T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİNİN TOPLAMI

Ayşe Nur KÖKSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİNİN TOPLAMI

Ayşe Nur KÖKSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 09.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Kırıkkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Akın Osman ATAGÜN
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayşe Nur KÖKSAL

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; bu lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana yardımcı olabilmek için elinden gelenin fazlasını yapan herhangi bir sıkıntıyla karşılaştığımda bana yol gösteren güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU'na yaptıklarının karşılığı olmasa da sonsuz teşekkür ederim. Bu çalışmanın her aşamasında maddi, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, başta annem Nazile KÖKSAL ve babam İbrahim KÖKSAL olmak üzere değerli aileme teşekkür ediyorum. Danışman hocam gibi çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen bana sonsuz destek veren abim Mücahit ÖZKAYA'ya bana yol gösterdiği için minnettarım ve teşekkür ediyorum.

Temmuz, 2019 Ayşe Nur KÖKSAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ v
İÇİNDEKİLER vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ vii
ÖZET viii
ABSTRACT ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİ TOPLAMI 12
4. SONLU ABELYEN GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİ TOPLAMI 16
5. DEVİRLİ OLMAYAN SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİNİN TOPLAMI 27
5.1. Temel Sonuçlar 27
5.2. Ana Sonuçlar 33
KAYNAKLAR 47
ÖZGEÇMİŞ 49

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

$H \subseteq G$	: H, G nin bir altkümesi
$G \setminus H$	: G de olup H de olmayan elemanların kümesi
G/H	: G nin H ile bölüm grubu
$\mathbb{Z}_n$	: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$
$h \mid g$	: h, g yi böler
$h \nmid g$	: h, g yi bölmez
$a \equiv b (\mathrm{mod} p)$	: $p \mid (a-b)$
$o(G), \lvert G \rvert$	: G grubunun mertebesi
$o(a)$	: a elemanının mertebesi
$\langle a \rangle$	: a elemanı tarafından üretilen devirli altgrup
$\langle A \rangle$	: A kümesi tarafından üretilen altgrup
$H \leq G$	: H, G nin bir altgrubu
HK	: H ve K altgruplarının çarpımı
aH	: H nin bir sol koseti
Ha	: H nin bir sağ koseti
$\lvert G : H \rvert$	: H altgrubunun G grubu içerisindeki mertebesi
$Z(G)$	: G grubunun merkezi
$C_G(a)$	: a nın G içerisindeki merkezleyeni
$C_G(H)$	: H nin G içerisindeki merkezleyeni
$N_G(H)$	: H nin G içerisindeki normalleyeni
$H \trianglelefteq G$	: H altgrubu G grubunun normal altgrubu
$t(n)$	: n sayısının tüm parçalanmalarının sayısı
$G \times H$	: G ve H gruplarının direkt çarpımı
$G \rtimes H$	: G ve H gruplarının yarı direkt çarpımı
$\psi(G)$	: G grubunun eleman mertebeleri toplamı
$Syl_p(G)$	: Sylow p-altgruplarının kümesi
$\varphi(n)$	: n nin Euler φ-fonksiyonundaki değeri
C_n	: mertebesi n olan devirli grup
$\prec$	: Leksikografik (lexicographic) sıralama
$[A, B]$	: G grubunun A ile B altgruplarının komütatör altgrubu
$[h, k]$	: h ile k elemanlarının komütatörü
$G' = [G, G]$	: G grubunun türetilmiş altgrubu
D_n	: n mertebeli dihedral grubu
Q_8	: Kuaterniyon grubu
$Aut(G)$	: G grubunun bütün otomorfizmalarının kümesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİNİN TOPLAMI

Ayşe Nur KÖKSAL

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, sonlu grupların eleman mertebelerinin tarihçesi ve literatürde yapılmış olan çalışmalar verilmiştir. İkinci bölümde, ileriki bölümlerde gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, sonlu grupların eleman mertebeleri toplamı üzerine elde edilmiş sonuçlar incelenmiştir. Dördüncü bölümde, sonlu abelyen grupların eleman mertebelerinin toplamı üzerine elde edilmiş sonuçlar ele alınmıştır. Son bölümde, devirli olmayan sonlu gruplarda eleman mertebeleri toplamlarının tam bir üst sınırını hesaplayan formül ve bazı sonuçlar incelenmiştir.

Temmuz 2019, 59 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Grup, Eleman Mertebesi, Grubun Eleman Mertebeleri Toplamı, Devirli Grup, Sonlu p-grup.

ABSTRACT

MSc THESIS

SUMS OF ELEMENT ORDERS IN FINITE GROUPS

Ayşe Nur KÖKSAL

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

This thesis consists of five chapters. In first chapter, the history of element orders in finite groups and the studies in the literature are given. In second chapter, the basic definitions and theorems necessary in the following chapters are mentioned. In third chapter, the results obtained on the sum of the element orders in finite groups are investigated. In fourth chapter, the results obtained on the sum of the element orders in the finite abelian groups are discussed. In last chapter, some results obtained from a formula which calculates an exact upper bound for sums of element orders non-cyclic finite groups are examined.

July 2019, 59 Pages.

Keywords: Finite Group, Element Order, Sums of Element Orders in Group, Cyclic Group, Finite p-group.

1. GİRİŞ

Grup teorisi cebirin en eski çalışma alanlarından biridir. Grup kavramı matematiğin farklı alanlarında geçmişten günümüze üzerinde çalışılan fikirlerin soyutlanmasıyla geliştirilmiştir. Grupların ilk etkili kullanımı 19. yüzyılda olmuştur. Bugünkü bildiğimiz grup kelimesini ilk kullanan E. Galois olmuştur. Sonlu grup tanımı ilk kez 1854 yılında Cayley tarafından verildiği kabul edilmekle birlikte açık olarak grup kelimesi kullanılmasada geçmiş zamanda bir çok matematikçinin çalışmalarında grup kavramının kullanıldığı görülmektedir. Cayley'den sonra Hölder, Frobenius, Netto, Walther Von Dyck, Weber, Burnside gibi ünlü matematikçiler grup kavramına katkı yapmışlardır. İspatlamış olduğu teoremin önemi teoriyi denklem çözümlerinden ayırması daha soyut haliyle sunması ve gruplar teorisine olan kişisel katkılarıyla A. Cauchy'e gruplar teorisinin kurucusu ünvanı verilmiştir. A. Cauchy ve E. Galois bir cebirsel denklemin köklerinin permütasyonlarının etkisini tanımlamak amacıyla grupları kullanmıştır. Normal altgruplar 1831 de E. Galois tarafından tanıtılmıştır. E. Galois'un çalışmaları devamında 1865 ve 1869 da yaptığı çalışmalarda C. Jordan normal altgrupları tanımlayarak ilk kez basit grubun tanımını vermiştir. Grup teorisi 20. yüzyılda matematiğin bütün dalları tarafından kabul edilmiştir. Grup teorisi üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bu tezde sonlu grupların eleman mertebeleri toplamı incelenmiştir.

2009 yılında H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs tarafından devirli ve devirli olmayan grupların eleman mertebelerinin toplamları arasındaki ilişki incelenmiştir. 2014 yılında S.M.J. Amiri ve M. Amiri tarafından ve 2015 yılında R. Shen, G. Chen ve C. Wu tarafından sonlu grupların eleman mertebelerinin toplamlarının maksimum değerleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra yapılmış bu çalışmalar **(M. Herzog, P. Longobardi ve M. Maj, 2018)** makalesinde genişletilerek devirli olmayan sonlu grupların eleman mertebelerinin toplamları için bir tam üst sınır elde edilmiştir.

Bu tezde literatürdeki sonlu grupların eleman mertebelerinin toplamları üzerine yapılmış olan çalışmalar ele alınmıştır. Bu tez beş bölümden oluşup şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, [5, 7, 17] kaynaklarından yararlanılarak tez boyunca kullanılacak olan temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, C, mertebesi n olan devirli grup olmak üzere devirli olmayan ve mertebesi n olan bütün G grupları için $\psi(G) < \psi(C)$ eşitsizliği elde edilen **(H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009)** makalesi incelenmiştir. Dördüncü bölümde, $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tamsayıları için $G = \times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times$

$\mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}}$ bir sonlu abelyen p-grubunun eleman mertebeleri toplamının formülünü veren **(M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014)** makalesi araştırılmıştır. Son bölümde, devirli olmayan sonlu grupların eleman mertebelerinin bir tam üst sınırını veren formül **(M. Herzog, P. Longobardi ve M. Maj, 2018)** makalesinde incelenmiştir. Bu makalede n, mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup G, n mertebeli devirli bir grup C_n ve q, n nin en küçük asal böleni olmak üzere $\psi(G) < \frac{1}{q-1}\psi(C_n)$ ve $\psi(G) \leq \frac{7}{11}\psi(C_n)$ sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonlu grupların eleman mertebelerinin toplamları için tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler **(A. Arıkan ve S. Halıcıoğlu, 2015), (A. Nesin, 2014) ve (M. Erdoğan ve G. Yılmaz, 2008)** kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1. G boştan farklı bir küme ve G üzerinde $*$ işlemi tanımlı olsun. $*$ işlemi G üzerinde birleşme özelliğine, birim elemana sahip ve G içerisindeki her elemanın tersi mevcut ise $(G, *)$ ikilisine bir grup denir. Ayrıca her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa bu gruba değişmeli ya da abelyen grup denir.

Tez boyunca grubun birim elemanı 1 ile gösterilecektir.

Tanım 2.2. $(G, *)$ ve (H, o) iki grup olsun. Bu durumda

(i) $H \subseteq G$

(ii) her $a, b \in H$ için $a \, o \, b = a * b$

koşulları sağlanıyorsa H ye G nin bir altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. $H \neq G$ ise H ye G nin öz altgrubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. G bir grup ve birim elemanı 1 olsun. G ve $\{1\}$ altgruplarına G nin aşikar altgrubu denir.

Teorem 2.4. G bir grup ve H, G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $x, y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ oluyorsa H, G nin bir altgrubudur.

Tanım 2.5. G bir grup ve M, G nin bir öz altgrubu olsun. G nin $M < L < G$ olacak şekilde bir L altgrubu yoksa M ye G nin maksimal altgrubu denir.

Tanım 2.6. G bir grup olsun. G grubu sonlu sayıda elemana sahip ise G ye bir sonlu grup, aksi halde sonsuz grup adı verilir. G nin eleman sayısına G nin mertebesi denir ve $o(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = 1$ olacak şekilde en küçük pozitif n doğal sayısına a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ veya $|a|$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. G boştan farklı bir küme olmak üzere G üzerinde tanımlı birebir ve örten fonksiyona permütasyon denir. Her n pozitif tamsayısı için $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba simetrik grup denir. Ayrıca bu grubun eleman sayısı $|S_n| = n!$ dir.

Tanım 2.9. S_n nin çift permütasyonlardan oluşan altgrubuna alterne grup denir ve A_n ile gösterilir. Bu grubun eleman sayısı $|A_n| = n!/2$ dir.

Tanım 2.10. G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi G nin bir altgrubudur ve bu altgruba a elemanı tarafından üretilen devirli altgrup denir. Özel olarak $G = \langle a \rangle$ olacak şekilde $a \in G$ varsa G ye a tarafından üretilen devirli grup denir. a elemanına $\langle a \rangle$ altgrubunun üreteci denir.

Tanım 2.11. $n > 1$ olmak üzere $C_n = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ kümesine n mertebeli çarpımsal devirli grup denir.

Tanım 2.12. G bir grup ve $a \in G$ olsun. $C_G(a) = \{g \in G : ga = ag\}$ kümesi G nin bir altgrubudur ve bu altgruba a nın G içerisindeki merkezleyeni denir.

Tanım 2.13. G bir grup olsun. $Z(G) = \{a \in G : \text{ her } g \in G \text{ için } ga = ag\}$ kümesi G nin bir altgrubudur ve bu altgruba G nin merkezi denir.

Tanım 2.14. $(G_1, *)$ ve (G_2, o) iki grup olmak üzere $f : G_1 \to G_2$ bir fonksiyon olsun. Her a, $b \in G_1$ için

$$f(a * b) = f(a) \; o \; f(b)$$

oluyorsa f ye grup homomorfizması denir. f homomorfizması birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem birebir hem de örten ise izomorfizma adı verilir. Ayrıca $G_1 = G_2$ ve f bir grup homomorfizması ise f ye bir endomorfizma; f bir izomorfizma ise otomorfizma olarak adlandırılır ve $AutG_1$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. $a \in G$ olmak üzere

$$aH = \{ah : h \in G\}$$

kümesine H altgrubunun G içerisindeki bir sol koseti,

$$Ha = \{ha : h \in G\}$$

kümesine H altgrubunun G içerisindeki bir sağ koseti denir.

Tanım 2.16. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. H altgrubunun G içerisindeki sol kosetlerinin sayısına H nin G içerisindeki mertebesi denir ve $|G : H|$ ile gösterilir.

Teorem 2.17. (Lagrange Teoremi) G sonlu bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. O zaman H altgrubunun mertebesi G sonlu grubunun mertebesini böler, yani

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$$

dir.

