T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI L_P UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Muhammed Sibgatullah KİP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI L_P UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Muhammed Sibgatullah KİP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR / 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhammed Sibgatullah KİP

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmamda Schrödinger operatörünün doğurduğu Marcinkiewicz integral operatörlerinin Ağırlıklı L_p uzaylarındaki sınırlılığını inceledim ve elde ettiğim bilgileri, sonuçları sizlere sunmaktayım.
Bu yüksek lisans tezimi hazırlarken geçirdiğim bu süreçte benden yardımlarını esirgemeyerek çalışmamın araştırma aşamasında önemli bilgi ve katkılarıyla, düşünsel ve teknik yardımlarıyla destek olan ve güler yüzüyle motive edip bu süreci daha verimli, daha öğretici hale getiren değerli hocam **Sayın Prof. Dr. Ali AKBULUT** 'a teşekkürü bir borç bilirim.

Kasım, 2020 Muhammed Sibgatullah KİP

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Reel uzay
$\|\alpha\|$	: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$
α	: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
Ω	: $\mathbb{R}^n$ de açık küme
$suppf$	: f fonksiyonunun desteği
A_p	: Muckenhoupt sınıfı
$B(x,r)$	: x merkezli, r yarıçaplı yuvar
$\|B(x,r)\|$	: $B(x,r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$\\| \cdot \\|_{L_p}$	: Lebesgue normu
$L_p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayı
$L_p(\omega)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayları
$WL_p(\mathbb{R}^n)$	: Zayıf Lebesgue uzayı
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: f fonksiyonu lokal integrallenebilir
$\mathcal{M}$	: Hardy-Littlewood Maksimal operatörü
T	: Singüler integral operatörü
I_α	: Kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)
μ_Ω	: Marcinkiewicz integral operatörü
$\Delta + V$	: Schrödinger operatörü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI L_P UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Muhammed Sibgatullah KİP

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali AKBULUT

Bu yüksek lisans tezinde, Schrödinger operatörünün doğurduğu Marcinkiewicz integral operatörlerinin Ağırlıklı L_p uzaylarındaki sınırlılığını incelenecektir. Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bu çalışma ile ilgili fonksiyon uzayları ve integral operatörleri hakkında bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Ağırlıklı L_p uzaylarının tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Schrödinger operatörünün doğurduğu Marcinkiewicz integral operatörlerinin tanımı ve bazı özellikleri ile Ağırlıklı L_p uzaylarındaki sınırlılığına yer verilmiştir.

Son bölümde de Schrödinger tipli operatörlerin ağırlıklı bazı norm eşitsizlikleri verilmiştir.

Kasım 2020, 70 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı L_p uzayları, Schrödinger operatörleri, Marcinkiewicz integral operatörleri.

ABSTRACT

MSc THESIS

THE BOUNDEDNESS OF MARCINKIEWICZ INTEGRAL OPERATORS ASSOCIATED WITH SCHRÖDINGER OPERATOR ON WEIGHTED L_P SPACES

Muhammed Sibgatullah KİP

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Ali AKBULUT

In this thesis, we will investigate the boundedness of Marcinkiewicz integral operators associated with Schrödinger operators on weighted L_p spaces.This thesis is consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts about function spaces and operators related to this study are given.

In the third chapter, about the weighted L_p spaces and some basic properties of the operators are given.

In the fourth chapter, the boundedness of Marcinkiewicz integral operators associated with Schrödinger operators on weighted L_p spaces are given.

In finally chapter, some weighted norm inequalities for Schrödinger type operators are given.

November 2020, 70 Pages.

Keywords: Weighted L_p spaces, Schrödinger operators, Marcinkiewicz integral operators.

1. GİRİŞ

Harmonik analizde fonksiyon uzaylarının modern teorisi son yüzyılda S.L. Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Mazya, L.D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E.M. Stein, O.V. Besov, P.I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmektedir. Bu teorinin harmonik Analizin problemlerinin çözülmesinde olduğu kadar kısmi türevli denklemler teorisi ile fizik, istatistik, finans, mühendislik ve ayrıca diğer disiplinlerde de bir çok uygulamaları vardır.

Harmonik analizde bu operatörlerin ağırlıklı eşitsizliklerini çalışmak önemli bir yere sahip olup, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılıklar R. Coifman, C. Fefferman [8], B. Muckenhoupt ve R. Wheeden [25] tarafından elde edilmiştir. 1994 yılında V. Guliyev ve E. Nakai tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singuler operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarınaki sınırlılığı araştırılmıştır [14].

Bu yüksek lisans tezinin genel amacı Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Schrödinger operatörünün doğurduğu Marcinkiewicz integral operatörlerinin sınırlığını incelemektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusunda geçen bazı temel tanım ve teoremlere kısaca yer verilmiştir.

2.1. Normlu Uzaylar

Bu kısımda normlu uzayların tez konusu ile ilgili tanımları, özellikleri ve teoremleri verilmiştir.

Tanım 2.1. [Norm, Normlu Vektör Uzayları] X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to R, \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in$ **K** için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde **norm** adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir **normlu vektör uzayları** denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir [1].

Tanım 2.2. [Denk Norm] X, **K** cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.
$\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk norm** denir [28].

Tanım 2.3. [Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık] (x_n), (X, $\|\cdot\|$) normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir ve

$$x_n \to x_0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsaklık** denir [28].

Tanım 2.4. [Çap, sınırlı küme, sınırlı dizi] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A) := \sup \Big\{ \|x - y\| : x \in A,\ y \in A \Big\} \geq 0$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. Eğer bir $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine **sınırlı küme** denir. X içinde (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesine (x_n) **sınırlı dizisi** denir [1].

Tanım 2.5. [Cauchy Dizisi] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun.
$\forall \epsilon > 0$ için $m, n \geq n_\epsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ sayısına bağlı bir n_ϵ doğal sayısı varsa o zaman (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir [28].

Önerme 2.6. Cauchy dizisi ile ilgili aşağıdaki önermeler doğrudur .

(a) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

(b) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

(c) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır.

(d) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir [1].

Tanım 2.7. [Banach Uzayları] Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach uzay** denir [1].

Tanım 2.8. [Üstten sınırlı, üst sınır, supremum] $\forall n \in N$ için $x_n \leq$ M olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisi **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir ve $\sup x_n$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.9. [Alttan sınırlı, alt sınır, infimum] $\forall n \in N$ için $x_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir ve $\inf x_n$ ile gösterilir [3].

Ayrıca infimum ve supremum özellikleri aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 2.10. A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = a$ ve $\sup A = b$ olmak üzere a ve b sayılarının özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır .
(i) $\forall x \in A$ için $x \geq a$ dır. Çünkü a alt sınırlıdır.
(ii) $\forall \delta > 0$ için

$$x < a + \delta \tag{2.1}$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır. Çünkü a alt sınırlarının en büyüğüdür. Eğer A'nın hiçbir elemanı için (2.1) bağıntısı sağlanmasaydı A kümesinin bütün x elemanları için

$$x \geq a + \delta$$

olacaktı. Bu ise $a + \delta$ sayısının bir alt sınır olduğunu ifade eder. Halbuki bu alt sınır, en büyük alt sınır olarak kabul edilen a sayısından daha büyüktür. Bu mümkün değildir.
(iii) $\forall x \in A$ için $x \leq b$ dir. Dolayısıyla b bir üst sınırdır.
(iv) $\forall \delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır [2].

