



T.C.  
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA RASYONEL UZAY EĞRİLERİNİN BENZERLİĞİ

HATİCE ERBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2019



T.C.  
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA RASYONEL UZAY EĞRİLERİNİN BENZERLİĞİ

HATİCE ERBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN  
Prof. Dr. LEVENT KULA

KIRŞEHİR / 2019

Bu çalışma 12.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

**Tez Jürisi**



Prof. Dr. Levent KULA  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK  
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi



Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT  
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi  
Fen Fakültesi

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

HATİCE ERBAŞ



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



## ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezimin hazırlanması sürecince her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi, tecrübe ve güler yüzü ile çalışmama ışık tutan, bende büyük emeği ve desteği olan ayrıca bana bu tezi vererek akademik anlamda kendimi geliştirmeme katkısı olan danışmanım **Sayın Prof. Dr. Levent KULA** ya, ayrıca **Arş. Gör. Hasan ALTINBAŞ** a ve **Benen AKINCI** ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu tezin hazırlanmasında benden hiçbir desteğini esirgemen babam **Ali ERBAŞ** a ve annem **Hacer ERBAŞ** a armağan ederim.

Temmuz, 2019

HATİCE ERBAŞ

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ . . . . .	iv
İÇİNDEKİLER . . . . .	v
ŞEKİL LİSTESİ . . . . .	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ . . . . .	vii
ÖZET . . . . .	viii
ABSTRACT . . . . .	x
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	2
3. ÖKLİD UZAYININ İZOMETRİLERİ VE BENZERLİKLERİ . . . . .	11
3.1. Rasyonel Uzay Eğrilerinin Simetrisi ve Benzerlikleri . . . . .	13
3.2. Diferensiyel Değişmezler . . . . .	23
3.3. Helis Eğrileri . . . . .	27
4. RASYONEL UZAY EĞRİLERİNİN BENZERLİKLERİNİN BULUNMASI VE BELİRLENMESİ . . . . .	31
4.1. Benzerliklerin Belirlenmesi İçin Bir Kriter . . . . .	31
4.2. Helis Olmayan Eğriler İçin Benzerlik Oranının Bulunması . . . . .	35
4.3. Helis Eğrileri İçin Benzerlik Oranının Bulunması . . . . .	41
4.4. Benzerliklerin Bulunması . . . . .	49
KAYNAKLAR . . . . .	53
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	56

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. Öteleme .....	6
Şekil 2.2. $x = 0$ düzlemi ve $z = 0$ düzlemine göre yansıma .....	7
Şekil 2.3. $x$ eksenini etrafında ve $y$ eksenini etrafında dönme .....	7
Şekil 3.1. Aynı orantı sabitine sahip benzer olmayan helis eğrileri .....	30
Şekil 4.1. Crunode eğrisi .....	40
Şekil 4.2. $M_{-1}$ eğrisi .....	47
Şekil 4.3. $M_0$ eğrisi .....	47
Şekil 4.4. $M_1$ eğrisi .....	48



## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Kisaltmalar	Açıklama
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	$\mathbb{R}^3$ deki iç çarpım
$\  , \ $	$\mathbb{R}^3$ deki norm
$\overrightarrow{AB}$	A, B vektörü
$Q^{-1}$	Q matrisinin inversi
$Q^T$	Q matrisinin transpozu
$\det Q$	Q matrisinin determinanı
$O(3)$	$3 \times 3$ tipindeki ortogonal matrislerin grubu
$SO(3)$	Özel ortogonal matrislerin grubu
$I_3$	Özdeşlik (birim) matrisi
$\delta_{ij}$	Kronecker delta
$G_\lambda = \text{ebob}(K_\lambda, T_\lambda)$	$K_\lambda$ ve $T_\lambda$ nın en büyük ortak böleni
$R_\lambda = R_s(K_\lambda, T_\lambda)$	$K_\lambda$ ve $T_\lambda$ nın s- Resultantı
$\varphi$	Möbiüs dönüşümü
$F$	$\varphi$ Möbiüs dönüşümüne karşılık gelen Möbiüs benzeri polinom
$f$	Benzerlik dönüşümü
$\alpha_j$	Rasyonel uzay eğrisi
$C^3(I, \mathbb{R})$	I dan $\mathbb{R}$ ye 3 mertebeden diferensiyellenebilir fonksiyonların halkası

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA RASYONEL UZAY EĞRİLERİNİN BENZERLİĞİ

HATİCE ERBAŞ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. LEVENT KULA

İnsanların yeteneklerini taklit eden makinalar yapmak bilim insanları için her zaman önemli bir araştırma konusu olmuştur.

Obje olarak belirtilen ve görsel olarak algılanabilen herşeyin tespiti bilgisayarlar aracılığıyla yapılmaya çalışılmaktadır. Algoritmalar yardımı ile objeleri tanıma, ayırt etme, sınıflandırma gibi işlemler gerçekleştirilebilmektedir.

Bir obje diğer bir objenin ölçeklendirme ve izometri uygulaması sonucunda elde edilebiliyorsa bu iki obje benzerdir. Bu yüzden, iki benzer obje aynı şekile sahip olmasına rağmen, konum ve büyüklükleri farklı olabilir. Dolayısıyla benzerlik tespiti objelerin tipik bir veri tabanına sahip olan ve verilen objeyle veri tabanındaki tüm elemanları benzerliğe bağlı olarak karşılaştırmasını yapan, Pattern Recognition' un önemli bir alanıdır. Pattern Recognition, ölçülen verilerin tanımlanması veya sınıflandırılması ile uğraşan bilim dalıdır.

Rasyonel uzay eğrilerinin benzer olup olmadığını kontrol etmek için bu eğrilerin yapısından faydalanılır ve olumlu durumlar için her iki eğri arasındaki benzerlik açıkça ifade edilebilir [3].

Bu çalışmada benzer iki uzay eğrisi için benzerliği sağlayan dönüşümler tanıtılacaktır.

Bu tezde, rasyonel uzay eğrilerinin benzerlik tespiti ve Möbius dönüşümü yardımıyla benzer eğrilerin nasıl ifade edileceği incelenmiştir.

Temmuz 2019, 56 Sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Benzerlik, Dönme, Öteleme, İzometri, Möbius Dönüşümü, s-Resultant, Rasyonel Eğri



## **ABSTRACT**

**MSc THESIS**

# **THE SIMILARITIES OF RATIONAL SPACE CURVES IN 3-DIMENSIONAL EUCLID SPACE**

**HATİCE ERBAŞ**

**Kırşehir Ahi Evran University  
Science and Engineering Institute  
Mathematics Department**

**Supervisor: Prof. Dr. LEVENT KULA**

Making machines that mimic people's abilities has always been an important research topic for scientists.

It is tried to determine everything that can be perceived visually as objects through computers. With the help of algorithms, operations such as recognizing, distinguishing and classifying objects can be performed.

If one object can be obtained by scaling and isometry of another object, these two objects are similar. Thus, although two similar objects have the same shape, their position and size may be different. Thus, similarity detection is an important area of Pattern Recognition, which has a typical database of objects and compares all elements in the database with respect to similarity. Pattern Recognition is a science that deals with the identification or classification of measured data.

The structure of these curves is used to check whether the rational space curves are similar, and for positive cases the similarity between the two curves can be clearly expressed [3]. In this

study, transformations that provide similarity for two similar space curves will be introduced. In this thesis, similarity curves of rational space curves and how to express similar curves with Möbius transformation are examined.

July 2019, 56 Pages.

**Keywords:** Similarity, Rotation, Translation, Isometry, Möbius Transformation, s-Resultant, Rational Curve



## 1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında benzerlik kontrolü, Bilgisayar Destekli Tasarım (Computer Aided Desing) için önemli bir rol oynar. Bu yüzden birçok makalede ele alınmıştır [1], [2], [3] ve [4]. Chen ve arkadaşlarının [8] makalesinde benzerlik kontrolü için birincisi şekil tabanlı, ikincisi topoloji tabanlı olmak üzere iki farklı kategoride metod önermişlerdir. İlk kategoride, ele alınacak objeler için tanımlanan özelliklerden bir tanesi seçilir ve uygun metrikler kullanılarak karşılaştırmalar yapılır. Detaylı bilgi için bkz. [5], [6]. Son yıllarda ilgi toplayan ikinci kategoride, her bir objeden hesaplanan bir yapı (iskelet) daha sonra kıyas amaçlı kullanılır. Detaylı bilgi için bkz. [11], [14]. Çoğunlukla bu makalelerdeki objeler çok yüzlü şekiller yoluyla modellenir, böylece daha kompleks şekiller eşlenebilir. İlaveten, benzerlik kontrollerindeki referanslar genellikle bir toleransa bağlıdır ve böylece verilen kriter yaklaşık sonuç verir. Alcazar ve arkadaşları düzlem ve uzay eğrilerinin benzerliklerini çalışmışlardır [3]. Daha sonra Alcazar ve arkadaşları rasyonel uzay eğrilerinin benzerliklerini eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonlarının kıyaslanması yardımıyla incelemiştir. Bu tezde, Alcazar ve arkadaşlarının [1] çalışması temel alınarak rasyonel uzay eğrilerin benzerlikleri çalışılmış ve örnekler verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel kavramlar, teoremler ve tanımlar verilmiştir.

**Tanım 2.1.**  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $V$  de  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde  $n$  boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\Phi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü  $P, Q \in A$  noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \Phi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise  $A$  kümesine  $V$  ile birleştirilmiş bir  $n$  boyutlu afin uzay denir.

$$(1) \quad P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$(2) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V, \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A$$

noktası vardır [10].

**Tanım 2.2.**  $A_1$  ve  $A_2$  sırasıyla  $V_1$  ve  $V_2$  vektör uzayları ile birleştirilmiş iki afin uzay olmak üzere

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir  $P, Q \in A_1$  için

$$\Psi_p : V_1 \rightarrow V_2$$

$$\overrightarrow{PQ} \rightarrow \Psi_p(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

lineer dönüşümüne  $f$  afin dönüşümü ile birleşen bir afin dönüşümdür denir.

$\Psi_p$  lineer dönüşümü  $p \in A_1$  noktasının seçilişinden bağımsızdır [10].

**Tanım 2.3.** Bir reel afin uzayı  $A$  ve  $A$  ile birleşen vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  bir iç çarpım uzayı ise  $A$  afin uzayına Öklid uzayı denir. Bu durumda  $V = \mathbb{R}^3$  olmak üzere  $V$  vektör uzayı ile birleşen  $A$  afin uzayı  $E^3$  ile gösterilir. Burada  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

dir [9].

**Tanım 2.4.**

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^3$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in E^3$  noktaları arasındaki uzaklık denir [10].

**Tanım 2.5.**  $I, \mathbb{R}$  nin bir açık aralığı olmak üzere  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  biçiminde düzgün bir  $\alpha$  dönüşümüne,  $\mathbb{R}^3$  uzayı içinde bir eğri denir [9].

**Tanım 2.6.**  $E_1^3$  ve  $E_2^3$  sırası ile  $V_1$  ve  $V_2$  3-boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^3 \rightarrow E_2^3$$



afin dönüşümü  $\forall \alpha, \beta \in V_1$  için

$$\langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\Psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa  $f$  ye bir izometri denir [10].

**Tanım 2.7.**  $Q \in \mathbb{R}_3^3$  olsun.  $Q$  matrisinin çarpmaya göre tersi varsa ve

$$Q^{-1} = Q^T$$

ise  $Q$  ya ortogonal matris denir [13].

**Tanım 2.8.**  $\mathbb{R}_3^3$  de ortogonal matrislerin kümesi,

$$O(3) = \{Q \in \mathbb{R}_3^3 ; Q^T Q = Q Q^T = I_3\}$$

biçimindedir. Bu küme matris çarpımına göre bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir.

Ayrıca  $Q \in O(3)$  için

$$\det(Q^T Q) = \det(I_3)$$

$$\det(Q^T) \det(Q) = 1$$

$$\det(Q) \det(Q) = 1$$

$$\det(Q)^2 = 1$$

$$\det(Q) = \pm 1$$

olur [12].

**Tanım 2.9.**  $O(3)$  grubunda determinanı 1 olan matrislerin kümesi bir alt gruptur ve bu alt gruba özel ortogonal grup denir.  $SO(3)$  ile gösterilir. Yani

$$SO(3) = \{Q \in \mathbb{R}_3^3 \mid Q^T Q = I, \det Q = 1\}$$

dir [13].

**Teorem 2.1.** Bir  $f : E_1^3 \rightarrow E_2^3$  dönüşümü izometri olsun. Bu durumda

(1)  $d(f(A), f(B)) = d(A, B), \forall A, B \in E_1^3,$

(2)  $f$  birebir ve örtendir,

(3)  $E_1^3$  ve  $E_2^3$  Öklid uzaylarındaki dik koordinat sistemleri sırası ile

$$\{x_1, x_2, x_3\} \text{ ve } \{y_1, y_2, y_3\}$$

ise  $f$  izometrisi,  $A = [a_{ij}] \in O(3)$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = f(x) = AX + b \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilebilir [10].

**Teorem 2.2.**  $E_1^3$  ve  $E_2^3$  birer Öklid uzayı ve

$$f : E_1^3 \rightarrow E_2^3$$

bir izometri ise

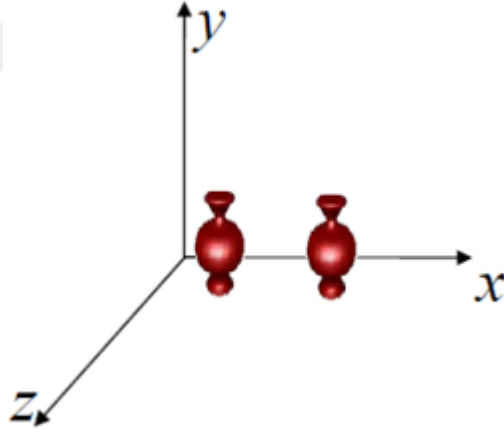
$$f^{-1} : E_2^3 \rightarrow E_1^3$$

de bir izometridir [10].