İspat G sonlu bir grup olduğundan H altgrubunun mertebesi de sonludur. Böylece $|G : H| = n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ için H nin G içerisindeki farklı sol kosetleri $a_1H, a_2H, \ldots, a_nH$ dir. $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $f(h) = a_ih$ olacak şekilde $f : H \longrightarrow a_iH$ fonksiyonu tanımlansın. Her $h_1, h_2 \in H$ için $f(h_1) = f(h_2)$ ise $a_ih_1 = a_ih_2$ olup $h_1 = h_2$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu birebirdir. Diğer taraftan $x \in a_iH$ ise o zaman $x = f(h)$ olacak şekilde $h \in H$ elemanı mevcuttur. Dolayısıyla f fonksiyonu örtendir. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|H| = |a_iH|$ olur. Bu kosetler G nin bir ayrışımını belirtir. Böylece

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_nH$$

olup

$$\begin{aligned} |G| &= |a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_nH| \\ &= |a_1H| + \ldots + |a_nH| \\ &= \underbrace{|H| + \ldots + |H|}_{n \text{ tane}} \\ &= n|H| \\ &= |G : H||H| \end{aligned}$$

dir. Buradan $|H| \mid |G|$ elde edilir. ■

Uyarı 2.18. Bir sonlu grubun mertebesinin pozitif bölenlerine karşılık bir altgrup her zaman bulunamayacağından Lagrange Teoremi'nin karşıtı doğru değildir.

Örnek 2.19. A_4 alterne grubunun mertebesi $|A_4| = 12$ ve $6|12$ olmasına rağmen A_4 alterne grubunun mertebesi 6 olan altgrubu yoktur.

Tanım 2.20. G bir grup ve H ile K, G nin birer altgrubu olsun.

$$HK = \{hk : h \in H \text{ ve } k \in K\}$$

kümesine H ve K altgruplarının çarpımı denir.

Tanım 2.21. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun.

$$N_G(H) = \{a \in G : aH = Ha\}$$

kümesi G nin bir altgrubudur ve bu altgruba H nin G içerisindeki normalleyeni denir.

Tanım 2.22. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. Her $a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa H ye G nin bir normal altgrubu denir ve $H \trianglelefteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.23. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. H nin herhangi bir elemanı a olmak üzere her $g \in G$ için $g^a = aga^{-1}$ elemanına g nin a ya göre eşleniği denir.

$$H^a = aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in G\}$$

kümesine H nin a ya göre eşleniği denir.

Tanım 2.24. G bir grup ve H, G nin bir normal altgrubu olsun. H nin G içerisindeki farklı sağ kosetlerinin kümesi $G/H = \{Ha : a \in G\}$ ile gösterilsin. Her $Ha, Hb \in G/H$ için

$$(Ha)(Hb) = H(ab)$$

olacak şekilde tanımlanan işlem ile birlikte $(G/H, .)$ ikilisi bir gruptur ve bu gruba G nin H ile bölüm grubu denir.

Tanım 2.25. n bir pozitif tamsayı olsun. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \equiv b(\text{mod} n)$ olması için gerek ve yeter koşul $n|(a-b)$ olmasıdır. $\equiv (\text{mod} n)$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre olan denklik sınıflarına mod$n$ kalan sınıfları denir ve bu denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_n$ ile gösterilir. n tamsayısına göre kalanlar $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sayılarından birisi olacağından $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ dir.

Tanım 2.26. G bir grup ve p bir asal sayı olsun. G grubunun her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti olarak ifade edilebiliyorsa G ye p-grubu denir.

Örnek 2.27. $C_8 = \langle a \rangle$ devirli grubunun elemanlarının mertebeleri $o(a) = o(a^3) = o(a^5) = o(a^7) = 8 = 2^3$, $o(a^2) = o(a^6) = 4 = 2^2$ ve $o(a^4) = 2$, $o(1) = 1 = 2^0$ olup 2 nin kuvvetleri olarak ifade edilebildiğinden C_8 devirli grubu bir 2-gruptur.

Teorem 2.28. **(Sylow Teoremleri)** G sonlu bir grup ve p bir asal sayı olsun.
(i) m bir pozitif sayı olmak üzere $p^m||G|$ ve $p^{m+1} \nmid |G|$ ise o zaman G grubunun p^m mertebeli altgrubuna Sylow p-altgrubu denir ve G_p ile gösterilir. Bütün Sylow p-altgruplarının kümesi $Syl_p(G)$ ile gösterilir.
(ii) G nin herhangi iki Sylow p-altgrubu eşleniktir, yani P_1 ve P_2, G nin iki Sylow p-altgrubu ise $P_1^g = P_2$ olacak şekilde G de bir g elemanı mevcuttur.
(iii) G grubunun farklı Sylow p-altgruplarının sayısı n_p olmak üzere $p||G|$ ise $n_p||G|$ ve $n_p \equiv 1(\text{mod} p)$ dir.

Örnek 2.29. $G = \mathbb{Z}_6$ grubunun mertebesi $6 = 2.3$ olup bir p asal sayısının kuvveti olmadığından $\mathbb{Z}_6$ bir p-grup değildir. Ancak $2||\mathbb{Z}_6|$ ve $3||\mathbb{Z}_6|$ olduğundan G_2 ve G_3 altgrupları vardır. Bunlar

$$\begin{aligned} G_2 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 2^r \text{ olacak şekilde } r \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ &= \langle \overline{3} \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_3 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 3^r \text{ olacak şekilde } r \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \\ &= \langle \overline{2} \rangle \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.30. **(Burnside Teoremi)** p bir asal sayı olmak üzere G bir p-grup ise o zaman G nin merkezi $Z(G)$ aşikar bir grup değildir.

Tanım 2.31. n bir pozitif tamsayı olmak üzere n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona Euler φ-fonksiyonu denir ve $\varphi(n)$ ile gösterilir.

n asal sayı ise $\varphi(n) = n - 1$ dir. n ile m iki pozitif tamsayı ve $(n, m) = 1$ ise

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

dir.

Teorem 2.32. n bir pozitif tamsayı ve n nin kanonik formu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ olmak üzere

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_k}) \tag{2.1}$$

dır.

Uyarı 2.33. Euler φ-fonksiyonu n mertebeli devirli grubunda mertebesi n olan elemanların sayısını verir. Örnek 2.27. deki C_8 devirli grubunun mertebesi 8 olan elemanlar a, a^3, a^5, a^7 dir. Yani 4 tane vardır, bu sayı $\varphi(8)$ e eşittir.

Tanım 2.34. G bir grup H, G nin bir altgrubu olsun. Her $f : G \to G$ otomorfizması için $f(H) \leq H$ oluyorsa H ye G nin karakteristik altgrubu denir.

Tanım 2.35. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grup olmak üzere

$$G = \times_{i=1}^{n} G_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesi üzerinde "." işlemi

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$$

şeklinde tanımlansın. G kümesi, "." işlemine göre kapalılık özelliğine, birim elemana sahip ve $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G = \times_{i=1}^{n} G_i$ için bu elemanın tersi $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$ dir. Ayrıca G, "."

işlemine göre birleşme özelliğine de sahiptir. Böylece $G = \times_{i=1}^{n} G_i$ kümesi "." işlemi ile bir gruptur ve bu gruba $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gruplarının dış direkt çarpımı denir.

Örnek 2.36. $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ ve $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ ise

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2}), (\overline{0},\overline{3}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), (\overline{1},\overline{2}), (\overline{1},\overline{3})\}$$

dir.

Tanım 2.37. H ve N iki grup olsun. Her $h \in H$ için tanımlanacak olan

$$f_h : N \to N,\ f_h(n) = hnh^{-1}$$

otomorfizması ve

$$f : H \to Aut(N),\ f(h) = f_h$$

homomorfizması altında

$$G = \{(n, h) : n \in N, h \in H\}$$

kümesi

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 f_h(n_2), h_1 h_2)$$

işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu gruba yarı direkt çarpım grubu denir ve $G = N \rtimes H$ ile gösterilir.

Tanım 2.38. G bir grup olsun. $x, y \in G$ için

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

şeklinde tanımlanan işleme x ile y nin komutatörü denir.

Lemma 2.39. G bir grup olsun. $x, y, g, h \in G$ için

(i) $[x, y] = 1_G$ olması için gerek ve yeter koşul $xy = yx$ olmasıdır.
(ii) $x^g = y^h$ ise o zaman $x^{h^{-1}g} = y$ dir.

Tanım 2.40. G bir grup ve H ile K, G nin birer altgrubu olsun.

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle$$

şeklinde tanımlanan $[H, K]$ kümesine H ile K nın komutatör altgrubu denir. $G^{'} = [G, G]$ kümesine, G nin türetilmiş altgrubu denir. Ayrıca G' nin türetilmiş altgrubu $[G^{'}, G^{'}]$, $G^{''}$ ile gösterilir.

Teorem 2.41. G bir grup olsun. G nin bir abelyen grup olması için gerek ve yeter koşul $G' = \langle 1 \rangle$ olmasıdır.

Tanım 2.42. G bir grup ve G nin altgruplarının bir serisi

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} = \{1\}$$

olsun. $1 \leq i \leq n$ için G_{i+1}, G_i nin normal altgrubu ise bu seriye normal altgrup serisi denir.

Tanım 2.43. G bir grup ve $1 \leq i \leq n$ için G_i/G_{i+1} abelyen olacak şekilde

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} = \{1\} \tag{2.2}$$

sonlu normal altgrup serisine sahipse bu G grubuna çözülebilir grup ve (2.2) normal altgrup serisine de G nin bir çözülebilir serisi denir.

Tanım 2.44. $Z_0(G) = \{1\}$ ve her $i = 1, 2 \ldots$ için

$$Z_i(G) = \{x \in G : \text{ her } y \in G \text{ için } xyx^{-1}y^{-1} \in Z_{i-1}(G)\}$$

olmak üzere bir G grubunun üst merkez serisi

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$$

G nin bir normal altgrup serisidir.

Tanım 2.45. Bir m doğal sayısı için $Z_m(G) = G$ oluyorsa G grubuna nilpotent grup denir. G nilpotent grup ise $Z_k(G) = G$ olacak şekilde en az bir k doğal sayısı mevcuttur. Bu k doğal sayılarının en küçüğüne G nin nilpotent sınıfı denir ve G ye k-nıncı dereceden k-nilpotent grup denir.

Tanım 2.46. $n \geq 3$ bir tamsayı olsun. $D_n = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ kümesine dihedral grup denir.

Tanım 2.47. $n \geq 4$ olmak üzere

$$D_{2^n} = \langle a, x : a^{2^{n-1}} = x^2 = 1, xax = a^{2^{n-2}-1} \rangle$$

kümesi 2^{n-1} mertebeli sonlu bir yarıdihedral grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.48. $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ kümesi üzerinde $ii = jj = kk = -1, ij = (-j)i = k, jk = (-k)j = i, ki = (-i)k = j$ şeklinde tanımlanan işleme göre Q_8 bir gruptur ve bu gruba kuaterniyon grup denir.

3. SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİ TOPLAMI

Bu bölümde bir sonlu grubun eleman mertebelerinin toplamı üzerine yapılmış olan **(H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009)** makalesi incelenmiştir. G bir sonlu grup ve a, G nin bir elemanı olsun. $o(a)$, a nın mertebesi olmak üzere G deki elemanların mertebelerinin toplamı

$$\psi(G) = \sum_{a \in G} o(a)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.1. (H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009) G devirli olmayan bir sonlu grup olmak üzere $P \in Syl_p(G)$ ve kabul edilsin ki P, devirli ve G nin normal altgrubu olsun. $a \in G$ ve $Pa \in G/P$ için $|Pa| = m$ olmak üzere $\psi(Pa) \leq m\psi(P)$ dir. $\psi(Pa) = m\psi(P)$ olması için gerek ve yeter koşul $a \in C_G(P)$ olmasıdır.

İspat $|Pa| = m$ olsun. $m|o(a)$ olduğundan $o(a) = mq$ olacak şekilde bir q tamsayısı vardır. O zaman $(a^m)^q = 1$ dir, yani $q = o(a^m)$ dir. Böylece $a^m \in P$ olduğundan q nun p nin bir kuvveti olduğu görülür. Fakat $m|\ |G/P|$ iken $p \nmid |G/P|$ dir. O halde $(q, m) = 1$ ve $qn \equiv 1$ (mod$m$) olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. $o(a^q) = m$ ve $y = (a^q)^n$ olsun. Böylece $(n, m) = 1$ olduğundan $o(y) = m$ dir. Ayrıca $Py = Pa^{qn} = (Pa)^{qn} = Pa$ dır. P abelyen olduğundan $y \in C_G(P)$ olması için gerek ve yeter koşul $a \in C_G(P)$ olmasıdır. Böylece a, y ile yer değiştirilir ve $o(a) = m$ olduğu kabul edilir. P nin bazı u elemanları için Pa nın her elemanı ua formuna sahiptir ve $o(ua) \leq mo(u)$ dur. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul a nın u nun merkezleyeninde olmasıdır. P devirli olduğundan $\langle u \rangle$, P de karakteristik altgrup olur ve buradan $\langle u \rangle \lhd G$ dir ve $\langle u \rangle \langle a \rangle$ bir altgruptur. Dolayısıyla $ua \in \langle u \rangle \langle a \rangle$ olacağından

$$o(ua) \leq |\langle u \rangle \langle a \rangle| = mo(u) \tag{3.1}$$

elde edilir. Ayrıca $o(ua) = mo(u)$ ise o zaman $\langle u \rangle \langle a \rangle$ bir devirli gruptur ve böylece a, u nun merkezleyenindedir. Diğer taraftan a, u nun merkezleyenindeyse o zaman $(o(a), o(u)) = 1$ olduğundan $o(ua) = o(u)o(a) = mo(u)$ dur. Böylece

$$\psi(Pa) = \sum_{u \in P} o(ua) \leq \sum_{u \in P} mo(u) = m \sum_{u \in P} o(u) = m\psi(P)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul her bir $u \in P$ için a nın u nun merkezleyeninde veya P nin merkezleyeninde olmasıdır. ■

Sonuç 3.2. (H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009) $P \in Syl_p(G)$ ve kabul edilsin ki P, devirli ve G nin normal altgrubu olsun. O zaman $\psi(G) \leq \psi(P)\psi(G/P)$ dir ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $P \subseteq Z(G)$ olmasıdır.

