{\infty}(I)$ uzayını içermek üzere $T_n : D \to X(I)$ olacak biçimde $\mathbf{T} = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif lineer operatörlerin bir ailesini gözönüne alalım. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ailesinin $(*)$ özelliği diyeceğimiz aşağıdaki özelliği sağladığını kabul edeceğiz:

" her $\lambda > 0$, bir P mutlak sabiti ve her $f \in X_{\mathbf{T}}$ için

$$\limsup_{n \to \infty} \rho[\lambda (T_n f)] \leq P \rho[\lambda f]$$

olacak biçimde $C^{\infty}(I)$ uzayını içeren bir $X_{\mathbf{T}} \subset D$ altkümesi vardır. "

Şimdi de gözönüne aldığımız operatör dizisinin anlamlı olması için yeter koşul ihtiva eden aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.5. ρ, N-quasi yarı konveks olsun. Bu durumda $f \in X_{\mathbf{T}}$ ve yeterince büyük n için $T_n f \in L^{\rho}(I)$ gerçeklenir.

İspat $f \in X_{\mathbf{T}} \subset L^{\rho}(I)$ ve $\rho[\lambda f] < +\infty$ olacak biçimde $\lambda > 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$\rho[\lambda T_n f] \leq P\rho[\lambda f] + 1 < +\infty$$

olacak biçimde λ sayısına bağlı en az bir n_0 mevcuttur. Bu ise $T_n f \in L^{\rho}(I)$ olması anlamına gelir. ■

Tez boyunca her $s, t \in I$ için $g(s,t) = g_s(t) = (s-t)^2$ notasyonunu kullanacağız. Ayrıca her $t \in I$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(t)$ ile t^i fonksiyonlarını göstereceğiz.

Şimdi de ana teoremimizi verelim.

Teorem 3.6. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N-quasi yarı konveks olsun. $\mathbf{T} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu taktirde $L^{\rho}(I)$ uzayında kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_n e_i = e_i, \quad i = 0, 1, 2$$

gerçekleniyor ise $f - C^{\infty}(I) \subset X_{\mathbf{T}}$ koşulunu sağlayan her $f \in L^{\rho}(I)$ için $L^{\rho}(I)$ uzayında modüler olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_n f = f$$

elde edilir [4].

İspat Öncelikle $f \in C(I)$ olsun. Bu durumda her $t \in I$ için $|f(t)| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır. Kapalı ve sınırlı aralıkta sürekli her fonksiyon düzgün sürekli olup dolayısıyla $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|s-t| < \delta$ koşulunu sağlayan her $s, t \in I$ için $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Buradan her $s, t \in I$ için

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(s-t)^2$$

veya

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} g_s(t) \le f(s) - f(t) \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} g_s(t)$$

olduğu kolaylıkla elde edilir.

T_n, pozitif lineer operatör olduğundan

$$-\varepsilon(T_n e_0)(s) - \frac{2M}{\delta^2}(T_n g_s)(s) \le f(s)(T_n e_0)(s) - (T_n f)(s) \le \varepsilon(T_n e_0)(s) + \frac{2M}{\delta^2}(T_n g_s)(s)$$

olup

$$\begin{aligned} |(T_n f)(s) - f(s)(T_n e_0)(s)| \; &\le \varepsilon(T_n e_0)(s) \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2}[e_2(s)(T_n e_0)(s) - 2e_1(s)(T_n e_1)(s) + (T_n e_2)(s)] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |(T_n f)(s) - f(s)| \; &= |(T_n f)(s) - f(s)(T_n e_0)(s) + f(s)(T_n e_0)(s) - f(s)| \\ &\le |(T_n f)(s) - f(s)(T_n e_0)(s)| + |f(s)(T_n e_0)(s) - f(s)| \\ &\le \varepsilon(T_n e_0)(s) + \frac{2M}{\delta^2}[e_2(s)(T_n e_0)(s) - 2e_1(s)(T_n e_1)(s) \\ &\quad + (T_n e_2)(s)] + M|(T_n e_0)(s) - e_0(s)| \\ &= \frac{3\varepsilon(T_n e_0)(s)}{3} + \frac{6M}{3\delta^2}[e_2(s)(T_n e_0)(s) - 2e_1(s)(T_n e_1)(s) \\ &\quad + (T_n e_2)(s)] + \frac{3M}{3}|(T_n e_0)(s) - e_0(s)| \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe ρ modüleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\rho[T_n f - f] \le \rho[3\varepsilon T_n e_0] + \rho[3M|(T_n e_0)(\cdot) - e_0(\cdot)|] \\ &+\rho[\frac{6M}{\delta^2}(e_2(\cdot)(T_n e_0)(\cdot) - 2e_1(\cdot)(T_n e_1)(\cdot) + (T_n e_2)(\cdot))] := J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

olur.

