T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI

Aysun DOĞAN BALOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI

Aysun DOĞAN BALOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Baki YAĞBASAN

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 12.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğretim Üyesi M. Baki YAĞBASAN	Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA
Ahi Evran Üniversitesi	Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi	Fen Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Aysun DOĞAN BALOĞLU

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimde bana yol gösteren, çalışmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Baki YAĞBASAN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayat boyu yanımda yer alan, çalışmalarımda yardım ve desteklerini esirgemeyen aileme ve eşime en derin şükranlarımı sunarım.

Temmuz, 2019 Aysun DOĞAN BALOĞLU

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\|A\|$	:A Kümesinin Eleman Sayısı (Kardinalitesi)
$\delta(A)$	:A Kümesinin Yoğunluğu
$\delta_A(K)$	:K Kümesinin A Asimptotik Yoğunluğu
st- $\lim x_n$	:(x_n) Dizisinin İstatistiksel Limiti
st_A- $\lim x_n$	:(x_n) Dizisinin A-İstatistiksel Limiti
C_1	:Cesáro Matrisi
$C[a,b]$	:$[a,b]$ Üzerinde tanımlı Sürekli Reel Değerli Fonksiyonların Uzayı
$C_{2\pi}(\mathbb{D})$	:$\mathbb{D}$ de 2π Periyodlu Fonksiyonların Uzayı
$C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$	:$\mathbb{R}^2$ de m Kez Sürekli Kısmi Türevlere Sahip Fonksiyonların Uzayı
$C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$	:$\mathbb{D}$ de m Kez Sürekli Kısmi Türevlere Sahip 2π Periyodlu Fonksiyonların Uzayı
$C(\mathbb{R}^2)$	:$\mathbb{R}^2$ Üzerinde Sürekli Fonkisyonların Uzayı
$\\|\cdot\\|$	:Norm
$\omega_r(f;h)$	:f Fonksiyonunun r yinci (İki Değişkenli) Pürüzsüzlük Modülü
$\Delta_{u,v}^r$	:r yinci Mertebeden İki Değişkenli İleri Fark
B	:Beta Fonksiyonu
$P_{r,n}^{[m]}$	:İki Değişkenli Picard Singüler İntegral Operatörleri
$W_{r,n}^{[m]}$	:İki Değişkenli Gauss-Weierstrass Singüler İntegral Operatörleri
$Q_{r,n}^{[m]}$	:İki Değişkenli Poisson-Cauhcy Singüler İntegral Operatörleri
$S_{n,a}$	:Szász-Durrmeyer-Charlier İntegral Operatörleri
$C_k^{(a)}(u)$	:Charlier Polinomları

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI

Aysun DOĞAN BALOĞLU

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Baki YAĞBASAN

Bu tezin amacı, istatistiksel ve A istatistiksel yakınsaklığın yaklaşım teorisine uygulamalarını incelemektir. Bu bağlamda, çeşitli operatörlerin istatistiksel ve A-istatistiksel yaklaşımları incelenmiştir. Tezin giriş bölümünde; tezde geçecek olan temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde iki değişkenli Picard singüler integral operatörleri, üçüncü bölümünde iki değişkenli Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Tezin dördüncü ve beşinci bölümlerinde sırasıyla Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri ile Charlier polinomları ile tanımlanmış Szász-Durmeyer operatorleri incelenmiştir.

Temmuz 2019, 63 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yaklaşım, A-İstatistiksel Yaklaşım, Picard Singüler Operatörleri, Gauss-Weierstrass Operatörleri, Poisson-Cauchy Operatörleri, Szász-Durrmeyer-Charlier Operatörleri

ABSTRACT

MSc THESIS

STATISTICAL APPROXIMATION OF SOME INTEGRAL OPERATORS

Aysun DOĞAN BALOĞLU

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
MATHEMATICS Department

Supervisor: Assist. Prof. Mehmet Baki YAĞBASAN

The aim of this thesis is to investigate the statistical and the A-statistical convergence and their application to the approximation theory. At this point, the statistical approximation and the A-statistical approximation of various operators are examined. In the first chapter of this thesis, bivariate Picard singular integral operators are examined and in the third chapter bivariate Gauss-Weierstrass singular integral operators are studied. Poisson-Cauchy and Charlier type Szász-Durrmeyer operators are analyzed respectively in the fourth and fifth chapters.

July 2019, 63 Pages.

Keywords: Statistical Approximation, A-Statistical Approximation, Picard Singular Operators, Gauss-Weierstrass Singular Operators, Poisson-Cauchy Singular Operators, Szász-Durrmeyer-Charlier Operators

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [1] tarafından 1951 yılında tanımlandı. Bu kavram son zamanlarda matematikçilerin aktif olarak çalıştığı araştırma alanlarından biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematikçiler istatistiksel yakınsaklığın bir çok genelleştirmesini tanımlamakla birlikte toplanabilme, ölçü teorisi, Banach uzayları, Fuzzy, yerel konveks uzaylar teorisi, yaklaşım teorisi ve daha bir çok farklı alanda istatistiksel yakınsaklık ile genelleştirmeleri için uygulama alanları keşfetmişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramını verebilmek için öncelikle aşağıdaki istatistiksel (asimptotik) yoğunluk kavramına ihtiyaç vardır. Bu tanım istatistiksel yakınsaklıkla ilgili herhangi bir makalede bulunabilir.

Tanım 1.1. $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. K nın istatistiksel (asimptotik) yoğunluğu $\delta(K)$ ile gösterilir ve limit mevcut ise $K_n = K \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \in K : k \leq n\}| = \lim_n \frac{1}{n} |K_n|$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $|\cdot|$, içerisindeki kümenin eleman sayısını (kardinalitesini) göstermektedir.

Tanımdan, $\mathbb{N}$ nin bazı altkümelerinin yoğunluğunun olmadığı görülmektedir. Örneğin, bütün pozitif çift tamsayıların kümesi A, rakamları sayısı çift olan bütün pozitif çift sayıların kümesi B_1 ve rakamları sayısı tek olan bütün tek sayıların kümesi B_2 olsun. $B = B_1 \cup B_2$ denirse $\delta(A \cup B)$ ve $\delta(A \cap B)$ yoğunlukları mevcut değildir [2].

İstatistiksel yoğunlukla ilgili bazı özellikler ispatlarıyla birlikte aşağıda verilmiştir.

(a) $\delta(\mathbb{N}) = 1$

(b) $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$

(c) $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$

(d) $\delta(\{n : n \text{ asal}\}) = 0$

(e) $A \subseteq \mathbb{N}$ sonlu küme ise $\delta(A) = 0$

(f) Eğer $\delta(A)$ mevcut ise $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$

(g) Eğer $A \subseteq B$ ve $\delta(A)$ ile $\delta(B)$ mevcut ise $0 \leq \delta(A) \leq \delta(B) \leq 1$ dir.

(h) Eğer $A, B \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta(A)$, $\delta(B)$, $\delta(A \cap B)$ yoğunlukları mevcut ise $\delta(A \cup B)$ mevcut ve $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B)$ olur.

(i) Eğer $\delta(A) = \delta(B) = 1$ ise $\delta(A \cup B) = \delta(A \cap B) = 1$ olur.

(j) Eğer $\delta(A) = \delta(B) = 0$ ise $\delta(A \cup B) = \delta(A \cap B) = 0$ olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $|\mathbb{N}_n| = |\mathbb{N} \cap \{1, 2, \ldots, n\}| = |\{1, 2, \ldots, n\}| = n$ olup $\delta(\mathbb{N}) = \lim \dfrac{n}{n} = 1$ bulunur. Böylece (a) şıkkı görülür.

$E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ denirse n tek iken $|E_n| = \dfrac{n-1}{2}$ ve n çift iken $|E_n| = \dfrac{n}{2}$ olup her iki durumda da $\lim_n \dfrac{1}{n}|E_n| = \dfrac{1}{2}$ olduğundan çift sayıların asimptotik yoğunluğu $\dfrac{1}{2}$ olur. Benzer şekilde tek sayılar kümesinin asimptotik yoğunluğunun $\dfrac{1}{2}$ olduğu gösterilebilir. Böylece (b) şıkkının ilk kısmı ispatlanır ve (b) şıkkının diğer kısmı benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi $|\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \leq \sqrt{n}$ olduğundan $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) \leq \lim_n \dfrac{\sqrt{n}}{n} = 0$ elde edilir. Bu (c) şıkkını ispatlar.

Asal sayıların yoğunluğunun 0 olduğunu görmek için 1 ile n arasında kaç tane asal sayı olduğunun bilinmesi gerekir. 1 ile n arasındaki asal sayıların sayısını gösteren fonksiyon π olsun. Asal sayı teoremi [3] gereği $\pi(n) \approx \dfrac{n}{\log n}$ olup

$$\delta(\{n : n \text{ asal}\}) = \lim_n \frac{\pi(n)}{n} = \lim_n \frac{1}{\log n} = 0$$

bulunur. Böylece (d) şıkkı görülür.

Sonlu kümelerin asimptotik yoğunluğunun 0 olduğunu görmek zor değildir. Şimdi (f) şıkkını ispatlayalım. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise her n için

$$n = |\mathbb{N} \cap \{1, 2, \dots, n\}| = |(A \cup A^c) \cap \{1, 2, \dots, n\}| = |A_n \cap A_n^c| = |A_n| + |A_n^c|$$

olup buradan

$$\delta(A^c) = \lim_n \frac{|A_n^c|}{n} = \lim_n \left(1 - \frac{|A_n|}{n}\right) = 1 - \lim_n \frac{|A_n|}{n} = 1 - \delta(A)$$

bulunur.

$A \subseteq B$ ise her n için $A_n \subseteq B_n$ dolayısıyla $|A_n| \leq |B_n|$ olacağından $0 \leq \delta(A) \leq \delta(B) \leq 1$ eşitsizlikleri elde edilir. Bu (g) şıkkını ispatlar. Bu eşitsizliklerden; $A \subseteq B$ ve $\delta(B) = 0$ iken $\delta(A) = 0$ olduğu ile $A \subseteq B$ ve $\delta(A) = 1$ iken $\delta(B) = 1$ olduğu söylenebilir çünkü $A \subseteq B \subseteq C$ ve $\delta(A) = \delta(C)$ mevcut iken $\delta(B)$ mevcut ve $\delta(B) = \delta(A) = \delta(C)$ olmalıdır.

Herhangi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ için $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\delta(A \cup B) &= \lim_n \frac{|(A \cup B)_n|}{n} \\
&= \lim_n \frac{|A_n \cup B_n|}{n} \\
&= \lim_n \Big(\frac{|A_n|}{n} + \frac{|B_n|}{n} - \frac{|A_n \cap B_n|}{n}\Big) \\
&= \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B)
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $A \cap B = \emptyset$ ise $\delta(A \cap B) = 0$ olacağından $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$ elde edilir. Böylece (h) şıkkı ispatlanmış olur.

Eğer A ve B kümeleri için $\delta(A) = \delta(B) = 1$ ise $A \subseteq A \cup B$ olduğundan (g) şıkkı gereği $1 = \delta(A) \leq \delta(A \cup B) \leq 1$ olur ki bu (i) şıkkının ilk kısmının ispatıdır. Eğer A ve B kümeleri için $\delta(A) = \delta(B) = 0$ ise (g) şıkkından $0 \leq \delta(A \cap B) \leq \delta(A) = 0$ olur ve bu da (j) şıkkının ilk kısmını ispatlar.