İspat $Pa \in G/P$ için $o(Pa)$, Pa kosetinin mertebesi olsun. G/P nin her bir kosetine Lemma 3.1. uygulanarak

$$\begin{aligned}\psi(G) &= \sum_{Pa \in G/P} \psi(Pa) \\ &\leq \sum_{Pa \in G/P} o(Pa)\psi(P) \\ &= \psi(P) \sum_{Pa \in G/P} o(Pa) \\ &= \psi(P)\psi(G/P)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece $\psi(G) \leq \psi(P)\psi(G/P)$ dir. Lemma 3.1. den $\psi(G) = \psi(P)\psi(G/P)$ olması için gerek ve yeter koşul her $a \in G$ ve $u \in P$ için $au = ua$ olmasıdır. Yani $P \subseteq Z(G)$ dir. ■

Lemma 3.3. (H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009) $n > 1$ tamsayısının en büyük asal böleni p olsun. O zaman φ, Euler φ-fonksiyonu olmak üzere $\varphi(n) \geq n/p$ dir.

İspat k, n nin farklı asal bölenlerinin sayısı olsun. $k = 1$ için s pozitif tamsayı olmak üzere $n = p^s$ dir. Böylece

$$\varphi(n) = \varphi(p^s) = p^s(1 - \frac{1}{p}) = (p-1)p^{s-1} = (p-1)(\frac{n}{p}) \geq \frac{n}{p}$$

sonucuna ulaşılır. $k > 1$ için k üzerinde tümevarım yöntemi uygulansın. s bir pozitif tamsayı olmak üzere $n = p^s m$ ve $p \nmid m$ olsun. O zaman m, $(k-1)$ tane asal bölene sahip ve q, bu asal bölenlerin en büyüğü olsun. Böylece $q < p$ dir. Dolayısıyla

$$\varphi(n) = \varphi(p^s m) = \varphi(p^s)\varphi(m) \geq (p-1)\frac{p^s m}{pq} = \frac{(p-1)n}{pq} \geq \frac{n}{p}$$

sonucuna ulaşılır. $p > q$ olduğundan $p - 1 \geq q$ dur. Böylece

$$\frac{(p-1)n}{pq} \geq \frac{n}{p}$$

elde edilir. Bu da istenilen $\varphi(n) \geq n/p$ sonucunu verir. ■

Örnek 3.4. $n = 72$ için $72 = 2^3.3^2$ ve n nin en büyük asal böleni $p = 3$ tür. Böylece $\varphi(72) = 72.(1 - \frac{1}{2}).(1 - \frac{1}{3}) = 24$ olup $\varphi(72) = 24 \geq 72/3 = 24$ elde edilir.

Sonuç 3.5. (H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009) C, mertebesi n olan devirli grup ve p, n nin en büyük asal böleni olsun. O zaman $\psi(C) > n^2/p$ dir.

İspat C de mertebesi n olan $\varphi(n)$ tane eleman vardır. Böylece

$$\psi(C) > n\varphi(n) \geq n.\frac{n}{p} = \frac{n^2}{p}$$

dir. ■

Örnek 3.6. C, mertebesi 8 olan devirli bir grup ve 8 in en büyük asal böleni $p = 2$ dir. Dolayısıyla $\psi(C) = 43 > 8^2/2 = 32$ olarak bulunur.

Teorem 3.7. (H. Amiri ve S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009) C, mertebesi n olan devirli grup olsun. O zaman devirli olmayan ve mertebesi n olan bütün G grupları için $\psi(G) < \psi(C)$ dir.

İspat C, n mertebeli bir devirli grup ve mertebesi n olan G grubu için $\psi(G) \geq \psi(C)$ olsun. İlk olarak G nin devirli olduğu gösterilecektir. $n = 1$ için bu durum açıktır. $n > 1$ için n üzerinde tümevarım yöntemi uygulansın. Sonuç 3.5. den G nin elemanlarının mertebelerinin ortalaması

$$\frac{\psi(G)}{|G|} \geq \frac{\psi(C)}{n} > \frac{n^2/p}{n} = \frac{n}{p}$$

olarak bulunur. G nin bütün elemanlarının mertebelerinin ortalamadan düşük olması mümkün olamayacağından mertebesi ortalama olan en az bir $a \in G$ vardır ve $o(a) > n/p$ dir. O zaman $|G : \langle a \rangle| < p$ olur. Böylece $\langle a \rangle$, G nin bir Sylow p-altgrubu P yi içerir ve P devirlidir. Ayrıca $\langle a \rangle \subseteq N_G(P)$ dir. Dolayısıyla $|G : N_G(P)| < p$ dir ve bunun sonucunda P, G nin bir normal altgrubu olur. Sonuç 3.2. den yararlanarak

$$\psi(G) \leq \psi(P)\psi(G/P)$$

dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $P \subseteq Z(G)$ olmasıdır. Q, C nin bir Sylow p-altgrubu olsun. P ve Q aynı mertebeli devirli gruplar olacağından $P \cong Q$ ve $\psi(P) = \psi(Q)$ dur. Böylece

$$\psi(P)\psi(G/P) \geq \psi(G) \geq \psi(C) = \psi(Q)\psi(C/Q) \tag{3.2}$$

elde edilir. C grubuna Sonuç 3.2. uygulandığında eşitlik durumu sağlanır. $\psi(P) = \psi(Q)$ olduğundan her iki taraf sadeleştirilir ve $\psi(G/P) \geq \psi(C/Q)$ elde edilir. Fakat C/Q devirli ve n den küçük aynı mertebeye sahip olduğundan G/P devirlidir. Böylece $G/P \cong C/Q$ dur ve $\psi(G/P) = \psi(C/Q)$ olur. Bunun sonucunda (3.2) eşitsizliğinde eşitlik durumu sağlanır ve $P \subseteq Z(G)$ olduğu bulunur. $P \subseteq Z(G)$ ve G/P devirli olduğundan G abelyendir. Ayrıca P, G nin bir Sylow altgrubu olduğundan $B \cong G/P$ devirli olacak şekilde $G = P \times B$ dir. Böylece G, mertebeleri aralarında asal olan grupların bir direkt çarpımıdır ve dolayısıyla G devirlidir. ■

Örnek 3.8. $G = Q_8$ ve $C = \langle a \rangle$ mertebesi 8 olan devirli bir grup olsun.

$$\begin{aligned} \psi(Q_8) = \sum_{x \in Q_8} o(x) &= o(i) + o(-i) + o(j) + o(-j) + o(k) + o(-k) + o(1) + o(-1) \\ &= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 2 \\ &= 27 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(C) = \sum_{x \in C} o(x) &= o(a) + o(a^3) + o(a^5) + o(a^7) + o(a^2) + o(a^6) + o(a^4) + o(1) \\ &= 4.8 + 2.4 + 2 + 1 \\ &= 43 \end{aligned}$$

tür. Böylece $\psi(Q_8) < \psi(C)$ elde edilir.

4. SONLU ABELYEN GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİ TOPLAMI

Bu bölümde sonlu abelyen grupların eleman mertebelerinin toplamını veren **(M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014)** makalesi incelenmiştir. Bu makalede Târnâuceanu ve Fodor tarafından sonlu abelyen grupların eleman mertebelerinin toplamını hesaplayan bir formül elde edilmiştir. G bir sonlu grup olsun. $a \in G$ nin mertebesi $o(a)$ olmak üzere, G nin bütün elemanlarının mertebeleri toplamı $\psi(G) = \sum_{a \in G} o(a)$ ile gösterilir.

G_1 ile G_2 iki sonlu grup ve $(|G_1|, |G_2|) = 1$ olsun. O zaman

$$\psi(G_1 \times G_2) = \psi(G_1)\psi(G_2) \tag{4.1}$$

dir. $i = 1, 2, \ldots, k$ için G_i sonlu gruplarının mertebeleri aralarında asal ise i üzerinde tümevarım uygulanırsa

$$\psi(\times_{i=1}^{k} G_i) = \prod_{i=1}^{k} \psi(G_i)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonlu abelyen grupların eleman mertebelerinin toplamını hesaplamak için sonlu abelyen gruplar p-gruplarına indirgenir.

Teorem 4.1. (M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014) $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tamsayıları için

$$G = \times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_k}}$$

sonlu bir abelyen p-grubu olsun. O zaman

$$f_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}(\alpha) = \begin{cases} p^{(k-1)\alpha}, & 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \\ p^{(k-2)\alpha + \alpha_1}, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \\ \quad \vdots & \\ p^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1}}, & \alpha_{k-1} \leq \alpha \end{cases}$$

olacak şekilde

$$\psi(G) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_k} (p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha) - p^{2\alpha-1} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha-1)) \tag{4.2}$$

dir.

Uyarı 4.2. (i) Teorem 4.1. de yer alan $f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}$ fonksiyonu artandır.
(ii) $\psi(\times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}})$, p değişkenli $(2\alpha_k + \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha_1)$ dereceli bir polinomdur.
(iii) Alternatif olarak $\psi(\times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}})$ polinomu

$$\psi(\times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}) = p^{2\alpha_k+\alpha_{k-1}+\ldots+\alpha_1} - (p-1) \sum_{\alpha=0}^{\alpha_k-1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha) \tag{4.3}$$

olarak da ifade edilebilir.

Sonuç 4.3. Teorem 4.1 den yararlanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \psi(\mathbb{Z}_{p^n}) = \frac{p^{2n+1}+1}{p+1}, \\
&\text{(ii)} \quad \psi(\mathbb{Z}_p^n) = p^{n+1} - p + 1, \\
&\text{(iii)} \quad \psi(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p^{n-2}) = p^{n+2} - p^{n+1} + p^n - p + 1, \\
&\text{(iv)} \quad \psi(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}}) = \frac{p^{2\alpha_2+\alpha_1+3} + p^{2\alpha_2+\alpha_1+2} + p^{2\alpha_2+\alpha_1+1} + p^{3\alpha_1+2} + p + 1}{(p+1)(p^2+p+1)}, \\
&\text{(v)} \quad \psi(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_3}}) = \frac{p^{2\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1+1} + p^{3\alpha_2+\alpha_1+2}}{p+1} - \frac{p^{3\alpha_2+\alpha_1+3} - p^{4\alpha_1+3}}{p^2+p+1} \\
&\qquad\qquad - \frac{p^{4\alpha_1+4} - 1}{p^3+p^2+p+1}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat (i) (4.3) ifadesinde $k = 1$ ve $\alpha_i = n$ değerleri yerine yazılırsa

$$\psi(\times_{i=1}^{1} \mathbb{Z}_{p^n}) = p^{2n} - (p-1)(1 + p^2 + \ldots + p^{2n-2})$$

elde edilir. Daha sonra

$$\psi(\mathbb{Z}_{p^n}) = p^{2n} - (p-1)(1 + p^2 + \ldots + p^{2n-2})$$

$$= p^{2n} - p - p^3 - p^5 - \ldots - p^{2n-1} + 1 + p^2 + \ldots + p^{2n-2}$$
$$= 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - \ldots - p^{2n-1} + p^{2n}$$

sonucuna ulaşılır. $p^n + 1 = (p+1)(p^{n-1} - p^{n-2} + \ldots + 1)$ eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_{p^n}) &= p^{2n} - p^{2n-1} + \ldots + p^2 - p + 1 \\ &= \frac{(p+1)(p^{2n} - p^{2n-1} + \ldots + p^2 - p + 1)}{p+1} \\ &= \frac{p^{2n+1}+1}{p+1}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\psi(\mathbb{Z}_p^n) = \psi(\underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ tane}})$ olduğundan (4.3) ifadesinde $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$ ve $k = n$ olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_p^n) = \psi(\times_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}) &= p^{2.1+(n-1).1} - (p-1)\sum_{\alpha=0}^{1-1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha) \\ &= p^{2+n-1} - (p-1).1 \\ &= p^{n+1} - p + 1\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\psi(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p^{n-2}) = \psi(\underbrace{\mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p}_{n\text{-2 tane}} \times \mathbb{Z}_{p^2})$ dir. (4.3) ifadesinde $k = n-1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-2} = 1$ ve $\alpha_{n-1} = 2$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p^{n-2}) &= p^{2\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_1} - (p-1)\sum_{\alpha=0}^{\alpha_{n-1}-1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha) \\ &= p^{2.2+1.(n-2)} - (p-1)\sum_{\alpha=0}^{1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\alpha) \\ &= p^{4+n-2} - (p-1)(p^{2.0}p^{(n-1-1).0} + p^{2.1}p^{n-2}) \\ &= p^{n+2} + (1-p)(1+p^n) \\ &= p^{n+2} - p^{n+1} + p^n - p + 1\end{aligned}$$

dir.