İlk olarak J_3 ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&e_2(s)(T_ne_0)(s) - 2e_1(s)(T_ne_1)(s) + (T_ne_2)(s)\\
&= e_2(s)(T_ne_0)(s) - 2e_1(s)((T_ne_1)(s) - e_1(s) + e_1(s)) + ((T_ne_2)(s) - e_2(s) + e_2(s))\\
&= e_2(s)((T_ne_0)(s) - e_0(s)) + ((T_ne_2)(s) - e_2(s)) - 2e_1(s)((T_ne_1)(s) - e_1(s))
\end{aligned}$$

yazabiliriz ve buradan

$$\begin{aligned}
&|e_2(s)(T_ne_0)(s) - 2e_1(s)(T_ne_1)(s) + (T_ne_2)(s)|\\
&\leq \|e_2\|_\infty |(T_ne_0)(s) - e_0(s)| + |(T_ne_2)(s) - e_2(s)| + 2\|e_1\|_\infty |(T_ne_1)(s) - e_1(s)|\\
&\leq K|(T_ne_0)(s) - e_0(s)| + |(T_ne_2)(s) - e_2(s)| + K|(T_ne_1)(s) - e_1(s)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $K = \max\{\|e_2\|_\infty, 2\|e_1\|_\infty\}$ biçimindedir. ρ modülerinin özelliğinden

$$J_3 \leq \rho\Big[\frac{18MK}{\delta^2}|T_ne_0 - e_0|\Big] + \rho\Big[\frac{18MK}{\delta^2}|T_ne_1 - e_1|\Big] + \rho\Big[\frac{18MK}{\delta^2}|T_ne_2 - e_2|\Big]$$

olur. Kabullerimizden her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \rho[\lambda(T_ne_i - e_i)] = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

ve dolayısıyla her $\mu > 0$ sabiti için

$$\limsup_{n\to\infty} \rho[\mu(T_nf - f)] \leq P\rho[3\mu\varepsilon e_0]$$

olur. Şimdi ρ, N-quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan $\varepsilon < 1$ varsayımı altında

$$\rho[3\mu\varepsilon e_0] \leq N\varepsilon\rho[3N\mu e_0]$$

elde edilir. Dolayısıyla sürekli f fonksiyonu için kuvvetli yakınsaklık kolaylıkla elde edilir.

Son adım olarak $f \in L^\rho(I)$, $f - C^\infty(I) \subset X_{\mathbf{T}}$ olacak biçimde bir fonksiyon olsun. Önerme 3.4. gereğince $\rho[3\lambda f] < \infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \rho[3\lambda(f_k - f)] = 0$$

olacak biçimde bir $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(I)$ ve bir $\lambda > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ sabitlensin ve k_0, her $k \geq k_0$ için $\rho[3\lambda(f_k - f)] < \varepsilon$ olacak biçimde seçilsin. Şimdi k_0 sabitlensin.

$$\begin{aligned} \lambda(T_n f - f) &= \lambda\{T_n(f - f_{k_0} + f_{k_0}) - f_{k_0} + f_{k_0} - f\} \\ &= \lambda T_n(f - f_{k_0}) + \lambda(T_n f_{k_0} - f_{k_0}) + \lambda(f_{k_0} - f) \end{aligned}$$

eşitliğine ρ modüleri uygulanırsa

$$\rho[\lambda(T_n f - f)] \leq \rho[3\lambda T_n(f - f_{k_0})] + \rho[3\lambda(T_n f_0 - f_0)] + \rho[3\lambda(f_0 - f)]$$

elde edilir. Burada her iki tarafa $\limsup$ operatörü uygulanır ve ispatın ilk kısmı göz önüne alınırsa (T_n) operatör ailesine ilişkin kabulümüzden

$$\limsup_{n\to\infty} \rho[\lambda(T_n f - f)] \leq \varepsilon(P + 1)$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan istenilen elde edilir. ■

ρ modüleri Δ_2-koşulunu sağlarsa $C^\infty(I)$ uzayı, $L^\rho(I)$ içinde kuvvetli yoğundur. Dolayısıyla $f - C^\infty(I) \subset X_{\mathbf{T}}$ koşulunu sağlayan her f için $T_n f - f$, sıfıra kuvvetli yakınsaktır. O halde Teorem 3.6. aşağıdaki biçimde yeniden ifade edilebilir.