Tanım 2.11. [Artan Fonksiyon, Azalmayan Fonksiyon] $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanların için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan fonksiyon** denir. Artan fonksiyon $\uparrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa da **azalmayan fonksiyon** denir [2].

Tanım 2.12. [Azalan Fonksiyon, Artmayan Fonksiyon] $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanların için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **azalan fonksiyon** denir. Azalan fonksiyon $\downarrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa da **artmayan fonksiyon** denir [2].

Tanım 2.13. [f^* Azalan Yeniden Düzenleme] f fonksiyonunun $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty)$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) := \inf \left\{ \lambda \geq 0 \ : \ \alpha_f(\lambda) \leq t \right\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

2.2. Operatör Testi

Bu kısımda operatör kavramlarına ve bu operatörlerin tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

Tanım 2.14. [Operatör] X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin her elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D den Y ye bir **operatör** veya

dönüşüm denir. A operatörünün x e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ yi, $A(x) \in Y$ ye götürdüğünü belirtmek için, $A : D \to Y$ gösterimi kullanır. Bu durumda D ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A) = \Big\{ y \in Y : y = A(x),\ x \in D(A) \Big\}$$

kümesine A operatörünün **değer (veya görüntü)** kümesi denir [1].

Tanım 2.15. [Lineer Operatör] X ve Y aynı $\mathbf{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve
$A : X \to Y$ operatörü verilsin.
Eğer $D(A)$, X in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne **lineer operatör** denir [1].

Tanım 2.16. [Birim Operatörü] $A : X \to X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için

$$A(x) = x$$

ise A operatörüne **birim operatörü** veya **özdeşlik operatörü** denir. I_X veya I ile gösterilir [1].

Tanım 2.17. [Sınırlılık] X ve Y iki normlu uzay ve $D\left(A\right) \subset X$ olmak üzere
$T : D\left(A\right) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D\left(A\right)$ için

$$\left\| Ax \right\| \leq C \left\| x \right\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa, A operatörüne **sınırlıdır** denir. Bir A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in D(A)\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.18. [Sürekli] X ve Y iki normlu uzay ve $T : D(T) \to Y$ operatörü verilsin.

(a) $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyle ki $\forall x \in D(T),\ \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall(x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

şartları sağlanıyor ise bu durumda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir. Eğer $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$ nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir [1].

Teorem 2.19. Xve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır [1].

Tanım 2.20. [Gömme] X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \Re(I) = X,$$

$\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmak üzere

$$I : X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir **gömme operatörü** denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli(veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|\mathrm{I}\|_{X \hookrightarrow Y} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda oluyorsa,

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir [26].

2.3. Ölçü Teorisi

Bu kısımda Ölçü Teorisi ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.21. [Cebir ve $\sigma-$Cebir] X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A} \subset P(X)$ olsun.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A},\ E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebirdir** denir.
Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ**-cebir** denir [27].

Tanım 2.22. [Borel Cebiri] Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ 'nın ürettiği (veya doğurduğu) σ-cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine **Borel cebiri** denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir [27].

Tanım 2.23. [Ölçülebilir Uzay, Ölçü Uzayı, Ölçülebilir Küme] X, boştan farklı bir küme, $\mathcal{A} \subset P(X)$ de X in bir $\sigma-$cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ de $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de bir **ölçü uzayı** denir. $\mathcal{A}$ daki her bir eleman da **ölçülebilir küme** olarak adlandırılır [27].

Tanım 2.24. [Ölçü, Sonlu Ölçü, σ-sonlu, Olasılık Ölçüsü] $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyorsa μ ye **sonlu ölçü** denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne σ**-sonlu** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir [27].

Tanım 2.25. [Dış Ölçü] X boştan farklı bir küme olsun. $\mathrm{P}(X)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall E \in \mathrm{P}(X),\ \mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X, \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathrm{P}(X) \Rightarrow \mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir [27].

Tanım 2.26. [Lebesgue Dış Ölçüsü, Lebesgue Ölçülebilir] $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

$n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i \ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alınırsa, bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad \big(\textbf{Caratheodary Ölçümü}\big)$$

ise E kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir [27].

Tanım 2.27. [Dağılım Fonksiyonu] (X, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$(veya $\mathbb{C}$) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu\Bigg(\Big\{x \in X : \ |f(x)| > \lambda\Big\}\Bigg)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir [5].

Tanım 2.28. [Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrengement Invariant) Uzayları] $\rho(X, \Sigma, \mu)$, σ-sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in M_0^+(X, \mu)$ olmak üzere

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına **yeniden düzenleme altında değişmeyen (rearrengement invariant) uzayları** denir [5].

Tanım 2.29. [hemen hemen her yerde (h.h.y)] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.
Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir [3].

Tanım 2.30. [Homojen Fonksiyon] λ ve α iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α**. dereceden homojen fonksiyon** denir [26].

Tanım 2.31. [Karakteristik Fonksiyon] $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 \ , \ x \in A \\ 0 \ , \ x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.32. [Örtü, Açık Örtü, Alt Örtü, Sonlu Alt Örtü] Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup\limits_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir **örtüsüdür** denir. Bu $\bigcup\limits_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup\limits_i$, A kümesinin **açık örtüsüdür** denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün **alt örtüsü** adı verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye **sonlu alt örtü** denir [1].

Tanım 2.33. [Kompaktlık] X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine **kompakttır** denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [1].

Tanım 2.34. [Destek] (X, ϱ) bir metrik uzayı ve $f : X \to [0, \infty]$ olsun. $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışına f fonksiyonunun **desteği** denir ve

$$\text{supp}\, f = \left\{ \overline{x \in X : \ f(x) \neq 0} \right\}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f **kompakt destekli fonksiyon** adını alır [26].

Teorem 2.35. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter şart s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır [26].

2.4. Banach Fonksiyon Uzayları

Bu kısımda Banach fonksiyon uzaylarının tanım ve bazı temel özellikleri verildi.

Tanım 2.36. [Banach Fonksiyon Normu] (R, μ) bir ölçü uzayı, $M^+, f : R \to [0, \infty]$ tanımlı $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : M^+ \to [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. M^+ daki f, g, f_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$ fonksiyonları, $\forall a \geq 0$ sabiti ve $\mu-$ ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için

(P_1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow$ h.h.y. $f = 0$,

(P_2) $\rho(af) = a\rho(f)$,

(P_3) $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$,

(P_4) h.h.y. $0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$,

(P_5) h.h.y. $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$,

(P_6) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$,

(P_7) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$, (burada C_E, $0 < C_E < \infty$, E ve ρ ya bağlı fakat f ye bağlı değildir)

özellikleri sağlanıyorsa ρ ya **Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu)** denir [5].

Tanım 2.37. [Banach Fonksiyon Uzayları] (R, μ) bir ölçü uzayı, M de R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde M deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına **Banach fonksiyon uzayı** denir.
$\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

şeklinde ifade edilir [5].

Teorem 2.38. ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|.\|_X$ Tanım 2.37. deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzaydır. S de R üzerinde tanımlı μ-basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X \hookrightarrow M_0 \tag{2.2}$$

içermeleri sağlanır.