**Tanım 2.10.**  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde 3-boyutlu bir  $V$  vektör uzayı ile birleşen bir  $A$  afin uzayında bir

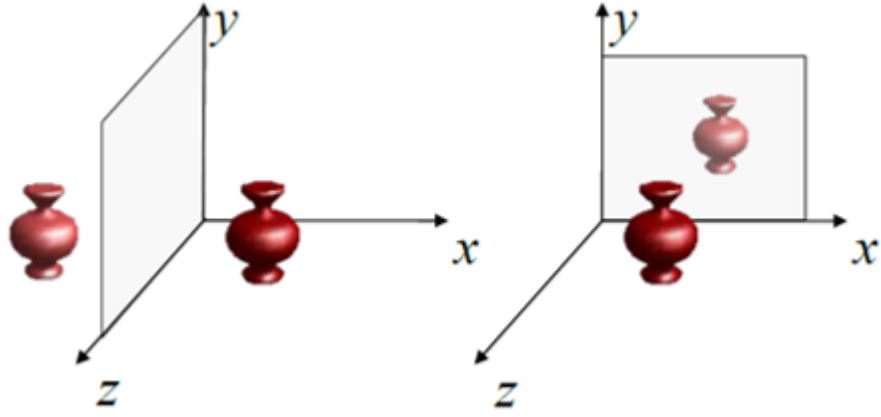
$$f : A \rightarrow A$$

dönüşümüne  $V$  de karşılık gelen lineer dönüşüm özdeşlik dönüşümü ise  $f$  ye bir öteleme denir [10].



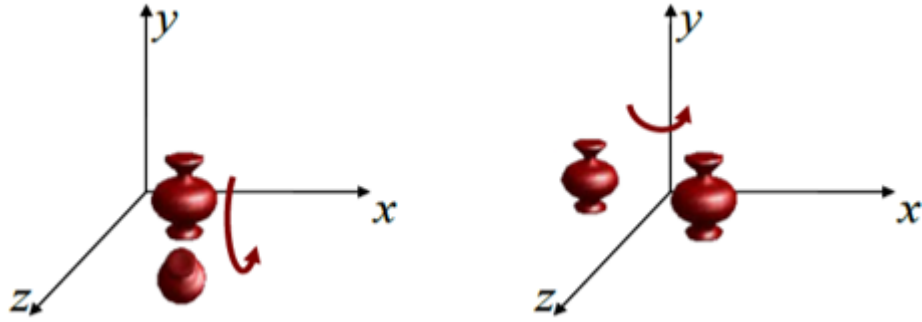
**Şekil 2.1.** Öteleme

**Tanım 2.11.** 3-boyutlu Öklid uzayında bir  $E$  düzlemi verilsin. Uzayda bir  $P$  noktasının  $E$  düzlemi üstündeki dik izdüşümü  $S$  noktası olduğuna göre,  $P$  noktasının  $S$  noktasına göre simetriği olan  $P'$  noktasına,  $P$  noktasının  $E$  düzlemine göre yansımaları (simetriği) denir [13].



**Şekil 2.2.**  $x = 0$  düzlemi ve  $z = 0$  düzlemine göre yansıma

**Tanım 2.12.**  $E^3$  de bir  $f$  izometrisi için eğer  $f(O) = O, O \in E^3$  olacak şekilde bir  $O$  noktası mevcut ise  $f$  ye  $O$  etrafında bir dönme denir [10].



**Şekil 2.3.**  $x$  eksenini etrafında ve  $y$  eksenini etrafında dönme

**Tanım 2.13.** Ötelemeli yansıma (Glide reflection), bir düzlemdeki yansımanın ve bu düzleme paralel olan bir vektör yönündeki ötelemenin birleşimidir [1].

**Tanım 2.14.** Dönmeli yansıma (Rotatory reflection), bir eksen etrafında dönme ve yansımanın birleşimidir [1].

**Tanım 2.15.** Twist, bir eksen etrafındaki dönme ve bu eksene paralel bir vektörün yönündeki ötelemenin birleşimidir [1].

**Tanım 2.16.** Bir  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde 3-boyutlu bir afin uzay  $A$  olsun.  $A$  nın bir afin otomorfizimi belli bir noktayı sabit bırakırsa bu otomorfizime merkezil afin otomorfizim denir. Bu sabit nokta başlangıç noktası alınarak merkezil afin otomorfizim  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_3^3$  ve  $X \in \mathbb{R}_1^3$  olmak üzere,

$$X' = \mathcal{A}X$$

olarak ifade edilir [10].

**Tanım 2.17.** Doğruları, kendine paralel doğrulara dönüştüren afin dönüşüme bir dilation adı verilir.  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde 3-boyutlu bir afin uzay  $A$  olsun.  $A$  ile birleşen 3-boyutlu vektör uzayı  $V$  olmak üzere

$$I : V \rightarrow V$$

özdeşlik dönüşümü ile  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ , skalarının çarpımı olan  $cI : V \rightarrow V$  dönüşümüne  $A$  da karşılık gelen merkezil afin dönüşüm bir merkezil otomorfizimdir. Bu dönüşümün ifadesi afin grup  $\mathcal{A}$  yerine  $cI_3$  alınarak

$$X' = cX$$

elde edilir. Bu dönüşüm de  $A$  da merkezil bir dönüşüm olup dilatation adını alır [10] ve [16].

**Tanım 2.18.**  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde 3-boyutlu bir afin uzayı  $A$  olsun.  $A$  ile birleşen 3-boyutlu vektör uzayı  $V$  olmak üzere

$$I : V \rightarrow V$$

özdeşlik dönüşümü ile  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$  skalarının çapımı olan

$$cI : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümde  $A$  da karşılık gelen afin dönüşüm (merkezil değil) bir afin otomorfizmdir. Bu dönüşüm  $A$  daki radyal dönüşümden farklı olarak hiç bir noktayı sabit bırakmaz ve dolayısıyla bir homoteti adını alır. Yani bir homoteti bir radyal dönüşüm(dilatation) ile bir ötelemenin bileşkesidir.

Dolayısıyla bu dönüşümün ifadesi (2.1) eşitliğinde  $A$  yerine  $cI_3$  alınarak

$$X' = cX + d$$

formunda elde edilir [10].

**Teorem 2.3.** (Uzay Eğrilerinin Temel Teoremi:)  $\kappa > 0$  ve  $\tau(s)$ ,  $s \in I$  fonksiyonları için  $s$  değişkeninin  $\alpha$  nın yay uzunluğu,  $\kappa(s)$  fonksiyonunun eğriliği ve  $\tau(s)$  fonksiyonunun burulması olduğu düzgün parametrik bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi vardır. Buna ek olarak aynı koşulları sağlayan başka herhangi bir  $\tilde{\alpha}$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinden katı bir hareketle elde edilir, başka bir deyişle  $\tilde{\alpha} = \beta \circ \alpha + c$  olacak biçimde bir  $c$  vektörü ve  $\mathbb{R}^3$  uzayının determinanı pozitif olan ortogonal, doğrusal bir  $\beta$  dönüşümü vardır [17].

**Tanım 2.19.** Pozitif dereceli  $f, g \in \mathbb{R}[t]$  polinomları verilsin.

$$(a_0 \neq 0, n > 0) \quad f = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

$$(b_0 \neq 0, m > 0) \quad f = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m$$

olmak üzere  $f$  nin katsayılarını  $n$  kez,  $g$  nin katsayılarının  $m$  kez kaydırılarak yazılmasıyla elde edilen matrise  $f$  ve  $g$  ye ait Sylvester matrisi denir.

Determinantına ise  $f$  ve  $g$  nin resultantı denir ve  $Res(f, g)$  olarak gösterilir [23].

$$Res(f, g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & \ddots & a_1 & b_m & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & a_n & 0 & a_2 & 0 & b_m & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

### 3. ÖKLİD UZAYININ İZOMETRİLERİ VE BENZERLİKLERİ

3-boyutlu Öklid uzayının bir benzerliği, uzaklık oranlarını koruyan uzaydan kendisine lineer afin dönüşümdür. Dolayısıyla,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dönüşümü benzerliktir gerek ve yeter şart

$$f(x) = \lambda Qx + b, \quad \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}_1^3, \quad Q \in \mathbb{R}_3^3, \quad Q^T Q = I_3, \quad \det(Q) = 1 \quad (3.1)$$

dir.

$x$  in Öklid normu  $\|x\|$  ve Öklid uzaklığı  $d(x, y) = \|x - y\|$  olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) = |\lambda|d(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

dir.

Burada  $\lambda$  nın (işareti) benzerlik oranı olarak ifade edilir. Benzerlik,  $\lambda > 0$  ise yönlendirmeyi korur,  $\lambda < 0$  ise yönlendirmeyi ters çevirir. Burada  $f(x) = x$  özdeşlik fonksiyonu aşikar benzerlik olarak adlandırılır. Eğer  $|\lambda| = 1$  ise  $f$  bir (afin) izometridir,

$$d(f(x), f(y)) = |\lambda|d(x, y)$$

olduğundan

$$\frac{d(x, y)}{d(f(x), f(y))} = |\lambda| = 1$$

dir. Yani  $f$  uzaklığı korur.  $\lambda, Q$  nun özdeğeri değilse  $f$  benzerliğinin merkezi olarak adlandırılan bir  $c = (I_3 - \lambda Q)^{-1}b$  noktası  $f$  nin sabit noktasıdır. Gerçekten,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ c \rightarrow f(c) = \lambda Qc + b$$



olmak üzere,

$$\begin{aligned}f(c) &= c \\ \Rightarrow \lambda Qc + b &= c \\ \Rightarrow b &= c - \lambda Qc \\ \Rightarrow b &= (I_3 - \lambda Q)c \\ \Rightarrow (I_3 - \lambda Q)^{-1}b &= (I_3 - \lambda Q)^{-1}(I_3 - \lambda Q)c \\ \Rightarrow (I_3 - \lambda Q)^{-1}b &= c\end{aligned}$$

dir.

$Q$  özel ortogonal bir matris olduğundan ( $Q$ , modülü 1 olan eigen değerlere sahiptir) izometri olmayan her benzerlik bir sabit noktaya sahiptir.

Bu tezde  $x$  noktasını  $c + \lambda(x - c)$  noktasına dönüştüren

$$f(x) = \lambda I_3 x + (1 - \lambda)c$$

merkezil afin dönüşümünü radyal dönüşüm(dilatation) dönüşümü olarak alacağız.

Burada

$$\begin{aligned}f(c) &= \lambda I_3 c + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda c + c - \lambda c \\ &= c\end{aligned}$$

dir. Bir dilative dönme,  $c$  merkezli  $f$  radyal dönüşüm(dilatationu) ile  $c$  yi içeren bir  $\ell$  doğrusu etrafında bir  $Q$  dönmesinin bileşimidir. Dolayısıyla bir dilative dönme

$$f(Qx) = Qf(x) = \lambda Qx + (1 - x)c, \quad Qc = c \quad (3.3)$$

formundadır.

Gerçekten,  $Q \in SO(3)$  ve  $f(x) = \lambda I_3 x + (1 - \lambda)c$  dilatationı için

$$\begin{aligned} f(Qx) &= \lambda I_3 Qx + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda Qx + (1 - \lambda)c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Qf(x) &= Q(\lambda I_3 x + (1 - \lambda)c) \\ &= Q\lambda I_3 x + Q(1 - \lambda)c \end{aligned}$$

$Qc = c$  olduğundan,

$$\begin{aligned} Qf(x) &= \lambda Qx + (1 - \lambda)Qc \\ &= \lambda Qx + (1 - \lambda)c \end{aligned}$$

dir [22].

**Teorem 1** Herhangi bir benzerlik ya izometridir ya da dilative dönmedir [16].

### 3.1. Rasyonel Uzay Eğrilerinin Simetrisi ve Benzerlikleri

Uzay eğrilerinin denklik problemi Elie Cartan dayanır [7]. Bu tezde  $\mathbb{R}^3$  de rasyonel uzay eğrilerini ele alacağız ve aksi söylenmedikçe bu eğrilerin düzlemsel (doğru, çember vb) olmadığını kabul edeceğiz.  $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$  indirgenemez iki rasyonel uzay eğrisi olsun :

$$\alpha_j : \mathbb{R} \rightarrow C_j \subset \mathbb{R}^3, \quad \alpha_j(t) = (x_j(t), y_j(t), z_j(t)), \quad (3.4)$$

$$x_j = \frac{q_j^1(t)}{p_j^1(t)}, y_j = \frac{q_j^2(t)}{p_j^2(t)}, z_j = \frac{q_j^3(t)}{p_j^3(t)}$$

$$q_j^k, p_j^k \in \mathbb{R}[t], \quad \text{ebob}(q_j^k, p_j^k) = 1, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad j = 1, 2.$$

$\alpha_j$  eğrilerinin  $x_j, y_j, z_j$  bileşenleri reel katsayılı ve  $t$  nin rasyonel fonksiyonları olduğundan  $t$  nin sonlu sayıdaki değerleri dışında her yerde tanımlıdır. Ayrıca bu eğrilerin sonlu sayıda  $t$  değeri dışında birebir olduğu kabul edilecektir.  $f(C_1) = C_2$  ise  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerine bir  $f$  benzerliği ile bağlıdır denir [22].