(iv) $k = 2$ ve $\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2$ değerleri için

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}}) &= p^{2\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)\sum_{\alpha=0}^{\alpha_2-1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(\alpha) \\
&= p^{2\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)(p^{2.0} f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(0) + p^{2\alpha_1} f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(\alpha_1) \\
&\quad + p^{2(\alpha_2-1)} f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(\alpha_2 - 1)) \\
&= p^{2\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)(1 + p^{2\alpha_1}p^{\alpha_1} + p^{2\alpha_2-2}p^{\alpha_1}) \\
&= p^{2\alpha_2+\alpha_1} + (1-p)(1 + p^{3\alpha_1} + p^{2\alpha_2+\alpha_1-2}) \\
&= p^{2\alpha_2+\alpha_1} + 1 + p^{3\alpha_1} + p^{2\alpha_2+\alpha_1-2} - p - p^{3\alpha_1+1} - p^{2\alpha_2+\alpha_1-1} \\
&= p^{2\alpha_2+\alpha_1}(1 + p^{-2} - p^{-1}) - p + 1 + p^{3\alpha_1}(1-p) \\
&= \frac{p^{2\alpha_2+\alpha_1+3} + p^{2\alpha_2+\alpha_1+2} + p^{2\alpha_2+\alpha_1+1} + p^{3\alpha_1+2} + p + 1}{(p+1)(p^2+p+1)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(v) $k = 3$ ve $\alpha_i = \alpha_1$, α_2, α_3 değerleri için

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_3}}) &= p^{2\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)\sum_{\alpha=0}^{\alpha_3-1} p^{2\alpha} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\alpha) \\
&= p^{2\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)(p^{2.0} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(0) \\
&\quad + p^{2\alpha_1} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\alpha_1) + p^{2\alpha_2} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\alpha_2) \\
&\quad + p^{2(\alpha_3-1)} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\alpha_3 - 1)) \\
&= p^{2\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)(1 + p^{2\alpha_1}p^{2\alpha_1} + p^{2\alpha_2}p^{\alpha_2+\alpha_1} \\
&\quad + p^{2\alpha_3-2}p^{\alpha_3-1+\alpha_1}) \\
&= \frac{p^{2\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1+1} + p^{3\alpha_2+\alpha_1+2}}{p+1} - \frac{p^{3\alpha_2+\alpha_1+3} - p^{4\alpha_1+3}}{p^2+p+1} \\
&\quad - \frac{p^{4\alpha_1+4} - 1}{p^3+p^2+p+1}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

Örnek 4.4. $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ ve $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ grupları için

$$\psi(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8) = \psi(\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^3})$$

olup Sonuç 4.3. ün (iv) ifadesinde $p = 2$, $\alpha_1 = 2$ ve $\alpha_2 = 3$ değerleri yerine yazılırsa

$$\psi(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8) = \frac{3843}{21} = 183$$

olarak bulunur.

Tanım 4.5. (A. Arıkan ve S. Halıcıoğlu, 2015) n bir pozitif tamsayı olsun. $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r$ ve $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ koşullarını sağlayan $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ doğal sayılar dizisine n nin bir parçalanması (ayrışımı) denir. n nin tüm parçalanmalarının sayısı $t(n)$ ile gösterilir.

Örnek 4.6. $n = 3$ için n nin bütün parçalanmaları (3), $(2, 1)$ ve $(1, 1, 1)$ olduğundan $t(3) = 3$ tür. $n = 4$ için n nin bütün parçalanmaları $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$ ve $(1, 1, 1, 1)$ olduğundan $t(4) = 5$ tir.

n bir pozitif tamsayı olsun. p^n mertebeli abelyen grupların kümesi ile n nin parçalanmalarının kümesi

$$P_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\}$$

arasında birebir ilişki vardır. Yani

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}} \mapsto (\alpha_k, \ldots, \alpha_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n\text{-}k) \text{ tane}})$$

dönüşümü vardır.

Örnek 4.7. $n = 4$ için

$$P_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\}$$

olacağından $P_4 = \{(4, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (2, 2, 0, 0), (3, 1, 0, 0)\}$ kümesi elde edilir.

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 4 \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{4} \mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}} \mapsto (\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$$

dönüşümü vardır. Yani

$$
\begin{aligned}
4, \quad & \sum_{i=1}^{1}\alpha_i = 4 \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{1}\mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^4} \mapsto (4,\ \underbrace{0,0,0}_{4-1=3 \text{ tane}}),\\
1=1=1=1, \quad & \sum_{i=1}^{4}\alpha_i = 4 \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{4}\mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{2^1}\times\mathbb{Z}_{2^1}\times\mathbb{Z}_{2^1}\times\mathbb{Z}_{2^1} \mapsto (1,1,1,1),\\
2=2, \quad & \sum_{i=1}^{2}\alpha_i = 4 \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{2}\mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{2^2} \mapsto (2,\ 2,\underbrace{0,0}_{4-2=2 \text{ tane}}),\\
1<3, \quad & \sum_{i=1}^{2}\alpha_i = 4 \text{ olmak üzere } \times_{i=1}^{2}\mathbb{Z}_{2^{\alpha_i}} = \mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^0}\times\mathbb{Z}_{2^1}\times\mathbb{Z}_{2^3} \mapsto (3,\ 1,\underbrace{0,0}_{4-2=2 \text{ tane}})
\end{aligned}
$$

dır.

Tanım 4.8. (A. Arıkan ve S. Halıcıoğlu, 2015) $G, \preceq$ kısmi sıralı bir küme olsun. $a, b \in G$ için $a \preceq b$ veya $b \preceq a$ ise o zaman a ve b elemanları kıyaslanabilir denir. G nin her eleman çifti kıyaslanabilir ise o zaman $\preceq$ bağıntısına bir tam sıralama bağıntısı denir ve $(G, \preceq)$ ikilisine de bir tam sıralama kümesi denir.

$$
(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff \begin{cases} x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m \\ \text{ve} \\ x_{m+1} < y_{m+1}, \ \text{bazı } m \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \end{cases}
$$

olacak şekilde tanımlanan leksikografik (lexicographic) sıralama $\prec$, P_n de tam sıralamadır.

Örnek 4.9. $P_4 = \{(4,0,0,0),(1,1,1,1),(2,1,1,0),(2,2,0,0),(3,1,0,0)\}$ kümesinin elemanları için leksikografik sıralaması $(1,1,1,1) \prec (4,0,0,0)$, $(1,1,1,1) \prec (2,1,1,0)$, $(2,1,1,0) \prec (2,2,0,0)$, $(2,2,0,0) \prec (3,1,0,0)$, $(2,1,1,0) \prec (3,1,0,0)$ şeklindedir.

Leksikografik sıralama p^n mertebeli abelyen p-grupların sınıflarının kümesi üzerindeki bir tam sıralamaya indirgenebilir. p^2, p^3, p^4 mertebeli abelyen p-grupların bütün sınıflarının ψ altındaki değerlerini hesaplayarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 4.3.(ii) uygulanarak

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_p^2) &= p^{n+1} - p + 1\\ &= p^3 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_{p^2}) = \frac{p^5+1}{p+1} = p^4 - p^3 + p^2 - p + 1\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 4.3.(ii) kullanılarak

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_p^3) &= p^4 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 4.3. ün (iv) ve (i) kısmından

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}) &= \frac{p^8 + p^6 + p^5 + p + 1}{(p+1)(p^2+p+1)}\\ &= p^5 - p^4 + p^3 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_{p^3})\\ &= \frac{p^7+1}{p+1}\\ &= p^6 - p^5 + p^4 - p^3 + p^2 - p + 1\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\psi(\mathbb{Z}_p^3) < p^6 - p^5 + p^4 - p^3 + p^2 - p + 1$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\psi(\mathbb{Z}_p^4) &= p^5 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})\\ &= p^6 - p^5 + p^4 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^3})\\ &= p^7 - p^6 - p^5 + p^4 + p^3 - p + 1\\ &< \psi(\mathbb{Z}_{p^4})\\ &< p^8 - p^7 + p^6 - p^5 + p^4 - p^3 + p^2 - p + 1\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.10. (M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014) $G_1 = \times_{i=1}^{k}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}$ ve $G_2 = \times_{j=1}^{r}\mathbb{Z}_{p^{\beta_j}}$, p^n mertebeli iki sonlu abelyen p-grup olsun. O zaman

$$\psi(G_1) < \psi(G_2) \Longleftrightarrow (\alpha_k, \ldots, \alpha_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n\text{-}k)\text{ tane}}) \prec (\beta_r, \ldots, \beta_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n\text{-}r)\text{ tane}}) \tag{4.4}$$

dir.

İspat P_n kümesi tam sıralı olduğundan sadece n nin ardışık olan parçalanmaları için (4.4) ifadesinin ispatlanması yeterli olacaktır. $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0) \prec (\beta_r, \ldots, \beta_1, 0, \ldots, 0)$ olsun. $\psi(G_1) < \psi(G_2)$ olduğu ispatlanacaktır. Sonuç 4.3. ün (ii) ve (iii) kısmından P_n kümesinin ilk iki elemanı için istenilen eşitsizlik sağlanır. $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_s < \beta_{s+1}$ olacak şekilde $s \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ olsun. O halde incelenecek iki durum mevcuttur.

1. Durum $\beta_1 \geq 2$ olsun. O zaman $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0)$ parçalanması $k = r+1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \beta_1 - 1$ ve $i = 3, 4, \ldots, r+1$ için $\alpha_i = \beta_{i-1}$ olacak şekilde $(\beta_r, \ldots, \beta_2, \beta_1 - 1, 1, 0, \ldots, 0)$ sınıfındadır. Böylece her $\gamma \geqslant \beta_1$ için

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) = f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\psi(G_2) - \psi(G_1) &= p^{\beta_r+n} - (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma) \\
&\quad -p^{\alpha_k+n} + (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\alpha_k-1} p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) \\
&= (p-1)(\sum_{\gamma=0}^{\alpha_k-1} p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) - \sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma)) \\
&= (p-1)(\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) - \sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma)) \\
&= (p-1)(\sum_{\gamma=1}^{\beta_r-1} (p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) - 1.p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma))) \\
&= (p-1)(\sum_{\gamma=1}^{\beta_r-1} p^{2\gamma}(p^{(r-1)\gamma+1} - p^{(r-1)\gamma})) > 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum $\beta_1 = 1$ olsun. O zaman $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0)$ parçalanması $\beta_{s+1} - 1 \geq \beta'_t \geq \beta'_{t-1} \geq \ldots \geq \beta'_1 \geq 1$ ve $\beta'_t + \beta'_{t-1} + \ldots + \beta'_1 = s + 1$ olmak üzere $(\beta_r, \ldots, \beta_{s+1} - 1, \beta'_t, \beta'_{t-1}, \ldots, \beta'_1, 0, \ldots, 0)$ parçalanmasının sınıfındadır. Her $\gamma \geqslant \beta_{s+1}$ için

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) = f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $s = r - 1$ olduğu kabul edilebilir, yani

$$(\alpha_k, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0) = (\beta_r - 1, \beta'_t, \beta'_{t-1}, \ldots, \beta'_1, 0, \ldots, 0)$$

dır. Böylece

$$S = (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-2} p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) > 0$$

olmak üzere

$$\psi(G_2) - \psi(G_1) = p^{\beta_r+n} - (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\ldots,\beta_r)}(\gamma) - p^{\beta_r+n-1} + S$$

elde edilir.

$$f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma) = \begin{cases} p^{(r-1)\gamma}, & 0 \leq \gamma \leq 1 \\ p^{r-1}, & 1 \leq \gamma \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\psi(G_2) - \psi(G_1) &= p^{\beta_r+n} - (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma) - p^{\beta_r+n-1} \\
&\quad +(p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-2} p^{2\gamma} f_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)}(\gamma) \\
&> p^{\beta_r+n} - p^{\beta_r+n-1} - (p-1)\sum_{\gamma=0}^{\beta_r-1} p^{2\gamma} f_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)}(\gamma) \\
&= p^{\beta_r+n} - p^{\beta_r+n-1} - (p-1)(1 + p^{r-1}\frac{p^{2\beta_r} - p^2}{p^2-1})
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p+1}(p^{\beta_r+n-1}(p^2-p-1)+p^{r+1}-p^2+1) > 0$$

elde edilir.

Kabul edilsin ki $\psi(G_1) < \psi(G_2)$ fakat $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0) \succeq (\beta_r, \ldots, \beta_1, 0, \ldots, 0)$ olsun. O zaman ispatın ilk kısmından $\psi(G_2) \leq \psi(G_1)$ bulunur ve bu kabulle çelişir. Böylece (4.4) ifadesi sağlanır. ■

Örnek 4.11. $G_1 = \times_{i=1}^{4}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}$ ve $G_2 = \times_{j=1}^{2}\mathbb{Z}_{p^{\beta_j}}$, p^4 mertebeli iki sonlu abelyen p-grup olsun. $\psi(G_1) = \psi(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_3}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_4}})$ ve (4.3) ifadesinde $k = 4$ değeri için

$$\begin{aligned}\psi(\times_{i=1}^{4}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}) = p^{2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} - (p-1)(1 + p^{5\alpha_1} + p^{4\alpha_2+\alpha_1} + p^{3\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} \\ + p^{2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-2})\end{aligned}$$

dir. $\psi(G_2) = \psi(\mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}})$ ve Sonuç 4.3. ün (iv) kısmından

$$\psi(\mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}}) = \frac{p^{2\beta_2+\beta_1+3} + p^{2\beta_2+\beta_1+2} + p^{2\beta_2+\beta_1+1} + p^{3\beta_1+2} + p + 1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

elde edilir. Böylece P_4 ün parçalanışlarından $(1,1,1,1)$ ve $(3,1,0,0)$ için $\psi(\times_{i=1}^{4}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_i}}) < \psi(\times_{j=1}^{2}\mathbb{Z}_{p^{\beta_j}})$ olması için gerek ve yeter koşul $(1,1,1,1) \prec (3,1,0,0)$ olmasıdır.