Teorem 3.7. Teorem 3.6. daki kabüller altında ρ modüleri Δ_2-koşulunu sağlıyor ise aşağıdaki ifadeler denktir:

(1°) $T_n e_i \to e_i$ $\quad i = 0, 1, 2$ için $L^\rho(I)$ içinde kuvvetli yakınsaktır,

(2°) $f - C^\infty(I) \subset X_{\mathbf{T}}$ koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için $L^\rho(I)$ içinde $T_n f \to f$ kuvvetli yakınsaktır.

Özel olarak Δ_2-regülerlik koşulunu sağlayan φ fonksiyonları tarafından üretilen L^p ve Orlicz uzayları için yukarıdaki teorem gerçeklenir [5], [17].

4. TEMEL TEOREMİN UYGULAMALARI

Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçların bazı uzaylarda tanımlanan çeşitli operatörlere uygulamalarını inceleyeceğiz.

4.1. Ayrık Operatörlere Uygulamaları

Bu kısımda elde ettiğimiz sonuçların ayrık operatörlere uygulamalarına değineceğiz. Bu kapsamda kullanacağımız bazı kavram ve notasyonları verelim.

$(r(n))_{n\in\mathbb{N}}$, doğal sayıların artan bir dizisi olsun. Her sabit $n \in \mathbb{N}$ için
$\Gamma_n = (v_{n,k})_{k=0,1,\ldots,r(n)} \subset I$ ile

$$0 < \lambda_{n,k} := v_{n,k+1} - v_{n,k} \leq b_n, \quad k = 0, 1, \ldots, r(n) - 1$$

koşulunu sağlayan noktaların sonlu bir dizisini gösterelim. Burada b_n, pozitif reel sayıların $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ koşulunu sağlayan bir dizisidir.

$$(S_n f)(s) = \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) f(v_{n,k}), \quad n \in \mathbb{N}, s \in I \tag{4.1}$$

biçimindeki pozitif operatörlerin bir $\mathcal{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini gözönüne alalım. Burada $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) = 1, \quad \text{her } n \in \mathbb{N}, s \in I$$

koşulunu sağlayan $K_n : I \times \Gamma_n \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir.

(4.1) operatörünün tanım kümesi $X(I)$ uzayını içermektedir. Burada $X(I)$, I üzerinde tanımlı hemen her yerde bağıntısı ile verilen reel değerli ölçülebilir tüm fonksiyonların uzayıdır. Yani iki fonksiyon hemen her yerde bağıntısına göre denk ama farklıdır. $j \in \mathbb{N}$ için

$$m_j(K_n, s) := \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k} - s)^j$$

biçiminde tanımlansın. Yukarıdaki varsayımlara göre açık bir şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n e_0 = e_0 = 1$ olduğu görülür. Diğer test fonksiyonları için durum aşağıdaki gibidir.

Önerme 4.1. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton bir modüler olsun. $L^\rho(I)$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} m_j(K_n, \cdot) = 0, \quad j = 1, 2 \tag{4.2}$$

olması için gerek ve yeter şart $L^\rho(I)$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} S_n e_j, \quad j = 1, 2$$

olmasıdır [4].

İspat $\lambda = 1$ kabul edebiliriz. İlk olarak gereklilik kısmını ispatlayalım.

$$(S_n e_1)(s) - e_1(s) = m_1(K_n, s)$$

ve

$$(S_n e_2)(s) - e_2(s) = m_2(K_n, s) + 2e_1(s) m_1(K_n, s)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Her iki eşitlikte de modülere geçilirse

$$\rho[(S_n e_1) - e_1] = \rho[m_1(K_n, \cdot)]$$

$$\rho[(S_n e_2) - e_2] \leq \rho[2m_2(K_n, \cdot)] + \rho[4\|e_1\|_\infty m_1(K_n, \cdot)]$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa istenilen elde edilir.