Eğer $\delta(A) = \delta(B) = 1$ ise (f) şıkkından $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = \delta(\mathbb{N} \setminus B) = 0$ ve (g) şıkkının ispatından sonraki yorumlardan $\delta(\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)) = 0$ Buradan

$$\begin{aligned}
\delta(A \cap B) &= 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus (A \cap B)) \\
&= 1 - \delta((\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)) \\
&= 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus A) - \delta(\mathbb{N} \setminus B) + \delta((\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu (i) şıkkının ikinci kısmının ispatıdır. Benzer argümanlarla (j) şıkkının ikinci kısmı elde edilebilir.

Alışılmış yakınsaklık; limitin her komşuluğunda dizinin bir kuyruğunun yani belli bir yerden sonraki bütün terimlerin bulunmasıdır. Bu yoğunluk kavramını kullanarak Fast [1] alışılmış yakınsaklık kavramının bu şartını hafifletti. İstatistiksel yakınsaklık; limitin her komşuluğunun dışında kalan terimlerin indislerinin kümesinin asimptotik yoğunluğunun 0 (diğer bir deyişle komşuğun içinde kalan terimlerin indislerinin kümesinin yoğunluğunun 1) olmasıdır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 1.2. Bir (x_n) sayı dizisi ve bir L sayısı verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya denk olarak

$$\delta(\{n : |x_n - L| < \varepsilon\}) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| < \varepsilon\}| = 1$$

oluyorsa (x_n) dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st\text{-}\lim_n x_n = L$ veya $x_n \xrightarrow{st} L$ gösterimlerinden biri kullanılır.

İstatistiksel yakınsaklık için aşağıdaki karakterizasyon Connor [4] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 1.3. $st\text{-}\lim_n x_n = L$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{n\in K} x_n = L$ şartlarını sağlayan bir K indis kümesinin var olmasıdır. Burada $\lim_{n\in K} x_n = L$ ifadesi her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 \in K$ doğal sayısının her $n \geq n_0$ ve $n \in K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunmasıdır.

Eğer (x_n) bir L noktasına yakınsak dizi ise x noktasının her ϵ komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda terimi bulunur dolayısıyla $\{n : |x_n - L| \geq \epsilon\}$ kümesi sonlu kümedir. Sonlu kümelerin istatistiksel yoğunluğu sıfır olduğundan $\delta(\{n : |x_n - L| \geq \epsilon\}) = 0$ olup (x_n) dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır. Böylece her yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Bunu görmek için

$$(x_n) = (1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, \ldots) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ tam kare ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisini göz önüne alalım. Bu dizi açık olarak alışılmış anlamda yakınsak olmayan bir dizidir ancak (x_n) dizisi bir istatistiksel sıfır dizisidir. Bunu görmek için $0 < \epsilon < 1$ alalım. Bu durumda dizinin 0 noktasının ϵ komşuluğunun dışında kalan terimleri $1, 2, 3, \ldots$ olur. Bu terimlere karşılık gelen indislerin kümesi

$$\{n : |x_n - L| \geq \epsilon\} = \{1, 4, 9, \ldots\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

olup asimptotik yoğunluğun yukarıda listelenen (c) şıkkı gereği $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ olduğundan verilen dizi istatistiksel sıfır dizisidir.

Yakınsak dizilerin bütün özellikleri istatistiksel yakınsaklık için geçerli değildir. Bunun en basit örneği yakınsak dizinin her alt dizisi yakınsak iken istatistiksel yakınsak dizinin her alt dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bir diğer örnek her yakınsak dizi sınırlıdır ancak istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bunu iki durumu da görmek için yine (1.1) denklemiyle verilen (x_n) dizisi kullanılabilir. Yukarıda gösterildiği üzere (x_n) dizisi istatistiksel yakınsaktır ancak sınırsız bir dizidir ayrıca (x_n) dizisinin $(x_{n^2}) = (1, 2, 3, \ldots)$ alt dizisi istatistiksel yakınsak olmayan bir dizidir.

Fridy ve Orhan [5] tarafından tanımlanan ve bir dizinin sınırlılığı kavramının zayıflatılmışı olan istatiksel sınırlılık kavramı aşağıdaki tanımda verilmektedir.

Tanım 1.4. (x_n) bir sayı dizisi olsun. Eğer $\mathbb{N}$ nin yoğunluğu 1 olan bir K altkümesi ve her $n \in K$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif sabiti varsa (x_n) dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Tanımdan her sınırlı dizinin istatistiksel sınırlıdır çünkü bir dizinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart dizinin *bütün terimlerinin* orijin merkezli bir diskin içerisinde kalmasındadır, oysa bir dizinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart istatistiksel yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki terimlerin orijin merkezli bir diskin içerisinde kalmasıdır. Bu durumda yine (1.1) denklemiyle tanımlanan (x_n) dizisi örnek olarak verilebilir. Açık olarak (x_n) sınırlı olmayan bir dizidir. Bunu görmek için $0 < \epsilon < 1$ alalım. Bu durumda orijin merkezli ϵ yarıçaplı diskin dışında kalan terimlerin indislerinin kümesi $\{n : |x_n| > \epsilon\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ dir. Bu kümenin asimptotik yoğunluğu 0 olduğundan (x_n) dizisi istatistiksel sınırlı dizidir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan A-istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecektir. Bunun için matris dönüşümleri hakkında kısa bilgi verilecektir. Genel olarak matris dönüşümleri iki dizi uzayı arasındaki bir dönüşümü ifade eder. Aşağıda verilen matris dönüşümü tanımı ile Silverman-Toeplitz teoremi bir çok analiz kitabında bulunabilir, örneğin bakınız [6].

Tanım 1.5. $A = [a_{jn}]$ bir sonsuz matris olsun. Bir $x = (x_n)$ dizisinin A-dönüşümü $\big((Ax)_j\big)$ ile gösterilir ve her bir j için serinin yakınsak olması şartıyla

$$(Ax)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} x_n$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\lim_n x_n = L$ iken $\lim_j (Ax)_j = L$ oluyorsa A ya regüler matris denir. Yani limitini koruyarak yakınsak bir diziyi yine yakınsak bir diziye resmeden matris dönüşümüne regülerdir denir.

Teorem 1.6. (Silverman-Toeplitz) Bir $A = [a_{jn}]$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart A matrisinin

- $\sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$,
- Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_j a_{jn} = 0$
- $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

şartlarını sağlamasıdır.

Regüler matrisler kullanılarak yoğunluk ile istatistiksel yakınsaklık kavramı Freedman ve Sember [7] tarafından aşağıdaki gibi A-yoğunluk ile A-istatistiksel yakınsaklık kavramına genelleştirilmiştir.

Tanım 1.7. $A = [a_{jn}]$, negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere $\mathbb{N}$ nin bir K alt kümesinin A-yoğunluğu; limitin var olması şartıyla

$$\delta_A(K) = \lim_j \sum_{n \in K} a_{jn}$$

şeklinde tanımlanır.

İstatistiksel yoğunluk, A-istatistiksel yoğunluğun özel bir durumudur. Aşağıdaki örnek bu özel durumu ispatlar. $j, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, \ 1 \leq n \leq j \text{ ise;} \\ 0, \text{ aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$C_1 = [c_{jn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

Cesáro matrisi regülerdir yani Silverman-Toeplitz teoreminin şartlarını sağlar. Yukarıdaki tanımda $A = C_1$ alınırsa $\delta_{C_1}(K) = \delta(K)$ olur. Bunu görmek için önce bir kümenin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılan

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, \ x \in K \text{ ise} \\ 0, \ x \notin K \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunu hatırlayınız. Karakteristik fonksiyon kullanılarak doğal sayıların bir K alt kümesinin 0 ve 1 lerden oluşan

$$\big(\chi_K(n)\big) = \big(\chi_K(1), \chi_K(2), \chi_K(3), \ldots, \chi_K(n), \ldots\big)$$

karakteristik dizisi tanımlanabilir. Bu karakteristik dizi yardımıyla yukarıda verilen A-yoğunluk tanımı (Tanım 1.7.)

$$\delta_A(K) = \lim_j (A\chi_K)_j = \lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\chi_K(n)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca dikkat edilirse

$$|K_p| = |K \cap \{1, 2, \ldots, p\}| = \sum_{n=1}^{p} \chi_K(n)$$

dir. Şimdi $\delta_{C_1} = \delta$ eşitliğini gösterelim. $K \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in K} a_{jn} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\chi_K(n) \\
&= a_{j1}\chi_K(1) + a_{j2}\chi_K(2) + \cdots + a_{jj}\chi_K(j) + \cdots + a_{jn}\chi_K(n) + \cdots \\
&= \frac{1}{j}\chi_K(1) + \frac{1}{j}\chi_K(2) + \cdots + \frac{1}{j}\chi_K(j) \\
&= \frac{1}{j}\big(\chi_K(1) + \chi_K(2) + \cdots + \chi_K(j)\big) \\
&= \frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}\chi_K(n) \\
&= \frac{1}{j}|K_j|
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $j \to \infty$ için limiti alınarak istenen eşitlik görülür.

Bir A regüler matrisinin; bir kümenin asimptotik yoğunluk kavramını nasıl etkilediğini bir örnekle gösterelim.

Örnek 1.8. $A = [a_{jn}]$ matrisi

$$a_{jn} = \begin{cases} 1, \ n = j^2 \text{ ise} \\ 0 \ \ n \neq j^2 \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2}$$

kuralı ile verilsin. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \cdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \cdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \end{bmatrix}$$

olup A matrisinin Silverman-Toeplitz teoreminin şartlarını sağladığını görmek kolaydır. Böylece A matrisi regülerdir.

Daha önce istatistiksel yoğunluğunun 0 olduğu gösterilen $K = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ kümesini ele alalım. Bu durumda K kümesinin karakteristik dizisi

$$\big(\chi_K(n)\big) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0 \ldots)$$

olup bu kümenin A-yoğunluğu

$$\delta_A(K) = \lim_j (A\chi_K)_j = \lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\chi_K(n) = \lim_j 1 = 1$$

bulunur.

Şimdi A-istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecektir. İstatistiksel yakınsaklığa benzer şekilde A istatistiksel yakınsaklık; varsa limitin ϵ komşuluğunun dışında kalan terimlerin indislerinin A-yoğunluğu 0 olarak tanımlanır.

Tanım 1.9. Bir (x_n) dizisi ve bir L sayısı verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_A(\{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

veya denk olarak

$$\lim_j \sum_{n:|x_n - L| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0$$

oluyorsa (x_n) dizisi L ye A-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A\text{-}\lim_n x_n = L$ veya $x_n \xrightarrow{st_A} L$ yazılır.

Eğer $A = C_1$ alınırsa C_1 istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklığın çakışacağı kolayca görülebilir. Eğer $A = I$ özdeşlik matrisi seçilirse A-yakınsaklık alışılmış yakınsaklıktır. Açık olarak her yakınsak dizi A-yakınsak dizidir ancak bunun tersi doğru değildir. Aslında eğer $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matrisi

$$\lim_j \max_n a_{jn} = 0$$

ise A-istatistiksel yakınsaklık metodu yakınsaklıktan daha güçlüdür [8]. Aynı zamanda Teorem 1.3., A-istatistiksel yakınsaklık için de geçerlidir [9].