Aşağıda Teorem 4.10. un sonucu verilmiştir.

Sonuç 4.12. (M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014) Aynı mertebeli iki sonlu abelyen grubun izomorf olmaları için gerek ve yeter koşul bu grupların eleman mertebeleri toplamlarının da aynı olmasıdır.

Uyarı 4.13. Mertebeleri farklı iki sonlu abelyen grubun mertebeleri toplamları aynı olmasına rağmen bu iki grup izomorf olmayabilir.

Örnek 4.14. $\psi(\mathbb{Z}_2^2) = \psi(\mathbb{Z}_3) = 7$ olmasına rağmen $\mathbb{Z}_2^2 \ncong \mathbb{Z}_3$ tür.

Teorem 4.15. (M. Târnâuceanu ve D.G. Fodor, 2014) $\psi(G) \equiv 0(\text{mod}|G|)$ olacak şekilde sonlu abelyen G grubu vardır.

İspat $G = \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{23}$ olsun. Böylece $|G| = 3887$ ve

$$\begin{aligned} \psi(G) &= \psi(\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13})\psi(\mathbb{Z}_{23}) \\ &= (13^3 - 13 + 1)\frac{23^3 + 1}{23 + 1} \\ &= 1107795 \\ &= 3887.285 \end{aligned}$$

tir. ■

5. DEVİRLİ OLMAYAN SONLU GRUPLARIN ELEMAN MERTEBELERİNİN TOPLAMI

Bu bölümde sonlu grupların eleman mertebelerinin toplamını veren **(M. Herzog, P. Longobardi ve M. Maj, 2018)** makalesi incelenmiştir. Bu makalede Herzog, Longobardi ve Maj tarafından devirli olmayan sonlu gruplarda eleman mertebeleri toplamlarının tam bir üst sınırını hesaplayan bir formül elde edilmiştir. **(H. Amiri, S.M.J. Amiri ve I.M. Isaacs, 2009)** makalesinde tanımlanan G, n mertebeli devirli olmayan bir grup, bu grubun eleman mertebeleri toplamı $\psi(G)$ ve C_n, n mertebeli devirli grup olsun. Böylece $\psi(G) < \psi(C_n)$ dir.

5.1. Temel Sonuçlar

Bu kısımda bölüm boyunca ihtiyaç duyulan temel sonuçlara yer verilmiştir. n bir pozitif tamsayı olmak üzere n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona Euler φ-fonksiyonu denir ve bu sayı $\varphi(n)$ ile gösterilir. n asal sayı ise $\varphi(n) = n - 1$ olarak hesaplanır. n bir pozitif tamsayı ve n nin kanonik formu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ olmak üzere

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$$

dır.

Lemma 5.1. n, en büyük asal böleni p ve en küçük asal böleni q olan 1 den büyük bir pozitif tamsayı olsun. O zaman

$$\varphi(n) \geq \frac{q-1}{p} n$$

dir.

İspat $i = 1, 2, \dots, k$ için p_i asal, r_i pozitif tamsayı ve $p = p_1 > p_2 > \dots > p_k = q$ olmak üzere $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ olsun. k üzerinde tümevarım uygulansın. $k = 1$ için $n = p_1^{r_1} = p^{r_1}$ ve

$$\varphi(n) = \varphi(p^{r_1}) = p^{r_1}(1 - \frac{1}{p}) = n(\frac{p-1}{p})$$

dir. $k > 1$ ve birbirinden farklı k dan küçük asal bölenlere sahip bütün tamsayılar için lemmanın doğru olduğu kabul edilsin. $m = p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots p_k^{r_k}$ olsun. Kabulden

$$\varphi(m) \geq \frac{p_k - 1}{p_2} m$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}) \\ &= \varphi(p_1^{r_1} m) \\ &= \varphi(p_1^{r_1}) \varphi(m) \\ &\geq \frac{p_1 - 1}{p_1} p_1^{r_1} \frac{p_k - 1}{p_2} m \\ &= \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_k - 1}{p_2} n \\ &\geq \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_k - 1}{p_1 - 1} n \\ &= \frac{p_k - 1}{p_1} n \\ &= \frac{q - 1}{p} n \end{aligned}$$

dir. ■

Önerme 5.2. (Ramanujan, [18]) $q_1 = 2, q_2, \dots, q_n, \dots$ tüm asal sayıların artan dizisi ise o zaman

$$\prod_{i=1,\dots,\infty} \frac{q_i^2 + 1}{q_i^2 - 1} = \frac{5}{2}$$

dir.

Lemma 5.3. $p_2 < p_3 < \dots < p_s$ olacak şekilde $p_2, p_3, \dots, p_s$ asal sayılar olsun. $p_2 > 3$ ise o zaman

$$\prod_{i=2}^{s} \frac{p_i^2 - 1}{p_i^2 + 1} > \frac{5}{6}$$

dır.

İspat $p_2 > 3$ olsun. Önerme 5.2. den

$$
\begin{aligned}
\frac{2^2+1}{2^2-1}\frac{3^2+1}{3^2-1}\prod\nolimits_{i=2,\ldots,s}\frac{p_i^2+1}{p_i^2-1} &< \frac{5}{2}\\
\frac{5}{6}\prod\nolimits_{i=2,\ldots,s}\frac{p_i^2+1}{p_i^2-1} &< 1\\
\prod\nolimits_{i=2,\ldots,s}\frac{p_i^2+1}{p_i^2-1} &< \frac{6}{5}\\
\prod\nolimits_{i=2,\ldots,s}\frac{p_i^2-1}{p_i^2+1} &> \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Lemma 5.4. C_n, n mertebeli bir devirli grup ve $\psi(C_n)$, C_n grubunun eleman mertebelerinin toplamı olsun.

(i) p asalı için P, p^r mertebeli devirli bir grup ise o zaman

$$\psi(P) = \frac{p^{2r+1}+1}{p+1} = \frac{p|P|^2+1}{p+1} \tag{5.1}$$

dir.

(ii) $p_1 < p_2 < \ldots < p_t = p$ olmak üzere $p_1, p_2, \ldots p_t$, n nin asal bölenleri ve $P_1, P_2, \ldots, P_t$, C_n nin Sylow altgrupları olsun. O zaman

$$\psi(C_n) = \prod_{i=1}^{t}\psi(P_i) \geq \frac{2}{p+1}n^2$$

dir.

İspat (i) p asal olmak üzere P, p^r mertebeli bir devirli grup olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\psi(P) &= 1 + p\varphi(p) + p^2\varphi(p^2) + \ldots + p^r\varphi(p^r)\\
&= 1 + p(p-1) + p^2(1-\frac{1}{p})p^2 + \ldots + p^r(1-\frac{1}{p})p^r\\
&= 1 - p + p^2 - p^3 + \ldots + p^{2r} - p^{2r-1}\\
&= \frac{p^{2r+1}+1}{p+1}\\
&= \frac{p(p^r)^2+1}{p+1}\\
&= \frac{p|P|^2+1}{p+1}
\end{aligned}
$$

dir.

(ii) $C_n = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_t$ şeklinde ifade edilebildiğinden Lemma 5.9.(iii) kullanılarak $\psi(C_n) = \prod_{i=1}^{t} \psi(P_i)$ elde edilir. Her i için $p_{i+1} \geq p_i + 1$ ve $p_1 \geq 2$ olduğundan (5.1) ifadesinden

$$\psi(C_n) = \prod_{i=1}^{t} \frac{p_i|P_i|^2 + 1}{p_i + 1} > \prod_{i=1}^{t} \frac{p_i}{p_i + 1}|P_i|^2 \geq \frac{2}{p+1}n^2$$

sonucuna ulaşılır. ■

Önerme 5.5. (Herstein, [11]) G, değişmeli maksimal bir altgruba sahip sonlu bir grup ise o zaman G çözülebilirdir.

Önerme 5.6. G, devirli maksimal C altgrubuna sahip bir sonlu grup olsun. O zaman G çözülebilir ve $G^{''} \leq Z(G)$ dir.

İspat Önerme 5.5. ten G grubu çözülebilirdir. $G^{'} \leq C$ ise o zaman $[G', G'] = G^{''} = \langle 1 \rangle \leq Z(G)$ dir. Aksi takdirde $G = G^{''}C$ ve $G^{'} \leq G^{''}$ den $G = G^{'}C$ ve $G^{''} \leq C$ sonucuna ulaşılır. Bu durum G nin çözülebilirliği ve $G^{'} \neq \langle 1 \rangle$ ile çelişir. Böylece $G^{''}$ devirli ve $G/C_G(G^{''})$ abelyendir. Sonuç olarak $G^{'}$ ve C, $C_G(G^{''})$ nin iki altgrubudur, yani $G^{''} \leq Z(G)$ dir. ■

Önerme 5.7. G sonlu bir grup ve p, $|G|$ nin en büyük asal böleni olmak üzere

$$|G : \langle x \rangle| < 2p$$

olacak şekilde G de bir x elemanı mevcut olduğu kabul edilsin. O zaman aşağıdaki sonuçlardan biri sağlanır.

(i) G bir devirli normal Sylow p-altgrubuna sahiptir.

(ii) G çözülebilir ve $\langle x \rangle$, G nin p veya $p + 1$ mertebeli bir maksimal altgrubudur.

İspat $p||G : \langle x \rangle|$ kabul edilsin. $|G : \langle x \rangle|$, $|G|$ yi tam böldüğünden $|G : \langle x \rangle| = p$ dir. Önerme 5.6. dan G çözülebilirdir. Böylece G, (ii) durumunu sağlar. Kabul edilsin ki $p \nmid |G : \langle x \rangle|$ olsun. O zaman $\langle x \rangle$, G nin bir devirli Sylow p-altgrubu P yi içerir. P, G de normal ise o zaman (i) durumunu sağlar. O zaman P nin G de normal olmadığı kabul edilsin. $\langle x \rangle \leq N_G(P)$ olduğundan hipotezden $|G : N_G(P)| < 2p$ elde edilir. P, G de normal olmadığı için $|G : N_G(P)| = p + 1$

ve $N_G(P)$, G nin bir maksimal altgrubudur. Fakat

$$|N_G(P) : \langle x\rangle| = \frac{|G : \langle x\rangle|}{|G : N_G(P)|} < \frac{2p}{p+1} < 2$$

dir. Böylece $N_G(P) = \langle x\rangle$ ve $\langle x\rangle$, G nin $p+1$ mertebeli devirli bir maksimal altgrubudur. Önerme 5.6. dan G çözülebilir ve (ii) sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 5.8. G bir sonlu grup olsun. O zaman aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) G, mertebesi 4 olan bir devirli altgrup ile bir sonlu 2-grubu ise o zaman $G^{''} \leq Z(G)$ dir.

(ii) G, mertebesi 6 dan küçük olan bir devirli altgrup ile $2^{\alpha}3^{\beta}$ mertebeli bir sonlu grup ise o zaman $G^{''} \leq Z(G)$ dir.

İspat (i) $\langle a\rangle$, G de mertebesi 4 olan bir devirli altgrup ve M, $\langle a\rangle$ yı içeren G nin bir maksimal altgrubu olsun. $M = \langle a\rangle$ ise o zaman Önerme 5.6. dan istenilen sonuca ulaşılır. $\langle a\rangle < M$ olduğu kabul edilsin. O halde $|G : M| = 2$ olması M nin G de normal altgrubu, $G^{'} \leq M$ ve $G^{''} \leq M'$ olması anlamına gelmektedir. Ayrıca M, devirli bir maksimal altgruba sahiptir. [19] daki Teorem 5.3.4 ten M abelyendir ya da $M^{'}$ mertebesi 2 ya da M dihedral, yarıdihedral veya genelleştirilmiş kuaterniyondur.

M abelyen ise o zaman $G^{''} = 1$ dir. $|M^{'}| \leq 2$ ise o zaman $G^{''} \leq M^{'}$ dir, bu da $G^{''}$ nin mertebesi en fazla 2 olan G nin bir normal altgrubu olması anlamına gelmektedir. Böylece $G^{''} \leq Z(G)$ elde edilir. M nin dihedral veya yarıdihedral veya genelleştirilmiş kuaterniyon olduğu kabul edilsin. O zaman $o(a) = 2^n$, $\gamma \in \{0,1\}$, $o(x) \in \{2,4\}$ ve $x^2 \in Z(M)$ olmak üzere $a^x = a^{-1}a^{\gamma 2^{n-1}}$ olacak şekilde M de bir x elemanı mevcuttur. $G = M\langle y\rangle$ olarak ifade edilsin. $a^y \in \langle a\rangle$ ise o zaman $\langle a\rangle$, G nin normal altgrubudur. Böylece $|G/\langle a\rangle| = 4$ olduğundan $G^{'} \leq \langle a\rangle$ dır. Dolayısıyla $G^{'}$ abelyendir ve $G^{''} = 1$ dir. Son olarak $a^y \notin \langle a\rangle$ olduğu kabul edilsin. O halde δ bir tamsayı olmak üzere $a^y = a^{\delta}x$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}(a^2)^y = (a^y)^2 &= a^{\delta}xa^{\delta}x \\ &= a^{\delta}xxx^{-1}a^{\delta}x \\ &= a^{\delta}x^2(a^x)^{\delta} \\ &= a^{\delta}x^2(a^{-1}a^{\gamma 2^{n-1}})^{\delta} \\ &= a^{\delta}x^2a^{-\delta}a^{\gamma 2^{n-1}\delta} \\ &= x^2a^{\gamma 2^{n-1}\delta}\end{aligned}$$

ve

$$(a^y)^4 = ((a^y)^2)^2 = (x^2 a^{\gamma 2^{n-1}\delta})^2 = x^4 = 1$$

elde edilir. Böylece $o(a) = o(a^y) = 4$, $|M| = 8$ ve $M' \leq \langle a^2 \rangle$ dir. Sonuç olarak G'' mertebesi en fazla 2 olan M' nin bir altgrubudur, böylece bu altgrup $Z(G)$ tarafından kapsanır.