Şimdi de yeterlilik kısmını ispat edelim.

$$\begin{aligned} m_1(K_n, s) &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \cdot (v_{n,k} - s) \\ &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \cdot v_{n,k} - s \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \\ &= (S_n e_1)(s) - e_1(s) \end{aligned}$$

olup kabulümüzden $\lim_{n\to\infty} \rho[m_1(K_n, \cdot)] = 0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$m_2(K_n, s) = (S_n e_2)(s) - e_2(s) - 2e_1(s)((S_n e_1)(s) - e_1(s))$$

olduğu kolaylıkla bulunur ve ρ modüleri uygulanırsa $\lim_{n\to\infty} \rho[m_2(K_n, \cdot)] = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatör ailesi için Teorem 3.6. den aşağıdaki sonucu kolaylıkla elde ederiz.

Sonuç 4.2. ρ, $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N-quasi yarı konveks bir modüler olsun. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatör ailesinin (*) özelliğini ve (4.2) eşitliğini gerçeklediğini kabul edelim. Bu durumda $f - C^\infty(I) \subset X_{\mathcal{S}}$ koşulunu sağlayan her $f \in L^\rho(I)$ için $L^\rho(I)$ üzerinde modüler olarak

$$\lim_{n\to\infty} S_n f = f$$

gerçeklenir. Burada $X_{\mathcal{S}}$, (*) özelliğinde verilen sınıfa karşılık gelmektedir.

4.1.1. Orlicz Uzaylarında X_S Sınıfının Belirlenmesi

Bu kısımda Orlicz uzaylarında X_S sınıfının inşasını inceleyeceğiz.
$\varphi \in \Phi$ olmak üzere her $f \in X(I)$ için

$$\rho^{\varphi}[f] = \int_I \varphi(|f(s)|)ds$$

biçiminde tanımlı ρ^{φ} fonksiyonelinin $X(I)$ üzerinde konveks bir modüler olduğunu göstermiştik ve

$$L^{\varphi}(I) = \{f \in X(I) : \rho^{\varphi}[\lambda f] < \infty \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için } \}$$

altuzayına φ tarafından üretilen Orlicz uzayı denildiğini belirtmiştik. $L^{\varphi}(I)$ uzayının

$$E^{\varphi}(I) = \{f \in X(I) : \rho^{\varphi}[\lambda f] < \infty \text{ her } \lambda > 0 \text{ için } \}$$

altuzayına da $L^{\varphi}(I)$ nın sonlu elemanlarının uzayı denir.

Sınırlı her fonksiyon $E^{\varphi}(I)$ uzayına aittir. Gerçekten f, I üzerinde keyfi sınırlı bir fonksiyon olsun. O halde ρ^{φ} monoton olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$\rho^{\varphi}[\lambda f] = \int_I \varphi(\lambda|f(s)|)ds \leq \int_I \varphi(\lambda\|f(s)\|_{\infty})ds = \varphi(\lambda\|f\|_{\infty})|I| < \infty$$

olup istenilen elde edilir.

Önceki kısımda tanımlanan

$$(S_n f)(s) = \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) f(v_{n,k})$$

operatörünü gözönüne alalım. ξ_n, k' dan bağımsız pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\int_I K_n(s, v_{n,k})ds \leq \xi_n$$

olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_n^{\varphi}[f] = \sum_{k=0}^{r(n)} \varphi(|f(v_{n,k})|), \quad f \in X(I)$$

biçiminde tanımlayalım.

Diğer taraftan λ ve f fonksiyonundan bağımsız mutlak bir $P > 0$ sabiti ve her $\lambda > 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \xi_n \rho_n^{\varphi}[\lambda f] \leq P\rho^{\varphi}[\lambda f]$$

eşitsizliğini gerçekleyen $L^{\varphi}(I)$ uzayındaki tüm fonksiyonların sınıfını $\mathcal{F}_{\varphi}$ ile gösterelim.

Önerme 4.3. $\mathcal{F}_{\varphi} \subset X_{\mathcal{S}}$ gerçeklenir [4].