A-istatistiksel yakınsaklık bahsini bir örnek ile kapatalım.

Örnek 1.10. Örnek 1.8.'deki (Denklem (1.2)) $A = [a_{jn}]$ regüler matrisi ile

$$x_n = \begin{cases} -1, & n \text{ tamkare ise} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x_n) = (-1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, \ldots)$ dizisini ele alalım. (x_n) dizisi alışılmış anlamda yakınsak olmayan dizidir. Dizinin -1 terimlerinin bulunduğu indislerin kümesi $K = \{1, 4, 9, \ldots\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olup $\delta(K) = 0$ ve K ya ait indisli terimler hariç dizinin kalanı 1 sayısına yakınsak olduğundan (x_n) dizisinin istatistiksel limiti 1 dir yani $st - \lim_n x_n = 1$ dir. Oysa Örnek 1.8. gereği $\delta_A(K) = 1$ (dolayısıyla $\delta_A(K^c) = 0$) olduğundan K^c kümesindeki indislere karşılık gelen terimler hariç tutulduğunda kalan dizinin limiti -1 olduğundan dizinin A-istatistiksel limiti -1 dir yani st_A- $\lim_n x_n = -1$ bulunur.

Dizinin istatistiksel limitini sezgisel olarak göstermenin ötesinde kavramsal olarak da gösterelim. $0 < \epsilon \leq 2$ için $K(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n + 1| \geq \epsilon\} = \{n : n \text{ tamkare değil}\} = \{2, 3, 5, 6, \ldots\}$ ve $\epsilon > 2$ için $K(\epsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n + 1| \geq \epsilon\} = \emptyset$ olup her iki durumda $\sum\limits_{n \in K(\epsilon)} a_{jn} = 0$ elde edilir. Böylece

$$\delta_A(K(\epsilon)) = \delta_A(\{n : |x_n + 1| \geq \epsilon\} = \lim_j \sum_{n \in K(\epsilon)} a_{jn} = 0$$

elde edilir. O halde (x_n) dizisinin A-istatistiksel limiti -1 dir.

Şimdi bu tezde kullanılacak bir diğer kavram olan r yinci pürüzsüzlük modülü kavramını tanıtmaya geldi. Süreklilik ve pürüzsüzlük modülleri hakkında geniş bir bilgi almak için [10] kitabı incelenebilir.

Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $C[a, b]$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{R}^2$ nin orijin merkezli π yarçaplı kapalı diski $\mathbb{D} = \{(s,t) : s,t \in \mathbb{R}, s^2 + t^2 \leq \pi\}$ olmak üzere her iki değişkenine göre 2π periyodik olan $\mathbb{D}$ üzerinde bütün sürekli fonksiyonların uzayı $C_{2\pi}(\mathbb{D})$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı her iki x ve y değişkenine göre m yinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip bütün fonksiyonların uzayı $C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{D}$ üzerinde her bir değişkenine göre 2π periyodik olan ve x ile y değişkenlerine göre m basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların uzayı $C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ ile gösterilecektir. $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ ise her $l = 0, 1, \ldots, m$ için

$$\left\| \frac{\partial^m f}{\partial^{m-l} x \partial^l y} \right\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{D}} \left| \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l} x \partial^l y} \right| < \infty$$

olduğuna dikkat ediniz.

$\mathbb{R}^2$ üzerinde bütün sürekli fonksiyonların uzayı $C(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilir. Bu uzaydaki bir f fonksiyonunun r yinci (iki değişkenli) pürüzsüzlük modülü; $h > 0$ olmak üzere

$$\omega_r(f;h) = \sup_{\sqrt{u^2+v^2}\leq h} \|\Delta_{u,v}^r(f)\| \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Delta_{u,v}^r$ sembolü r yinci mertebeden iki değişkenli ileri fark olup

$$\Delta_{u,v}^r\big(f(x,y)\big) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x+ju, y+jv) \tag{1.4}$$

eşitliği ile tanımlanır ve $\|\cdot\|$, supremum normudur.

Bu çalışmada kullanılacak olan bir diğer kavram ise Korovkin (diğer adıyla Bohman-Korovkin) teoremidir. Bohman'ın isminin teoremde geçmesinin sebebi bugün genellikle Korovkin teoremi olarak adlandırılan teoremi belli tipte operatörler için daha önce ispatlamış olmasıdır. Teoremin genel hali Korovkin'e aittir. Daha sonra matematikçiler Korovkin teoremini Banach cebirleri, Banach latisleri gibi bir çok farklı fonksiyon uzayı için ispatladılar ve bu tip teoremler Korovkin tipi yaklaşım teorisi olarak adlandırıldı. Korovkin teoremi hakkında geniş bir bilgi edinmek için Altomare'nin [11] çalışmasını öneririz. Korovkin teoreminin çekiciliği; $C[a, b]$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizisinin $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ ve $e_2(t) = t^2$ fonksiyonları üzerinde noktasal yakınsak olmasının bütün uzay üzerinde dizinin noktasal yakınsaklığını garantilemesinden kaynaklanır. Dolayısıyla Korovkin teoreminin geçerli olduğu uzaylar üzerinde tanımlı lineer operatör dizilerinin yakınsaklığı için sıklıkla kullanılan bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.11. (Korovkin Teoremi) $C[a, b]$ den $C[a, b]$ ye tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi T_n olsun. Bu durumda $i = 0, 1, 2$ için $e_i(t) = t^i$ olmak üzere $\lim_n \|T_n e_i - e_i\|_\infty = 0$ oluyorsa her $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_n \|T_n f - f\|_\infty = 0 \tag{1.5}$$

olur.

Tezimizin giriş bölümünde tanıtacağımız son kavram; matematikte aynı zamanda birinci tip Euler integrali olarak da adlandırılan beta fonksiyonudur. Beta fonksiyonunun klasik tanımı $\mathrm{Re}(x) > 0$ ve $\mathrm{Re}(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

integrali ile verilir. Bununla birlikte beta fonksiyonunu bir çok farklı eşitlikle tanımlamak da mümkündür. Bu tezde betanın aşağıdaki temsili kullanılacaktır:

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt. \tag{1.6}$$

Ayrıca beta fonksiyonu aşağıdaki faydalı eşitlikleri de sağlar:

$$B(x+1, y) = B(x, y)\frac{x}{x+y}, \tag{1.7}$$

$$B(x, y+1) = B(x, y)\frac{y}{x+y}. \tag{1.8}$$

2. PICARD SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu tezde ilk olarak pozitif olmayan iki değişkenli pürüzsüz Picard singüler integral operatörlerin bir dizisinin istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir. Üstelik istatistiksel yaklaşım neticelerinin klasik düzgün yaklaşımlardan daha güçü olduğu da gösterilecektir. Bu bölüm; Anastassiou ile Duman'ın [12] çalışmasına dayanmaktadır.

Bu bölümde $r \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\alpha_{j,r}^{[m]} = \begin{cases} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} j^{-m}, & j = 1, 2, \ldots, r \text{ ise} \\ 1 - \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} j^{-m}, & j = 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.1}$$

ve $k = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{k,r}^{[m]} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} j^k, \tag{2.2}$$

notasyonları kullanılacaktır. Dikkat edilirse

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} = 1 \tag{2.3}$$

ve

$$-\sum_{j=1}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} = (-1)^r \binom{r}{0} \tag{2.4}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1. Picard singüler integral operatörleri; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve (ξ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$P_{r,n}^{[m]}(f; x, y) = \frac{1}{2\pi\xi_n^2} \sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + sj, y + tj) e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n} ds dt \right)$$

şeklinde tanımlanır.

$P_{r,n}^{[m]}$ operatörleri genelde pozitif değildir. Örneğin $\varphi(u,v) = u^2 + v^2$ pozitif fonksiyonu ile $r = 2, m = 3, x = y = 0$ değerleri alındığında $\varphi \geq 0$ olmasına rağmen

$$\begin{aligned}
P_{2,n}^{[3]}(\varphi,0,0) &= \frac{1}{2\pi\xi_n^2}\left(\sum_{j=1}^{2} j^2\alpha_{j,2}^{[3]}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(s^2+t^2)e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt \\
&= \frac{2}{\pi\xi_n^2}\left(\alpha_{1,2}^{[3]} + 4\alpha_{2,2}^{[3]}\right)\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(s^2+t^2)e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt \\
&= \frac{2}{\pi\xi_n^2}\left(-2+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\infty}e^{-\rho/\xi_n}\rho^3 d\rho d\theta \\
&= -9\xi_n^2 < 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.2. $P_{r,n}^{[m]}$ operatörleri iki değişkenli sabit fonksiyonları korur.

İspat. C herhangi bir sabit olmak üzere $f(x,y) = C$ olsun. Her $r, n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
P_{r,n}^{[m]}(C,x,y) &= \frac{C}{2\pi\xi_n^2}\sum_{j=0}^{r}\alpha_{j,r}^{[m]}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt\right) \\
&= \frac{C}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt \\
&= \frac{2C}{\pi\xi_n^2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\infty}e^{-\rho/\xi_n}d\rho d\theta \\
&= \frac{C}{\xi_n^2}\int_{0}^{\infty}e^{-\rho/\xi_n}\rho d\rho = C
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Lemma 2.3. $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu takdirde her bir $l = 0, 1, \ldots, k$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^{k-l}t^{l}e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt = \begin{cases} 2B(\frac{k-l+1}{2}, \frac{l+1}{2})\xi_n^{k+2}(k+1)!, & k \text{ ve } l \text{ çift ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olur. Burada $B(a, b)$, beta fonksiyonunu göstermektedir.

İspat. k veya l nin tek olduğu durumda integral fonksiyonunun s ve t ye göre tek fonksiyon olduğu açıktır. k ve l nin her ikisinin çift olduğu durumda ise integral fonksiyonunun s ve t ye göre çift fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^{k-l}t^{l}e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt &= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} s^{k-l}t^{l}e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt \\ &= 4\int_{0}^{\pi/2}(\cos\theta)^{k-l}(\sin\theta)^{l}d\theta\int_{0}^{\infty}\rho^{k+1}e^{-\rho/\xi_n}d\rho \\ &= 2B\left(\frac{k-l+1}{2}, \frac{l+1}{2}\right)\xi_n^{k+2}(k+1)! \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

İstatistiksel yaklaşım teoremini ispatlamak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 2.4. $m \in \mathbb{N}$ olsun ve $f \in C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu her $l = 0, 1, \ldots, m$ için

$$\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right| < \infty \tag{2.5}$$

şartını sağlasın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} G_{x,y}^{[m]}(f; s, t) =& \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\int_{0}^{1}(1-w)^{m-1} \\ & \times\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left|\frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right|\right\}dw \end{aligned} \tag{2.6}$$

olmak üzere $P_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için

$$\Bigg| P_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{[m/2]}(2i+1)\delta_{2i,r}^{[m]}\xi_n^{2i} \times \left\{ \sum_{l=0}^{2i} \binom{2i}{2i-l} \frac{\partial^{2i} f(x,y)}{\partial^{2i-l}x\partial^l y} B\left(\frac{2i-l+1}{2}, \frac{l+1}{2}\right)\right\} \Bigg|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_{x,y}^{[m]}(f;s,t)(|s|^m+|t|^m)e^{-(\sqrt{s^2+t^2})/\xi_n}dsdt$$

sağlanır. $m=1$ durumunda eşitsizliğin solundaki toplamın değeri sıfır alınır.