Özel olarak, X te $f_n \to f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n in bir alt dizisi h.h.y. f ye μ-noktasal yakınsaktır [5].

Lemma 2.39. $X = X(\rho)$ bir Banach fonksiyon uzayı ve $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ olsun.
(i) (Fatou Özelliği)

$0 \leq f_n \uparrow f, \quad (\mu$ -h.h.y.) olmak üzere $\qquad$ a) $f \notin X \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_X \uparrow \infty$

b) $f \in X \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$.

(ii) (Fatou Lemması)

$$f_n \to f \ (\mu\text{-h.h.y.}) \ \text{ve} \ \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty \ \Rightarrow \ \|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$$

sağlanır [5].

Teorem 2.40. X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ X te $f \in X$ e yakınsaktır ve

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

gerçeklenir. Özel olarak X tamdır [5].

Tanım 2.41. [Mutlak Sürekli Norm] X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi ve f, X uzayında bir fonksiyon olsun.
Eğer h.h.y. $E_n \to \varnothing$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\|f\chi_{E_n}\| \to 0$$

oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna **mutlak sürekli norma sahiptir** denir [5].

3. $L_p(\omega)$ UZAYLARI (AĞIRLIKLI LEBESGUE UZAYLARI)

Tezin bu bölümünde harmonik analizde önemli yerleri olan Lebesgue ve ağırlıklı Lebesgue uzaylarının konumuz ile ilgili olan tanım, teorem, lemma ve özelliklerine yer verilmiştir. Sırayla bakacak olursak;

3.1. L_p Uzayları (Lebesgue Uzayları)

Bu bölümde fonksiyonel analizde, Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını olan Lebesgue uzayının tanımı ve özellikleri incelendi. Bunun yanı sıra gerekli olan bazı teoremlere yer verildi.

(X, μ) bir ölçü uzayı ve $M, f : X \to \mathbb{C}$ tanımlı μ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$L_p(X) := \left\{ f \in M : \int\limits_X |f|^p d\mu < 1 \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir [26].

Teorem 3.1. [Hölder eşitsizliği] $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$ ve $g \in L_{p'}$ olsun. Bu durumda $f, g \in L_1$ olur ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır [26].

Teorem 3.2. [Minkowski eşitsizliği] $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L_p$ olsun. Bu durumda $(f+g) \in L_p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır [26].

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği göz önüne alındığında L_p uzaylarının $1 \leq p < \infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f \in L_p$ olmak üzere $\|f\|_{L_p}$ normu altında;

$(L1)$ $\|f\|_{L_p} \geq 0$

$(L2)$ $\|f\|_{L_p} = 0 \Rightarrow$ h.h.y $f(x) = 0$

$(L3)$ $\|\alpha f\|_{L_p} = |\alpha| \|f\|_{L_p}, \alpha \in \mathbb{R}$

$(L4)$ $\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$

şartları sağlandığından $1 \leq p < \infty$ için L_p bir normlu uzaydır.

Teorem 3.3. [Young eşitsizliği] $1 < p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a, b > 0$ ve $p' = \dfrac{p}{p-1}$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır [26].

Tanım 3.4. [L_p uzaylarında yakınsaklık] $f_n,\ f \in L_p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_{L_p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L_p} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L_p de yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0$$

olmasıdır [26].

Teorem 3.5. $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. L_p uzayları

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır [27].

Teorem 3.6. [Fubini] f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dx \right) dy$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\, dy \right) dx$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g\left(y\right)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) H. h. $y \in \mathbb{R}^m$, $f\left(\cdot, y\right) \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$

(b) H. h. $x \in \mathbb{R}^n$, $f\left(x, \cdot\right) \in L_1\left(\mathbb{R}^m\right)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\left(\cdot, y\right) dy \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(x, \cdot\right) dx \in L_1\left(\mathbb{R}^m\right)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir [26].

Teorem 3.7. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p uzaylarındaki basit fonksiyonların kümesi L_p uzaylarında yoğundur [27].

Tanım 3.8. [Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık] $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall\, f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\|Tf\right\|_{L_q} \leq A \left\|f\right\|_{L_p}$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall\, \alpha > 0$ için

$$\mu\left\{x :\ |Tf(x)| > \alpha\right\} \leq \left(\frac{A \left\|f\right\|_{L_p}}{\alpha}\right)^q, \qquad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir [29].

Tanım 3.9. [Lokal İntegrallenebilme] f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal(veya yerel) integrallenebilir** adı verilir ve

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \int_K |f|\, d\mu \ < \ \infty,\ K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ < \ \infty,\ K \ \subset \ \mathbb{R}^n,\ K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [27].

Teorem 3.10. $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

gömme koşulları elde edilir [27].

Şimdi, $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzaylarının $[L_p(\Omega)]^*$ dual uzayını ifade eden tanımı aşağıda verelim.

Tanım 3.11. [Dual Uzayı] $g \in L_{p'}$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ için

$$\Phi_g(f) := \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in [L_p(\Omega)]^*$$

ve

$$\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$$

olarak tanımlanır [26].

Lemma 3.12. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin bir boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p > 1$ ve $M > 0$ olmak üzere öyle keyfi bir $f \in L_p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L_1(\Omega)$$

ve

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq M\|f\|_p$$

şeklindedir. Bu durumda $g \in L_{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \leq M$ biçimde olur [27].

Tanım 3.13. [Maksimal Operatör] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\mathcal{M}f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} |B(x,\ r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

biçiminde tanımlanır [32].

Teorem 3.14. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $\mathcal{M}f$ maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall\, \alpha > 0$ için

$$m\Big\{x : \mathcal{M}f(x) > y\Big\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür [32].

Tanım 3.15. [Riesz Potensiyeli] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere,
I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır [32].

Tanım 3.16. [Singüler İntegral]

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \text{supp} f$$

Calderón-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür ve
$L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca

$$K(x,y) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;:\; x = y\Big\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \;\; x \neq y$ için

$$|K(x,y)| \leq c_1 |x-y|^{-n}.$$

(ii) $2\,|x-x'| \leq |x-y|$ için

$$|K(x,\ y)-K(x',\ y)|+|K(y,\ x)-K(y,\ x')| \leq c_1 \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

Önerme 3.17. T Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1,1)$ tiplidir [11].

Teorem 3.18. [Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi] (X,μ) ve (Y,v) ölçü uzayı $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T $L_{p_0}(X,\mu)+L_{p_1}(X,\mu)$ 'den Y 'ye zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli alt lineer operatör olsun. O halde $p_0<p<p_1$ için T kuvvetli (p,p) tiplidir [10].

Teorem 3.19. T Calderón-Zygmund operatörü olsun. Bu durumda p ye bağlı olmayan $c>0$ sabiti için

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; c\left(\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2-p}\right)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<2,$$

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; c\left(p+\frac{p}{p-2}\right)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \qquad p>2$$

gerçeklenir [23].

Not: $T \equiv T_0$ herhangi bir kompakt destekli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \notin suppf$ için

$$|Tf(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \tag{3.4}$$

özelliğini sağlayan altlineer bir operatör olsun burada c_0, f ve x 'den bağımsızdır.

Benzer şekilde kabul edelim ki T_α herhangi bir kompakt destekli, $\alpha \in (0,n)$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $x \notin suppf$ için

$$|T_\alpha f(x)| \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

özelliğini sağlayan bir altlineer bir operatör olsun c_0, f ve x 'den bağımsız olduğu durumda bazı $\alpha \in (0,n)$ için eşitsizliği sağlar [16].