İspat $\lambda > 0$ sabitlenmiş olsun. Jensen eşitsizliği ve $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ çekirdeği üzerindeki kabuller kullanılırsa ve φ konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho^{\varphi}[\lambda S_n f] &= \int_I \varphi(|\lambda(S_n f)(s)|)ds \\
&= \int_I \varphi\Big(\Big|\lambda \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) f(v_{n,k})\Big|\Big)ds \\
&\leq \int_I \varphi\Big(\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}\Big)|\lambda f(v_{n,k})|)ds \\
&= \sum_{k=0}^{r(n)} \varphi(|\lambda f(v_{n,k})|) \int_I K_n(s, v_{n,k})ds \\
&\leq \xi_n \sum_{k=0}^{r(n)} \varphi(|\lambda f(v_{n,k})|) \\
&= \xi_n \rho_n^{\varphi}[\lambda f]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\limsup$, her iki tarafa da uygulanırsa $f \in \mathcal{F}_\varphi$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^\varphi[\lambda S_n f] \leq \limsup_{n\to\infty} \xi_n \rho^\varphi n[\lambda f] \leq P\rho^\varphi[\lambda f]$$

olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.4. $I = [0, 1]$ olmak üzere

$$(S_n f)(s) = \sum_{k=0}^{n} K_n(s, v_{n,k}) f(v_{n,k})$$

operatörünü gözönüne alalım. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $(v_{n,k})_{k=0,1,\ldots,n}$, $[0, 1]$ aralığının sonlu bir parçalanması ve her $k = 0, \ldots, n-1$ için $0 < a_n \leq v_{n,k+1} - v_{n,k} \leq b_n$ biçimindedir. Ayrıca a_n ve b_n dizileri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{a_n} = \ell < +\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

koşullarını sağlamaktadır. Bu durumda $\mathcal{F}_\varphi$ sınıfı, $[0, 1]$ aralığında Riemann integrallenebilir tüm fonksiyonları içermektedir: $v_{n,n+1} = b_n + 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \xi_n \rho_n^\varphi[\lambda f] &= \limsup_{n\to\infty} \xi_n \frac{a_n}{a_n} \sum_{k=0}^{r(n)} \varphi(|f(v_{n,k})|) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{a_n} \sum_{k=0}^{n} \varphi(\lambda |f(v_{n,k})|)(v_{n,k+1} - v_{n,k})
\end{aligned}$$

elde edilir. Son toplam eğer f, Riemann integrallenebilir ise $\varphi \circ \lambda f$ fonksiyonunun bir Riemann toplamıdır. O halde

$$\limsup_{n\to\infty} \xi_n \rho_n^\varphi[\lambda f] \leq \ell \rho^\varphi[\lambda f]$$

olup $P = \ell$ ile $f \in \mathcal{F}_\varphi$ olur.

4.2. Kantorovich-Tipli Operatörlere Uygulaması

Bu kısımda ana teoremimizin Kantorovich tipli operatörlere uygulamasını inceleyeceğiz. Bu kapsamda önceki kısımdaki notasyonları kullanacağız. $\Gamma_n = (v_{n,k})_{k=0,1,\ldots,r(n),r(n)+1} \subset I$

$$0 < a_n \leq \lambda_{n,k} := v_{n,k+1} - v_{n,k} \leq b_n, \quad k = 0, 1, \ldots, r(n)$$

olacak biçimde sonlu bir dizi olsun. Burada a_n, b_n pozitif reel sayıların birer dizisi ve $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ biçimindedir.

$$(U_n f)(s) = \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} f(t)dt \quad n \in \mathbb{N}, s \in I \tag{4.3}$$

biçimindeki pozitif operatörlerin bir $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini gözönüne alalım. Burada $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K_n : I \times \Gamma_n \to \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) = 1, \text{ her } n \in \mathbb{N}, s \in I \text{ için}$$

koşulunu sağlayan negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun.

Bu durumda U_n operatörünün tanım kümesi, I üzerinde lokal integrallenebilir bütün fonksiyonların uzayını içerir. Ayrıca kolayca görülebilir ki esas sınırlı fonksiyonların sınıfı olan $L^\infty(I)$ uzayını da içerir.

$L^\varphi(I)$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} m_j(K_n, \cdot) = 0, j = 1, 2 \tag{4.4}$$

gerçeklensin ve ξ_n, k dan bağımsız pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\int_I K_n(s, v_{n,k})ds \leq \xi_n$$

olduğunu kabul edelim.

Lemma 4.5. $\varphi \in \Phi$, her $n \in \mathbb{N}$ ve mutlak sabit bir $M > 0$ için $\frac{\xi_n}{a_n} \leq M$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{\varphi}(I)$ için

$$\rho^{\varphi}[U_n f] \leq M \rho^{\varphi}[f]$$

gerçeklenir [4].