İspat. (x,y) sabit olsun. Taylor teoreminden

$$f(x+js,y+jt) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{j^k}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}s^{k-l}t^l\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-l}x\partial^l y} + \frac{j^m}{(m-1)!}\int_0^1 (1-w)^{m-1}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}s^{m-l}t^l \times \frac{\partial^m f(x+jsw,y+jtw)}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\}dw$$

olup buradan

$$f(x+jsw,y+jtw)-f(x,y) = \sum_{k=1}^{m}\frac{j^k}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}s^{k-l}t^l\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-l}x\partial^l y}$$
$$-\frac{j^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-w)^{m-1}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}s^{m-l}t^l\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\}dw$$
$$+\frac{j^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-w)^{m-1}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}s^{m-l}t^l\frac{\partial^m f(x+jsw,y+jtw)}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\}dw$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\alpha_{j,r}^{[m]}$ ile çarpılıp 0 dan r ye toplandığında

$$\varphi^{[m]}_{x,y}(w;s,t) = \sum_{j=0}^{r} \alpha^{[m]}_{j,r} j^m \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$
$$- \delta^{[m]}_{m,r} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l}x \partial^l y}$$

olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha^{[m]}_{j,r} \big(f(x+jsw, y+jtw) - f(x,y) \big) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta^{[m]}_{k,r}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{k-l} s^{k-l} t^l \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-l}x \partial^l y}$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-w)^{m-1} \varphi^{[m]}_{s,t}(w) dw$$

eşitliği bulunur. Önce $\varphi^{[m]}_{x,y}(w;s,t)$ nin değerleri hesaplanacaktır. (2.1), (2.2) ve (2.4) kullanılarak

$$\varphi^{[m]}_{x,y}(w;s,t) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{(r-j)} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$
$$- \sum_{j=1}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{(r-j)} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$
$$+ (-1)^r \binom{r}{0} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$
$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^{(r-j)} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} s^{m-l} t^l \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\varphi^{[m]}_{x,y}(w;s,t)\right| \leq (|s|^m + |t|^m) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left\{ \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{m-l} \left| \frac{\partial^m f(x+jsw, y+jtw)}{\partial^{m-l}x \partial^l y} \right| \right\} \quad (2.7)$$

eşitsizliği elde edilir. İntegral ve basit hesaplamalardan sonra Picard operatörlerinin sabit fonksiyonları koruduğu da düşünülürse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$R_n^{[m]}(x,y) = \frac{1}{2\pi\xi_n^2(m-1)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{1} (1-w)^{m-1}\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)dw\, e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} dsdt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &P_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi\xi_n^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} \big(f(x+sj, y+tj) - f(x,y) \big) \right\} e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} dsdt \\ &\quad = \frac{1}{2\pi\xi_n^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_{k,r}^{[m]}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{k-l} \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial^{k-l}x\partial^l y} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{k-l}t^l e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} dsdt \\ &\qquad + R_n^{[m]}(x,y) \end{aligned}$$

bulunur. $G_{x,y}^{[m]}(f)$ fonksiyonunun tanımı ile (2.7) denklemi kullanılarak

$$\left| R_n^{[m]}(x,y) \right| \leq \frac{1}{2\pi\xi_n^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{x,y}^{[m]}(s,t)(|s|^m + |t|^m) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} dsdt$$

eşitsizliği görülür. Bu eşitsizlikler Lemma 2.3. ile birlikte düşünüldüğünde istenen eşitsizlik görülür.

Artık $m \in \mathbb{N}$ durumunda iki değişkenli Picard singüler integral operatörleri için aşağıdaki istatistiksel yaklaşım teoremi verilecektir.

Teorem 2.5. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n), pozitif reel sayıların sınırlı A-istatistiksel sıfır dizisi yani $st_A\text{-}\lim_n \xi_n = 0$ olsun. Bu takdirde her bir $m \in \mathbb{N}$ sabiti ve (2.5) şartını sağlayan her $f \in C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \left\| P_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0$$

olur.

İspat. $m \in \mathbb{N}$ sabit olsun. Hipotez ile önceki teorem birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|P_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| &\leq \sum_{i=1}^{[m/2]}(2i+1)K_i\delta_{2i,r}^{[m]}\xi_n^{2i} \\ &+ \frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|G_{x,y}^{[m]}(f;s,t)\right\|(|s|^m+|t|^m)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt\end{aligned}$$

bulunur ki burada $i=1,\ldots,[\frac{m}{2}]$ için

$$K_i=\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{2i}\binom{2i}{2i-l}\left\|\frac{\partial^{2i}f}{\partial^{2i-l}x\partial^l y}\right\|B\Big(\frac{2i-l+1}{2},\frac{l+1}{2}\Big)$$

dir. $G_{x,y}^{[m]}(f)$ fonksiyonunun tanımının yani (2.6) denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ üzerinden supremum alınarak

$$\begin{aligned}\left\|G_{x,y}^{[m]}(f)\right\| &\leq \frac{2^r}{(m-1)!}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\|\right)\int_0^1(1-w)^{m-1}dw \\ &= \frac{2^r}{m!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\|\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\left\|P_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| &\leq \sum_{i=1}^{[m/2]}(2i+1)K_i\delta_{2i,r}^{[m]}\xi_n^{2i} \\ &+ \frac{2^{r+1}}{\pi m!\xi_n^2}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\|\right)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(s^m+t^m)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt\end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde $s=\rho\cos\theta$, $t=\rho\sin\theta$ dönüşümleri yapılarak

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (s^m+t^m)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt &= \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^\infty (\cos^m\theta+\sin^m\theta)\rho^{m+1}e^{-\rho/\xi_n}d\rho d\theta\\ &= \int\limits_0^\infty \rho^{m+1}e^{-\rho/\xi_n}d\rho\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^m\theta+\sin^m\theta)d\theta\\ &= \xi_n^{m+2}(m+1)!B\Big(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\Big)\end{aligned}$$

hesaplanır. Buradan

$$\left\|P_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| \le \sum_{i=1}^{[m/2]}(2i+1)K_i\delta_{2i,r}^{[m]}\xi_n^{2i}+L_m\xi_n^{m+2}(m+1)!U_m$$

elde edilir, burada

$$L_m=\frac{2^{r+1}}{\pi m!\xi_n^2}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\|\right)$$

ve

$$U_m=B\Big(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\Big)$$

dir. O halde

$$S_m=(m+1)!U_mL_m+\max_{i=1,\dots,[m/2]}\Big\{(2i+1)K_i\delta_{2i,r}^{[m]}\Big\}$$

denirse

$$\left\|P_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\| \le S_m\Bigg\{\xi_n^{m+2}+\sum_{i=1}^{[m/2]}\xi_n^{2i}\Bigg\}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi, verilen bir $\epsilon > 0$ için

$$D = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left\| P_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| \geq \epsilon \right\},$$
$$D_i = \left\{ n \in \mathbb{N} : \xi_n^{2i} \geq \frac{\epsilon}{(1 + [m/2]) S_m} \right\},\ i = 1, \ldots, \left[\frac{m}{2} \right],$$
$$D_{1+[m/2]} = \left\{ n \in \mathbb{N} : \xi_n^{m+2} \geq \frac{\epsilon}{(1 + [m/2]) S_m} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{1+[m/2]} D_i$$

olup her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n \in D} a_{jn} \leq \sum_{i=1}^{1+[m/2]} \sum_{n \in D_i} a_{jn}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafının $j \to \infty$ için limiti alınarak

$$\lim_j \sum_{n \in D} a_{jn} = 0$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Son olarak, iki değişkenli Picard singüler integral operatörlerin $m = 0$ durumunda istatistiksel yaklaşımı ile ilgili teorem verilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki teorem ile lemma verilmelidir.

Teorem 2.6. $f \in C_B(\mathbb{R}^2)$ olsun. Bu takdirde

$$\left| P_{r,n}^{[0]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{2}{\pi \xi_n^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_r\left(f; \sqrt{s^2 + t^2}\right) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} ds dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kolayca görüleceği gibi

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r}\alpha_{j,r}^{[0]}\big(f(x+sj,y+tj)-f(x,y)\big)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\big(f(x+sj,y+tj)-f(x,y)\big)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f(x+sj,y+tj)-\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\right)f(x,y)\\
&\quad=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f(x+sj,y+tj)\\
&\quad=\Delta_{s,t}^{r}\big(f(x,y)\big)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
&P_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)\\
&\quad=\frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{r}\alpha_{j,r}^{[0]}\big(f(x+sj,y+tj)-f(x,y)\big)\right\}e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt\\
&\quad=\frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_{s,t}^{r}\big(f(x,y)\big)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\left|P_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)\right| &\le \frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_{s,t}^{r}\big(f(x,y)\big)\right|e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt\\
&\le \frac{1}{2\pi\xi_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_r\big(f;\sqrt{s^2+t^2}\big)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt\\
&\le \frac{2}{\pi\xi_n^2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\omega_r\big(f;\sqrt{s^2+t^2}\big)e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n}dsdt
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu ispatı bitirir.

Lemma 2.7. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n), pozitif reel sayıların sınırlı A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her $f \in C_B(\mathbb{R}^2)$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \omega_r(f;\xi_n) = 0$$

olur.

İspat. $\omega_r(f,\cdot)$ fonksiyonu sıfırda sağ sürekli olduğundan verilen her $\epsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı; $0 < h < \delta$ olduğunda $\omega_r(f;h) < \epsilon$ olacak şekilde vardır. Bu nedenle $\omega_r(f,h) \geq \epsilon$ olması $h \geq \delta$ olmasını gerektirir. Böylece h ile ξ_n değiştirilerek her $\epsilon > 0$ için

$$\{n : \omega_r(f,\xi_n) \geq \epsilon\} \subseteq \{n : \xi_n \geq \delta\}$$

olur ki bu her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n:\omega_r(f;\xi_n)\geq\epsilon} a_{jn} \leq \sum_{n:\xi_n\geq\delta} a_{jn}$$

eşitsizliğini garantiler. (ξ_n) dizisi A-istatistiksel sıfır dizisi olduğundan

$$\lim_j \sum_{n:\xi_n\geq\delta} a_{jn} = 0$$

dolayısıyla da

$$\lim_j \sum_{n:\omega_r(f;\xi_n)\geq\epsilon} a_{jn} = 0$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Şimdi $P_{r,n}^{[0]}$ operatörlerinin istatistiksel yaklaşım teoremi verilebilir.

Teorem 2.8. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n), pozitif reel sayıların sınırlı A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her $f \in C_B(\mathbb{R}^2)$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \left\| P_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| = 0$$

olur.