3.2. $L_p(\omega)$ Uzayları (Ağırlıklı Lebesgue Uzayları)

3.2.1. A_p Muckenhoupt sınıfı

Eğer $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\begin{aligned} [\omega]_{A_p} &= \sup_B [\omega]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty \end{aligned} \tag{3.5}$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p **Muckenhoupt sınıfındandır** denir [24].

Burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p + 1/p'$ biçimindedir. Burada Hölder eşitsizliği kullanılırsa bütün B yuvarları için

$$[\omega]_{A_p(B)}^{1/p} = |B|^{-1}\|w\|_{L_1(B)}^{1/p}\,\|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B)} \geq 1$$

olur. $p = 1$ iken, hemen hemen her x için

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \tag{3.6}$$

olacak şekilde $C > 1$ varsa $\omega \in A_1$ 'dir ve (3.6) eşitsizliğini sağlayan C sayısının infimumu $[\omega]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B dx = \frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{1/p}\omega(x)^{-1/p}dx \leq [\omega]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(3.5) eşitsizliğinde $p \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \leq C\exp\left(\frac{1}{|B}\int_B \log\omega(x)dx\right)$$

elde edilir ve eşitsizlik sağlandığında $\omega \in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p = \infty$ iken $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$ ile tanımlanır. A_∞ için verilen bu iki tanım eşdeğerdir (bkz. [15]).

A_p sınıfı 1972 yılında Muckenhoupt [24] tarafından ağırlıklı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ uzayı üzerinde tanımlı Hardy-Littlewood maximal operatörünün sınırlılıkları ile ilgili çalışmalarında tanımlanmış ve $\varepsilon > 0$ için

$$A_p \subset A_{p-\varepsilon}$$

olduğu gösterilmiştir.

$\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ Muckenhoupt ağırlıklarının en önemli örneklerinden biri $-n < \alpha < n(p-1)$ iken $\omega(x) = |x|^\alpha$ fonksiyonudur. Eğer $-n < \alpha \leq 0$ olarak alınırsa $\omega \in A_1$ elde edilir. $0 < \delta < 1$ ise bu durumda $\omega(x) = |x|^{-n(1-\delta)} \in A_1$ ve $\omega(x) = |x|^{-n(p-1)(1-\delta)} \in A_p$ elde edilir.

Eğer ω bir ağırlık ve $1/\omega$ lokal integrallenebilir ise bu durumda $1/\omega$ da ayrıca bir ağırlıktır. Verilen bir ω ağırlığı ve bir E ölçülebilir kümesi için

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$$

notasyonunu E kümesinin ω-ölçüsünü gösterir. Ağırlıklar lokal integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından dolayı bir yuvardaki bütün E kümeleri için $\omega(E) < \infty$ olur.

Lemma 3.20. Eğer $\omega \in A_p$ ise bu durumda $w \in A_{p-\varepsilon}$ sağlanır ve

$$[\omega]_{A_{p-\varepsilon}} \leq C[\omega]_{A_p}$$

olacak şekilde bir C sayısı vardır ve burada $\varepsilon \sim [\omega]_{A_p}^{-\frac{1}{p-1}}$ şeklindedir [9].

Önerme 3.21.

(1) $1 \leq p < q$ olmak üzere $A_p \subset A_q$ sağlanır.

(2) $1 < p < \infty$ olmak üzere $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$ sağlanır.

(3) $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olması için gerek ve yeter şart $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$ olmasıdır.

(4) $w_0, w_1 \in A_1$ ise bu durumda $\omega_0\omega_1^{1-p} \in A_p$ olur.

(5) $\omega \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda $\omega^{1+\epsilon} \in A_p$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır [14].

Tanım 3.22. Verilen bir w ağırlık fonksiyonu için B herhangi bir yuvar olmak üzere eğer $\omega(2B) \leq C\omega(B)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa w **doubling şartını sağlar** denir ve $\omega \in \Delta_2$ şeklinde yazılır [9].

Lemma 3.23. Eğer $\omega \in \Delta_2$ ise bu durumda

$$\omega(2Q) \geq C\omega(Q)$$

olacak şekilde bir $C > 1$ sabiti vardır [7].

Lemma 3.24. $1 \leq p < \infty, \omega \in A_p$ olsun. Bu durumda

(1) $\omega \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$\omega(\lambda B) \leq \lambda^{np}[\omega]_{A_p}\omega(B)$$

elde edilir.

(2) Eğer $\omega \in A_\infty$ ise bu durumda $\omega \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$\omega(\lambda B) \leq 2^{\lambda^n}[\omega]_{A_\infty}^{\lambda^n}\omega(B)$$

elde edilir.

(3)

$$Mf(x) \leq [\omega]_{A_p}^{1/p} M_\omega\left(|f|^p\right)(x)^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır ve burada

$$M_\omega f(x) = \sup_{B \ni x} \omega(B)^{-1} \int_B |f(y)|\,\omega(y)dy$$

biçimindedir.

(4) Her B yuvarı ve bir $S \subset B$ ölçülebilir kümesi için

$$\frac{\omega(S)}{\omega(B)} \leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^\delta \tag{3.7}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\delta > 0$ sayısı vardır [16].

ω ağırlık fonksiyonu, (3.7) eşitsizliğini sağlamak üzere, Muckenhoupt [24], Coifman ve Fefferman [8] tarafından $\omega \in A_\infty$ olduğu gösterilmiştir.

Uyarı 3.25. Eğer $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ ve $1/q = 1/p - \alpha/n$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) Eğer $p > 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{p,q} \iff \omega^q \in A_{q\frac{n-\alpha}{n}} \iff \omega^q \in A_{1+\frac{q}{p'}} \iff \omega^{-p'} \in A_{1+\frac{p'}{q}}$ olur.

(2) Eğer $p > 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{p,q} \iff \omega^q \in A_q$ ve $\omega^p \in A_p$ olur.

(3) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{1,q} \iff \omega^q \in A_1$ olur.

Tanım 3.26. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu ise, $L_p(\omega) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, \omega)$ ile

$$\|f\|_{L_p(\omega)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n,\omega)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3.8}$$

normuna sahip bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu ağırlıklı Lebesgue uzayını gösteririz. Benzer şekilde, $p = 1$ olduğunda $L_\infty(\omega) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L_\infty(\omega)} := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n,\omega)} = \text{ess sup} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\omega(x) f(x)|, \tag{3.9}$$

ile tanımlanır [27].

4. SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU MARCINKIEWICZ OPERATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI L_p UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde, Harmonik Analizin integral operatörlerinin fonksiyon uzaylarında sınırlılıklarının bazı uygulamaları olarak Riesz Potansiyeli, Littlewood-Paley operatörü, Marcinkiewicz operatörü, Bochner-Riesz operatörü, $V^{\gamma}(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^{\gamma}\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$ Schrödinger tipli operatörlerine ve bazı analitik yarı gruplarının kesirli kuvvetlerine yer verilmiştir.