**Lemma 2** Bir doğrudan farklı olan rasyonel uzay eğrisi öteleme, glide reflection veya twist altında invariant olamaz.

Dolayısıyla yansımalar, dönmeler ve bunların kombinasyonları, bir doğrudan farklı olan bir rasyonel uzay eğrisini invariant bırakan yegane izometrilere dir.

Aşağıdaki Lemma aşikar olmayan bir  $f$  benzerliği için benzerliğin merkezinin eğri üzerinde bulunduğunu ifade etmektedir [22].

**Lemma 3**  $f, C$  cebirsel uzay eğrisini invariant bırakan ve izometri olmayan bir benzerlik olsun. Bu durumda  $f$  nin merkezi  $c, C$  eğrisinin bir noktasıdır [22].

**İspat**  $f$  izometri olmadığından,  $|\lambda| \neq 1$  dir. Eğer  $|\lambda| > 1$  ise

$$f(x) = \lambda Qx + b$$

fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(x) = \lambda^{-1}Q^{-1}x - \lambda^{-1}Q^{-1}b$$

dir. Burada,  $f^{-1}$  fonksiyonu  $|\lambda^{-1}| < 1$  eşitsizliğini sağlayan  $\lambda^{-1}$  oranlı bir benzerliktir, ayrıca  $f^{-1}$  de,  $C$  eğrisini invariant bırakır.

Bundan dolayı  $|\lambda| < 1$  kabul edildiğinde, benzer şekilde  $C$  eğrisi invariant kalır.

$x \in C$  olsun.  $f(C) = C$  olduğundan tüm yörüngelerin kümesi  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$   $C$  nin bir alt kümesidir.

$$f(x) = \lambda Qx + (1 - \lambda)c$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\lambda Qx + (1 - \lambda)c) \\ &= \lambda Q(\lambda Qx + (1 - \lambda)c) + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda^2 Q^2 x + \lambda Q(1 - \lambda)c + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda^2 Q^2 x + f((1 - \lambda)c) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(\lambda^2 Q^2 x + f((1 - \lambda)c)) = \lambda Q(\lambda^2 Q^2 x + f((1 - \lambda)c)) + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda^3 Q^3 x + \lambda Q f((1 - \lambda)c) + (1 - \lambda)c \\ &= \lambda^3 Q^3 x + f^2((1 - \lambda)c) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $f^k(x)$

$$f^k(x) = \lambda^k Q^k x + f^{k-1}((1 - \lambda)c) \tag{3.5}$$

olarak ifade edilir.

$f(c) = c$  ve (3.2) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} d(c, f^k(x)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(f(c), f(f^{k-1}(x))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda| d(c, f^{k-1}(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^2 d(c, f^{k-2}(x)) \\ &\vdots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k d(c, x)\end{aligned}$$

elde edilir.  $|\lambda| < 1$  olduğundan bu limitin sonucu sıfırdır ve  $f^k(x)$ ,  $c$  ye yaklaşır.  $C \subset \mathbb{R}^3$  kapalı olduğu için, bu limit  $C$  eğrisinin bir noktası olmalıdır.

Ek olarak,  $c$  noktası  $C$  eğrisinin noktalarının bir dizisinin limiti olduğundan bir izole nokta değildir [22].

**Lemma 4**  $f$  izometri olmayan bir benzerlik olsun. O zaman her pozitif  $n$  tamsayısı için  $f^n$  izometri değildir [22].

**İspat** (3.13) eşitliğinden  $f^n$ ,  $\lambda^n$  oranlı bir benzerliktir.  $|\lambda| \neq 1$  olduğundan  $|\lambda^n| \neq 1$  dir [22].

**Lemma 5**  $x, y$  farklı vektörler olmak üzere  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  olacak şekilde bir benzerlik  $f$  olsun. Bu durumda  $f$  bir izometridir [4].

**İspat**  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \neq 0$  olduğundan (2.1) eşitliğinden  $|\lambda| = 1$  dir. O halde  $f$  bir izometridir [4].

**Teorem 6**  $f$  kesişen doğruların bir bileşimi olmayan cebirsel bir  $\alpha$  uzay eğrisini invariant bırakan bir benzerlik olsun. O zaman  $f$  bir izometridir [22].

**İspat**  $f$  nin izometri olmadığını varsayalım. Teorem 1 den, benzerlik  $f(x) = \lambda Qx + (1 - \lambda)c$  formunda bir dilative dönmedir,  $|\lambda| \neq 1$  ve  $Q, c$  yi içeren  $\ell$  doğrusu etrafında dönmedir.

$\Pi, \ell$  ye dik olan  $c$  noktasından geçen düzlem olsun.  $f, c$  den geçen doğruları birbirine dönüştürdüğünden, genellikle birşey kaybetmeksizin  $C$  nin bu tür bileşenlere sahip olmadığını kabul edebiliriz.

İlk olarak  $C$  eğrisinin reel yada kompleks doğru olmayan bir veya daha fazla düzlemsel indirgenemeyen bileşenlere sahip olduğu durumu ele alalım. Bir benzerlik, düzlemleri düzlemlere dönüştürdüğünden bu bileşenlerden biri olan  $C' \subset C, n \geq 1$  tamsayısı için  $f^n(C') = C'$  eşitliğini sağlar.  $C'$  bir doğru olmadığından,  $C'$  bir  $\Pi'$  düzlemini gerer ve  $f^n, f'(C') = C'$  olacak şekilde  $f' = f^n|_{\Pi'}$  bir düzlem benzerliğine kısıtlamasıdır, dolayısıyla  $f'$  bir izometridir [4]. Bu yüzden  $f^n$  Lemma 5 den izometridir ve  $f$  Lemma 4 den izometridir.

Geriye  $C$  eğrisinin doğrular dışında, düzlemsel indirgenemeyen bileşenlere de sahip olmadığı durumu göstermek kalır.  $f$  nin bir izometri olmadığını ve  $C$  eğrisinin  $\ell$  ye paralel olan bir  $L$  doğrusunu içermediğini kabul edelim. Eğer içerseydi  $C$  eğrisinin herbiri  $\ell$  ye farklı uzaklıkta olan sonsuz çokluktaki  $f^n(L), n \in \mathbb{N}$  paralel doğrusunu da içerirdi.

Bu yüzden  $p : C \rightarrow \Pi$  ortogonal izdüşümünün  $C^\perp$  görüntüsü bir düzlemsel eğridir.  $C$  nin

düzlemsel bileşenlere de sahip olmadığından,  $C^\perp$  nin herhangi bir doğrusu yoktur. Ayrıca

$$\begin{aligned} p : C &\longrightarrow C^\perp \\ f(C^\perp) &= f(p(C)) \\ &= ((f \circ p)(C)) \\ &= (p \circ f)(C) \\ &= p(f(C)) \\ &= p(C) \\ &= C^\perp \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$f(C^\perp) = C^\perp$$

dir.

$f|_{C^\perp}$  kısıtlaması  $C^\perp$ 'i invariant bırakan bir düzlem benzerliğidir. O halde  $f|_{C^\perp}$  bir izometridir ve  $f$  Lemma 5 den izometridir [22].

$C$  cebirsel uzay eğrisini invariant bırakan bir  $f$  izometrisine  $C$  eğrisinin bir simetrisi adı verilir.  $f$  bir simetriye sahip ise  $C$  eğrisine simetrik denir. Benzer şekilde  $f(C_1) = C_2$  olacak şekilde bir  $f$  benzerliği varsa  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerine benzerdir denir [3] ve [4].

**Sonuç 7**  $C_1$  ve  $C_2$  bir doğru veya çember olmayan indirgenemez benzer cebirsel iki uzay eğrisi olsun. Bu durumda  $f(C_1) = C_2$  olacak şekilde sonlu sayıda  $f$  benzerliği vardır. Ayrıca, böyle bir  $f$  benzerliği tektir gerek ve yeter şart  $C_1$  ve  $C_2$  simetrik değildir [22].

**İspat**

$$f_1(C_1) = C_2$$

ve

$$f_2(C_1) = C_2$$

olacak şekilde  $f_1$  ve  $f_2$  gibi farklı iki benzerliğin olduğunu varsayalım. O zaman  $f_1 \circ f_2^{-1}$ ,  $C_2$  eğrisini kendisine dönüştüren benzerliktir. Yani

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2^{-1})(C_2) &= f_1(f_2^{-1}(C_2)) \\ &= f_1(C_1) \\ &= C_2\end{aligned}$$

dir. Teorem 6 dan  $f_1 \circ f_2^{-1}$ , bir izometridir ve bu yüzden  $C_2$  eğrisinin simetrisidir. Bir doğru veya çemberden farklı bir uzay eğrisinin simetrilerinin sayısı sonludur [3].

Eğer  $C_2$  eğrisi simetrik değilse  $f_1 \circ f_2^{-1}$ , özdeşlik dönüşümüdür ve  $f_1 = f_2$  olur. Aksine,  $C_1$  eğrisi bir  $f$  simetrisine sahip ise, o zaman  $f_1 \circ f$ ,  $C_1$  den  $C_2$  ye diğer bir benzerliktir [22].

**Önerme 8**  $i = 1, 2$  için  $f_i(C_1) = C_2$  olacak şekilde  $f_i(x)$  benzerliklerine sahip olan concurrent ( veya paralel ) doğruların bileşimi olmayan iki cebirsel uzay eğrisi  $C_1$  ve  $C_2$  olsun. O zaman  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  dir [22].

**İspat**

$$f_1(x) = \lambda_1 Q_1 x + b_1$$

ve

$$f_2(x) = \lambda_2 Q_2 x + b_2$$



olsun. Buradan

$$f_2^{-1}(x) = \lambda_2^{-1} Q_2^{-1}(x - b_2)$$

dir. Dolayısıyla  $f_2^{-1}$  ile  $f_1$  in bileşkesi alındığında

$$\begin{aligned}(f_2^{-1} \circ f_1)(x) &= f_2^{-1}(f_1(x)) \\ &= f_2^{-1}(\lambda_1 Q_1 x + b_1) \\ &= \lambda_2^{-1} Q_2^{-1}(\lambda_1 Q_1 x + b_1) - \lambda_2^{-1} Q_2^{-1} b_2 \\ &= \lambda_2^{-1} \lambda_1 Q_2^{-1} Q_1 x + \lambda_2^{-1} Q_2^{-1} b_1 - \lambda_2^{-1} Q_2^{-1} b_2 \\ &= \lambda_2^{-1} \lambda_1 (Q_2^{-1} Q_1) x + \lambda_2^{-1} Q_2^{-1} (b_1 - b_2)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlikler

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad Q = Q_2^T Q_1, \quad b = \frac{1}{\lambda_2} Q_2^T (b_1 - b_2)$$

elde edilir.

$\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$  olduğundan bir benzerliktir. Ayrıca

$$\begin{aligned}Q &= Q_2^{-1} Q_1 \\ \Rightarrow \det(Q) &= \det(Q_2^T Q_1) \\ &= \det(Q_2^T) \det(Q_1) \\ &= 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Q^T Q &= (Q_2^{-1} Q_1)^T (Q_2^{-1} Q_1) \\
&= Q_1^T (Q_2^{-1})^T Q_2^{-1} Q_1 \\
&= Q_1^T (Q_2^T)^T Q_2^T Q_1 \\
&= Q_1^T Q_2 Q_2^T Q_1 \\
&= I_3
\end{aligned}$$

dir.

Yani  $Q$  özel ortogonal matristir.

$f_2^{-1} \circ f_1$ ,  $C_1$  eğrisini invariant bıraktığı için, Teorem 6 dan  $f_2^{-1} \circ f_1$  bir izometridir, dolayısıyla  $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| = 1$  olduğundan  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  dir [22].

### Tanım 3.1

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \Delta = ad - bc \neq 0 \quad (3.6)$$

dönüşümüne Möbius dönüşüm denir [20].

**Teorem 9**  $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  parametrik ifadeleri ile verilen iki rasyonel uzay eğrisi olsun.  $C_1, C_2$  eğrileri bir  $f$  benzerliği ile bağlantılı ise, aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek  $\varphi$  Möbius dönüşümü vardır [15].

$$\begin{array}{ccc}
C_1 & \xrightarrow{f} & C_2 \\
\uparrow & & \uparrow \\
\alpha_1 & & \alpha_2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}
\end{array} \quad (3.7)$$

Yani;

$$f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$$

dir.

**Sonuç 10** (3.4) eşitliğinde tanımlı  $\alpha_j, j = 1, 2$  parametrizasyonlu eğriler (3.7) diyagramını sağlasın. Bu durumda

$$|\lambda| \|\alpha_1'(t)\| - \|(\alpha_2 \circ \varphi)'(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

dir [22].

**İspat**  $\alpha_j, j = 1, 2$  parametrik eğriler (3.7) diyagramını sağladığından

$$f(\alpha_1(t)) = \alpha_2(\varphi(t)) = (\alpha_2 \circ \varphi)(t), t \in \mathbb{R}$$

dir.

$$f(x) = \lambda Qx + b$$

olduğundan

$$f(\alpha_1(t)) = \lambda Q\alpha_1(t) + b = (\alpha_2 \circ \varphi)(t)$$

dir. Son eşitliğin her iki tarafının  $t$  ye göre türev alınırsa

$$\lambda Q(\alpha_1'(t)) = (\alpha_2 \circ \varphi)'(t)$$

ifadesi elde edilir. Buradan her iki tarafın normu alınırsa

$$\|\lambda Q\alpha_1'(t)\| = \|(\alpha_2 \circ \varphi)'(t)\|$$

ve

$$|\lambda| \|Q\alpha_1'(t)\| = \|(\alpha_2 \circ \varphi)'(t)\|$$

olur.  $\|QX\| = \|X\|$  olduğundan

$$|\lambda| \|\alpha_1'(t)\| = \|(\alpha_2 \circ \varphi)'(t)\|$$

ve

$$|\lambda| \|\alpha_1'(t)\| - \|(\alpha_2 \circ \varphi)'(t)\| = 0$$

elde edilir [22].