(ii) $\langle a \rangle$, mertebesi 6 dan daha küçük olan G nin bir devirli altgrubu olsun. $|G : \langle a \rangle| = 2$ veya $|G : \langle a \rangle| = 3$ ise o zaman Önerme 5.6. dan istenilen sonuca ulaşılır. $|G : \langle a \rangle| = 4$ olduğu kabul edilsin. $\beta = 0$ ise o zaman (i) kullanılarak istenilen sonuca ulaşılır. $\langle a \rangle$, G nin maksimal altgrubu ise o zaman Önerme 5.6. dan istenilen sonuç elde edilir. $\beta > 0$ ve $\langle a \rangle$, G nin maksimal altgrubu olmadığı kabul edilsin. O halde Önerme 5.7. den G, bir devirli normal Sylow 3-altgrubu P ye sahiptir. Böylece $|D| = 2^\alpha$ olmak üzere $G = P \rtimes D$ dir. $P \leq \langle a \rangle$ ve $D \cong G/P$, mertebesi 4 olan $\langle a \rangle / P$ devirli altgrubuna sahiptir. Böylece (i) den $D'' \leq Z(D)$ dir. Dolayısıyla $G = PD$, $G' \leq C_G(P)$ ve $G' = D'[P, D]$ dir. Böylece

$$G'' = D'' \leq Z(D) \cap C_G(P) \leq Z(G)$$

istenilen sonuca ulaşılır. ■

Lemma 5.9. Bazı p asal sayısı için P bir devirli p-grup, $|F| > 1$ ve $(p, |F|) = 1$ olmak üzere G, $G = P \rtimes F$ sağlayan bir sonlu grup olsun. O zaman aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) F in her bir elemanı P de ya aşikar ya da sabit noktalı serbestçe etkilidir.

(ii) $x \in F$, $o(x) = m$ ve $u \in P$ ise o zaman m, $(ux)^m \in P$ yi sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

(iii) $u \in P$ ve $x \in C_F(P)$ ise o zaman $o(ux) = o(u)o(x)$ dir.

(iv) $u \in P$ ve $x \in F \setminus C_F(P)$ ise o zaman $o(ux) = o(x)$ dir.

(v) $Z = C_F(P)$ olsun. O zaman

$$\psi(G) = \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F \setminus Z) < \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F)$$

dir.

İspat (i) $u \in P \setminus \{1\}$ üzerinde $x \in F$ aşikar etkili olduğu kabul edilsin. O halde mertebesi 1 olan P deki elemanların kümesi $\Omega_1(P)$ de x aşikar etkili ve böylece P üzerinde de aşikar etkilidir.

(ii) $P \triangleleft G$ olduğundan n bir pozitif tamsayı ise bazı $v_n \in P$ için $(ux)^n = v_n x^n$ dir. $P \cap F = \{1\}$ olduğundan $(ux)^n \in P$ olması için gerek ve yeter koşul $m|n$ olmasıdır.

(iii) Olduğu açıktır.

(iv) $o(x) = m$ olduğu kabul edilsin. (ii) den $(ux)^m \in P$ dir ve böylece

$$1 = [(ux)^m, ux] = [(ux)^m, x]$$

dir. $x \in F \setminus C_F(P)$ olduğundan $(ux)^m = 1$ ve (i) den $o(ux) = m = o(x)$ elde edilir.

(v) (iii) den $\psi(PZ) = \psi(P)\psi(Z)$ ve (iv) den $\psi(G \setminus (PZ)) = |P|\psi(F \setminus Z)$ dir. Böylece

$$\psi(G) = \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F \setminus Z) < \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F)$$

dir. ■

5.2. Ana Sonuçlar

Bu kısımda M. Herzog, P. Longobardi ve M. Maj tarafından **(M. Herzog, P. Longobardi ve M. Maj, 2018)** makalesinde elde edilen ana sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 5.10. G, n mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup ve q, n nin en küçük asal böleni olsun. O halde

$$\psi(G) < \frac{1}{q-1}\psi(C_n)$$

dir.

İspat $\psi(G) \geq \frac{1}{q-1}\psi(C_n)$ ise o zaman $G \cong C_n$ olduğunun ispatlanması gerekmektedir. $\psi(C_n) > n\varphi(n)$ olduğu açıktır. Lemma 5.1. den p, n nin en büyük asal böleni olmak üzere $\varphi(n) \geq (q-1)n/p$ dir. Böylece kabulden $\psi(G) > \frac{n(q-1)n}{(q-1)p} = n^2/p$ dir ve bu da $o(x) > n/p$ olacak şekilde G de bir x elemanının mevcut olduğunu gösterir. Böylece $|G : \langle x\rangle| < p$ ve $\langle x\rangle$, G nin bir Sylow p-altgrubu P yi içerir. $\langle x\rangle \leq N_G(P)$ olduğundan P, G nin bir devirli normal altgrubu ve Sonuç 3.2. den $|P| = p^r$ olmak üzere

$$\psi(P)\psi(G/P) \geq \psi(G) \geq \frac{1}{q-1}\psi(C_{p^r})\psi(C_{n/p^r})$$

dir. $P \cong C_{p^r}$ olduğundan

$$\psi(G/P) \geq \frac{1}{q-1}\psi(C_{n/p^r})$$

dir. p asal olmak üzere $n = p^r$ ise o zaman $o(x) > n/p$ sağlayan G de bir x elemanının mevcut oluşu $o(x) = n$ ve G nin devirli olduğunu gösterir. O zaman $k > 1$ olmak üzere n nin k tane birbirinden farklı asalları tarafından tam olarak bölünebilir olduğu kabul edilsin. k üzerinde tümevarım uygulanarak, teoremin mertebesi k dan az birbirinden farklı asal çarpanlara sahip olan gruplar için sağlandığı kabul edilsin. $|G/P|$, $k-1$ tane birbirinden farklı asal bölenlere sahip ve G/P kabulü sağladığından dolayı G/P devirli ve $F \cong G/P$ ve $F \neq 1$ olacak şekilde $G = P \rtimes F$ dir. $n = |P||F|$, P ile F devirli ve $(|P|, |F|) = 1$ dir. Böylece

$$\psi(C_n) = \psi(P)\psi(F)$$

dir. $C_F(P) = F$ ise o zaman $G = P \times F$ ve G devirlidir. $C_F(P) = Z < F$ ise o zaman $\psi(G) < (1/(q-1))\psi(C_n)$ sonucuna ulaşılır ve bu kabulle çelişir. Böylece Lemma 5.9. un (v) kısmından

$$\psi(G) = \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F \setminus Z) < \psi(P)\psi(Z) + |P|\psi(F)$$

dir. Dolayısıyla

$$\psi(G) < \psi(P)\psi(F)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)}) = \psi(C_n)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)})$$

sonucuna ulaşılır. P, devirli p-grup olduğundan

$$\frac{|P|}{\psi(P)} = \frac{|P|(p+1)}{p|P|^2+1} < \frac{p+1}{p|P|} \leq \frac{p+1}{p^2} < \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{q}$$

dur. Z, devirli F grubunun bir öz altgrubu ve S, F nin Sylow altgrupları olmak üzere $\psi(F)$, $\psi(S)$ lerin bir çarpımıdır. $\psi(Z)$ de benzer bir çarpım ve Z nin en az bir Sylow altgrubu olduğundan bu grup Sylow r-altgrubu R_Z olmak üzere mertebesi r^s olan F nin Sylow r-altgrubu R_F içinde yer alır. Böylece

$$\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} \leq \frac{\psi(R_Z)}{\psi(R_F)} \leq \frac{r^{2(s-1)+1}+1}{r^{2s+1}+1}$$

dir. $r \geq q$ ve $s \geq 1$ olduğundan

$$\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} \leq \frac{r^{2s-1}+1}{r^{2s+1}+1} < \frac{1}{q(q-1)}$$

dir. Böylece

$$\psi(G) < \psi(C_n)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)}) < \psi(C_n)(\frac{1}{q(q-1)} + \frac{1}{q}) = \psi(C_n)\frac{1}{q-1}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. ■

Örnek 5.11. $G = S_3$, mertebesi 6 ve devirli olmayan bir sonlu grup olmak üzere 6 nın en küçük asal böleni 2 dir. O zaman

$$\psi(S_3) = 13 < \frac{1}{(2-1)}\psi(C_6) = 21$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.10. un bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 5.12. G, n tek mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup olsun. O halde

$$\psi(G) < \frac{1}{2}\psi(C_n)$$

dir.

Önerme 5.13. G, n mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup ve q, n nin en küçük asal böleni olsun. O zaman

$$\psi(G) \leq \frac{(n-1)n}{q} + 1 < \frac{n^2}{q}$$

dur.

İspat G devirli olmadığından G nin her bir x elemanı için $o(x) \leq n/q$ dur. Fakat $o(1) = 1$

olduğundan

$$\psi(G) \leq (n-1)\frac{n}{q} + 1 < \frac{n^2}{q}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.14. G, n mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup ise o zaman

$$\psi(G) \leq \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

dir.

İspat G,

$$\psi(G) > \frac{7}{11}\psi(C_n) \tag{5.2}$$

ifadesini sağlayan n mertebeli devirli olmayan bir sonlu grup olsun. $p_1 < p_2 < \ldots < p_t = p$ olacak şekilde $p_1, p_2, \ldots, p_t$, n nin asal bölenleri ve $P_1, P_2, \ldots, P_t$, C_n nin Sylow altgrupları olsun. Lemma 5.4. ten $\psi(C_n) \geq \frac{2}{p+1}n^2$ dir. (5.2) eşitsizliğinden

$$\psi(G) > \frac{7}{11}\psi(C_n) \geq \frac{14}{11(p+1)}n^2$$

elde edilir. Burada amaç p üzerinde tümevarım uygulayarak bir çelişkiye ulaşmaktır. (5.2) kabulünden $o(x) > \frac{14}{11(p+1)}n$ olacak şekilde G de bir x elemanı mevcuttur. Böylece

$$|G : \langle x \rangle| < \frac{11(p+1)}{14}$$

tür. İlk olarak $p = 2$ için G bir 2-gruptur ve $|G : \langle x \rangle| < \frac{33}{14}$ tür. Böylece $|G : \langle x \rangle| = 2$, $n \geq 4$ ve $n^2 \geq 16$ dır. O zaman

$$\psi(G) \leq \psi(C_{n/2}) + (\frac{n}{2})^2 = \frac{2(n/2)^2 + 1}{3} + \frac{n^2}{4} = \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{3} \leq \frac{7}{11}(\frac{2n^2+1}{3}) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

$p = 3$ için $|G : \langle x \rangle| < \frac{44}{14}$ tür. G bir 3-grup ise o zaman Teorem 5.10. dan yararlanarak

$$\psi(G) < \frac{1}{2}\psi(C_n) < \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

bir çelişki elde edilir. O zaman a, b pozitif tamsayıları için $n = 2^a 3^b$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{7}{11}\psi(C_n) &= \frac{7}{11}\psi(C_{2^a})\psi(C_{3^b})\\ &= \frac{7}{11}(\frac{2^{2a+1}+1}{3})(\frac{3^{2b+1}+1}{4})\\ &= \frac{7}{22}2^{2a}3^{2b} + \frac{7}{66}2^{2a} + \frac{7}{44}3^{2b} + \frac{7}{132}\end{aligned}$$

dir. $|G : \langle x \rangle| < \frac{44}{14}$ olduğundan $|G : \langle x \rangle| \leq 3$ tür. O halde $|G : \langle x \rangle| = 2$ veya $|G : \langle x \rangle| = 3$ olacak şekilde iki durum mevcuttur.

1. Durum $|G : \langle x \rangle| = 2$ kabul edilsin. O zaman $\langle x \rangle$, G nin devirli bir Sylow 3-altgrubu P yi içerir. $\langle x \rangle \leq C_G(P)$ olduğundan P, G de normaldir. $|G : \langle y \rangle| = 2$ olacak şekilde $y \in G \setminus \langle x \rangle$ mevcut ise o zaman $y \in C_G(P)$ dir. Böylece $P \leq Z(G)$ dir. Dolayısıyla Q, G nin devirli olmayan Sylow 2-altgrubu olmak üzere $G = P \times Q$ dur. $p = 2$ için

$$\psi(G) = \psi(P)\psi(Q) \leq \psi(P)\frac{7}{11}\psi(C_{|Q|}) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

sonucuna ulaşılır ve bu bir çelişkidir. Her $y \in G \setminus \langle x \rangle$ için $o(y) \leq \frac{n}{3}$ olduğu kabul edilsin. $a \geq 1$ ve $b \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\psi(G) &\leq \psi(C_{\frac{n}{2}}) + (\frac{n}{2})(\frac{n}{3})\\ &= \psi(C_{2^{a-1}})\psi(C_{3^b}) + \frac{n^2}{6}\\ &= (\frac{2^{2a-1}+1}{3})(\frac{3^{2b+1}+1}{4}) + \frac{n^2}{6}\\ &= (\frac{1}{6})(\frac{3}{4})2^{2a}3^{2b} + \frac{2^{2a}}{24} + \frac{3^{2b}}{4} + \frac{1}{12} + \frac{2^{2a}3^{2b}}{6}\\ &= \frac{7}{24}2^{2a}3^{2b} + \frac{2^{2a}}{24} + \frac{3^{2b}}{4} + \frac{1}{12}\\ &= \frac{7}{22}2^{2a}3^{2b} + \frac{7}{66}2^{2a} + \frac{7}{44}3^{2b} + \frac{7}{132} + (\frac{7}{24} - \frac{7}{22})2^{2a}3^{2b} + (\frac{1}{24} - \frac{7}{66})2^{2a}\\ &\quad +(\frac{1}{4} - \frac{7}{44})3^{2b} + (\frac{11}{132} - \frac{7}{132})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{7}{11}\psi(C_n) - \frac{7}{264}2^{2a}3^{2b} + \frac{1}{11}3^{2b} + \frac{4}{132} \\
&\leq \frac{7}{11}\psi(C_n) - \frac{7}{66}3^{2b} + \frac{6}{66}3^{2b} + \frac{2}{66} \\
&< \frac{7}{11}\psi(C_n)
\end{aligned}
$$

sonucu ile tekrar bir çelişkiye ulaşılır.