İspat

$$\begin{aligned}
\rho^{\varphi}[U_n f] &= \int_I \varphi(|(U_n f)(s)|)ds \\
&= \int_I \varphi\Big(\Big|\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} f(t)dt\Big|\Big)ds \\
&\leq \int_I \varphi\Big(\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(t)|dt\Big)ds \\
&\leq \int_I \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \varphi\Big(\frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(t)|dt\Big)ds \\
&= \sum_{k=0}^{r(n)} \varphi\Big(\frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(t)|dt\Big) \int_I K_n(s, v_{n,k})ds \\
&\leq \frac{\xi_n}{a_n} \sum_{k=0}^{r(n)} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \varphi(|f(t)|)dt \\
&\leq M \rho^{\varphi}[f]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Özel olarak $f \in L^{\varphi}(I)$ olduğunda $U_n f \in L^{\varphi}(I)$ olur. Ayrıca $X_{\mathcal{U}} = L^{\varphi}(I)$ ile (*) özelliği gerçeklenir.

$(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ çekirdeğine ilişkin yukarıdaki kabullerimiz altında ana teoremimizin bir uygulaması olan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.6. (4.4) ifadesi gerçeklensin. Bu durumda her $f \in L^{\varphi}(I)$ için $L^{\varphi}(I)$ üzerinde modüler olarak

$$\lim_{n\to\infty} U_n f = f$$

gerçeklenir [4].

İspat

$$\begin{aligned}(U_n e_0)(s) &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} dt = \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \lambda_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) = e_0(s)\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}(U_n e_1)(s) &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} tdt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} (v_{n,k+1}^2 - v_{n,k}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1} + v_{n,k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) v_{n,k+1} + \frac{1}{2}(S_n e_1)(s) \\ &= J_1 + J_2\end{aligned}$$

bulunur. ρ^{φ} modüleri monoton olduğundan ve hipotezimizden ayrıca Önerme 4.1.' i kullanarak kuvvetli olarak

$$J_2 \to \frac{1}{2} e_1$$

elde edilir. Şimdi de J_1 toplamını inceleyelim.

$$J_1 = \frac{1}{2}(S_n e_1)(s) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1} - v_{n,k})$$

yazabiliriz. Yukarıdaki son toplam için

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1} - v_{n,k}) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) b_n = \frac{1}{2} b_n$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan kuvvetli olarak $J_1 \to \frac{1}{2}e_1$ olup dolayısıyla kuvvetli olarak $U_n e_1 \to e_1$ gerçeklenir. Son olarak

$$\begin{aligned}
(U_n e_2)(s) &= \sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} t^2 dt \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1}^2 + v_{n,k}^2 + v_{n,k+1} v_{n,k}) \\
&= J_1' + J_2' + J_3'
\end{aligned}$$

ifadesini inceleyelim. $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ çekirdeğinin özelliğinden $J_2' \to \frac{1}{3}e_2$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
J_1' &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) v_{n,k+1}^2 \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) v_{n,k}^2 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1}^2 - v_{n,k}^2) \\
&= \frac{1}{3}(S_n e_2)(s) + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1} - v_{n,k})(v_{n,k+1} + v_{n,k})
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k})(v_{n,k+1} - v_{n,k})(v_{n,k+1} + v_{n,k}) &\leq \frac{2b_n \text{maks}\{|a|, |b|\}}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) \\
&= \frac{2b_n \text{maks}\{|a|, |b|\}}{3}
\end{aligned}$$

eşitsizliği gözönüne alınırsa kuvvetli olarak $J_1' \to \frac{1}{3}e_2$ olur. Diğer taraftan

$$J_3' = \frac{1}{3}(S_n e_2)(s) + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{r(n)} K_n(s, v_{n,k}) v_{n,k}(v_{n,k+1} - v_{n,k})$$

olup son terim öncekine benzer şekilde sıfıra gider ve buradan kuvvetli olarak $J_3' \to \frac{1}{3}e_2$ elde edilir. Böylece kuvvetli olarak $U_n e_2 \to e_2$ bulunur. Teorem 3.6. gereğince istenilen elde edilir. ■

U_n operatöründe özel olarak $r(n) = n$ ve $v_{n,k} = \frac{k}{n+1}$ alınırsa

$$(U_n f)(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}(n+1) \int_{k/n+1}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt, \quad s \in I = [0,1]$$

biçiminde tanımlanan Bernstein-Kantorovich operatörü elde edilir [3].