### 3.2. Diferensiyel Değişmezler

Bu bölümde

$$\kappa = \kappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \tau_\alpha = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha'' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (3.9)$$

eğrilik ve torsiyonlu  $\alpha$  parametrik eğrisine, bir benzerlik ve Möbius dönüşümünün etkisi incelenecektir.

$\kappa \geq 0$  dır. Fakat  $\tau$  pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Ayrıca,  $\tau$  ve  $\kappa^2$ ,  $\alpha$  rasyonel dönüşümü için rasyonel fonksiyonlar olmasına rağmen,  $\kappa$  eğriliği genellikle rasyonel değildir.

**Lemma 11** (3.4) deki  $\alpha$  parametrizasyonu ve  $f(x) = \lambda Qx + b$  benzerliği için

$$|\lambda| \kappa_{f \circ \alpha} = \kappa_{\alpha}, \quad \lambda \tau_{f \circ \alpha} = \tau_{\alpha}$$

dir [22].

**İspat** Her  $M \in \mathbb{R}_3^3$  tersinir matrisi ve  $u, v \in \mathbb{R}^3$  vektörleri için doğrudan bir hesaplama ile

$$(Mu) \times (Mv) = \det(M)(M^{-1})^T(u \times v) \quad (3.10)$$

özdeşliği sağlanır.

$n = 1, 2, 3$  için  $(f \circ \alpha)^{(n)} = \lambda Q\alpha^{(n)}$  olduğundan

$$\kappa_{f \circ \alpha} = \frac{\|\lambda Q\alpha' \times \lambda Q\alpha''\|}{\|\lambda Q\alpha'\|^3}$$

dir.

Norm fonksiyonunun özelliđinden

$$\kappa_{f \circ \alpha} = \frac{|\lambda|^2 \|Q\alpha' \times Q\alpha''\|}{|\lambda|^3 \|Q\alpha'\|^3}$$

bulunur ve (3.10) eşitliğinden

$$\kappa_{f \circ \alpha} = \frac{\|\det Q(Q^{-1})^T(\alpha' \times \alpha'')\|}{|\lambda| \|Q\alpha'\|^3}$$

elde edilir.  $\det Q = 1$  ve  $(Q^{-1})^T = Q$  olduğundan

$$\begin{aligned}\kappa_{f \circ \alpha} &= \frac{\|Q(\alpha' \times \alpha'')\|}{|\lambda| \|\alpha'\|^3} \\ &= \frac{\|(\alpha' \times \alpha'')\|}{|\lambda| \|\alpha'\|^3} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{\|(\alpha' \times \alpha'')\|}{\|\alpha'\|^3}\end{aligned}$$

ve (3.10) eşitliğinden

$$\kappa_{f \circ \alpha} = \frac{1}{|\lambda|} \kappa_{\alpha}$$

elde edilir.

$f \circ \alpha$  eğrisi için

$$\tau_{f \circ \alpha} = \frac{\langle (\lambda Q\alpha') \times (\lambda Q\alpha''), (\lambda Q\alpha''') \rangle}{\|(\lambda Q\alpha') \times (\lambda Q\alpha'')\|^2}$$

dir. Vektörel çarpım ve iç çarpımın özelliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{f \circ \alpha} &= \frac{\langle \lambda^2((Q\alpha') \times (Q\alpha'')), \lambda(Q\alpha''') \rangle}{\|\lambda^2((Q\alpha') \times (Q\alpha''))\|^2} \\ &= \frac{\lambda^3 \langle (Q\alpha') \times (Q\alpha''), (Q\alpha''') \rangle}{\lambda^4 \|(Q\alpha') \times (Q\alpha'')\|^2}.\end{aligned}$$

(3.10) eşitliğinden ve  $Q$  özel ortogonal matris olduğundan

$$\begin{aligned}
\tau_{f \circ \alpha} &= \frac{\langle \det Q(Q^{-1})^T(\alpha' \times \alpha''), (Q\alpha''') \rangle}{\lambda \|\det Q(Q^{-1})^T(\alpha' \times \alpha'')\|^2} \\
&= \frac{\langle Q(\alpha' \times \alpha''), (Q\alpha''') \rangle}{\lambda \|Q(\alpha' \times \alpha'')\|^2} \\
&= \frac{\langle Q(\alpha' \times \alpha''), (Q\alpha''') \rangle}{\lambda \|(\alpha' \times \alpha'')\|^2} \\
&= \frac{\langle (\alpha' \times \alpha''), (\alpha''') \rangle}{\lambda \|(\alpha' \times \alpha'')\|^2} \\
&= \frac{1}{\lambda} \tau_{\alpha}
\end{aligned}$$

dir [15].

**Lemma 12**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$  rasyonel parametrisasyonlu bir eğri ve  $\phi \in C^3(I, \mathbb{R})$  ise

$$\kappa_{\alpha \circ \phi} = \kappa_{\alpha} \circ \phi, \quad \tau_{\alpha \circ \phi} = \tau_{\alpha} \circ \phi$$

dir [22].

Aşağıdaki Lemma, benzer eğrilerin eğrilik ve torsiyonları ile bağlantılıdır.

**Lemma 13** Farz edelim ki  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ ;  $\lambda$  oranlı bir  $f$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  ile ifade edilen  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri ile tanımlansın. O zaman

$$\kappa_{\alpha_2} \circ \varphi = \kappa_{\alpha_2 \circ \varphi} = \kappa_{f \circ \alpha_1} = \frac{1}{|\lambda|} \kappa_{\alpha_1} \quad (3.11)$$

$$\tau_{\alpha_2} \circ \varphi = \tau_{\alpha_2 \circ \varphi} = \tau_{f \circ \alpha_1} = \frac{1}{\lambda} \tau_{\alpha_1} \quad (3.12)$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde bir  $\varphi$  Möbius dönüşümü vardır [22].

**İspat** Teorem 9 yardımıyla,  $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$  olacak şekilde bir  $\varphi$  Möbius dönüşümü vardır [22].

### 3.3. Helis Eğrileri

(3.4) eşitliği ile tanımlı  $i = 1, 2$  için düzlemsel olmayan  $\alpha_i$  parametrik eğrilerini ele alalım.  $\tau_{\alpha_i}$  sıfırdan farklı olduğundan eğrilikleri oranı

$$\mu_i = \frac{\kappa_{\alpha_i}}{\tau_{\alpha_i}}, \quad i = 1, 2$$

biçiminde alabiliriz.

Bu oran invariant olduğunda orantı sabiti olarak adlandırılır. Bu tip düzlemsel olmayan eğrilere helis eğrileri adı verilir [18],[19].

**Lemma 14** Her  $\alpha$  rasyonel helis eğrisinin  $\mu \neq 0$  orantı sabitine sahiptir [22].

**İspat** Varsayalım ki  $\mu = 0$  olsun. Eğer  $\alpha' \equiv 0$  veya  $\alpha'' \equiv 0$  ise  $\alpha$  eğrisi bir nokta veya bir doğru belirtir.

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^2} = 0$$

olduğundan

$$\alpha' \times \alpha'' = 0$$

elde edilir ki buradan,  $\alpha'$  ve  $\alpha''$  lineer bağımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Yani

$$\alpha'' = \nu \alpha' \tag{3.13}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $\nu$  fonksiyonu vardır.  $\alpha = (x, y, z)$  seçilir ve (3.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{x''}{x'} = \nu, \quad \frac{y''}{y'} = \nu, \quad \frac{z''}{z'} = \nu$$



elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerde integral alınır ve üstel forma geçilirse

$$\alpha'(t) = \alpha_0 \exp\left(\int \nu(t) dt\right)$$

bulunur. Burada  $\alpha_0$  bir sabit vektördür.

Dolayısıyla  $\alpha$  bir doğrudur ve  $\alpha$  eğrisinin helis olmasıyla çelişir. Sonuç olarak  $\mu \neq 0$  olur [22].

**Önerme 15**  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ ,  $\lambda$  oranlı bir  $f$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  eşitliğini sağlasın.  $C_1$  ve  $C_2$  helis eğrilerinin sırasıyla  $\mu_1$  ve  $\mu_2$  orantı sabitlerine sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda  $\mu_2 = \text{sgn}(\lambda) \cdot \mu_1$  dir [22].

**İspat**

$$\mu_2 = \frac{\kappa_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_2}} \circ \varphi$$

dir.

Bileşke fonksiyonun tanımından

$$\mu_2 = \frac{\kappa_{\alpha_2} \circ \varphi}{\tau_{\alpha_2} \circ \varphi}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla (3.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\frac{1}{|\lambda|} \kappa_{\alpha_1}}{\frac{1}{\lambda} \tau_{\alpha_1}} \\ &= \text{sgn}(\lambda) \frac{\kappa_{\alpha_1}}{\tau_{\alpha_1}} \\ &= \text{sgn}(\lambda) \mu_1 \end{aligned}$$

elde edilir [22].

Bu önerme helis eğrilerinin benzerliği için gerek şartı sağlar. Aşağıdaki örnek bu önermenin tersinin genelde sağlamadığını göstermektedir.

**Örnek 1** Aşağıdaki parametrizasyon ile verilen  $\mu_1$  ve  $\mu_2$  orantı sabitlerine sahip  $C_1$  ve  $C_2$  helis eğrilerini ele alalım:

$$\alpha_1(t) = \left( \frac{3}{4}t^5 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{1}{4}t^3, \frac{4}{5}t^5 + t^4, -\frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right),$$
$$\alpha_2(t) = \left( \frac{3}{2}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + t^3, \frac{6}{5}t^5 + 3t^4, -\frac{8}{5}t^5 + t^4 + \frac{4}{3}t^3 \right).$$

$C_1$  ve  $C_2$  benzer olmayan iki helis eğrisidir.  $\alpha_1$  eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{64}{25t^2(t(5t+2)+1)^2}$$

ve

$$\tau_{\alpha_1} = -\frac{48}{25t^2(t(5t+2)+1)^2}$$

olmak üzere

$$\frac{\kappa_{\alpha_1}}{\tau_{\alpha_1}} = -\frac{4}{3}$$

dir. Ayrıca  $\alpha_2$  eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{\alpha_2} = \frac{48}{25t^2(t(5t+2)+2)^2}$$

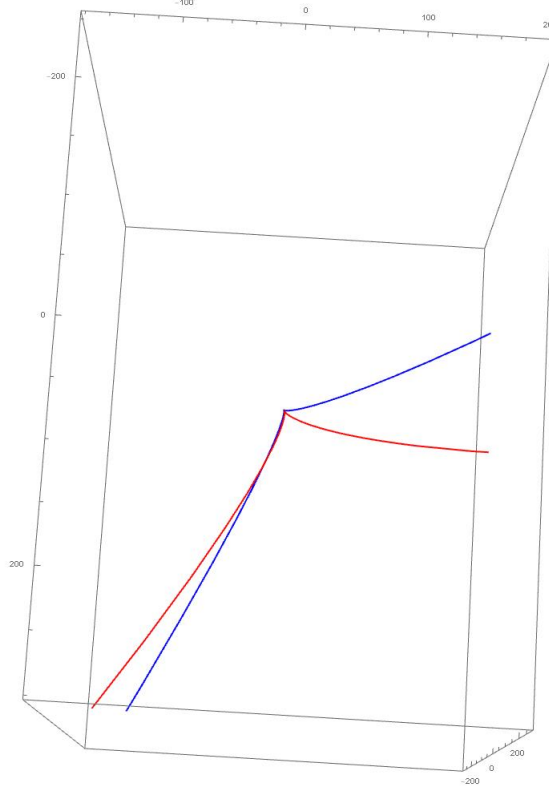
ve

$$\tau_{\alpha_2} = -\frac{36}{25t^2(t(5t+2)+2)^2}$$

olduğundan dolayı

$$\frac{\kappa_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_2}} = -\frac{4}{3}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{4}{3}$  dir [22].



**Şekil 3.1.** Aynı orantı sabitine sahip benzer olmayan helis eğrileri

**Varsayım 16**  $\mu_2 = \text{sgn}(\lambda)\mu_1$  orantı sabitlerine sahip herhangi iki rasyonel kübik helisel uzay eğrileri benzerdir [22].

Sıfırdan farklı orantı sabitlerine sahip helisel rasyonel eğriler vardır. Bu tür rasyonel uzay eğrilerinin örnekleri için [18] ve [19] makalelerine bakınız.

#### 4. RASYONEL UZAY EĞRİLERİNİN BENZERLİKLERİNİN BULUNMASI VE BELİRLENMESİ

$C_1$  ve  $C_2$ , (3.4) eşitliğinde verilen  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  parametrizasyonuna sahip iki eğri olsun. Bu bölümde öncelikle  $\lambda_0$  oranı ile verilen bir  $f$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  olup olmadığını ifade eden bir kriter sunulacaktır. Sonra, muhtemel  $\lambda_0$  oranını belirlemek için helis ve helis olmayan eğriler için ayırma metotları sunulacaktır.