2. Durum $p = 3$, $|G : \langle x \rangle| = 3$ olsun ve G nin $n/2$ mertebeli elemanının olmadığı kabul edilsin. Böylece her $y \in G$ için $o(y) \leq \frac{n}{3}$ tür. G nin $\langle x \rangle$ de olan elemanlarını düşünerek $b \geq 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\psi(G) &\leq \psi(C_{2^a})\psi(C_{3^{b-1}}) + 2(\frac{n}{3})^2 \\
&= (\frac{2^{2a+1}+1}{3})(\frac{3^{2b-1}+1}{4}) + \frac{2}{9}n^2 \\
&= \frac{1}{18}2^{2a}3^{2b} + \frac{1}{6}2^{2a} + \frac{1}{36}3^{2b} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9}2^{2a}3^{2b} \\
&= \frac{5}{18}2^{2a}3^{2b} + \frac{1}{6}2^{2a} + \frac{1}{36}3^{2b} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{7}{22}2^{2a}3^{2b} + \frac{7}{66}2^{2a} + \frac{7}{44}3^{2b} + \frac{7}{132} + (\frac{5}{18} - \frac{7}{22})2^{2a}3^{2b} \\
&\quad +(\frac{1}{6} - \frac{7}{66})2^{2a} + (\frac{1}{36} - \frac{7}{44})3^{2b} + (\frac{11}{132} - \frac{7}{132}) \\
&< \frac{7}{11}\psi(C_n) - \frac{4}{99}2^{2a}3^{2b} + \frac{2}{33}2^{2a} + \frac{1}{33} \\
&\leq \frac{7}{11}\psi(C_n) - \frac{36}{99}2^{2a} + \frac{6}{99}2^{2a} + \frac{1}{33} \\
&< \frac{7}{11}\psi(C_n)
\end{aligned}
$$

dir. Bu kabulümüzle çelişir. $p > 3$ için teorem p nin en küçük değerleri için sağlanır. O zaman

$$
|G : \langle x \rangle| < \frac{11(p+1)}{14} \leq p
$$

ve $\langle x \rangle$, G nin devirli bir Sylow p-altgrubu P yi içerir. $\langle x \rangle \leq N_G(P)$ olduğundan P, G nin devirli bir normal altgrubudur. Sonuç 3.2. den $|P| = p^r$ olmak üzere

$$
\psi(P)\psi(G/P) \geq \psi(G) > \frac{7}{11}\psi(C_{p^r})\psi(C_{n/p^r})
$$

elde edilir. $P \cong C_{p^r}$ olduğundan yok etme yöntemiyle

$$\psi(G/P) > \frac{7}{11}\psi(C_{n/p^r})$$

sonucuna ulaşılır. n/p^r yi bölen maksimal asal sayı p den daha küçük olduğundan tümevarımdaki kabulden dolayı $F \cong G/P$ ve $F \neq 1$ olacak şekilde $G = P \rtimes F$ dir ve G/P devirlidir. $(|P|, |F|) = 1$, P ve F devirli olmak üzere $n = |P||F|$ dir. Böylece $\psi(C_n) = \psi(P)\psi(F)$ sonucuna ulaşılır.

$C_F(P) = F$ ise o zaman $G = P \times F$ ve G devirlidir. Bu durum G nin devirli olmamasıyla çelişir.

Kabul edilsin ki $C_F(P) = Z < F$ olsun. Lemma 5.9.(v) den

$$\psi(G) < \psi(P)\psi(F)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)}) = \psi(C_n)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)})$$

sonucuna ulaşılır. P, devirli p-grup ve $p > 3$ olduğundan

$$\frac{|P|}{\psi(P)} = \frac{|P|(p+1)}{p|P|^2+1} < \frac{p+1}{p|P|} \leq \frac{p+1}{p^2} \leq \frac{6}{25} < \frac{1}{4}$$

tür. Z, devirli F grubunun bir öz altgrubu ve S, F nin Sylow altgrupları olmak üzere $\psi(F)$, $\psi(S)$ lerin bir çarpımıdır. $\psi(Z)$ de benzer bir çarpım ve Z nin en az bir Sylow altgrubu olduğundan bu grup Sylow r-altgrubu R_Z olmak üzere mertebesi r^s olan F nin Sylow r-altgrubu R_F içinde yer alır. Böylece

$$\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} \leq \frac{r^{2(s-1)+1}+1}{r^{2s+1}+1}$$

dir. Fakat $r \geq 2$ ve $s \geq 1$ olduğundan

$$\frac{r^{2(s-1)+1}+1}{r^{2s+1}+1} \leq \frac{1}{r+1}$$

eşitsizliğinden $1 \leq r^{2s-2}(r^2 - r - 1)$ dir. O zaman

$$\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} \leq \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{3}$$

ve

$$\psi(G) < \psi(C_n)(\frac{\psi(Z)}{\psi(F)} + \frac{|P|}{\psi(P)}) < \psi(C_n)(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \psi(C_n)\frac{7}{12} < \psi(C_n)\frac{7}{11}$$

dir ve bu bir çelişkidir. ■

Bu üst sınırın en iyi sonucu aşağıdaki önermede gösterilmektedir. k tek olmak üzere her $n = 4k$ için $\psi(G) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$ sağlayan n mertebeli bir grup vardır.

Önerme 5.15. k bir tek tamsayı ve $n = 4k$ olsun. O zaman

$$\psi(C_n) = 11\psi(C_k) \text{ ve } \psi(C_{2k} \times C_2) = 7\psi(C_k)$$

dır. Böylece

$$\psi(C_{2k} \times C_2) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

dir.

İspat Lemma 5.4. ten

$$\psi(C_n) = \psi(C_{4k}) = \psi(C_4)\psi(C_k) = \frac{32+1}{2+1}\psi(C_k) = 11\psi(C_k)$$

dır. (4.1) ifadesinden

$$\psi(C_{2k} \times C_2) = \psi(C_k \times C_2 \times C_2) = \psi(C_k)\psi(C_2 \times C_2) = 7\psi(C_k)$$

dır. Böylece

$$\psi(C_{2k} \times C_2) = 7\psi(C_k) = \frac{7}{11}\psi(C_n)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Örnek 5.16. Mertebeleri 6 olan C_6 ve S_3 grupları için $\psi(C_6) = 21$ ve $\psi(S_3) = 13$ olup

$$\psi(S_3) = 13 = \frac{13}{21}\psi(C_6) < \frac{7}{11}\psi(C_6)$$

elde edilir.

Teorem 5.17. G, n mertebeli bir sonlu grup ve n nin sırasıyla en küçük ve en büyük asal bölenleri q ve p olsun. G grubunun

$$\psi(G) \geq \frac{1}{2(q-1)}\psi(C_n)$$

ifadesini sağladığı kabul edilsin. O zaman G çözülebilirdir, G nin Sylow p-altgrupları p mertebeli bir devirli altgrubunu içerir ve aşağıdaki durumlardan biri sağlanır.

(i) G nin Sylow p-altgrubu P devirli ve G de normaldir.

(ii) G nin Sylow q-altgrupları devirli, G q-nilpotent ve $G'' \leq Z(G)$ dir.

(iii) G nin Sylow p-altgrupları devirli, G p-nilpotent ve $G'' \leq Z(G)$ dir.

İspat $\psi(C_n) > n\varphi(n)$ ve Lemma 5.1. den $\varphi(n) \geq \frac{(q-1)n}{p}$ dir. Böylece kabulden $\psi(G) > n^2/2p$ dir. O zaman $o(x) > n/2p$ olacak şekilde G de bir x elemanı mevcuttur ve

$$|G : \langle x \rangle| < 2p$$

dir. G nin çözülebilir olduğu ispatlanacaktır. n nin asal bölenlerinin sayısı k olsun. k üzerinde tümevarım uygulansın. $k = 1$ ise o zaman G bir p-gruptur. Böylece G çözülebilirdir. $k > 1$ ve $k-1$ ise o zaman teoremin doğru olduğu kabul edilsin. $p||G : \langle x \rangle|$ ise o zaman $|G : \langle x \rangle| = p$ ve $\langle x \rangle$, G nin devirli maksimal altgrubudur. O zaman Önerme 5.5. ten G çözülebilirdir. $p \nmid |G : \langle x \rangle|$ ise $\langle x \rangle$, G nin devirli Sylow p-altgrubu P yi içerir. $P \trianglelefteq G$ ise o zaman Sonuç 3.2. den ve kabulden

$$\psi(P)\psi(G/P) \geq \psi(G) \geq \frac{1}{2(q-1)}\psi(C_{|P|})\psi(C_{|G/P|})$$

dir. $\psi(P) = \psi(C_{|P|})$ olduğundan

$$\psi(G/P) \geq \frac{1}{2(q-1)}\psi(C_{|G/P|})$$

elde edilir. Böylece tümevarımla G/P çözülebilir ve G de çözülebilirdir. Son olarak $P \ntrianglelefteq G$ kabul edilsin. $\langle x \rangle$, $N_G(P)$ nin bir altgrubu olduğundan $|G : N_G(P)| < 2p$ dir. Böylece

$$|G : N_G(P)| = p + 1$$

dir.

$$|N_G(P) : \langle x \rangle| = \frac{|G : \langle x \rangle|}{|G : N_G(P)|} \leq \frac{2p}{p+1} < 2$$

olduğundan $N_G(P) = \langle x \rangle$, G nin devirli bir maksimal altgrubudur. O halde Önerme 5.5. ten G çözülebilirdir. $|G : \langle x \rangle| < 2p$ olacak şekilde G de bir x elemanı mevcuttur. Önerme 5.7. den G bir devirli normal Sylow p-altgrubuna sahip ya da $\langle x \rangle$, G nin p veya $p+1$ mertebeli bir maksimal altgrubudur. Her iki durumda da G nin Sylow p-altgrupları p mertebeli devirli bir altgrubu içerir. G devirli bir normal Sylow p-altgrubuna sahipse o zaman (i) sağlanır. $\langle x \rangle$, G nin p mertebeli bir maksimal altgrubu ise o zaman G nin bir Sylow q-altgrubu Q yu içerir. Q devirli ve q, n nin en küçük asal böleni olduğundan [4] makalesindeki Teorem 10.1.9 dan G, q-nilpotenttir. Ayrıca Önerme 5.6. dan $G'' \leq Z(G)$ ve (ii) sağlanır.

Son olarak $\langle x \rangle$, G nin $p+1$ mertebeli bir maksimal altgrubu ise o zaman $\langle x \rangle$, G nin devirli bir Sylow p-altgrubu P yi içerir. P normal ise o zaman (i) sağlanır. $P \ntrianglelefteq G$ kabul edilsin. $\langle x \rangle \leq N_G(P)$ olduğundan $|G : N_G(P)| < 2p$ dir. Böylece $|G : N_G(P)| = p+1$ dir. $N_G(P) = \langle x \rangle$ olduğundan $N_G(P) = C_G(P)$ dir. Böylece Burnside Teoremi'nden G p-nilpotenttir ve $\langle x \rangle$, G nin devirli bir maksimal altgrubu olduğundan Önerme 5.6. dan $G'' \leq Z(G)$ ve (iii) sağlanır. ■

Sonuç 5.18. G, n mertebeli bir sonlu grup ve q, n nin en küçük asal böleni olsun. O zaman G grubu

$$\psi(G) \geq \frac{1}{q}\psi(C_n)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa Teorem 5.17. nin sonuçları mevcuttur.

İspat $q \geq 2$ olduğundan $q \leq 2(q-1)$ dir. ■

Sonuç 5.19. G, n tek mertebeli bir sonlu grup ve q, n nin en küçük asal böleni olsun. O zaman G grubu

$$\psi(G) \geq \frac{1}{q+1}\psi(C_n)$$

eşitsizliğini sağlayan tek mertebeli bir grup ise Teorem 5.17. nin sonuçları elde edilir.

İspat $q \geq 3$ olduğundan $q+1 \leq 2(q-1)$ dir. ■

Sonuç 5.20. G, n mertebeli bir sonlu grup ve q, n nin en küçük asal böleni olsun. G çözülebilir olmayan veya G nin bir Sylow p-altgrubu p mertebeli devirli olmayan altgrubunu içeriyorsa o zaman

$$\psi(G) < \frac{1}{2(q-1)}\psi(C_n) \leq \frac{1}{q}\psi(C_n)$$

dir.