İspat. Önceki teoremde her $x, y \in \mathbb{R}$ için elde edilen

$$\left| P_{r,n}^{[0]}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{2}{\pi \xi_n^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_r\left(f; \sqrt{s^2 + t^2}\right) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} ds dt$$

eşitsizliğinden

$$\left\| P_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \leq \frac{2}{\pi \xi_n^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_r\left(f; \sqrt{s^2 + t^2}\right) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} ds dt$$

elde edilir. Şimdi $\lambda, u > 0$ için $\omega_r(f; \lambda u) \leq (1 + \lambda)^r \omega_r(f; u)$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| P_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| &\leq \frac{2}{\pi \xi_n^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \omega_r\left(f; \xi_n \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{\xi_n}\right) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} ds dt \\
&\leq \frac{2\omega_r(f; \xi_n)}{\pi \xi_n^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 + \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{\xi_n}\right) e^{-\sqrt{s^2+t^2}/\xi_n} ds dt \\
&= \frac{2\omega_r(f; \xi_n)}{\pi \xi_n^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\rho}{\xi_n}\right) \rho e^{-\rho/\xi_n} d\rho d\theta \\
&= \omega_r(f; \xi_n) \int_0^\infty (1 + u)^r u e^{-u} du \\
&= \omega_r(f; \xi_n) \int_0^\infty (1 + u)^{r+1} e^{-u} du \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} k! \right) \omega_r(f; \xi_n)
\end{aligned}$$

dolayısıyla da

$$K_r = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} k!$$

denirse

$$\left\| P_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \leq K_r \omega_r(f;\xi_n)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten, verilen her $\epsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \left\| P_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| \geq \epsilon \right\} \subseteq \left\{ n \in \mathbb{N} : \omega_r(f;\xi_n) \geq \epsilon K_r^{-1} \right\}$$

kapsamasını dolayısıyla da her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n:\|P_{r,n}^{[0]}(f)-f\|\geq\epsilon} a_{jn} \leq \sum_{n:\omega_r(f;\xi_n)\geq\epsilon/K_r} a_{jn}$$

eşitsizliğini gerektirir. Hipotezden (ξ_n) dizisinin A-istatistiksel sıfır dizisi dolayısıyla da Lemma 2.7. gereği $\left(\omega_r(f;\xi_n)\right)$ dizisi bir A-istatistiksel sıfır dizisi olacağından son eşitsizlikte her iki tarafın $j \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_j \sum_{n:\|P_{r,n}^{[0]}(f)-f\|\geq\epsilon} a_{jn} = 0$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremde sırasıyla $A = C_1$ ve $A = I$ özdeşlik matrisi alınır ve Teorem 2.5. ile Teorem 2.8. ile birlikte düşünülürse aşağıdaki sonuçlar kolayca görülür.

Sonuç 2.9. (ξ_n) pozitif reel sayıların sınırlı ve istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her bir $m \in \mathbb{N}_0$ sabiti ve (2.5) şartını sağlayan her $f \in C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu için

$$st\text{-}\lim_n \left\| P_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0$$

olur.

Sonuç 2.10. (ξ_n) pozitif reel sayıların sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her bir $m \in \mathbb{N}_0$ sabiti ve (2.5) şartını sağlayan her $f \in C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ için $\left(P_{r,n}^{[m]}(f)\right)$ dizisi f ye $\mathbb{R}^2$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Şimdi (ξ_n) dizisi

$$\xi_n = \begin{cases} n, & n \text{ tam kare ise} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (ξ_n) dizisi istatistiksel sıfır dizisidir. $A = C_1$ alınarak 2.9. sonucu (veya 2.5. ile 2.8. teoremleri) kullanılarak her bir $m \in \mathbb{N}_0$ ve (2.5) şartını sağlayan her bir $f \in C^{(m)}(\mathbb{R}^2)$ için

$$st\text{-}\lim_n \left\| P_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0$$

elde edilir. Buna karşın, (ξ_n) dizisi yakınsak olmadığından $P_{r,n}^{[m]}(f)$ fonksiyonları ile bir f fonksiyonuna klasik anlamda yaklaşım garantilenemez.

Her yakınsak dizi A-istatistiksel yakınsak dolayısıyla istatistiksel yakınsak olduğundan 2.5., 2.8. teoremleri ile 2.9. sonucu $\lim_n \xi_n = 0$ olduğu durumda da doğrudur.

3. GAUSS-WEIERSTRASS SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu bölümde pozitif olmayan iki değişkenli pürüzsüz Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlerin bir dizisinin istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir. Üstelik istatistiksel yaklaşım neticelerinin klasik düzgün yaklaşımlardan daha güçü olduğu da gösterilecektir. Bu bölüm Anastassiou ve Duman'ın [13] kitabına dayanmaktadır. Bu bölümde aktarılan teoremlerin ispatları [13] kitabında bulunabilir.

İşe ilk olarak iki değişkenli Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlerin tanımını vererek başlayalım.

Tanım 3.1. Orijin merkezli π yarıçaplı kapalı disk $\mathbb{D}$ ve

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi(1 - e^{-\pi^2/\xi_n^2})}$$

olmak üzere

$$W_{r,n}^{[m]}(f; x, y) = \frac{\lambda_n}{\xi_n^2} \sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} \left(\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x + sj, y + tj) e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2} ds dt \right)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere iki değişkenli Gauss-Weierstrass singüler integral operatörleri denir. Burada $\alpha_{j,r}^{[m]}$, denklem (2.1) ile verilir.

Genellikle $W_{r,n}^{[m]}$ operatörlerinin pozitif olmadıkları görülür. Örneğin $\varphi(u,v) = u^2 + v^2$ ve $r = 2, m = 3, x = y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
W_{2,n}^{[3]}(\varphi,0,0) &= \frac{\lambda_n}{\xi_n^2}\left(\sum_{j=1}^{2} j^2\alpha_{j,2}^{[3]}\right)\iint\limits_{\mathbb{D}}(s^2+t^2)e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2}dsdt \\
&= \frac{\lambda_n}{\xi_n^2}\big(\alpha_{1,2}^{[3]} + 4\alpha_{2,2}^{[3]}\big)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\rho^3 e^{-\rho^2/\xi_n^2}d\rho d\theta \\
&= \frac{2\pi\lambda_n}{\xi_n^2}\Big(-2+\frac{1}{2}\Big)\int\limits_{0}^{\pi}\rho^3 e^{-\rho^2/\xi_n^2}d\rho \\
&= -\frac{3\pi\lambda_n}{\xi_n^2}\bigg(-\frac{\pi^2\xi_n^2 e^{-\pi^2/\xi_n^2}}{2} + \frac{\big(1-e^{-\pi^2/\xi_n^2}\big)\xi_n^4}{2}\bigg) \\
&= -\frac{3\xi_n^2}{2} + \frac{3\pi^2 e^{-\pi^2/\xi_n^2}}{2(1-e^{-\pi^2/\xi_n^2})} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik her $u \geq 0$ için $1+u \leq e^u$ oluşundan görülür. Ayrıca $W_{r,n}^{[m]}$ operatörleri iki değişkenli sabit fonksiyonları korur. Gerçekten $f(x,y) = C$ sabit fonksiyonu için $r,n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
W_{r,n}^{[m]}(C;x,y) &= \frac{C\lambda_n}{\xi_n^2}\iint\limits_{\mathbb{D}} e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2}dsdt \\
&= \frac{C\lambda_n}{\xi_n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-\rho^2/\xi_n^2}\rho d\rho d\theta \\
&= C
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2. $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde, her bir $l = 0, 1, \ldots, k$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} s^{k-l}t^l e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2}dsdt = \begin{cases} 2\gamma_{n,k}B(\frac{k-l+1}{2},\frac{l+1}{2}), & k \text{ ve } l \text{ çift ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

burada $B(a,b)$ beta fonksiyonunu göstermektedir ve $\Gamma(\alpha,z) = \int_z^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ tam olmayan gama fonksiyonu olmak üzere

$$\gamma_{n,k} = \int_0^\pi \rho^{k+1}e^{-\rho^2/\xi_n^2}d\rho = \frac{\xi_n^{k+2}}{2}\left\{\Gamma\Big(1+\frac{k}{2}\Big) - \Gamma\Big(1+\frac{k}{2},\Big(\frac{\pi}{\xi_n}\Big)^2\Big)\right\}$$

ile verilir.

Teorem 3.3. $m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde, $W_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için

$$\begin{aligned}\big|W_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) - &I_m(x,y)\big| \\ &\leq \frac{\lambda_n}{\xi_n^2}\iint_{\mathbb{D}} G_{x,y}^{[m]}(s,t)(|s|^m + |t|^m)e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2}dsdt\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$I_m(x,y) = \frac{2\lambda_n}{\xi_n^2}\sum_{i=1}^{[m/2]}\frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!}\left\{\sum_{l=0}^{2i}B\left(\frac{2i-l+1}{2},\frac{2i+1}{2}\right)\binom{2i}{2i-l}\frac{\partial^{2i}f(x,y)}{\partial^{2i-l}x\partial^l y}\right\}$$

olup $m=1$ durumunda toplam sıfırdır. Yukarıdaki $G_{x,y}^{[m]}$ fonksiyonu (2.6) denklemi ile verilir.

Sonuç 3.4. $m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde $W_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için r ile m ye bağlı bir $C_{r,m}$ sabiti için

$$\big\|W_{r,n}^{[m]}(f) - f\big\| \leq \frac{C_{r,m}\lambda_n}{\xi_n^2}\left(\gamma_{n,m} + \sum_{i=1}^{[m/2]}\gamma_{n,2i}\right)$$

olup $m=1$ için eşitsizlikteki toplam sıfırdır. Burada $\gamma(\alpha,z) = \int_z^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ tam olmayan gama fonksiyonudur.

Şimdi $m=0$ durumu incelenecektir.

Teorem 3.5. $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde

$$\mathbb{D}_1 = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq \pi \text{ ve } 0 \leq t \leq \sqrt{\pi^2 - s^2}\right\}$$

dikdörtgensel bölge olmak üzere

$$\left|W_{r,n}^{[0]}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq\frac{4\pi}{\xi_n^2}\iint\limits_{\mathbb{D}_1}\omega_r\left(f;\sqrt{s^2+t^2}\right)e^{-(s^2+t^2)/\xi_n^2}dsdt$$

dır.

Sonuç 3.6. $f\in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde r ye bağlı bir S_r pozitif sabiti için

$$\left\|W_{r,n}^{[0]}(f)-f\right\|\leq S_r\lambda_n\omega_r(f;\xi_n)$$

olur.

Artık, operatörlerin istatistiksel yaklaşımları incelenebilir. İlk olarak $m\in\mathbb{N}$ durumundaki yaklaşım ele alınacaktır.

Lemma 3.7. $A=[a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n) pozitif reel sayıların A istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde, her bir $k=1,2,\ldots,m\in\mathbb{N}$ için

$$st_A\text{-}\lim_n\frac{\gamma_{n,k}\lambda_n}{\xi_n^2}=0$$

olur.

Artık $m\in\mathbb{N}$ durumunda $W_{r,n}^{[m]}$ operatörlerinin istatistiksel yakınsaklık teoremini ispatlamak için hazırız.

Teorem 3.8. $A=[a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n) pozitif reel sayıların A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her $f\in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ ve her bir $m\in\mathbb{N}$ için

$$st_A\text{-}\lim_n\left\|W_{r,n}^{[m]}(f)-f\right\|=0$$

olur.