Teorem 4.1. $1<p<\infty,\ \ \Omega\subset\mathbb{R}^n,\ \ d=$çap$(\Omega)=\sup\Big\{|x-y|\ ;\ x,y\in\Omega\Big\}$, $0<\alpha<\dfrac{n}{p},\quad \dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\Omega)}\leq \overline{c}(p,\alpha,n)\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\overline{c}(p,\alpha,n)$ pozitif sabiti

$$\overline{c}(p,\alpha,n)=c\frac{n}{\alpha[n-\alpha p]}(p')^{1/q}$$

şeklindedir ve $c>0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir [23].

Lemma 4.2. $1\leq p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, T_α, (3.4) koşulunu sağlayan altlineer operatör olsun ve $p>1$ için T_α, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına, $p=1$ için T_α, $L_1(\mathbb{R}^n)$ $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olsun. Bu durumda $p>1$ için $\forall B(x_0,r)$ yuvarı ve $f\in L_p^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|T_\alpha f\|_{L_q(B(x_0,r))}\lesssim r^{\frac{n}{q}}\int_{2r}^{\infty}t^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}dt,$$

ayrıca $p=1$ için $\forall\ B(x_0,r)$ yuvarı ve $f\in L_p^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ olması durumunda

$$\|T_\alpha f\|_{WL_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt \tag{4.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir [16].

4.1. Littlewood-Paley Operatörü

Littlewood-Paley fonksiyonları klasik harmonik analizde önemli rol oynamaktadır. Örneğin, Stein ([31],[32],[33]) tarafından Fatou tipinin tanjantsal olmayan yakınsaklığı ve Riesz dönüşümlerinin ve çarpanlarının sınırlılıkları çalışılmıştır.

Şimdi Littlewood-Paley operatörünün tanımını verelim.

Tanım 4.3. $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0 \tag{4.2}$$

sağlansın. g_ψ, genelleştirilmiş Littlewood-Paley g fonksiyonu $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ ve $F_t(f) = \psi_t * f$ olmak üzere

$$g_\psi(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Guliyev [16] tarafından Littlewood-Paley operatörü için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.4. $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, (4.2) koşulunu ve

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x+h)-\psi(x)|dx \leq C|h|^{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

özelliklerini sağlasın. Burada C ve $\alpha > 0$ sabitleri x ve h dan bağımsızdır. Bu durumda $g_{\psi},\ 1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

H uzayı,

$$H = \Big\{ h : \|h\| = \Big(\int_0^{\infty} |h(t)|^2 dt/t^2)^{1/2} \Big\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzay olsun. Böylece her bir sabit $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t(f)(x)[0,\infty)$ 'den H 'ye bir dönüşüm olarak ele alınırsa

$$g_{\psi}(f)(x) = \|F_t(f)(x)\|$$

olduğu açıktır. Dolaysıyla Minkowski eşitsizliği ve ψ üzerindeki koşullardan

$$g_{\psi}(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^{\infty} |\psi_t(x-y)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{-2n}}{(1+|x-y|/t)^{2(n+1)}} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy$$

elde edilir.

4.2. Bochner-Riesz Operatörü

$$B_t^\delta(f)\hat{}(\xi) = (1 - t^2|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi), \quad \delta > (n-1)/2$$

ve

$$B_t^\delta(x) = t^{-n} B^\delta(x/t), \quad t > 0$$

olsun. Maksimal Bochner-Riesz operatörü

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \sup_{t>0} |B_t^\delta(f)(x)|$$

şeklinde tanımlanır.(bkz [20],[21])

H uzayı,

$$H = \{h : \|h\| = \sup_{t>0} |h(t)| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzay olsun. Bu durumda

$$B_{\delta,*}(f)(x) = \|B_t^\delta(f)(x)\|$$

olduğu açıktır.

B_r^δ üzerindeki koşuldan (bkz [13]),

$$|B_r^\delta(x-y)| \leq Cr^{-n}(1+|x-y|/r)^{-(\delta+(n+1)/2)}$$

$$= C\left(\frac{r}{r+|x-y|}\right)^{\delta-(n-1)/2} \frac{1}{(r+|x-y|)^n}$$

$$\leq |x-y|^{-n}$$

elde edilir ve

$$B_{\delta,*}(f)(x) \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy.$$

Böylece $B_{\delta,*}$, (3.4) koşulunu sağlar. Dolaysıyla $B_{\delta,*}$, $p>1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

4.3. $V^\gamma(-\Delta+V)^{-\beta}$ ve $V^\gamma\nabla(-\Delta+V)^{-\beta}$ Schrödinger Tipli Operatörler

$\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan V potansiyeli bazı $q_1 \geq n$ için $B_\infty(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına ait olmak üzere $-\Delta+V$ Schrödinger operatorü olsun.

$\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan V potansiyeli bazı $q_1 \geq n$ için $B_\infty(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına ait nagatif olmayan potansiyeller ile $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $-\Delta+V$ Schrödinger operatörlerinin incelenmesi Feferman[12], Shen [30], Torchinsky [36] gibi birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Shen [30] 'de $q \geq n/2$ için $B_q(\mathbb{R}^n)$ ters Hölder sınıfına ait olan negatif olamayan V potansiyeli için $-\Delta+V$ Schrödinger operatörünü inceledi ve $(-\Delta+V)^{i\gamma}$, $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$, $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ ve $\nabla(-\Delta+V)^{-1}$ operatörlerin L_p uzayında sınırlılığını ispatladı.

Kurata [18] ve Sugano [34], Shen [30] 'in sonuçlarını düzgün eliptik operatörler için genelleştirdi. Ayrıca Sugano [34] 'da Shein'in bazı sonuçlarını

$0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1$ için

$$V^{\gamma}(-\Delta + V)^{-\beta},$$

ve

$0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 \ \ ve \ \ \beta - \gamma \geq \frac{1}{2}$ için

$$V^{\gamma}\nabla(-\Delta + V)^{-\beta}$$

operatörlerine genişletti. Daha sonra, Lu [22] ve Li [19] tarafından Schrödinger operatörleri daha geniş kümelerde incelenmişdir.

Negatif olmayan V potansiyeli belirli bir ters Hölder sınıfını ait olmak üzere Schrödinger diferansiyel operatorü

$$L = -\Delta + V(x) \text{ için } \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

olsun.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $V(x)$ negatif olmayan bir lokal L_q integral fonksiyonu, B_q $(1 < q \leq \infty)$ ait olması durumunda $C > 0$ bir sabit olacak şekilde ters Hölder eşitsizliği

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V^q(y)dy\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)dy\right) \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < r < \infty$ için $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı bir yuvardır.

Özellikle, negatif olmayan V bir potansiyel ise bu durumda $V \in B\infty$. Ayrıca şunu belitelim ki B_q sınıfı için,bazı $q > 1$ için $V \in B_q$ ise bu durumda (4.5) eşitsizliğindeki C sabiti ve yalnızca $n \in \mathbb{N}^n$ olmak üzere bir $\epsilon > 0$ vardır yani $V \in B_{q+\epsilon}$. Bu bölümde $0 \neq V \in B_{n/2}$ olduğunu kabul edilecektir.