##### 4.1. Benzerliklerin Belirlenmesi İçin Bir Kriter

$i = 1, 2$  için  $\kappa_{\alpha_i}^2$  ve  $\tau_{\alpha_i}$  rasyonel fonksiyon olduğundan

$$\kappa_{\alpha_i}^2(t) = \frac{A_i(t)}{B_i(t)}, \quad \tau_{\alpha_i}(t) = \frac{C_i(t)}{D_i(t)}, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

biçiminde yazılabilir.

$A_i, B_i, C_i$  ve  $D_i$  birer polinom fonksiyonudur ve  $(A_i, B_i), (C_i, D_i)$   $i = 1, 2$  aralarında asaldır.

$$\kappa_{\alpha_1}^2(t) - \lambda^2 \kappa_{\alpha_2}^2(s) = 0$$

ifadesinde (4.1) yerine yazılır ve paydalar eşitlenirse

$$\frac{A_1(t)}{B_1(t)} - \lambda^2 \frac{A_2(s)}{B_2(s)} = 0$$

ve

$$\frac{A_1(t)B_2(s)}{B_1(t)B_2(s)} - \lambda^2 \frac{A_2(s)B_1(t)}{B_2(s)B_1(t)} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte  $A_1(t)B_2(s) - \lambda^2 A_2(s)B_1(t)$  ifadesi  $K_\lambda(t, s)$  ile gösterilecektir. Yani

$$K_\lambda(t, s) = A_1(t)B_2(s) - \lambda^2 A_2(s)B_1(t) \quad (4.2)$$

dir. Benzer şekilde  $\tau_{x_1}(t) - \lambda\tau_{x_2}(s) = 0$  eşitliğinde

$$\frac{C_1(t)}{D_1(t)} - \lambda \frac{C_2(s)}{D_2(s)} = 0$$

yazılır ve paydalar eşitlenirse

$$\frac{C_1(t)D_2(s)}{D_1(t)D_2(s)} - \lambda \frac{C_2(s)D_1(t)}{D_2(s)D_1(t)} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte  $C_1(t)D_2(s) - \lambda C_2(s)D_1(t)$  ifadesi  $T_\lambda(t, s)$  ile gösterilecektir. Yani

$$T_\lambda(t, s) = C_1(t)D_2(s) - \lambda C_2(s)D_1(t) \quad (4.3)$$

dir. (4.2) eşitliği için  $K_{-\lambda} = K_\lambda$  dır. Bir  $\lambda$  sabiti için,  $K_\lambda$  ve  $T_\lambda$  en büyük ortak bölenini  $G_\lambda$  ve s-resultantını  $R_\lambda$  ile gösterilsin. O halde

$$G_\lambda = \text{ebob}(K_\lambda, T_\lambda) \quad , \quad R_\lambda = \text{Res}_s(K_\lambda, T_\lambda) \quad (4.4)$$

dir.

(3.6) denklemindeki herhangi bir  $\varphi$  Möbius dönüşümü,  $s - \varphi(t) = 0$  eşitliğinde paydaların eşitlenmesi ile elde edilen

$$F(t, s) = (ct + d)s - (at + b) \quad , \quad ad - bc \neq 0 \quad (4.5)$$

fonksiyonu Möbius benzeri polinoma karşılık gelir.  $ad - bc \neq 0$  olduğu için  $F$  indirgenemezdir [22].

Aşağıdaki teorem,  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinin benzerliği için bir kriter sunar.

**Teorem 17** (3.4) denklemindeki  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  eğrilerinin  $f(C_1) = C_2$  olacak şekilde bir  $f(x) = \lambda_0 Qx + b$  benzerliği vardır gerek ve yeter şart  $G_{\lambda_0}$  ı bölen (4.5) eşitliğindeki gibi bir  $F$  polinomu vardır ve bu polinom  $\lambda = \lambda_0$  ile (3.8) eşitliğini sağlayan  $\varphi$  Möbius dönüşümüne karşılık gelir [22].

**İspat** Eğer  $f(x) = \lambda_0 Qx + b$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  ise, Teorem 9 dan  $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$  olacak şekilde  $\varphi$  Möbius dönüşümü vardır.  $F$ ,  $\varphi$  karşılık gelen Möbius benzeri polinom olsun.  $K_{\lambda_0}(t, s) = 0$  ve  $T_{\lambda_0}(t, s) = 0$  eşitliklerini sağlayan  $(t, s)$  noktaları

$$\kappa_{\alpha_1}(t) = |\lambda_0| \kappa_{\alpha_2}(s)$$

$$\tau_{\alpha_1}(t) = \lambda_0 \tau_{\alpha_2}(s)$$

eşitliklerini sağlayan noktalardır.

$F$  indirgenemez olduğundan, Bezout teoreminden  $F$ ,  $K_{\lambda_0}$  ve  $T_{\lambda_0}$  ı böler ve böylece  $G_{\lambda_0}$  ıda böler.

Üstelik  $Q$  ortogonal olduğundan

$$\|(\alpha_2 \circ \varphi)'\| = \|(f \circ \alpha_1)'\| = \|\lambda_0 Q \alpha_1'\| = |\lambda_0| \|\alpha_1'\|$$

dir.

$\varphi$ ,  $F$  ye karşılık gelen bir dönüşüm ve  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $C_1$  in regüler bir noktası olsun.  $t = t(s)$  diferansiyellenebilir inversine sahip yay uzunluğu fonksiyonunu

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha_1'(t)\| dt, \quad t \in I$$

ele alalım.

$$\tilde{\alpha}_2 = \lambda_0^{-1} \alpha_2$$

için (3.8) eşitliğinden

$$\left\| \frac{d}{ds} (\alpha_1 \circ t) \right\| = \left\| \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = 1 = \frac{1}{|\lambda_0|} \left\| \frac{d}{dt} (\alpha_2 \circ \varphi) \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} (\tilde{\alpha}_2 \circ \varphi \circ t) \right\|$$

dir.

Böylece hem  $\alpha_1 \circ t$  hemde  $\tilde{\alpha}_2 \circ \varphi \circ t$  yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş olur.

F,  $G_{\lambda_0}$  'ı böldüğünden, F nin her  $(t, \varphi(t))$  sıfırı üstelik  $K_{\lambda_0}$  ve  $T_{\lambda_0}$  in bir sıfırdır ve bu da

$$\kappa_{\alpha_1} = |\lambda_0| \kappa_{\alpha_2} \circ \varphi$$

ve

$$\tau_{\alpha_1} = \lambda_0 \tau_{\alpha_2} \circ \varphi$$

olduğunu gösterir. O halde

$$\kappa_{\alpha_1 \circ t} = \kappa_{\alpha_1} \circ t = |\lambda_0| \kappa_{\alpha_2} \circ \varphi \circ t$$

$$\tau_{\alpha_1 \circ t} = \tau_{\alpha_1} \circ t = \lambda_0 \tau_{\alpha_2} \circ \varphi \circ t = \tau_{\tilde{\alpha}_2} \circ \varphi \circ t = \tau_{\tilde{\alpha}_2 \circ \varphi \circ t}$$

elde edilir [17].

Teorem 2.3 deki uzay eğrilerinin temel teoremi [17],  $s(I)$  üzerinde  $\tilde{f} \circ \alpha_1 \circ t = \tilde{\alpha}_2 \circ \varphi \circ t$  olacak şekilde

$$\tilde{f}(x) = Qx + b, \quad \det(Q) = 1$$

izometrisinin var olduğunu söyler.  $f(x) = \lambda_0 \tilde{f}(x)$  benzerliğinden

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(t)) &= \lambda_0 \tilde{f}(\alpha_1(t)) \\ &= \lambda_0 \tilde{\alpha}_2(\varphi(t)) \end{aligned}$$

dir.

$\tilde{\alpha}_2 = \lambda_0^{-1} \alpha_2$  olduğundan

$$f(\alpha_1(t)) = \alpha_2(\varphi(t))$$

yazılır. Bu nedenle,  $f(C_1)$  ve  $C_2$  indirgenemez cebirsel eğrileri, sonsuz çoklukta ortak noktaya sahiptir. Buda  $f(C_1) = C_2$  olduğunu gösterir.

Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur [22].

$\lambda_0$  için bazı tentative değerler biliniyorsa, eğrilerin benzerliği olan  $G_{\lambda_0}$  in benzer çarpanlara sahip olduğu bu kriter yardımıyla tespit edilir.

Teorem 17 yardımıyla Möbiüs dönüşümü (3.8) eşitliğini sağladığından böyle bir çarpanın varlığı  $C_1$  ve  $C_2$  nin benzer olmasıyla denktir [22].

#### 4.2. Helis Olmayan Eğriler İçin Benzerlik Oranının Bulunması

Farz edelimki  $\alpha_1, \alpha_2$  helis olmayan eğriler olsun. Aşağıdaki önerme,  $R_\lambda$  resultantının özdeş olarak sıfır olduğu durumda sadece sonlu sayıda sıfırdan farklı  $\lambda$  nın varlığını ifade eder.

**Önerme 18**  $R_\lambda$  resultantı özdeş olarak sıfırdır gerek ve yeter şart  $C_1, C_2 \mid \mu_1 = \mu_2$  sağlayan  $\mu_1, \mu_2$  orantı sabitlerine sahip helisel eğrilerdir [22].

**İspat**  $C_1$  ve  $C_2$  helis olduğunu kabul edelim. Orantı sabitleri aynı mutlak değere sahip olduğundan  $\mu = |\mu_1| = |\mu_2|$  dir. Lemma 14 den  $\mu \neq 0$  olduğu için

$$\frac{A_i(t)}{B_i(t)} = \kappa_{\alpha_i}^2(t) = \mu^2 \tau_{\alpha_i}^2(t) = \mu^2 \frac{C_i^2(t)}{D_i^2(t)}$$

dir. Dolayısıyla (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{A_1(t)}{B_1(t)} = \mu^2 \frac{C_1^2(t)}{D_1^2(t)}$$



ve

$$\frac{A_2(s)}{B_2(s)} = \mu^2 \frac{C_2^2(s)}{D_2^2(s)}$$

olduğundan

$$\frac{A_1(t)}{B_1(t)} \frac{D_1^2(t)}{C_1^2(t)} = \frac{A_2(s)}{B_2(s)} \frac{D_2^2(s)}{C_2^2(s)}$$

elde edilir. Buradan

$$A_1(t)B_2(s)C_2^2(s)D_1^2(t) = A_2(s)B_1(t)C_1^2(t)D_2^2(s)$$

dir.

$$A_1(t)B_2(s) = \frac{A_2(s)B_1(t)C_1^2(t)D_2^2(s)}{C_2^2(s)D_1^2(t)}$$

(4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K_\lambda(t, s) &= \frac{A_2(s)B_1(t)C_1^2(t)D_2^2(s)}{C_2^2(s)D_1^2(t)} - \lambda^2 A_2(s)B_1(t) \\ &= \frac{A_2(s)B_1(t)[C_1^2(t)D_2^2(s) - \lambda^2 C_2^2(s)D_1^2(t)]}{C_2^2(s)D_1^2(t)} \\ &= \frac{A_2(s)B_1(t)}{C_2^2(s)D_1^2(t)} [C_1^2(t)D_2^2(s) - \lambda^2 C_2^2(s)D_1^2(t)] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} K_\lambda(t, s) &= \mu^2 (C_1^2(t)D_2^2(s) - \lambda^2 C_2^2(s)D_1^2(t)) \\ &= \mu^2 (C_1(t)D_2(s) - \lambda C_2(s)D_1(t)) (C_1(t)D_2(t) + \lambda C_2(s)D_1(t)) \\ &= \mu^2 T_\lambda(t, s) T_{-\lambda}(t, s) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu yüzden  $K_\lambda$ ,  $T_\lambda$  veya  $T_{-\lambda}$  ile aşikar olmayan ortak çarpana sahiptir ve bu ortak çarpan  $s$  ye bağlıdır.  $K_\lambda = K_{-\lambda}$  olduğundan  $R_\lambda$  özdeş olarak sıfır olduğu görülebilir.

$R_\lambda = 0$  ise,  $K_\lambda$  ve  $T_\lambda$  nın aşikar olmayan en büyük ortak bölen  $G_\lambda$  vardır. Farz edelimki  $T_\lambda$ ,  $\lambda$  ya bağlı olmayan bir  $S$  çarpanına sahip olsun. Böylece  $S$ , hem  $T_\lambda$  yı hem de  $T_0(t, s) = C_1(t)D_2(s)$  i böler ve dolayısıyla  $C_2(s)D_1(t)$  yi de böler. Bu da  $C_1, D_1$  ve  $C_2, D_2$  nin aralarında asal olmasıyla çelişir.

Yani  $K_\lambda$  nın sabit olmayan çarpanının  $\lambda$  ya bağlıdır.  $G_\lambda$  nın  $T_\lambda$  ile sabit orantılı olarak  $\lambda$  nın bir lineer polinomu olduğu görülebilir.  $G_\lambda$  ve  $G_{-\lambda}$  nın her ikisinde  $\lambda$  ya göre bir kuadrik polinom olan,  $K_\lambda = K_{-\lambda}$  yı böldüğünden, sıfırdan farklı  $\nu$  sabiti için

$$K_\lambda = \nu T_\lambda T_{-\lambda} = \nu (C_1^2(t)D_2^2(s) - \lambda^2 C_2^2(s)D_1^2(t))$$

bu iki eşitlikte katsayıları karşılaştırırsak,

$$A_1(t)B_2(s) = \nu C_1^2(t)D_2^2(s) \quad , \quad A_2(s)B_1(t) = \nu C_2^2(s)D_1^2(t)$$

elde edilir.