Aşağıdaki teorem ise $W_{r,n}^{[0]}$ operatörlerinin istatistiksel yaklaşımını ifade eder.

Lemma 3.9. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n) pozitif reel sayıların A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde, her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \lambda_n \omega_r(f;\xi_n) = 0$$

olur.

Teorem 3.10. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler matris ve (ξ_n) pozitif reel sayıların A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \left\| W_{r,n}^{[0]}(f) - f \right\| = 0$$

olur.

$A = C_1$ birinci mertebeden Cesáro matrisi alınıp 3.8. ile 3.10. teoremleri birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç hemen görülebilir.

Sonuç 3.11. (ξ_n) pozitif reel sayıların istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu takdirde her bir $m \in \mathbb{N}_0$ ve her $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için $st\text{-}\lim_n \left\| W_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0$ olur.

Üstelik $A = I$ özdeşlik matrisi alınarak 3.8. ile 3.10. teoremleri birlikte düşünüldüğünde alışılmış yakınsaklık ile ilgili aşağıdaki yaklaşım teoremi elde edilir.

Sonuç 3.12. (ξ_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olsun. Bu takdirde, her bir $m \in \mathbb{N}_0$ ve her $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için $\left(W_{r,n}^{[m]}(f)\right)$ dizisi $\mathbb{D}$ üzerinde f ye düzgün yakınsaktır.

(ξ_n) dizisi

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ tam kare ise} \\ \frac{1}{n}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. (ξ_n) dizisi üstten sınırsız olmasına rağmen istatistiksel sıfır dizisidir. Bu durumda $A = C_1$ alınarak 3.11. gereği her $m \in \mathbb{N}_0$ ve her $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için

$$st\text{-}\lim_n \left\| W_{r,n}^{[m]}(f) - f \right\| = 0$$

olur. Ancak verilen (ξ_n) dizisi yakınsak olmadığından bir f fonksiyonuna $\left(W_{r,n}^{[m]}(f)\right)$ dizisi ile düzgün yaklaşma gerçekleşmez.

4. POISSON-CAUCHY SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Duman ve Kester [15] makalesinde iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörlerin A-istatistiksel yaklaşımını inceledi. Bu bölüm Duman ve Kester'in aynı çalışmasına dayanmaktadır.

Doğal olarak ilk atılacak adım Poisson-Cauchy singüler integral operatörlerini tanımlamak olacaktır.

Tanım 4.1. Orijin merkezli π yarıçaplı kapalı disk $\mathbb{D}$ olsun. $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı reel değerli Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonları için iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörleri; $(x, y) \in \mathbb{D}$, $r, n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, (ξ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi \ln(1 + \pi^2/\xi_n^2)} \tag{4.1}$$

olmak üzere

$$Q_{r,n}^{[m]}(f; x, y) = \lambda_n \sum_{j=0}^{r} \alpha_{j,r}^{[m]} \left(\iint_{\mathbb{D}} \frac{f(x + sj, y + tj)}{(s^2 + t^2) + \xi_n^2} ds dt \right) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır, burada $\alpha_{j,r}^{[m]}$, denklem (2.1) ile verilir.

$Q_{r,n}^{[m]}$ operatörünün iki değişkenli sabit fonksiyonları koruduğunu görmek zor değildir. Bu operatörler genellikle pozitif değildir. Örneğin negatif olmayan $\varphi(u, v) = u^2 + v^2$ fonksiyonunu ve $r = 2, m = 3, x = y = 0$ olması durumunu dikkate alalım.

$$\begin{aligned}
Q_{2,n}^{[3]}(\varphi, 0, 0) &= \lambda_n \left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_{j,2}^{[3]} \right) \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(sj, tj)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= \lambda_n \left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_{j,2}^{[3]} j^2 \right) \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^2+t^2}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= \frac{-3\lambda_n}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho d\theta \\
&= \frac{-3\pi^2}{2\ln(1+\pi^2/\xi_n^2)} + \frac{3\xi_n^2}{2} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $t \geq 0$ için $\ln(1+t) < t$ oluşundan görülür.

Lemma 4.2. $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, her bir $l = 0, 1, \ldots, k$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-l}t^l}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt = \begin{cases} 2\gamma_{n,k} B(\frac{k-l+1}{2}, \frac{l+1}{2}), & k \text{ ve } l \text{ çift ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

burada $B(a, b)$ klasik beta fonksiyonu ve

$$\gamma_{n,k} = \int_0^{\pi} \frac{\rho^{k+1}}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho \tag{4.3}$$

dır.

İspat. Eğer l tek ise k keyfi olmak üzere her $s \in [-\pi, \pi]$ değeri için integrallenecek fonksiyon t ye göre tek fonksiyondur. Bu durumda ilk olarak t ye göre integral alınırsa

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-l}t^l}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt = \int_{-\pi}^{\pi} s^{k-l} \left\{ \int_{-\sqrt{\pi^2-s^2}}^{\sqrt{\pi^2-s^2}} \frac{t^l}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dt \right\} ds = 0.$$

yazılabilir. Çünkü her $s \in [-\pi, \pi]$ değerine karşılık t ye göre ilk integral simetrik bir aralık üzerinden alınmıştır. Eğer l çift k tek ise $k - l$ tektir. Dolayısıyla her sabit $t \in [-\pi, \pi]$ için integral s ye göre tek fonksiyondur. Önce s ye göre integral alınırsa,

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-l}t^l}{(s^2+t^2)+\xi_n^2}dsdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^l \left\{ \int\limits_{-\sqrt{\pi^2-t^2}}^{\sqrt{\pi^2-t^2}} \frac{s^{k-l}}{(s^2+t^2)+\xi_n^2}ds \right\} dt = 0$$

elde edilir çünkü her $t \in [-\pi, \pi]$ için s ye göre ilk integral simetrik bir aralık üzerinden alınmıştır. Sonuç olarak k ya da l tek ise yukarıdaki iki integralin sonucuda sıfır olur.

Eğer k ve l çift ise integrand s ve t ye bağlı bir çift fonksiyondur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{s^{k-l}t^l}{(s^2+t^2)+\xi_n^2}dsdt &= 4\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\rho^{k+1}\cos^{k-l}\theta\sin^l\theta}{\rho^2+\xi_n^2}d\rho d\theta \\ &= 2B\left(\frac{l+1}{2}, \frac{k-l+1}{2}\right)\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\rho^{k+1}}{\rho^2+\xi_n^2}d\rho\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi, iki değişkenli Poisson-Cauchy singüler integral operatörler için istatistiksel yaklaşımları ile ilgili sonuçlar elde edilecektir. Bu operatörlerin A-istatistiksel yaklaşımları $m = 0$ ve $m > 0$ durumlarında incelenecektir.

İlk olarak $m \in \mathbb{N}$ durumundaki istatistiksel yaklaşım incelenecektir. Bunun için önce aşağıdaki lemmaya ve daha sonra $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörü için bir sınır belirleyen aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Lemma 4.3. *$m, r \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ olsun. Bu takdirde her $(x,y) \in \mathbb{D}$ için*

$$\left|Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) - I_m(x,y)\right| \le \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{G_{x,y}^{[m]}(f;s,t)(|s|^m+|t|^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2}dsdt \tag{4.4}$$

dir, burada $G_{x,y}^{[m]}(f;s,t)$ fonksiyonu (2.6) denklemi ve (λ_n) dizisi (4.1) denklemi ile verilir. Aynı zamanda

$$I_m(x,y) = 2\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!}\left\{\sum_{t=0}^{i} B\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{2i-2t+1}{2}\right)\binom{2i}{2i-2t}\frac{\partial^{2i}f(x,y)}{\partial^{2i-2t}x\partial^{2t}y}\right\}$$

dır. Yukarıda ki toplam $m=1$ durumunda 0 olur.

İspat. $(x,y)\in\mathbb{D}$ ve $f\in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olsun. f nin Taylor açılımı

$$\sum_{j=0}^{r}\alpha_{j,r}^{[m]}(f(x+js,y+jt)-(f(x,y))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_{k,r}^{[m]}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}s^{k-l}t^{l}\frac{\partial^{k}f(x,y)}{\partial^{k-l}x\partial^{l}y}$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\int_{0}^{1}(1-w)^{m-1}\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)dw,$$

olup

$$\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t):=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}s^{m-l}t^{l}\frac{\partial^{m}f(x+jsw,y+jtw)}{\partial^{m-l}x\partial^{l}y}\right\}$$

dır. Denklem (4.2) ile Lemma 4.2. kullanılarak

$$R_{n}^{[m]}(x,y):=\frac{\lambda_{n}}{(m-1)!}\iint_{\mathbb{D}}\Big(\int_{0}^{1}(1-w)^{m-1}\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)dw\Big)\frac{dsdt}{(s^{2}+t^{2})+\xi_{n}^{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y)-f(x,y)\\
&\quad=\lambda_{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_{k,r}^{[m]}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}\frac{\partial^{k}f(x,y)}{\partial^{k-l}x\partial^{l}y}\iint_{\mathbb{D}}\frac{s^{k-l}t^{l}}{(s^{2}+t^{2})+\xi_{n}^{2}}dsdt+\mathbb{R}_{n}^{[m]}(x,y)\\
&\quad=2\lambda_{n}\sum_{i=1}^{[m/2]}\frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!}\sum_{t=0}^{i}B\left(\frac{2t+1}{2},\frac{2i-2t+1}{2}\right)\binom{2i}{2i-2t}\frac{\partial^{2i}f(x,y)}{\partial^{2i-2t}x\partial^{2t}y}\\
&\qquad+R_{n}^{[m]}(x,y)\\
&\quad=I_{m}(x,y)+R_{n}^{[m]}(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|\varphi_{x,y}^{[m]}(w;s,t)|\le(|s^{m}|+|t^{m}|)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left|\frac{\partial^{m}f(x+jsw,y+jtw)}{\partial^{m-l}x\partial^{l}y}\right|$$

den dolayı

$$|R_n^{[m]}(x,y)| \leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{G_{x,y}^{[m]}(s,t)(|s|^m + |t|^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt$$

olduğu görülür. $R_n^{[m]}(x,y) = Q_{r,n}^{[m]}(f;x,y) - f(x,y) - I_m(x,y)$ yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, $m \in \mathbb{N}$ durumunda $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörleri için bir sınır aşağıdaki teoremde belirlenmiştir.

Teorem 4.4. $m, n, r \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ için r ve m ye bağlı en az bir $C_{r,m}$ pozitif sabiti

$$\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \leq C_{r,m}\lambda_n$$

olacak şekilde vardır. Burada λ_n, denklem (4.1) ile verilir.