$B = B(x,r)$ ve $\lambda > 0$ olsun, λ-dilate topu için aynı x merkezli ve λr yarıçaplı yuvar λB dir. Benzer şekilde,x merkezli ve r kenar uzunluğu kordinat eksenlerine paralel olmak üzere

$Q(x,r)$ küpü için $\lambda Q(x,r) = Q(x,\lambda r)$ dir. E kümesi Lebesgue ölçülebilir bir küme ve ω bir ağırlık olmak üzere $|E|$, E nin Lebesgue ölçüsü ve

$$\omega(E) = \int_E \omega dx.$$

$0 < p < 1$ için,

$$\|f\|L_p(\omega) = \left(\int \mathbb{R}^n |f(y)|^p \omega(y) dy\right)^{1/p}.$$

$m_V(x)$ fonksiyonu

$$\rho(x) = \frac{1}{m_V(x)} = \sup_{r>0} \left\{ r : \frac{1}{r^{n-2}} \int B(x,r) V(y) dy \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Dolaysıyla, $V \neq 0$ ise $0 < m_V(x) < \infty$. Özellikle, $V = 1$ ise $m_V(x) = 1$ ve $V = |x|^2$ ise $m_V(x) \sim (1 + |x|)$.

Schrödinger tipli operatörlerin bir sınıfı olan

. $\nabla(-\Delta + V)^{-1}\nabla$, $V \in B_n$,

. $\nabla(-\Delta + V)^{-\frac{1}{2}}$, $V \in B_n$,

. $(-\Delta + V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$, $V \in B_n$,

. $(-\Delta + V)^{-i\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}$ ve $V \in B_{n/2}$,

. $\nabla^2(-\Delta + V)^{-1}$, V negatif olmayan bir potansiyel,

operatörleri Calderón-Zygmund operatörleridir [33].

Dolayısıyla, yukarıda belirtilen tüm opratörlerin K çekirdekleri, bazı $\delta_0 > 0$ ve herhangi $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$ için $x, y, h \in \mathbb{R}^n$ ve $|h| < |x-y|/2$ olmak üzere

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_l}{\left(1+|x-y|\left(m_V(x)+m_V(y)\right)\right)^l} \frac{1}{|x-y|^n} \tag{4.6}$$

ve

$$\begin{aligned} &|K(x+h,y)-k(x,y)|+|K(x,y+h)-K(x,y)| \\ &\qquad \leq \frac{C_l}{\left(1+|x-y|\left(m_V(x)+m_V(y)\right)\right)^l} \frac{|h|^{\delta_0}}{|x-y|^{n+\delta_0}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

şartlarını sağlar.

Lemma 4.5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_0}\left(1+|x-y|m_V(x)\right)^{-l_0} &\leq \frac{m_V(x)}{m_V(y)} \\ &\leq C_0\left(1+|x-y|m_V(x)\right)^{l_0/(l_0+1)} \end{aligned}$$

olacak şekilde $l_0 > 0$ ve $C > 0$ sabitleri vardır.

Ayrıca,$|x-y| < C/m_V(x)$ ise $m_V(x) \sim m_V(y)$ [30].

Bundan sonra x_0 merkezli ve r yarıçaplı B bir yuvar, $\theta > 0$ olmak üzere

$$\Psi_\theta(B) = \left(1 + r/\rho\left(x_0\right)\right)^\theta$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyonun anlamı daima bir ağırlıktır. B. Bongioanni, E. Harboure ve O. Salinas [4] tarafından tanımlandığı gibi,

$$\left(\frac{1}{\Psi_\theta(B)|B|}\int_B \omega(y)dy\right)\left(\frac{1}{\Psi_\theta(B)|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)dy\right)^{p-1} \leq C$$

olacak şekilde her $B = B(x, r)$ yuvarı için bir C sabiti varsa, $0 < p < \infty$ için ω, $A_p^{\rho,\theta}$ sınıflarına ait bir ağırlık fonksiyonudur.

Aynı zamanda,

$$M_V^\theta f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\Psi\theta(B)|B|} \int_B |f(y)| dy$$

olmak üzere

$$M_V^\theta(\omega)(x) \leq C\omega(x) \quad \text{h.h. } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{için}$$

her B yuvarı için bir C sabiti varsa, negatif olmayan bir ω fonksiyonu $A_1^{\rho,\theta}$ şartını sağlar.

Çünkü $\Psi_\theta(B) \geq 1$ olması durumunda, A_p, klasik Muckenhoupt ağırlıklarını tanımlamak üzere; $1 \leq p < \infty$ için $A_p \subset A_p^{\rho,\theta}$ olduğu aşikardır, (Bknz. J. García-Cuerva ve J. Rubio de Francia [13] ve B. Muckenhoupt [24]). Bazı durumlarda $1 \leq p < \infty$ için $A_p \subset\subset A_p^{\rho,\theta}$ olduğu görülür. Yani, $\theta > 0$ ve $0 \leq \gamma \leq \theta$ olsun, açıkça görülür ki

$$\omega(x) = (1 + |x|)^{-(n+\gamma)} \notin A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$$

ve $\omega(x)dx$ doubling ölçülebilir değildir, fakat $V = 1$ ve $\Psi_\theta\left(B\left(x_0, r\right)\right) = (1 + r)^\theta$ olması durumunda

$$\omega(x) = (1 + |x|)^{-(n+\gamma)} \in A_1^{\rho,\theta}$$

olduğu ispatlanır.

Sonuç olarak, $p \geq 1$ için $A_p^{\rho,\theta}$ ve M_V^θ tanımlarındaki küplerinin yerine yuvarlar alınabilir, yani

$$\Psi_\theta(B) \leq \Psi_\theta(2B) \leq 2^\theta \Psi_\theta(B).$$

$V = 0$ ve $\theta = 0$ olduğu zaman, $M_0^0 f(x)$, $Mf(x)$ standart Hardy-Littlwood maksimum fonksiyonudur. Kolayca görülür ki

$$|f(x)| \leq M_V^\theta f(x) \leq Mf(x) \qquad \text{h.h. } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{için} \tag{4.8}$$

ve $\theta \geq 0$. Bundan sonra $\theta \geq 0$ bir sabit olmak üzere $\Psi_\theta(B)$ yerine $\Psi(B)$ ve $A_p^{\rho,\theta}$ yerine A_p^ρ olarak kullanılacaktır.

Lemma 4.6. $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

(i) $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ ise $A_{p_1}^\rho \subset A_{p_2}^\rho$.

(ii) $\omega \in A_p^\rho$ için gerek ve yeter şart $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}^\rho$ dır.

(iii) $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p^\rho$ ise bu durumda

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\Psi(Q)|Q|} \int_Q |f(y)|dy \leq C \left(\frac{1}{\omega(5Q)} \int_Q |f|^p \omega(y)dy \right)^{1/p}.$$

Özellikle, herhangi bir ölçülebilir $E \subset Q$ kümesi için $f = \chi_E$ olduğunda,

$$\frac{|E|}{\Psi(Q)|Q|} \leq C \left(\frac{\omega(E)}{\omega(5Q)} \right)^{1/p}$$

[35].

İspat. (i) ve (ii) sonuçları A_p^ρ 'nın tanımından kolayca elde edilir. Şimdi (iii) sonucunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q |f(y)|dy &= \frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q |f(y)|\omega^{\frac{1}{p}}(y)\omega^{-\frac{1}{p}}(y)dy \\
&\leq \left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q |f(y)|^p\omega(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}(y)dy}\right)^{\frac{p-1}{\rho}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q |f(y)|^p\omega(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{1}{\Psi(5Q)|5Q|}\int_{5Q} \omega^{-\frac{1}{p-1}(y)dy}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q |f(y)|^p\omega(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{1}{\Psi(5Q)|5Q|}\int_{5Q} \omega(y)dy\right)^{-\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\omega(5Q)}\int_Q |f|^p\omega(y)dy\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Böylece (iii) ispatlanmıştır. ■

Aşağıdaki lemma Bongioanni, Harboure ve Salinas [4] taraflarından ispatlanmıştır.