Yukarıdaki iki eşitlikten

$$\frac{\kappa_{\alpha_1}^2(t)}{\tau_{\alpha_2}^2(s)} = \frac{A_1(t)B_2(s)}{B_1(t)A_2(s)} = \frac{C_1^2(t)D_2^2(s)}{D_1^2(t)C_2^2(s)} = \frac{\tau_{\alpha_1}^2(t)}{\tau_{\alpha_2}^2(s)}$$

veya denk olarak

$$\frac{\kappa_{\alpha_1}^2(t)}{\tau_{\alpha_1}^2(t)} = \frac{\kappa_{\alpha_2}^2(s)}{\tau_{\alpha_2}^2(s)}$$

sabit olmalıdır [22].

$Res_s(K_\lambda, T_\lambda)$  resultantının contenti (içerik)  $\Lambda^*(\lambda)$  olsun,  $\Lambda^*$  katsayıları  $\lambda$  ya bağlı  $t$  nin bir polinomudur ve  $Res_s(K_\lambda, T_\lambda)$  nın katsayılarının en büyük ortak bölenini ifade eder.  $lc_s(K_\lambda)$  ve  $lc_s(T_\lambda)$ , sırasıyla  $K_\lambda$  ve  $T_\lambda$  nın  $s$  ye göre baş katsayılarını gösterir.

$lc_s(K_\lambda), lc_s(T_\lambda)$  özdeş olarak sıfır olmadığı ve aynı zamanda  $\lambda = \lambda_0$  da  $R_{\lambda_0} Res_s(K_\lambda, T_\lambda)$  özel durumunun bir sonucudur [21].  $\Lambda(\lambda), \Lambda^*(\lambda)$  ile  $t$  ye göre  $ebob(lc_s(K_\lambda), lc_s(T_\lambda))$  contentinin çarpımı ve  $S_0, \Lambda$  nın sıfırdan farklı reel kökleridir [22].

**Önerme 19**  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ ,  $f(x) = \lambda_0 Qx + b$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  eşitliğini sağlayan helis olmayan  $C_1$  ve  $C_2$  eğrilerini gösterebilirsin. O zaman  $\lambda_0 \in S_0$  [22].

**İspat** Lemma 13' den  $K_{\lambda_0}(t, \varphi(t)) = T_{\lambda_0}(t, \varphi(t)) = 0$  olacak şekilde bir  $\varphi$  Möbius dönüşümü vardır ve bu yüzden  $G_{\lambda_0}(t, \varphi(t)) = 0$  özdeşliği sağlanır. Dolayısıyla,  $\varphi$  ye karşılık gelen F Möbius benzeri polinomu  $G_{\lambda_0}$  böler.  $\mathbb{R}[t]$  polinom halkası bir integral tanım bölgesi olduğundan,  $G_{\lambda_0}$  iki değişkenli polinomu  $R_{\lambda_0}$  resultantı özdeş olarak sıfır olduğu durumda (yani  $\Lambda(\lambda_0) = 0$  için) kesinlikle sabit değildir. Önerme 19  $\lambda_0$  in tentative değerlerini sağlar, Teorem 17 kullanarak bu tentative değerler test edilmelidir.  $\lambda_0$  in bazı değerleri için sağlanır, Teorem 17 kullanılarak bu tentative değer test edilmelidir [22].

**Örnek 2**  $C_1$  eğrisi

$$\alpha_1(t) = \left( \frac{t}{t^4 + 1}, \frac{t^2}{t^4 + 1}, \frac{t^3}{t^4 + 1} \right)$$

parametrizasyonu ile verilen bir crunode (düğüm) eğrisi olsun.

$\phi(t) = t + 1$  parametre değişimi ve

$$f(x) = \lambda Qx + b, \quad \lambda = 2, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

benzerlik dönüşümünü ele alalım. Bu durumda  $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 \circ \phi$  parametrik ifadesi ile verilen

$$\alpha_2(t) = \left( \frac{2(t+1)(4t+7)}{5(t+1)^4+1}, \frac{2(t+1)(3t-1)}{5(t+1)^4+1}, \frac{2(t+1)^3}{(t+1)^4+1} + 2 \right)$$

$C_2 = f(C_1)$  bir diğer crunode eğrisi olarak tanımlanabilir.

$C_1$  ve  $C_2$  eğrilerinin grafikleri Şekil 4.1' de gösterilmiştir.  $C_1$  ve  $C_2$  eğrileri sırasıyla

$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{2(t^4 + 1)^{7/2} \sqrt{t^8 + 9t^6 + 14t^4 + 9t^2 + 1}}{(t^{12} + 4t^{10} + 3t^8 - 8t^6 + 3t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\tau_{\alpha_1} = \frac{3(t^8 - 1)}{t^8 + 9t^6 + 14t^4 + 9t^2 + 1}$$

ve

$$\kappa_{\alpha_2} = \frac{\sqrt{\frac{34+t(2+t)(68+t(2+t)(47+t(2+t)(13+t(2+t))))}{(2+t(2+t)(2+t(2+t)))^5}}}{\frac{8+t(2+t)(2+t(2+t))(12+t(2+t)(2+t(2+t)))(10+t(2+t)(6+t(2+t)))}{(2+t(2+t)(2+t(2+t)))^4}}$$

$$\tau_{\alpha_2} = \frac{3t(t+2)(t(t+2)+2)(t(t+2)(t(t+2)+2)+2)}{2(t(t+2)(t(t+2)(t(t+2)+13)+47)+68)+34}$$

dir.  $\kappa_{\alpha_1}^2$  ve  $\kappa_{\alpha_2}^2$  nin pay ve paydası 36 ıncı derece olan rasyonel fonksiyonlardır. Ayrıca  $\tau_{\alpha_1}$  ve  $\tau_{\alpha_2}$  nin pay ve paydasının derecesi 8 dir.

(4.2) ve (4.3) eşitliklerinden

$$K_\lambda = \left[ 4(s(s+2)(s(s+2)+2)(s(s+2)(s(s+2)+2)(s(s+2)(s(s+2)+6)+10)+12)+8)^3 (t^4 + 1)^7 (t^8 + 9t^6 + 14t^4 + 9t^2 + 1) - 4(s(s+2)(s(s+2)+2)+2)^7 (34 + s(2+s)(68 + s(2+s)(47 + s(2+s)(13 + s(2+s)))))(1 + 4t^2 + 3t^4 - 8t^6 + 3t^8 + 4t^{10} + t^{12})^3 \right]$$

ve

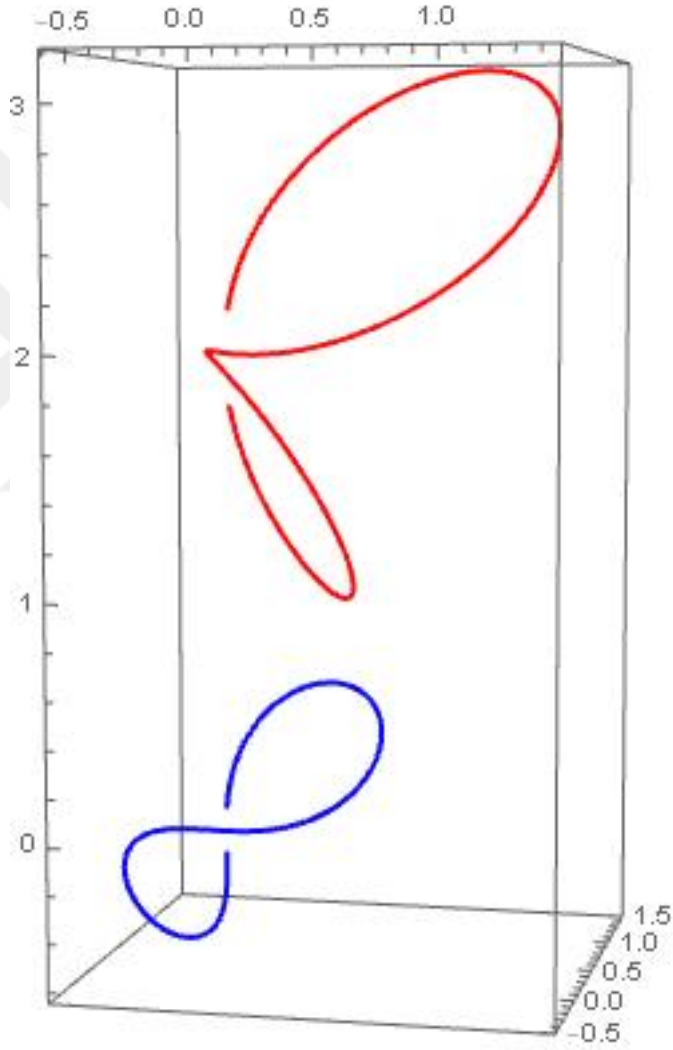
$$T_\lambda = \left[ 6(s(s+2)(s(s+2)(s(s+2)+13)+47)+68)+34)(t^8 - 1) - 6s(s+2)(s(s+2)+2)(s(s+2)(s(s+2)+2)+2)(t^8 + 9t^6 + 14t^4 + 9t^2 + 1) \right]$$

biçiminde bulunur. O halde  $K_\lambda(t, s)$  in ikili derecesi (36, 36) ve  $T_\lambda(t, s)$  in ikili derecesi (8, 8) dir.  $R_\lambda = Res_s(K_\lambda, T_\lambda)$  hesapladıktan sonra,  $\Lambda(\lambda) = \Lambda^*(\lambda) = \lambda^2 - 4$  sonucuna ulaşılır.

Dolayısıyla  $S_0 = (-2, 2)$ ,  $\lambda_1$  için tentative değerlerini içerir.

$\lambda_0 = 2$  için  $G_2(t, s) = (s + t + 1)(s - t + 1)$  dir. Buradan (3.8) denklemini saęalayan  $\varphi_1(t) = -t - 1$  ve  $\varphi_2(t) = t - 1$  Möbius dönüşümleri elde edilir.

$\lambda_0 = -2$  için  $G_{-2} = (st + t + 1)(st + t - 1)$  dir. Buradan (3.8) denklemini sağlayan  $\varphi_3(t) = -\frac{(t+1)}{t}$ ,  $\varphi_4(t) = \frac{(-t+1)}{t}$  Möbius dönüşümü bulunur. Böylece  $C_1$  ve  $C_2$  benzerdir ve birini diğerine dönüştüren dört farklı benzerlik vardır [22].



şekil 4.1. Crunode eğrisi

### 4.3. Helis Eğrileri İçin Benzerlik Oranının Bulunması

Kabul edelimki  $C_1$  ve  $C_2$  benzer iki helis eğrisi olsun. Önerme 15 den  $\mu_2 = \text{sgn}(\lambda)\mu_1$  ve Önerme 18 in ispatından  $\lambda$  için  $\text{ebob}(K_\lambda, T_\lambda) = T_\lambda$  dir. Bu yüzden  $R_\lambda \equiv 0$  dir.  $\lambda$  oranını bulmak için, Bölüm 4.2 deki metod kullanılamaz. Fakat  $G_\lambda = T_\lambda$  olduğunu bildiğimiz için,  $G_\lambda$  ın Möbius benzeri çarpana sahip olduğu  $\lambda$  değerlerini bulmak için Teorem 17 doğrudan uygulanabilir. Bunu yapabilmek için, iki değişkenli bir polinomun Möbius benzeri çarpasını direkt bir şekilde hesaplayarak bu problemi çözen [15] deki metoda uyarlanmalıdır. Eğer  $\lambda_0$  aradığımız oran ise bu benzerliğe karşılık gelen  $\varphi$  Möbius dönüşümü  $G_{\lambda_0}$  ile belirlenir.

**Lemma 20** Ya  $c = 0$  ya da  $t_0 \neq -\frac{d}{c}$  olsun.

$$\varphi(t) = \frac{at + b}{ct + d} = s_0 + s'_0(t - t_0) + \frac{1}{2}s''_0(t - t_0)^2 + \dots \quad (4.7)$$

Taylor açılımını ele alalım. O zaman

$$[a, b, c, d] = [2(s'_0)^2 - s_0s''_0, 2s_0s'_0 + t_0s_0s''_0 - 2t_0(s'_0)^2, -s''_0, 2s'_0 + t_0s''_0] \quad (4.8)$$

dir [22].

**İspat**  $t = t_0$  noktasında (4.7) türevi alınırsa

$$\begin{aligned} s &= \varphi(t) = \frac{at + b}{ct + d} \\ s' &= \varphi'(t) = \frac{a(ct + d) - (at + b)c}{(ct + d)^2} \\ &= \frac{act + ad - act - bc}{(ct + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(ct + d)^2} \end{aligned}$$

ve  $\Delta = ad - bc \neq 0$  yerine yazılırsa

$$s_0' = \frac{\Delta}{(ct_0 + d)^2} \quad (4.9)$$

dir.

$$\begin{aligned} s_0'' = \varphi''(t) &= \left( \frac{ad - bc}{(ct + d)^2} \right)' \\ &= \frac{-2c(ad - bc)}{(ct + d)^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur.  $t = t_0$  için

$$s_0'' = \frac{-2c\Delta}{(ct_0 + d)^3}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2(s_0')^2 - s_0 s_0'' &= \frac{2\Delta^2}{(ct_0 + d)^4} + \left( \frac{at_0 + b}{ct_0 + d} \right) \left( \frac{+2c\Delta}{(ct_0 + d)^3} \right) \\ &= \frac{2\Delta(\Delta + (at_0 + b)c)}{(ct_0 + d)^4} \\ &= \frac{2\Delta(ad - bc + act_0 + bc)}{(ct_0 + d)^4} \\ &= \frac{2\Delta(ad + act_0)}{(ct_0 + d)^4} \\ &= \frac{2\Delta(a(ct_0 + d))}{(ct_0 + d)^4} \\ &= \frac{2\Delta a}{(ct_0 + d)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2s_0s_0' + t_0s_0s_0'' - 2t_0(s_0')^2 \\
&= \left(\frac{at_0 + b}{ct_0 + d}\right) \left(\frac{\Delta}{(ct_0 + d)^2}\right) + t_0 \left(\frac{at_0 + b}{ct_0 + b}\right) \left(\frac{-2c\Delta}{(ct_0 + d)^3}\right) - 2t_0 \left(\frac{\Delta}{(ct_0 + d)^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(at_0 + b)(ad - bc)}{(ct_0 + d)^3}\right) + t_0 \left(\frac{(at_0 + b)(-2c(ad - bc))}{(ct_0 + b)^4}\right) - 2t_0 \left(\frac{(ad - bc)^2}{(ct_0 + d)^4}\right) \\
&= \frac{2b\Delta}{(ct_0 + d)^3}
\end{aligned}$$

ve

$$-s_0'' = \frac{2c\Delta}{(ct_0 + d)^3}$$

son olarak

$$2s_0' + t_0s_0'' = \frac{2d\Delta}{(ct_0 + d)^3}$$

elde edilir.