Bu durumda her $s \in I = [0,1]$ ve $k = 0, 1, \ldots, n$ için

$$K_n(s, v_{n,k}) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}(n+1)$$

eşitliği ile belirlenir. Bu özel durumda her $s \in I$ için $(U_n e_0)(s) = e_0(s)$ ve

$$m_1(K_n, s) = 0, \quad m_2(K_n, s) = \frac{s(1-s)}{n}$$

olduğu bilinmektedir [3], [14]. Dolayısıyla ana teoremimiz bu operatör için de kolaylıkla uygulanabilir.

4.3. Moment Tipi Operatörlere Uygulaması

$I = [0,1]$ ve $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K_n : I \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı çekirdek fonksiyonlarının her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n(t)t^{-1} \in L^1(I)$ ve

$$\int_0^1 K_n(t)dt = 1 \text{ ve } \int_0^1 K_n(t)t^{-1}dt \leq W$$

olacak biçimde bir dizisi olsun. Burada W, mutlak bir sabittir.

$\varphi \in \Phi$ sabitlenmiş ve $L^\varphi(I)$, bu φ fonksiyonunun ürettiği Orlicz uzayı olsun. Her $f \in L^\varphi(I)$ için

$$(T_n f)(s) = \int_0^1 K_n(t)f(ts)dt, \quad s \in I$$

pozitif lineer operatörünü tanımlayalım. Böyle operatörlerin belirgin bir örneği, $t \in I$ için $K_n(t) = (n+1)t^n$ biçiminde tanımlanan moment çekirdeği ile üretilen operatördür. Bu operatörün özellikleri çeşitli yazarlar tarafından kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır [2], [6]. Şimdi bu operatörlere ilişkin ilk sonucumuzu verelim.

Önerme 4.7. $f \in L^\varphi(I)$ olduğunda $T_n f \in L^\varphi(I)$ olup

$$\rho^\varphi[T_n f] \leq W \rho^\varphi[f]$$

gerçeklenir [4].

İspat Jensen eşitsizliği ve Fubini-Tonelli teoremini uygulayarak φ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}
\rho^{\varphi}[T_n f] &= \int_I \varphi\Big[\Big|\int_0^1 K_n(t) f(ts)dt\Big|\Big]ds \\
&\leq \int_0^1 \varphi\Big[\int_0^1 K_n(t)|f(ts)|dt\Big]ds \\
&\leq \int_0^1 K_n(t)\Big[\int_0^1 \varphi(|f(ts)|)ds\Big]dt \\
&\leq \int_0^1 K_n(t)t^{-1}\rho^{\varphi}[f]dt \\
&\leq W\rho^{\varphi}[f]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$m_1(K_n, s)$ ve $m_2(K_n, s)$ integral tipli moment fonksiyonlarını

$$m_1(K_n, s) = s\int_0^1 K_n(t)(t-1)dt$$

ve

$$m_2(K_n, s) = s^2\int_0^1 K_n(t)(t-1)^2dt$$

biçiminde tanımlayalım. Bu moment fonksiyonlarına ilişkin aşağıdaki sonucu kolaylıkla gösterebiliriz.

Önerme 4.8. $L^{\varphi}([0,1])$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} m_j(K_n, \cdot) = 0, \quad j = 1, 2$$

olması için gerek ve yeter şart $L^{\varphi}([0,1])$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_n e_j = e_j, \quad j = 1, 2$$

olmasıdır.

İspat Doğrudan bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} m_1(K_n,s) &= s\int_0^1 K_n(t)(t-1)dt \\ &= \int_0^1 K_n(t)tsdt - s\int_0^1 K_n(t)dt \\ &= (T_n e_1)(s) - e_1(s) \\ &= (T_n e_1 - e_1)(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} m_2(K_n,s) &= s^2\int_0^1 K_n(t)(t-1)^2dt \\ &= \int_0^1 K_n(t)t^2s^2dt - 2s\int_0^1 K_n(t)tsdt + s^2\int_0^1 K_n(t)dt \\ &= (T_n e_2)(s) - e_2(s) - 2s\Big[\int_0^1 K_n(t)tsdt - s\int_0^1 K_n(t)dt\Big] \\ &= (T_n e_2 - e_2)(s) - 2e_1(s)(T_n e_1 - e_1)(s) \\ &= (T_n e_2 - e_2)(s) - 2e_1(s)m_1(K_n,s) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenilen kolaylıkla elde edilir. ∎