Lemma 4.7. $\omega \in A_\infty^\rho = \bigcup_{p\geq 1} A_p^\rho$ ise, bu durumda $r < \rho\left(x_0\right)$, herhangi $Q = Q\left(x_0, r\right) \subset \mathbf{R}^n$ ve herhangi ölçülebilir $E \subset Q$ için

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq \widetilde{C}\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta_1}$$

olacak şekilde $\widetilde{C} > 0$ ve $\delta_1 > 0$ sabitleri vardır [35].

Kesirli integraller için ağırlıklı eşitsizlikleri ifade etmek için $A_{(p,q)}^\rho$ nin özelliklerini verelim. Herhangi bir $Q = Q(x, r)$ küpü için $p' = p/(p-1)$ olmak üzere

$$\left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q [\omega(y)]^q dy\right)^{1/q}\left(\frac{1}{\Psi(Q)|Q|}\int_Q [\omega(y)]^{-p'} dy\right)^{1/p'} \leq C$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa bir ağırlıklı ω fonksiyonu $1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq q < \infty$ için $A^{\rho}_{(p,q)}$ sınıfına aittir.

Dolayısıyla, $1 \leq p < \infty$ için

$$\omega^{1/p} \in A^{\rho}_{(p,p)} \Longleftrightarrow \omega \in A^{\rho}_{p} \quad .$$

$0 \leq \beta < n$ olsun;

$$M_{\beta,\omega}(f)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\omega(5B)^{1-\beta/n}} \int_{B} |f(x)|\omega(x)dx$$

şeklinde tanımlanan $M_{\beta,\omega}$ operatörü ilgili sonuç aşağıdaki lemmada verildi. $\beta = 0$ için $M_{\omega}f(x) = M_{0,\omega}f(x)$.

Lemma 4.8. $0 \leq \beta < n$, $1 \leq p < n/\beta$ ve $1/q = 1/p - \beta/n$ olsun. $\omega \in A^{\rho}_{\infty}$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve her $f \in L_p(\omega)$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\beta,\omega}f(x) > \lambda\}\right) \leq C \left(\frac{\|f\|_{L_p(\omega)}}{\lambda}\right)^{q}.$$

Özellikle, (4.6) eşitsizliği ve Marcinkiewicz' nin interpolasyon teoremi kullanalarak,
$1 < p < n/\beta$ ve $1/q = 1/p - \beta/n$ için

$$\|M_{\beta,\omega}f\|_{L_q(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}$$

eşitsizliği elde edilir [35].

İspat. $\lambda > 0$ olmak üzere $x \in E_{\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\beta,\omega}f(x) > \lambda\}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\omega\left(5B_x\right)^{1-\beta/n}} \int_{B_x} |f(y)|\omega(y)dy > \lambda \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $B_x \ni x$ vardır.
Böylece,$\{B_x\}_{x \in E_{\lambda}}$, E_{λ}'yi kapsar. Vitali Lemma'sından $\cup B_{x_j} \subset E_{\lambda} \subset \bigcup 5B_{x_j}$ ve

$$\omega\left(E_{\lambda}\right) \leq \sum_{j} \omega\left(5B_{x_j}\right) \tag{4.10}$$

olacak şekilde $\{B_{x_j}\}$ ayrık küplerin bir sınıfı vardır. (4.9) eşitsizliğinden,

$$\lambda < \frac{1}{\omega\left(5B_x\right)^{1/q}}\left(\int_{B_x}|f(y)|^p\omega(y)dy\right)^{1/p} \tag{4.11}$$

elde edilir.

(4.10) ve (4.11) eşitsizliklerinden, $p/q \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\omega\left(E_\lambda\right)^{p/q} &\leq \sum_j \omega\left(5B_{xj}\right)^{p/q} \\
&\leq \frac{C}{\lambda^p}\sum_j \int_{B_{x_j}}|f(y)|^p\omega(y)dy \\
&= \frac{C}{\lambda^p}\int_{\cup_j B_{x_j}}|f(y)|^p\omega(y)dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\omega(y)dy
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, lemmanın ispatı tamamlanır. ■

$M_{\beta,V}$ kesirli maksimal operatörü, $0 \leq \beta < n$ olmak üzere

$$M_{\beta,V}f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{\left(\Psi(Q)|Q|\right)^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_Q|f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır. $\beta = 0$ için $M_{0,V}$, M_V ile gösterilir.

Lemma 4.6. nin (iii) şıkkından, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p^\rho$ için

$$M_Vf(x) \leq C\left(M_\omega\left(|f|^p\right)(x)\right)^{1/p}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.12}$$

olduğu görülür.

(4.12) eşitsizliği ve Lemma 4.8. ’dan aşağıdaki sonucu verelim.

Önerme 4.9. $1 < p < \infty$ olsun ve $\omega \in A_p^\rho$ olsun. $p < p_1 < \infty$ ise bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_V f(x)|^{p_1} \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1}\omega(x)dx$$

elde edilir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ olsun. $\omega \in A_p^\rho$ olması için gerek ve yeter şart

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_V f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx \ \ [35].$$

$M_{\beta,V}$ kesirli maksimal operatörü için,

Önerme 4.10. $0 < \beta < n, 1 \leq p < n/\beta$ ve $1/q = 1/p - \beta/n$ olsun. Bu durumda her bir $\omega \in A_{(p,q)}^\rho$ için

$$\left(\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_{\beta,V} f(x) > \lambda\right)\right)} [\omega(y)]^q dy\right)^{1/q} \leq \frac{C}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx\right)^{1/p} [35].$$

İspat. $M > 0$ sabit ve

$$E_{\lambda,M} = \{|x| < M : M_{\beta,V} f(x) > \lambda\}$$

olsun. Her bir $x \in E_{\lambda,M}$ için

$$(\Psi(Q)|Q|)^{\frac{\beta}{n}-1} \int_Q |f(y)|dy > \lambda \tag{4.13}$$

olacak şekilde bir $Q \ni x$ küpü vardır.