İspat. Önceki lemmada elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y) \in \mathbb{D}$ üzerinde supremumu alınarak

$$\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \leq \|I_m\| + \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\|G_{x,y}^{[m]}(f;s,t)\|(|s|^m + |t|^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt$$

olduğu görülür. $\|I_m\|$ için bir sınır belirleyelim. Eğer

$$K_{r,m} = \max_{1 \leq i \leq [m/2]} \left\{ \frac{\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \left(\sum_{l=0}^{2i} B\left(\frac{2i-l+1}{2}, \frac{l+1}{2}\right) \binom{2i}{2i-l} \left\| \frac{\partial^{2i} f}{\partial^{2i-2t} x \partial^{2t} y} \right\| \right) \right\}$$

denirse

$$\begin{aligned} \|I_m\| &\leqslant 2\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\gamma_{n,2i}\delta_{2i,r}^{[m]}}{(2i)!} \sum_{t=0}^{i} B\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{2i-2t+1}{2}\right) \binom{2i}{2i-2t} \left\| \frac{\partial^{2i} f}{\partial^{2i-2t} x \partial^{2t} y} \right\| \\ &\leq \mathbb{K}_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan,

$$\left\|G_{x,y}^{[m]}(s,t)\right\| \leqslant \frac{2^r}{m!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{m-l}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial^{m-l}x\partial^l y}\right\| = L_{r,m}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\mathbb{D}_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq \pi \text{ ve } 0 \leq t \leq \sqrt{\pi^2 - s^2}\}$$

kümesi tanımlansın. Böylece Lemma 4.2. de kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| &\leq K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + L_{r,m}\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{(|s|^m + |t|^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + 4L_{r,m}\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{(s^m + t^m)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= K_{r,m}\lambda_n \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i} + 4L_{r,m}\lambda_n B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\gamma_{n,m} \\
&\leq M_{r,m}\lambda_n\Big(\gamma_{n,m} + \sum_{i=1}^{[m/2]} \gamma_{n,2i}\Big)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$M_{r,m} = K_{r,m} + 4L_{r,m}B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

dır. Bir k sabiti için

$$\gamma_{n,k} = \int_0^\pi \frac{\rho^{k+1}}{\rho^2+\xi_n^2} d\rho \leqslant \frac{\pi^{k+2}}{\pi^2+\xi_n^2} \leqslant \pi^k$$

olduğunu görmek zor değildir. Buradan

$$\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \leq M_{r,m}\lambda_n\Big(\pi^m + \sum_{i=1}^{[m/2]} \pi^{2i}\Big)$$

elde edilir.

$$C_{r,m} := M_{r,m}\Big(\pi^m + \sum_{i=1}^{[m/2]} \pi^{2i}\Big)$$

denirse

$$\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \le C_{r,m}\lambda_n$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Artık $Q_{r,n}^{[m]}$ operatörlerinin $m > 0$ durumunda A-istatistiksel yakınsaklık teoremi verilebilir.

Teorem 4.5. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler toplanabilir matris ve (ξ_n) A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Bu durumda her sabit $m, r \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ için,

$$st_A\text{-}\lim_n \|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| = 0$$

elde edilir.

İspat. (ξ_n), A-istatistiksel sıfır dizisi olduğundan (λ_n) dizisi de A istatistiksel sıfır dizisidir yani

$$st_A\text{-}\lim_n \lambda_n = st_A\text{-}\lim_n \frac{1}{\pi \ln(1 + \pi^2/\xi_n^2)} = 0$$

olur. Teorem 4.4. den

$$\|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \le C_{r,m}\lambda_n$$

olup $C_{r,m}$ teoremin ispatındaki r ve m ye bağlı pozitif sabittir. Son eşitsizlik her $\epsilon > 0$ için

$$\big\{n \in \mathbb{N} : \|Q_{r,n}^{[m]}(f) - f\| \ge \epsilon\big\} \subseteq \Big\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \ge \frac{\epsilon}{C_{r,m}}\Big\}$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n:\|Q_{r,n}^{[m]}(f)-f\|\geq\epsilon} a_{jn} \leq \sum_{n:\lambda_n\geq\frac{\epsilon}{C_{r,m}}} a_{jn}$$

dir. Yukardaki eşitsizliğin her iki tarafında $j \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\in E} a_{jn} = 0$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Şimdi $Q_{r,n}^{[0]}$ operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Bunun için ilk önce $Q_{r,n}^{[0]}$ operatörleri için bir üst sınır ifade eden aşağıdaki teorem ve sonucuna ihtiyaç vardır.

Teorem 4.6. Her $r, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ için

$$\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\| \leq 4\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\omega_r\big(f; \sqrt{s^2+t^2}\big)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $(x, y) \in \mathbb{D}$ ve $f \in C_{2\pi}(\mathbb{D})$ olsun. Teorem 2.6. nın ispatında gösterilen

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{j,r}^{[0]}\big(f(x+sj, y+tj) - f(x,y)\big) = \Delta_{s,t}^{r}\big(f(x,y)\big)$$

eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&Q_{r,n}^{[0]}(f;x,y) - f(x,y) \\
&\quad = \lambda_n \sum_{j=1}^{r} \alpha_{j,r}^{[0]} \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\frac{f(x+sj, y+tj) - f(x,y)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} \right) dsdt \\
&\quad = \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \left(\frac{\sum_{j=1}^{r} \alpha_{j,r}^{[0]} \big(f(x+sj, y+tj) - f(x,y) \big)}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} \right) dsdt \\
&\quad = \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\Delta_{s,t}^{r}(f(x,y))}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
|Q_{r,n}^{[0]}(f;x,y) - f(x,y)| &\leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{|\Delta_{s,t}^{r}(f(x,y))|}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&\leq \lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{\omega_r(f; \sqrt{s^2+t^2})}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt
\end{aligned}
$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Şimdi, $M > 0$ olmak üzere $C_{2\pi}(\mathbb{D})$ nin

$$
Lip_M^* = \{ f \in \mathbb{D} : \omega_r(f,h) \leq M h^r \}
$$

alt uzayı göz önüne alınacaktır. Bu takdirde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.7. (ξ_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \xi_n \leq 1$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda her $n, r \in \mathbb{N}$ ve $f \in Lip_M^*$ için

$$
||Q_{r,n}^{[0]}(f) - f|| \leq K \lambda_n
$$

olacak şekilde bir pozitif K sabiti vardır.

İspat. $\alpha, u > 0$ olmak üzere $\omega_r(f;\alpha u) \leq (1+\alpha)^r \omega_r(f;u)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
||Q_{r,n}^{[0]}(f) - f|| &\leq 4\lambda_n \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{\omega_r(f;\sqrt{s^2+t^2})}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&\leq 4\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \iint\limits_{\mathbb{D}_1} \frac{(1+\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{\xi_n})^r}{(s^2+t^2)+\xi_n^2} dsdt \\
&= 4\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi} (1+\frac{\rho}{\xi_n})^r \rho[\rho^2+\xi_n^2]^{-1} d\rho d\theta \\
&= 2\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi} (1+\frac{\rho}{\xi_n})^r \rho[\rho^2+\xi_n^2]^{-1} d\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. İnteralde $u = \frac{\rho}{\xi_n}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
||Q_{r,n}^{[0]}(f) - f|| &\leq 2\pi\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/\xi_n} \frac{u(1+u)^r}{u^2+1} du \\
&\leq 2\pi\lambda_n \omega_r(f;\xi_n) \int\limits_0^{\pi/\xi_n} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du
\end{aligned}$$

bulunur. $f \in Lip_M^*$ olduğundan dolayı son eşitsizlik

$$||Q_{r,n}^{[0]}(f) - f|| \leq 2\pi M \lambda_n \xi_n^r \int_0^{\pi/\xi_n} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du \tag{4.5}$$

halini alır. Herhangi bir $0 < \epsilon \leq 1$ için

$$\epsilon^r \int_0^{\pi/\epsilon} \frac{(1+u)^{r+1}}{u^2+1} du \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısının vardır [16]. Bu takdirde

$$||Q_{r,n}^{[0]}(f) - f|| \leq 2\pi C M \lambda_n$$

bulunur. $K = 2\pi CM$ alınarak ispat tamamlanır.

Nihayet $Q_{r,n}^{[0]}$ operatörlerinin A-istatistiksel yaklaşım neticesi verilebilir. $m = 0$ durumundaki istatistiksel yakınsaklık neticesini elde etmek için $m > 0$ durumundaki hipotezlere ek olarak aşağıdaki iki kısıtlamaya ihtiyaç vardır: $0 < \xi_n \leq 1$ ve $f \in Lip_M^*$.

Teorem 4.8. $A = [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler topalanabilir bir matris ve (ξ_n), pozitif reel sayıların $0 < \xi_n \leq 1$ şartını sağlayan A-istatistiksel sıfır dizisi olsun. Her sabit $r \in \mathbb{N}$ ve $f \in Lip_M^*$ için

$$st_A\text{-}\lim_n \|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\| = 0$$

olur.

İspat. Sonuç 4.7. gereği her $f \in Lip_M^*$

$$\|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\| \leq K\lambda_n$$

olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı vardır. Bu durumda verilen bir $\epsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \|Q_{r,n}^{[0]}(f) - f\| \geq \epsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq \epsilon K^{-1}\right\}$$

olur ki bu her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n:\|Q_{r,n}^{[0]}(f)-f\|\geq\epsilon} a_{jn} \leq \sum_{n:\lambda_n\geq\epsilon K^{-1}} a_{jn}$$

eşitsizliğini gerektirir. Şimdi yukardaki eşitsizliğin her iki tarafında $j \to \infty$ için limit alınır ve (λ_n) dizisinin A-istatistiksel sıfır dizisi olduğu da göz önüne alınarak

$$\lim_j \sum_{n:\|Q_{r,n}^{[0]}(f)-f\|\geq\epsilon} a_{jn} = 0$$

elde edilir.

Son olarak, $A = I$ özdeşlik matrisi ($A = C_1$ Cesáro matrisi) alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9. Eğer (ξ_n) pozitif reel sayıların (istatistiksel) sıfır dizisi ise her bir sabit $m, r \in \mathbb{N}$ ve her $f \in C_{2\pi}^{(m)}(\mathbb{D})$ için $\left(Q_{r,n}^{[m]}(f)\right)$ dizisi $\mathbb{D}$ üzerinde f ye (istatistiksel) düzgün yakınsaktır. Üstelik, eğer $f \in Lip_M^*$ ve $0 < \xi_n \leq 1$ ise $\left(Q_{r,n}^{[0]}(f)\right)$ dizisi $\mathbb{D}$ üzerinde f ye (istatistiksel) düzgün yakınsaktır

5. SZÁSZ-DURRMEYER-CHARLIER OPERATÖRLERİ

Charlier polinomları

$$C_k^{(a)}(u) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-u)_r \Big(-\frac{1}{a} \Big)^r = {}_2F_0 \Big(\begin{matrix} -k, -u \\ . \end{matrix} \Big| -\frac{1}{a} \Big)$$

eşitliği ile tanımlanır [17].

Kajla ve Agrawal [18] de Charlier polinomlarıyla tanımlanan Szász operatörlerinin; $\gamma > 0$ ve $f \in C_\gamma[0,\infty) = \{f \in C[0,\infty) : t \to \infty$ için $f(t) = O(t^\gamma)\}$ olmak üzere

$$S_{n,a}(f;x) = e^{-1}\Big(1 - \frac{1}{a}\Big)^{(a-1)nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(a)}((1-a)nx)}{k! B(k+1,n)} \int_0^\infty \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanan Durrmeyer tipi modifikasyonunun yaklaşım özelliklerini inceledi. Bu bölüm, Kajla ve Agrawal'ın bu çalışmasına dayanmaktadır.

İlk olarak $S_{n,a}$ operatörleri için bazı değerler aşağıdaki lemmada verilecektir.