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak ana teoremimizden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9. $L^\varphi([0,1])$ üzerinde kuvvetli olarak

$$\lim_{n\to\infty} m_j(K_n,\cdot) = 0, \quad j = 1,2$$

oluyor ise her $f \in L^\varphi([0,1])$ için modüler olarak

$$\lim_{n\to\infty} T_n f = f$$

gerçeklenir [4].

İspat Önerme 4.8. ve $X_{\mathbf{T}} = L^{\varphi}([0,1])$ olacak biçimde ana teoremimiz gözönüne alınırsa ispat tamamlanır. ■

KAYNAKLAR

[1]. Altomare, F. and Campiti, M., 1994, Korovkin-type approximation theory and its applications, Walter de Gruyter, Berlin.

[2]. Barbieri, F., 1983, Approssimazione mediante nuclei momento, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, (32), 308-328.

[3]. Bardaro, C., Butzer, P.L., Stens, R.L. and Vinti, G., 2003, Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals, Analysis, (23), 299-340.

[4]. Bardaro, C. and Mantellini, I., 2007, Korovkin theorem in modular spaces, Comment. Math. (Prace Mat.), (47), 239-253.

[5]. Bardaro, C., Musielak, J. and Vinti, G., 2003, Nonlinear integral operators and applications, Walter de Gruyter, Berlin.

[6]. Bardaro, C. and Vinti, G., 1989, Modular convergence in generalized Orlicz spaces for moment type operators, Applicable Analysis, (32), 265-276.

[7]. Bohman, H., 1952, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., (2), 43-56.

[8]. Devore, R. A., 1972, The approximation of continuous functions by positive linear operators, Lecture notes in Math., Springer-Verlag.

[9]. Devore, R. A. and Lorentz, G. G., 1993, Consructive approximation, Grund. Math. Wiss. 303, Springer Verlag.

[10]. Donner, K., 1981, Korovkin theorems in L^p-spaces, J. Funct. Anal., (42), 12-28.

[11]. Grossman, M. W., 1974, Note on generalized Bohman-Korovkin theorem, J. Math. Anal. Appl., (45), 43-46.

[12]. Korovkin, P. P., 1953, On convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions, (Russian), Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R, (90), 961-964.

[13]. Kreyzig, E., 2007, Introductory to functional analysis with application, John Wiley, New York.

[14]. Lorentz, G. G., 1986, Approximation of functions, Chelsea Publ. Comp., New York.

[15]. Lorentz, G. G. 1986, Bernstein polynomials, Chelsea Publ. Company, New York.

[16]. Mantellini, I., 1998, Generalized sampling operators in modular spaces, Commen tationes Math., (38), 77-92.

[17]. Musielak, J., 1983, Orlicz spaces and modular spaces, Springer-Verlag, Berlin.

[18]. Pitul, P., 2007, Evaluation of the approximation order by positive linear operators, Ph. D. Thesis, Cluj-Napoca, Babeş-Bolyai University.

[19]. Popoviciu, T., 1950, Asupra demonstratiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Lucrările Ses. Gen. Şt. Acad. Române din, 1-4.

[20]. Renaud, P., 2000, A Korovkin theorem for abstract Lebesgue spaces, J. Approx. Theory, (102), 13-20.

[21]. Schäfer, E., 1989, Korovkin's theorems: a unifying version, Functiones et Approximatio, (18), 43-49.

[22]. Weierstrass, K. G., 1885, Über die analytische Dorstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber, Akad. Berlin, 663-639, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mehmet DAĞ
Doğum Yeri	Boztepe
Doğum Tarihi	12.11.1981
Uyruğu	T.C
Telefon	0534 520 00 85
E-Posta Adresi	medag@ziraatbank.com.tr
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırıkkale Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2002

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2019

Doktora	
Üniversite	...
Enstitü	...
Anabilim Dalı	...
Programı	...
Mezuniyet Yılı	...

Makale ve Bildiriler
Varsa makale ve bildirileriniz buraya yazılacak...