$s$  ye göre  $G_\lambda(t, s)$  polinomunun  $lc_s(G_\lambda(t, s))$  başkatsayısının  $t = t_0$  değeri sıfırdan farklı olacak şekilde  $t_0 \in Q$  seçelim.  $L(\lambda)$ ,  $t_0$  noktasında hesaplanan  $lc_s(G_\lambda(t, s))$  olsun. Kapalı fonksiyon teoremini kullanarak  $G_\lambda$ ' nin Möbius benzeri çarpanını belirlemek için  $S_1$  ve  $S_2$  kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$S_1 = \{0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \mid L(\lambda) = 0\}$$

$$S_2 = \{0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \mid G_\lambda(t_0, s) = 0, \frac{\partial G_\lambda}{\partial s}(t_0, s) = 0, s \in \mathbb{C}\}.$$

$S_1 \cup S_2$  den herhangi bir  $\lambda$  yı hariç tutmalıyız.  $S_2$  nin elemanları  $\lambda$  ya göre  $G_\lambda(t_0, s) = \frac{\partial G_\lambda}{\partial s}(t_0, s) = 0$  iki değişkenli polinom sisteminden  $s$  değişkenin yok edilmesiyle elde edilebilir.

Örneğin Sylvester Resultantı bu işlem için kullanılabilir.

Varsayalım ki  $\lambda \notin S_1 \cup S_2$  olsun.  $G_\lambda$ ,  $\lambda$  değişkenine bağlıdır fakat kısalık için  $G_\lambda$  ve  $G_\lambda$  nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sırasıyla  $G_t, G_s, G_{tt}, G_{ts}, G_{ss}$  biçiminde gösterilecektir. Kabul edelimki  $G$  bir  $F$  Möbiüs benzeri çarpına sahip ve  $s_0$ ,  $F(t_0, s_0) = 0$  eşitliğini sağlayan bir değişken olsun.  $G(t_0, s_0) = 0$  ve  $G_s(t_0, s_0) \neq 0$  olduğundan,  $\frac{\partial F}{\partial s}(t_0, s_0) \neq 0$  dır ve  $F(t, s) = 0$  denklemi (4.7) denklemindeki gibi  $s_0 = \varphi(t_0)$  eşitliğini sağlayan  $t_0$  ın



komşuluğunda bir  $s = \varphi(t)$  fonksiyonunu tanımlar.

$F, G$  yi böldüğünden ve  $G_s(t_0, s_0) \neq 0$  olduğundan  $\varphi(t)$  nin  $G(t, s) = 0$  ile tanımlı olması kullanılarak  $s_0$  ve  $\lambda$  ya göre  $s'_0$  ve  $s''_0$  için ifadeler bulunur.  $G(t, \varphi(t)) = 0$  özdeşliğinin  $t$  ye göre birinci ve ikinci türevleri alınır.  $\varphi'$  ile  $\varphi''$  için çözülür ve  $t_0$  değerinde hesaplanırsa:

$$G(t, s) = 0$$

için kapalı fonksiyonun türevi yardımıyla

$$\begin{aligned} G_t(t, s) + G_s(t, s) \frac{ds}{dt} &= 0 \\ G_t(t, s) + G_s(t, s) \frac{d\varphi(t)}{dt} &= 0 \\ G_t(t, s) + G_s(t, s) \varphi'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur.  $t = t_0$  için

$$G_t(t_0, s_0) + G_s(t_0, s_0) \varphi'(t_0) = 0$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$s'_0 = \varphi'(t_0) = -\frac{G_t}{G_s}(t_0, s_0) \tag{4.12}$$

dir. (4.11) in  $t$  ye göre tekrar türevi alınırsa

$$G_{tt}(t, s) + G_{ts}(t, s) \frac{ds}{dt} + G_{st}(t, s) \frac{ds}{dt} + G_s(t, s) \frac{d^2s}{dt^2} + G_{ss}(t, s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$$

ve

$$\begin{aligned} G_{tt}(t, \varphi(t)) + G_{ts}(t, \varphi(t)) \varphi'(t) + G_{st}(t, \varphi(t)) \varphi'(t) + G_s(t, \varphi(t)) \varphi''(t) + \\ G_{ss}(t, \varphi(t)) \varphi'(t)^2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\varphi''(t) = -\frac{G_{tt}(t, \varphi(t)) + G_{ts}(t, \varphi(t))\varphi'(t) + G_{st}(t, \varphi(t))\varphi'(t) + G_{ss}(t, \varphi(t))(\varphi'(t))^2}{G_s(t, \varphi(t))}$$

dir. Bu eşitlikte  $\varphi'(t_0) = -\frac{G_t}{G_s}(t_0, s_0)$  yerine yazılırsa

$$\varphi''(t) = -\frac{G_{tt}(t, \varphi(t)) + G_{ts}(t, \varphi(t))\left(-\frac{G_t}{G_s}\right) + G_{st}(t, \varphi(t))\left(-\frac{G_t}{G_s}\right) + G_{ss}(t, \varphi(t))\left(+\frac{G_t}{G_s}\right)^2}{G_s(t, \varphi(t))}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$s_0'' = \varphi''(t_0) = -\frac{G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}}{G_s^3}(t_0, s_0) \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.8) denkleminde (4.12) ve (4.13) yerine konular ve  $-G_s^3(t_0, s_0)$  ile çarpılırsa  $s_0$  göre  $\varphi$  nin katsayıları

$$\begin{aligned} a(s_0, \lambda) &= \left(2\frac{G_t^2}{G_s^2} + s_0 \frac{G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}}{G_s^3}\right) \left(-G_s^3\right) \\ a(s_0, \lambda) &= -(G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss})s_0 - 2G_t^2 G_s \end{aligned} \quad (4.14)$$

ve

$$\begin{aligned} b(s_0, \lambda) &= \left(2s_0 \frac{G_t}{G_s} - t_0 s_0 \frac{G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}}{G_s^3} - 2t_0 \frac{G_t^2}{G_s^2}\right) \left(-G_s^3\right) \\ b(s_0, \lambda) &= (G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss})t_0 s_0 + 2s_0 G_t G_s^2 + 2t_0 G_t^2 G_s \end{aligned} \quad (4.15)$$

ve

$$\begin{aligned} c(s_0, \lambda) &= \left(\frac{G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}}{G_s^3}\right) \left(-G_s^3\right) \\ c(s_0, \lambda) &= -(G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Son olarak

$$d(s_0, \lambda) = 2\left(\frac{-G_t}{G_s}\right) + t_0\left(-\frac{G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}}{G_s^3}\right)$$

$$d(s_0, \lambda) = \left(G_s^2 G_{tt} - 2G_t G_s G_{ts} + G_t^2 G_{ss}\right)t_0 + 2G_t G_s^2 \quad (4.17)$$

dir.

$F$  polinomu  $G$  yi böler gerek ve yeter şart  $Res_s(F, G) = 0$  veya

$$0 = G(t, \varphi(t)) = G\left(t, \frac{a(s_0, \lambda)t + b(s_0, \lambda)}{c(s_0, \lambda)t + d(s_0, \lambda)}\right) \quad (4.18)$$

özdeşliğinin sağlanır. Paydanın yok edilmesi katsayıları  $P_i(s_0, \lambda)$  polinomları olan bir  $P(t)$  polinomu elde edilir. O zaman  $F$  polinomu  $G$  yi böler gerek ve yeter şart  $P_i$  polinomunlarını aynı anda sıfır yapan  $s_0 \in \mathbb{R}$  ve  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  vardır. Yani  $\langle P_i \rangle_i \subset \mathbb{R}[s, \lambda]$  ideali tarafından üretilen reel varyete üzerinde  $(s_0, \lambda)$  noktası vardır. Gröbner bazını kullanarak bu idealden  $s$  değişkenini yok edilirse  $\langle \Lambda \rangle \subset \mathbb{R}[\lambda]$  asli ideali bulunur [22].

Delaysıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 21** Kabul edelimki  $\lambda$  oranlı bir  $f$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  ve  $t = t_0$  için  $lc_s(G_\lambda(t, s)) \neq 0$  olsun. O zaman  $\lambda \in S_0 \cup S_1 \cup S_2$  dir.

Bu yüzden  $\lambda_0$  oranlı bir  $f$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  dir gerek ve yeter şart

i)  $\lambda_0 \in S_1 \cup S_2$  ve  $G_{\lambda_0}$  Möbius benzeri çarpına sahiptir.

veya

ii)  $\lambda_0 \in S_0$  ve  $\lambda_0$  yerine koyduktan sonra  $P_i$  polinomları bir ortak  $s_0$  reel köküne sahiptir.

Bu iki duruma da karşılık gelen Möbius dönüşümünü (3.8) denklemini sağlar [22].

### Örnek 3

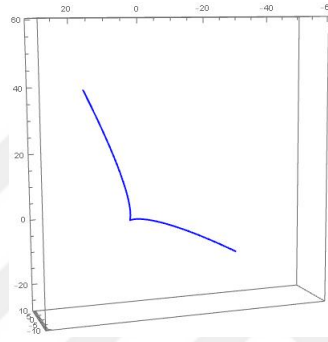
$$\alpha_k(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + k^2t, \frac{2}{3}t^3 + kt^2, \frac{2}{3}t^3 - kt^2\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile tanımlı  $\{M_k\}_k$  eğri ailesini ele alalım. Bu eğriler  $-1 \leq k \leq 1$  parametreleri için  $M_{-1}, M_0, M_1$  eğrileri Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de gösterilmiştir.

(4.1) denkleminde  $k = -1$  için

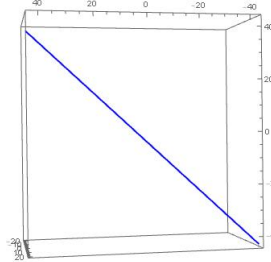
$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{(1+3t^2)^2}, \quad \tau_{\alpha_1} = -\frac{2}{(1+3t^2)^2}$$

dir. Buradan  $C_1 = -2$  ve  $D_1 = (1+3t^2)^2$  dir.



Şekil 4.2.  $M_{-1}$  eğrisi

$k = 0$  için  $M_0$  bir doğru belirtir.



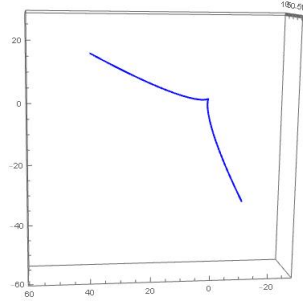
Şekil 4.3.  $M_0$  eğrisi

$k = 1$  için

$$\kappa_{\alpha_2} = \frac{2\sqrt{2}}{(1+3t^2)^2}, \quad \tau_{\alpha_2} = \frac{2}{(1+3t^2)^2}$$

dir. Buradan  $C_2 = 2$  ve  $D_2 = (1+3t^2)^2$  dir.

$M_0$  doğrusu hariç her  $M_k$  eğrisi  $\mu_k$  oranı sabiti  $|\mu_k| = \sqrt{2}$  sağlayan bir kübik helis eğrisidir.