Lemma 5.1. $S_{n,a}(t^i;x), i = 0,1,2$ operatörleri için

(i) $S_{n,a}(1;x) = 1$;

(ii) $S_{n,a}(t;x) = \frac{nx+2}{n-1}, n > 1$;

(iii) $S_{n,a}(t^2;x) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}[n^2x^2 + nx(6 + \frac{1}{a-1}) + 7], n > 2$;

İspat. Charlier polinomları $|t| < a$ olmak üzere

$$e^t\Big(1 - \frac{t}{a}\Big)^u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(a)}(u)\frac{t^k}{k!}$$

şeklinde üretici fonksiyonlara sahip [17] olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}((1-a)nx)}{k!}=e\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(1-a)nx}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kC_k^{(a)}((1-a)nx)}{k!}=e\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(1-a)nx}(nx+1)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2C_k^{(a)}((1-a)nx)}{k!}=e\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(1-a)nx}\Big(n^2x^2+nx\Big(3+\frac{1}{a-1}\Big)+2\Big)$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir. Beta fonksiyonunun (1.6) temsili kullanılarak

$$\begin{aligned}S_{n,a}(1;x)&=e^{-1}\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(a-1)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\big((1-a)nx\big)}{k!B(k+1,n)}\int_0^{\infty}\frac{t^kdt}{(1+t)^{n+k+1}}\\&=1\end{aligned}$$

olduğu görülür. Beta fonksiyonunun sağladığı (1.7) ve (1.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{B(k+2,n-1)}{B(k+1,n)}=\frac{k+1}{n-1}$$

eşitliği kolayca görülebilir. Böylece

$$\begin{aligned}S_{n,a}(t;x)&=e\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(1-a)nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\big((1-a)nx\big)}{k!B(k+1,n)}\int_0^{\infty}\frac{t^{k+1}dt}{(1+t)^{n+k+1}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\big((1-a)nx\big)}{k!}\frac{B(k+2,n-1)}{B(k+1,n)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\big((1-a)x\big)}{k!}\frac{k+1}{n-1}\\&=\frac{1}{n-1}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kC_k^{(a)}\big((1-a)nx\big)}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{(a)}\big((1-a)nx\big)}{k!}\Big\}\\&=e\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^{(1-a)nx}\frac{nx+2}{n-1}\end{aligned}$$

dolayısıyla da

$$S_{n,a}(t;x) = \frac{nx+2}{n-1}$$

elde edilir. Son eşitlik benzer yolla gösterilebilir.

Bu makalede yazarlar ağırlıklı yaklaşım, A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla ağırlıklı Korovkin teoremini ve $[0,\infty)$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde Bohman-Korovkin teoremini ispatladılar. Aynı çalışmada yazarlar Voronovskaja tipi teorem, yerel yaklaşım ile yakınsaklık oranını da çalıştı ancak bu başlıklar altında elde edilen neticeler bu teze alınmamıştır.

Lemma 5.1.'den

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,a}(1;x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{n,a}(t;x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx+2}{n-1} = x$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{n,a}(t^2;x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}[n^2x^2 + nx(6 + \frac{1}{a-1}) + 7] = x^2$$

yakınsamaları $[0,\infty)$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün olduğundan Bohman-Korovkin teoremi gereği $\lim_{n\to\infty} S_{n,a}(f;x) \to f(x)$ yakınsaması $[0,\infty)$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgündür. Bu durum aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 5.2. $f \in C_\gamma[0,\infty)$ olsun. Bu takdirde $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n,a}(f;x) = f(x)$ yakınsaması $[0,\infty)$ aralığının her bir kapalı alt kümesinde düzgündür.

$B_\varphi[0,\infty)$ ile M_f, f ye bağlı pozitif sabit ve $\varphi(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere $|f(x)| \leq M_f\varphi(x)$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların uzayı gösterilecektir. Ayrıca, $B_\varphi[0,\infty)$ uzayındaki bütün sürekli fonksiyonların

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$$

normuyla donatılmış uzayı $C_\varphi[0,\infty)$ ve $C^*_\varphi[0,\infty) = \{f \in C_\varphi[0,\infty) : \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$ sonlu$\}$ olsun.

Aşağıdaki teorem, $S_{n,a}(f)$ fonksiyonlarının f fonksiyonuna ağırlıklı olarak yakınsak olduğunu ifade eder.

Teorem 5.3. $f \in C_{\varphi}^{*}[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} ||S_{n,a}(f) - f||_{\varphi} = 0$$

dır.

İspat. Korovkin teoremi gereği, $j = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n,a}(t^j; x) - x^j\|_{\varphi} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $S_{n,a}(1; x) = 1$ olduğundan $j = 0$ için ispat aşikârdır.

Lemma 5.1. kullanılarak

$$\begin{aligned} \|S_{n,a}(t;x) - x\|_{\varphi} &= \sup_{x\geq 0} \frac{1}{1+x^2}\left|\frac{nx+2}{n-1} - x\right| \\ &\leq \sup_{x\geq 0}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{1}{n-1} + \frac{2}{n-1} \leq \frac{3}{n-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_{n,a}(t;x) - x\|_{\varphi} = 0$ elde edilir. Benzer şekilde elde edilen

$$\begin{aligned} \|S_{n,a}(t^2;x) - x^2\|_{\varphi} &= \sup_{x\geq 0} \frac{1}{1+x^2}\left|\frac{n^2x^2 + nx(6+\frac{1}{a-1}) + 7}{(n-2)(n-1)} - x^2\right| \\ &\leq \sup_{x\geq 0} \frac{x^2}{1+x^2}\frac{3n-2}{(n-1)(n-2)} + \sup_{x\geq 0} \frac{x}{1+x^2}\frac{n(6+\frac{1}{a-1})}{(n-1)(n-2)} \\ &\qquad + \sup_{x\geq 0} \frac{1}{1+x^2}\frac{7}{(n-1)(n-2)} \\ &\leq \frac{n(9+\frac{1}{a-1})}{(n-1)(n-2)} + \frac{5}{(n-1)(n-2)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitsizliğinin her iki tarafın $n \to \infty$ için limit alınarak $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_{n,a}(t^2;x) - x^2\| = 0$ bulunur. Bu ispatı tamamlar.

Son olarak, Kajla ve Agrawal tarafından elde edilen aşağıdaki ağırlıklı A-istatistiksel yaklaşım teoremi ispatı ile verilecektir.

Teorem 5.4. $A = (a_{n,k})$ negatif olmayan regüler matris ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Aynı zamanda $\varphi_\zeta \geq 1$ sürekli fonksiyonu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi_\zeta(x)} = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde her $f \in C^*_\varphi[0, \infty)$ için

$$st_A - \lim_n ||S_{n,a}(f) - f||_{\varphi_\zeta} = 0$$

olur.

İspat. Teoremi ispatlamak için Korovkin teoremi gereği $j = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$st_A\text{-} \lim_n \|S_{n,a}(e_j) - e_j\|_\varphi = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $j = 0$ için

$$\begin{aligned} st_A\text{-} \lim_n \|S_{n,a}(e_0) - e_0\|_\varphi &= st_A\text{-} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|S_{n,a}(e_0(t); x) - e_0(x)|}{\varphi(x)} \\ &= st_A\text{-} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|S_{n,a}(1; x) - 1|}{\varphi(x)} \\ &= st_A\text{-} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|1 - 1|}{\varphi(x)} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.1) denkleminden

$$\|S_{n,a}(e_1) - e_1\| \leq \frac{3}{n-1}$$

yazılır. $\epsilon > 0$ için

$$F = \left\{n : \|S_{n,a}(e_1) - e_1\|_\varphi \geq \epsilon\right\}$$

ve

$$F_1 = \left\{n : \frac{3}{n-1} \geq \epsilon\right\}$$

denirse $F \subseteq F_1$ olacağından $\sum_{k\in F} a_{nk} \leq \sum_{k\in F_1} a_{nk}$ elde edilir. Böylece

$$st_A\text{-}\lim_n \|S_{n,a}(e_1) - e_1\|_\varphi = 0$$

elde edilir.

Şimdi (5.2) denkleminden

$$\|S_{n,a}(e_2) - e_2\|_\varphi \leq \frac{n\left(9 + \frac{1}{a-1}\right)}{(n-1)(n-2)} + \frac{5}{(n-1)(n-2)}$$

yazılır. Eğer

$$G = \left\{n : \|S_{n,a}(e_2) - e_2\|_\varphi \geq \epsilon\right\},$$

$$G_1 = \left\{n : \frac{n\left(9 + \frac{1}{a-1}\right)}{(n-1)(n-2)} \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

ve

$$G_2 = \left\{n : \frac{5}{(n-1)(n-2)} \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

denirse $G \subseteq G_1 \cup G_2$ olacağından

$$\sum_{k\in G} a_{nk} \leq \sum_{k\in G_1} a_{nk} + \sum_{k\in G_2} a_{nk}$$

dolayısıyla da

$$st_A\text{-}\lim_n \|S_{n,a}(e_2) - e_2\|_\varphi = 0$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

[1]. Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2, 241-244.

[2]. Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H., 1991, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edn., Wiley, New York.

[3]. https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

[4]. Connor, J. S., 1998, The statistical and p-Cesáro convergence of sequences, Analysis 8, 47-63.

[5]. Fridy, J. A. and Orhan, C., 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 3625-3631.

[6]. Boos, J. and Cass, F. P., 2000, Classical and modern methods in summability, Clarendon Press.

[7]. Freedman, A. R. and Sember, J. J., 1981, Densities and summability, Pacific J. Math. 95, 293–305.

[8]. Kolk, E., 1993, Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis 13, 77–83.

[9]. Miller, H. I., 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 1811–1819.

[10]. Anastassiou, G. A. and Gal, S. G., 2000, Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation, Birkhäuser Boston, Inc., Boston.

[11]. Altomare, F., 2010, Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators, Surveys in Approximation Theory, 5(13).

[12]. Anastassiou, G. A., and Duman, O., 2010, Statistical Approximation by double Picard singular integral operators, Studia Univ. Babes-Bolyai Math, 55, 3-20.

[13]. Anastassiou, G. A. and Duman, O., 2011, Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory, Vol. 14, Berlin: Springer.

[14]. Anastassiou, G. A. and Duman, O., 2010, Statistical approximation by double Picard singular integral operators, Studia Univ. Babe¸s-Bolyai Math. 55, 3–20.

[15]. Duman, O. and Kester, M., 2012, Statistical approximation by double Poisson–Cauchy singular integral operators, Results in Mathematics, 62(1-2), 53-65.

[16]. Anastassiou, G. A. and Gal, S. G., 2000, Convergence of generalized singular integrals to the unit, univariate case, Math. Inequal. Appl, 3(4), 511-518.

[17]. Ismail, M. E., 2005, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Encyclopedia Math. Appl.

[18]. Kajla, A. and Agrawal, P. N., 2015, Szász-Durrmeyer type operators based on Charlier polynomials, Appl. Math. Comput. 268, 1001–1014.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Aysun Doğan Baloğlu
Doğum Yeri	Sorgun
Doğum Tarihi	24/11/1988
Uyruğu	T.C.
Telefon	0506 866 33 04
E-Posta Adresi	aysundogan88@gmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2012

Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Yılı	

Doktora	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Yılı	

Makale ve Bildiriler