Teorem 5.21. Mertebesi n olan sonlu grup G nin

$$\psi(G) \geq \frac{3}{5}n\varphi(n)$$

ifadesini sağladığı kabul edilsin. O zaman G çözülebilir ve $G'' \leq Z(G)$ dir.

İspat $\psi(G) \geq \frac{3}{5}n\varphi(n)$ ve p_1, n nin maksimal asal böleni olsun. Lemma 5.1. den $\varphi(n) \geq n/p_1$ dir. Böylece $\psi(G) \geq \frac{3}{5}n^2/p_1$ dir. O zaman $o(x) > \frac{3}{5}n/p_1$ olacak şekilde G de bir x elemanı mevcuttur ve

$$|G : \langle x \rangle| < \frac{5}{3}p_1 < 2p_1$$

dir. Önerme 5.7. den G çözülebilir veya G, normal devirli Sylow p_1-altgrubu P_1 e sahiptir. İlk önce G nin çözülebilir olduğu ispatlanacaktır. n nin en az üç farklı asal ile bölünebildiği kabul edilsin ve böylece $p_1 \geq 5$ tir. G devirli normal Sylow p_1-altgrubu P_1 e sahip olduğu da kabul edilsin. O halde G nin uygun bir H altgrubu için $G = P_1 \rtimes H$ ve Sonuç 3.2. den $\psi(G) \leq \psi(P_1)\psi(H)$ dir. Böylece

$$\psi(H) \geq \frac{\psi(G)}{\psi(P_1)}$$

dir. $|H| = h$ olsun. O zaman $n = h|P_1|$ ve $\varphi(n) = \varphi(h)\varphi(|P_1|) = \varphi(h)(p_1 - 1)|P_1|/p_1$ dir. $p_1 \geq 5$ olduğu için

$$\begin{aligned}\psi(H) &\geq (\frac{3}{5})(\frac{n\varphi(n)(p_1+1)}{p_1|P_1|^2+1}) \\ &= (\frac{3}{5})(\frac{h\varphi(h)|P_1|(p_1-1)|P_1|(p_1+1)}{p_1(p_1|P_1|^2+1)})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> (\frac{3}{5})(\frac{h\varphi(h)|P_1|^2(p_1^2-1)}{(p_1^2+1)|P_1|^2}) \\
&= (\frac{3}{5})(\frac{h\varphi(h)(p_1^2-1)}{p_1^2+1}) \\
&\geq h\varphi(h)(\frac{3}{5})(\frac{24}{26}) \\
&> h\varphi(h)\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

dir. p_2, h yi bölen maksimal asal sayı olsun. O zaman Lemma 5.1. den $\psi(H) > \frac{1}{2}h^2/p_2$ dir. Böylece $o(y) > \frac{1}{2}h/p_2$ ifadesini sağlayan H de bir y elemanı mevcuttur. Dolayısıyla $|H : \langle y\rangle| < 2p_2$ ve Önerme 5.7. den H çözülebilirdir veya H nin devirli normal Sylow p_2-altgrubu P_2 mevcuttur. H çözülebilir ise o zaman G de çözülebilirdir. H nin devirli normal Sylow p_2-altgrubu P_2 mevcut olduğu kabul edilsin. Böylece G nin uygun bir altgrubu V için $G = P_1 \rtimes (P_2 \rtimes V)$ dir. $p_1 > p_2 > \ldots > p_t > 3$ olacak şekilde $p_1, p_2, \ldots, p_t$ ler asal ve G nin devirli Sylow p_i-altgrupları P_i ve K da G nin uygun bir altgrubu olmak üzere

$$G = P_1 \rtimes (P_2 \rtimes (\ldots \rtimes (P_t \rtimes K)))$$

olsun. $|K| = k$ ve t nin bu koşullar altında maksimal olduğu kabul edilsin. Sonuç 3.2. den

$$\psi(G) \leq \psi(P_1)\psi(P_2)\ldots\psi(P_t)\psi(K)$$

dır. Böylece $p_t > 3$ olduğundan ve Lemma 5.4. ten yararlanarak

$$
\begin{aligned}
\psi(K) &\geq \frac{\psi(G)}{\psi(P_1)\psi(P_2)\ldots\psi(P_t)} \\
&\geq \frac{3}{5}n\varphi(n)\prod_{i=1}^{t}\frac{(p_i+1)}{(p_i|P_i|^2+1)} \\
&= \frac{3}{5}k\varphi(k)\prod_{i=1}^{t}\frac{|P_i|(p_i-1)|P_i|(p_i+1)}{p_i(p_i|P_i|^2+1)} \\
&= \frac{3}{5}k\varphi(k)\prod_{i=1}^{t}\frac{|P_i|^2(p_i^2-1)}{p_i(p_i|P_i|^2+1)} \\
&> \frac{3}{5}k\varphi(k)\prod_{i=1}^{t}\frac{(p_i^2-1)}{(p_i^2+1)} \\
&> k.\varphi(k)(\frac{3}{5})(\frac{5}{6}) \\
&= k\varphi(k)\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. p_{t+1}, k nın maksimal asal böleni olsun. O zaman Lemma 5.1. den $\psi(K) > \frac{1}{2}k^2/p_{t+1}$ dir. $o(v) > \frac{1}{2}k/p_{t+1}$ ifadesini sağlayan K da bir v elemanı mevcuttur. Böylece $|K : \langle v \rangle| < 2p_{t+1}$ dir. Önerme 5.7. den K çözülebilir ya da K nın devirli bir normal Sylow p_{t+1}-altgrubu P_{t+1} mevcuttur. K çözülebilir ise G çözülebilirdir. K nın devirli bir normal Sylow p_{t+1}-altgrubu P_{t+1} mevcut ise o zaman K nın uygun bir W altgrubu için $K = P_{t+1} \rtimes W$ dur ve t nin maksimalliğinden $p_{t+1} \leq 3$ tür. O zaman K bir $(2,3)$-gruptur. Böylece K çözülebilirdir, o zaman G de çözülebilirdir. Böylece G nin çözülebilirliği ispatlanmış olur.
Ayrıca P_i, G nin devirli Sylow p_i-altgrupları ve K devirli bir maksimal altgruba sahip ya da $|K| = 2^\alpha 3^\beta$ ve K, mertebesi 6 dan küçük bir devirli altgrup olmak üzere

$$G = P_1 \rtimes (P_2 \rtimes (\ldots \rtimes (P_t \rtimes K)))$$

olduğu ispatlanır. t üzerinde tümevarım yöntemiyle $G'' \leq Z(G)$ olduğu gösterilecektir. $t = 0$ ise o zaman Önerme 5.6. ve Önerme 5.8.(ii) den istenilen sonuca ulaşılır. Böylece $t > 0$ ve $H = (P_2 \rtimes \ldots (P_t \rtimes K))$ olsun. Tümevarımdan $H'' \leq Z(H)$ dir. P_1 bir devirli grup olmak üzere $G = P_1 \rtimes H$ olduğundan $G' \leq C_G(P_1)$ ve $G' = H'[P_1, H]$ dir. Böylece

$$G'' = H'' \leq Z(H) \cap C_G(P_1) \leq Z(G)$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

Örnek 5.22. $G = C_2 \times C_2 \times C_2$ grubu ve $n = 8$ için

$$\psi(C_2 \times C_2 \times C_2) = 15 < \frac{3}{5}n\varphi(n) = \frac{3}{5}.8.4 = \frac{96}{5}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.23. G, n mertebeli bir sonlu grup ve n nin sırasıyla en küçük ve en büyük asal bölenleri q ve p olsun. G grubunun

$$\psi(G) \geq \frac{1}{q}n\varphi(n)$$

ifadesini sağladığı kabul edilsin. O zaman G devirli normal Sylow p-altgruba sahip veya G, p ya da $p+1$ mertebeli devirli bir maksimal altgrup ile çözülebilirdir.

İspat G grubunun

$$\psi(G) \geq \frac{1}{q} n\varphi(n)$$

ifadesini sağlayan ve n mertebeli bir grup olduğu kabul edilsin. Lemma 5.1. den $\varphi(n) \geq \frac{(q-1)n}{p}$ dir. Böylece kabulden $\psi(G) \geq \frac{(q-1)n^2}{qp}$ elde edilir. O halde $o(x) > \frac{(q-1)n}{qp}$ olacak şekilde G de bir x elemanı mevcuttur ve $|G : \langle x \rangle| < \frac{q}{q-1} p \leq 2p$ dir. O zaman Önerme 5.7. den G devirli normal Sylow p-altgruba sahip veya G, p ya da $p+1$ mertebeli devirli bir maksimal altgrup ile çözülebilirdir. ■

KAYNAKLAR

[1]. Amiri, H., Amiri, S.M.J. ve Isaacs, I.M., 2009, Sums of element orders in finite groups, *Communications in Algebra*, 37, 2978-2980.

[2]. Amiri, H. ve Amiri, S.M.J., 2011, Sum of element orders on finite groups of the same order, *Journal Algebra Appl.*, 10(2), 187-190.

[3]. Amiri, S.M.J., 2013, Second maximum sum of element orders on finite nilpotent groups, *Communications in Algebra*, 41(6), 2055-2059.

[4]. Amiri, S.M.J. ve Amiri, M., 2014, Second maximum sum of element orders on finite groups, *Journal Pure Appl. Algebra*, 218(3), 531-539.

[5]. Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S., 2015, Cebire Giriş, *Palme Yayıncılık*.

[6]. Cho, I., Kwon, T., Lee, K. ve Park, S., 1980, On Finite Groups with Qusi-dihedral Sylow 2-subgroups, *Korean Math. Soc. Vol,* 17(1), 91-97.

[7]. Erdoğan, M. ve Yılmaz, G., 2008, Çözümlü Problemlerle Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, *Beykent Üniversitesi Yayınları*.

[8]. Garonzi, M. ve Patassini, M., 2015, Inequalities detecting structural properties of a finite group, arXiv:1503.00355v2.

[9]. Gorenstein, D., 1968, Finite groups, *Harper and Row*.

[10]. Herstein, I.N., 1958, A remark on finite groups, *Proc. American Mathematical Society,*, 9, 25-257.

[11]. Herstein, I.N., 1996, Abstract Algebra, *Prentice Hall*.

[12]. Herzog, M., Maj, M. ve Longobardi P., 2018, An exact upper bound for sums of element orders in non-cyclic finite groups, *Journal of Pure and Applied Algebra,* 222, 7, 1628-1642.

[13]. Huppert, B., 1967, Endliche Gruppen, *Springer-Verlag*.

[14]. Isaacs, I.M., 2008, Finite Group Theory, *Graduate Studies in Mathematics, 92, American Mathematical Society, Providence, RI.*

[15]. Le Lionnais, F., 1983, Les nombres remarquables, *Hermann*.

[16]. Lytkina, D.V. ve Mazurov, V.D., 2014, Groups with Given Element Orders, *J. Siberian Federal University Math.* 7(2), 191-203.

[17]. Nesin, A., 2013, Temel Grup Teorisi, *Nesin Yayıncılık*.

[18]. Ramanujan, S., Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Ed. G. H. Hardy, P. V. S. Aiyar, and B. M. Wilson). Providence, RI: *American Mathematical Society, pp.*, 208-209, 200.

[19]. Robinson, D.J.S., 1996, A course in the theory of groups, *Springer.*

[20]. Schmidt, R., 1994, Subgroup Lattices of Groups, *de Gruyter Expositions in Mathematics, 14, Walter de Gruyter and Co.*

[21]. Shen, R., Chen, G. ve Wu, C., 2015, On groups with the Second Largest Value of the Sum of Element Orders, *Communications in Algebra*, 43(6), 2618-2631.

[22]. Suzuki, M., 1955, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes, *Amer. J. Math.* 77, 657-691.

[23]. Târnâuceanu, M., 2010, An arithmetic method of counting the subgroups of a finite abelian group, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* (N.S), 53, 373-386.

[24]. Târnâuceanu, M. ve Fodor, D.G., 2014, On the sum of element orders of finite abelian groups, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat.* (N.S.), 60(1), 1-7.

[25]. Wong, W.J., 1964, On Finite Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic subgroups of index 2, *Jour. Austral Math. Soc*. 4, 90-112.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ayşe Nur KÖKSAL
Doğum Yeri	Kırşehir
Doğum Tarihi	25.02.1995
Uyruğu	T.C.
Telefon	
E-Posta Adresi	aysenur4026@gmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2017
Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	

Makale ve Bildiriler
10. Ankara Matematik Günleri, ODTÜ, Ankara, Türkiye, 11-12 Haziran 2015.
28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, Türkiye, 07-09 Eylül 2015.
Cemal Koç Cebir Günleri, ODTÜ, Ankara, Türkiye, 22-23 Nisan 2016.
"Operators on Morrey-Type Spaces and Applications", Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir, Türkiye, 10-13 Temmuz 2017.
30. Ulusal Matematik Sempozyumu, Atılım Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 06-09 Eylül 2017.
"Sonlu Grupların Eleman Mertebeleri Toplamı", 13. Ankara Matematik Günleri, TOBB ETÜ, Ankara, Türkiye, 27-28 Nisan 2018. (Poster Sunumu)
"Sums of Element Orders in Finite Groups", International Conference on Analysis and its Applications, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir, Türkiye, 11-14 Eylül 2018. (Poster Sunumu)
1. Ankara Grup Teori Konferansı, ODTÜ, Ankara, Türkiye, 02-03 Mayıs 2019.