**Şekil 4.4.**  $M_1$  eğrisi

Dolayısıyla (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 T_\lambda(t, s) &= C_1(t)D_2(s) - \lambda C_2(s)D_1(t) \\
 &= (-2)(1 + 3t^2)^2 - 2\lambda(1 + 3t^2)^2 \\
 &= -2 - 12s^2 - 18s^4 - 2\lambda - 12\lambda t^2 - 18\lambda t^4 \\
 &= -2(9\lambda t^4 + 9s^4 + 6\lambda t^2 + 6s^2 + \lambda + 1)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$M_1, M_{-1}$  eğrilerinin benzerliğini belirlemek için  $G_\lambda$  hesaplanırsa,

$$G_\lambda(t, s) = 9\lambda t^4 + 9s^4 + 6\lambda t^2 + 6s^2 + \lambda + 1$$

olarak elde edilir.  $t_0 = 1$  için,

$$G_\lambda(t_0, s) = 9s^4 + 6s^2 + 16\lambda + 1$$

dir. Burada  $L(\lambda) = 9$  başkatsayı sabitidir. O zaman  $S_1 = \emptyset$  olur. Dolayısıyla

$$\frac{\partial G_\lambda}{\partial s}(t_0, s) = 36s^3 + 12s = 0$$

için ya  $s = 0$  ya da  $s = -\frac{1}{3}$  olur. Buradan  $\lambda = -\frac{1}{16}$  veya  $\lambda = 0$  dir.  $\lambda = 0$  sağlanmadığından  $\lambda = -\frac{1}{16}$  alınır.  $S_2 = \{-\frac{1}{16}\}$  olduğundan dolayı

$$s_0' = \frac{-4\lambda}{s_0(3s_0^2 + 1)}, \quad s_0'' = \frac{-2\lambda(45s_0^6 + 30s_0^4 + 72\lambda s_0^2 + 5s_0^2 + 8\lambda)}{s_0^3(3s_0^2 + 1)^3}$$

elde edilir. Ortak bir çarpanla çarpıldıktan sonra

$$\begin{aligned} a(s_0, \lambda) &= -s_0(45s_0^6 + 30s_0^4 + 120\lambda s_0^2 + 5s_0^2 + 24\lambda), \\ b(s_0, \lambda) &= 3s_0(27s_0^6 + 18s_0^4 + 40\lambda s_0^2 + 3s_0^2 + 8\lambda), \\ c(s_0, \lambda) &= -(45s_0^6 + 30s_0^4 + 72\lambda s_0^2 + 5s_0^2 + 8\lambda), \\ d(s_0, \lambda) &= (81s_0^6 + 54s_0^4 + 72\lambda s_0^2 + 9s_0^2 + 8\lambda) \end{aligned} \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) denlemini (4.18) denkleminin yerine konur ve paydalar eşitlenirse, katsayıları  $P_i(s_0, \lambda)$  polinomları olan  $P(t)$  polinomunu elde edilir.  $\langle P_i \rangle_i$  idealinden  $s_0$  değişkeni yok edilirse  $\Lambda(\lambda) = \lambda^5(\lambda + 1)$  ve  $S_0 = \{-1\}$  üreticini elde edilir. O halde

$$G_{-1}(t, s) = 3(s - t)(s + t)(3s^2 + 3t^2 + 2)$$

dir.  $\varphi_1(t) = t$  ve  $\varphi_2(t) = -t$  Möbiüs dönüşümleri, (3.8) denklemini sağlar. Dolayısıyla Önerme 8 den  $\lambda = -\frac{1}{16} \in S_2$  denemeye gerek yoktur.  $C_1$  ve  $C_2$  yukarıdaki iki benzerlik altında benzerdir [22].

#### 4.4. Benzerliklerin Bulunması

$f(x) = \lambda_0 Qx + b$  benzerliği için  $f(C_1) = C_2$  eşitliğinin sağladığını varsayalım. O zaman ilişkili  $\varphi$  Möbiüs dönüşümü ve  $\lambda_0$  oranı bilindiğinden amacımız  $Q$  ve  $b$  yi bulmaktır. Teorem 9 dan

$$\lambda_0 Q \alpha_1(t) + b = \alpha_2(\varphi(t)) \quad (4.20)$$

yazabiliriz.  $Q$  yu belirledikten sonra,  $t = 0$  da (4.20) denklemindeki değeri hesaplanarak  $b$  bulunur. Genellikle birşey kaybetmeksizin,  $\alpha_1(t)$  nin  $t = 0$  da iyi tanımlı olduğu ve  $\alpha_1'(0), \alpha_1''(0)$  ın sıfırdan farklı ve paralel olmadığını kabul edelim. Bu  $\kappa_{\alpha_1}(0)$  eğriliğinin iyi tanımlı ve sıfırdan farklı olmasına denktir, bu da  $t \rightarrow t + h$  tipindeki yeni bir parametrizasyonla her zaman başarılabilir.

$Q$  yu belirlemek için,  $\varphi$  Möbius dönüşümü  $d \neq 0$  veya  $d = 0$  olma durumlarının ayrı ayrı ele alınması gerekmektedir. Eğer  $d = 0$  ise, o zaman  $\Delta = -bc \neq 0$  ve  $c \neq 0$  anlamına gelir. O halde (4.20) denklemi

$$\lambda_0 Q \alpha_1(t) + b = \alpha_2(\varphi(t)) = \alpha_2\left(\frac{\tilde{a}}{t} + \tilde{b}\right), \quad \tilde{a} = \frac{b}{c}, \quad \tilde{b} = \frac{a}{c}$$

elde edilir.

$$\tilde{\alpha}_2(t) = \alpha_2\left(\frac{1}{t}\right)$$

alınırsa

$$\lambda_0 Q \alpha_1(t) + b = \tilde{\alpha}_2(\tilde{a}t + \tilde{b}) \tag{4.21}$$

bulunur.

$t = 0$  noktasında (4.21) eşitliği hesaplanırsa

$$\lambda_0 Q \alpha_1(0) + b = \tilde{\alpha}_2(\tilde{b}) \tag{4.22}$$

dir.

(4.21) denkleminin birinci ve ikinci türevi alınır,  $t = 0$  noktasında hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \lambda_0 Q \alpha_1'(0) &= \tilde{\alpha}_2'(\tilde{b}) \tilde{a} \\ \lambda_0 Q \alpha_1''(0) &= \tilde{\alpha}_2''(\tilde{b}) \tilde{a}^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur.

(4.23) denklemindeki vektörlerin vektörel çarpımı yapılır ve (3.10) kullanırsa

$$\lambda_0^2 Q(\alpha_1'(0) \times \alpha_1''(0)) = \tilde{\alpha}_2'(\tilde{b}) \times \tilde{\alpha}_2''(\tilde{b}) \tilde{a}^3 \quad (4.24)$$

dir.

(4.23) ve (4.24) eşitliklerinden

$$B = [\lambda_0 \alpha_1'(0) , \lambda_0 \alpha_1''(0) , \lambda_0^2 \alpha_1'(0) \times \alpha_1''(0)] \quad (4.25)$$

olsun. Buradan

$$QB = C[\tilde{\alpha}_2'(\tilde{b})\tilde{a} , \tilde{\alpha}_2''(\tilde{b})\tilde{a}^2 , \tilde{\alpha}_2'(\tilde{b}) \times \tilde{\alpha}_2''(\tilde{b})\tilde{a}^3] \quad (4.26)$$

ve  $Q = CB^{-1}$  dir.

Şimdi  $d \neq 0$  durumunu ele alalım. (4.20) denkleminin birinci ve ikinci türevini alınırsa

$$\lambda_0 Q \alpha_1'(t) = \alpha_2'(\varphi(t)) \varphi'(t) = \alpha_2' \left( \frac{at+b}{ct+d} \right) \frac{\Delta}{(ct+d)^2} \quad (4.27)$$

ve

$$\lambda_0 Q \alpha_1''(t) = \alpha_2''(\varphi(t)) (\varphi'(t))^2 + \alpha_2'(\varphi(t)) \varphi''(t) \quad (4.28)$$

$$= \alpha_2'' \left( \frac{at+b}{ct+d} \right) \frac{\Delta^2}{(ct+d)^4} - 2\alpha_2' \left( \frac{at+b}{ct+d} \right) \frac{c\Delta}{(ct+d)^3}$$

elde edilir.

Burada  $\Delta = ad - bc$  dir.  $t = 0$  noktasında (4.27) ve (4.28) hesaplanırsa

$$\lambda_0 Q \alpha_1'(0) = \alpha_2' \left( \frac{b}{d} \right) \frac{\Delta}{d^2} \quad (4.29)$$



ve

$$\lambda_0 Q \alpha_1''(0) = \alpha_2''\left(\frac{b}{d}\right) \frac{\Delta^2}{d^4} - 2\alpha_2'\left(\frac{b}{d}\right) \frac{c\Delta}{d^3} \quad (4.30)$$

bulunur.

$M = Q$  ortogonal matrisi ile (3.10) denklemini ve vektörel çarpımı kullanılarak

$$\lambda_0^2 Q \left( \alpha_1'(0) \times \alpha_1''(0) \right) = \left( \frac{\Delta^3}{d^6} \right) \left( \alpha_2'\left(\frac{b}{d}\right) \times \alpha_2''\left(\frac{b}{d}\right) \right) \quad (4.31)$$

dir.

$\lambda_0$  ve  $\varphi$  bilindiğinden  $Q$  matrisi (4.29) ve (4.31) denklemleri ile verilen  $\alpha_1'(0), \alpha_1''(0)$  ve  $\alpha_1'(0) \times \alpha_1''(0)$  hesaplanabilir [22].

**Örnek 4** Örnek 2 den  $C_1$  ve  $C_2$  crunode eğrileri için  $\lambda_0 = 2$  ve  $\varphi(t) = t - 1$  karşılık gelen benzerliği bulalım. O zaman  $\varphi$  nin katsayıları  $a = 1, b = -1, c = 0, d = 1$  dir ve dolayısıyla  $\Delta = 1$  bulunur. (4.29) ve (4.30) eşitliklerinden

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{16}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad Q = CB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

(4.20) eşitliğinde  $t = 0$  yerine yazılırsa

$$b = x_2(-1) - 2Qx_1(0) = [0, 0, 2]^T$$

elde edilir [22].

## KAYNAKLAR

- [1]. Alcázar, J. G. ; Hermoso, C. ; Muntingh, G., 2018, Similarity detection of rational space curve, *Journal of Symbolic Computation*, Vol 85, 4-24.
- [2]. Alcázar, J. G., 2012, Computing the shapes arising in a family of space rational curves depending on one parameter, *Comput. Aided Geom. Des.* 29 (6), 315-331.
- [3]. Alcázar, J. G. , Hermoso, C. ; Muntingh, G., 2014b, Detecting symmetries of rational plane and space curves, *Comput. Aided Geom. Des.* 31 (3-4), 199-209.
- [4]. Alcázar, J. G. ; Hermoso, C. ; Muntingh, G., 2014a, Detecting similarity of rational plane curves, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol 269, 1-13.
- [5]. Ankerst, M. , K. , Gabi, K. ; Hans-Peter, S. , T., 1999, 3D shape histograms for similarity search and classification in spatial databases. In 6th International Symposium on Spatial Databases (SSD 99). Hong Kong, July 1999. In *Advances in Spatial Databases. Lecture Notes in Computer Science*, Vol 1651, Springer, 207-226.
- [6]. Bustos, B. ; Keim, D. A.; Saupe, D. ; Schreck, T. ; Vrani'c, Dejan V., 2005, Feature-based similarity search in 3D object databases, *ACM Comput. Surv.* 37 (4), 345-387.
- [7]. Cartan, É., 1935, La méthode de repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisées, Exposés de géométrie 5, *Actualités scientifiques et industrielles, No. 194. Hermann et Cie, éditeurs, Paris.*
- [8]. Chen, D. Y. ; Tian, X. P. ; Shen, Y. T. ; Ouhyoung, M., 2003, *Comput. Graph. Forum* 22 (3), 223-232.
- [9]. Hacısalihoğlu, H. H., 1998, *Diferensiyel Geometri 1. cilt (3, Baskı)*, Nobel Yayınları, Ankara.


- [10]. Hacısalihoğlu, H. H., 1980, *Dönüşümler ve Geometriler*, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fak., Mat. Yayınları.
- [11]. Hillega, M. ; Shinagawa, Y. ; Kohmura, T. ; Kunii, T. L., 2001, Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3D shapes, *In Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. SIGGRAPH 01. ACM*, 203-212.
- [12]. Karger, A. ; Novak, J., 1985, Space kinematics and Lie groups, *Gordon and Breach Science Publishers*.
- [13]. Sabuncuođlu, A., 2014, *Lineer Cebir* (5, Baskı), Nobel Yayınları.
- [14]. Sundar, H. ; Silver, D. ; Gagvani, N. ; Dickinson, S., 2003, Skeleton based shape matching and retrieval. In: Proceedings of Shape Modeling International, *IEEE Computer Society*, 130-139 .
- [15]. Alcázar, J. G. ; Hermoso, C. ; Muntingh, G., 2015, Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion. *Comput. Aided Geom. Des.* 33, 51-65.
- [16]. Coxeter, Harold S.M., 1969, *Introduction to Geometry, 2nd ed. John Wiley - Sons, Inc., New York, London, Sydney*.
- [17]. do Carmo, Manfredo P., 1976, *Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. Translated from the Portuguese*.
- [18]. Farouki, Rida T., 2008, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, Geometry and Computing, Vol.1 Springer, Berlin*.
- [19]. Sengüler-Çiftçi, F., 2014, Geometry of rational helices and its applications, *Available at <http://arxiv.org/abs/1306.3689>*.
- [20]. Sendra, J. R.; Winkler, F.; Pérez-Díaz, S., 2008, Rational Algebraic Curves, *Algorithms and Computation in Mathematics, Vol.22, Springer, Berlin*.
- [21]. Winkler, F., 1996, Polynomial Algorithms in Computer Algebra, *Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, Vienna*.

- [22]. Alcázar, J. G.; Hermoso, C.; Muntingh, G., 2018, *Journal of Symbolic Computation*, *Similarity Detection of Rational Space Curves*, 4-24.
- [23]. Cox, D.; Little, J.; Oshea D., 2005, *Using Algebraic Geometry second Edition*, Springer-Verlag, New York.



## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	HATİCE ERBAŞ
Doğum Yeri	KEÇİÖREN
Doğum Tarihi	28.03.1992
Uyruğu	T.C
Telefon	05426296248
E-Posta Adresi	haticerbas06@gmail.com
Web Adresi	-



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
Fakülte	FEN EDEBİYAT
Bölüm	MATEMATİK
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	...
Enstitü	...
Anabilim Dalı	...
Programı	...
Mezuniyet Yılı	...

Doktora	
Üniversite	...
Enstitü	...
Anabilim Dalı	...
Programı	...
Mezuniyet Yılı	...

Makale ve Bildiriler	