$E_{\lambda,M} \subset \cup Q_k$ küplerinin bir dizisi $\{Q_k\}$ seçelim ve $\mathbb{R}^n$ hiç bir noktası sadece n'ye bağlı L deki bu küplerden daha fazla olmasın (Bknz.[25]). Burada belirtelim ki $p/q < 1$; (4.13) eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{E_{\lambda,M}}[\omega(x)]^q dx\right)^{p/q} &\leq \left(\sum_k \int_{Q_k}[\omega(x)]^q dx\right)^{p/q}\\
&\leq \sum_k \left(\int_{Q_k}[\omega(x)]^q dx\right)^{p/q}\\
&\leq C\sum_k \left(\int_{Q_k}[\omega(x)]^q dx\right)^{p/q}\\
&\times \left(\lambda^{-1}\left(\Psi\left(Q_k\right)|Q_k|\right)^{\frac{\beta}{n}-1}\int_{Q_k}|f(x)|dx\right)^{p}\\
&\leq C\sum_k \left(\int_{Q_k}[\omega(x)]^q dx\right)^{p/q}\\
&\times \lambda^{-p}\left(\Psi\left(Q_k\right)|Q_k|\right)^{1-p-p/q}\\
&\times \left(\int_{Q_k}|f(x)\omega(x)|^p dy\right)\\
&\times \left(\int_{Q_k}[\omega(x)]^{-p'} dx\right)^{p/p'}\\
&\leq C\lambda^{-p}\sum_k \int_{Q_k}|f(x)\omega(x)|^p dx\\
&\leq C\lambda^{-p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\omega(x)|^p dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Monoton Yakınsaklık Teoremin'den istenen sonuc elde edilir. ■

Şimdi, $0 < \eta < \infty$ için

$$
M_{\beta,V,\eta}f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{(\Psi(Q))^{\eta}(\Psi(Q)|Q|)^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_Q |f(y)|dy
$$

şeklinde tanımlanan $M_{V,\eta}$ tek değişkenli maksimal operatör için ağırlıklı güçlü (p,q) tipli sonucu verelim.

Teorem 4.11. $0 \leq \beta < n$, $1 < p < n/\beta$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q = 1/p - \beta/n$ olsun. $\omega \in A^{\rho}_{(p,q)}$ ve $\eta \geq (1-\beta/n)p'/q$ ise, bu durumda

$$
\|M_{\beta,V,\eta}f\|_{L_q(\omega^q)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega^p)}
$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [35].

İspat. B. Jawerth [17] tarafından kullanılan tekniği kullanalım. Burada belirtelim ki $p' = p/(p-1)$ olmak üzere

$$\omega \in A^{\rho}_{(p,q)} \Longleftrightarrow \omega^{q} \in A^{\rho}_{1+q/p'}.$$

$\gamma = 1 + q/p'$, $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$ ve $v = \omega^{q}$ olsun.

$$\sigma = v^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

şeklinde tanımlansın.

Dolayısıyla $\sigma \in A^{\rho}_{\gamma'}$. $f \in L_p(\omega^p)$ olsun. Herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$K_k \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^k < M_{\beta,V,\eta} f(x) \leq 2^{k+1}\right\}$$

kompakt bir küme alalım. Bundan dolayı herhangi bir $x \in K_k$ için,

$$2^{k+1} \geq \frac{1}{\left(\Psi\left(Q_x\right)\right)^{\eta}\left(\Psi\left(Q_x\right)|Q_x|\right)^{1-\beta/n}} \int_{Q_x} |f(y)| dy > 2^k$$

olacak şekilde bir küp $Q_x \ni x$ vardır.

K_k yı örten $\{Q_x\}_{x \in K_k}$ den sonlu bir örten $\left\{Q_j^k\right\}$ alalım.

$$E_1^k = Q_1^k \cap K_k$$

ve

$$E_j^k = \left(Q_j^k - \bigcup_{i<j} Q_j^k\right) \cap K_k, \quad j > 1$$

dır.

Bundan dolayı k sabiti için $\left\{E_j^k\right\}$ j de ayrık bir kümedir ve $K_k = \bigcup_j E_j^k$;

$$\begin{aligned}
&\int_{\cup_k K_k} \left|M_{\beta,V,\eta} f\right|^q \omega^q dx \\
&\quad \leq C \sum_{k,j} 2^{kq} v\left(E_j^k\right) \\
&\leq C \sum_{k,j} v\left(E_j^k\right) \left(\frac{1}{\left(\Psi\left(Q_j^k\right)\right)^{\eta} \left(\Psi\left(Q_j^k\right)\left|Q_j^k\right|\right)^{1-\beta/n}} \int_{Q_j^k} |f(y)| dy \right)^q \\
&= C \sum_{k,j} v\left(E_j^k\right) \left(\frac{\sigma\left(5Q_j^k\right)^{1-\beta/n}}{\left(\Psi\left(Q_j^k\right)\right)^{\eta} \left(\Psi\left(Q_j^k\right)\left|Q_j^k\right|\right)^{1-\beta/n}} \right)^q \\
&\times \left(\frac{1}{\sigma\left(5Q_j^k\right)^{1-\beta/n}} \int_{Q_j^k} |f(y)| \sigma^{-1} \sigma dy \right)^q
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ üzerindeki μ ölçüsü

$$\mu : (k,j) \to \mu_{k,j} = v\left(E_j^k\right) \left(\frac{\sigma\left(5Q_j^k\right)^{1-\beta/n}}{\left(\Psi\left(Q_j^k\right)\right)^{\eta} \left(\Psi\left(Q_j^k\right)\left|Q_j^k\right|\right)^{1-\beta/n}} \right)^q$$

şeklinde tanımlansın.

$$\Gamma(\lambda) = \left\{ (k,j) : \left(\frac{1}{\sigma\left(5Q_j^k\right)^{1-\beta/n}} \int_{Q_j^k} |f(y)| \sigma^{-1} \sigma dy \right)^q > \lambda \right\}, \quad \lambda > 0, \tag{4.15}$$

ve

$$G(\lambda) = \bigcup \left\{ Q_j^k : (k,j) \in \Gamma(\lambda) \right\}$$

şeklinde ifade edilsin. $v \in A_\gamma^\rho$ olduğunda

$$\sup_Q \left(\frac{\sigma(5Q)}{\Psi(Q)|Q|} \right)^{\gamma} \left(\frac{\nu(5Q)}{\Psi(Q)|Q|} \right)^{\gamma'} \leq C$$

elde edilir. $\gamma = (1-\beta/n)q$ ve $\eta \geq (1-\beta/n)p'/q$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\mu_{k,j} &= v\left(E_j\right)\left(\frac{\sigma\left(5Q_j^k\right)^{1-\beta/n}}{\left(\Psi\left(Q_j^k\right)\right)^{\eta}\left(\Psi\left(Q_j^k\right)\left|Q_j^k\right|\right)^{1-\beta/n}}\right)^{q} \\
&\leq Cv\left(E_j^k\right)\left(\frac{\left|Q_j^k\right|}{v\left(5Q_j^k\right)}\right)^{\gamma'} \\
&\leq Cv\left(E_j^k\right)\left(\frac{1}{v\left(5Q_j^k\right)}\int_{Q_k^j} v^{-1}vdy\right)^{\gamma'} \\
&\leq Cv\left(E_j^k\right)\inf_{x\in Q^k} M_v\left(v^{-1}x_{Q^k}\right)^{\gamma'(x)} \\
&\leq C\int_{E_j^k} M_v\left(v^{-1}x_{Q^k}\right)^{\gamma'}(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.8. den M_v $L^{\gamma'}(v)$ üzerinde sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mu(\Gamma(\lambda)) &= \sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} \mu_{k,j} \\
&\leq C\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)}\int_{E^k} M_v\left(v^{-1}x_{G(\lambda)}\right)^{\gamma'}(x)v(x)dx \\
&\leq \int_{G(\lambda} M_v\left(v^{-1}xG(\lambda)\right)^{\gamma'}(x)v(x)dx \\
&\leq C\int_{G(\lambda)} v^{1-\gamma'}dx \\
&= \sigma(G(\lambda))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Belirtelim ki,

$$G(\lambda) \subset \left\{x\in\mathbb{R}^n : \left(M_{\beta,\sigma}\left(f\sigma^{-1}\right)\right)^q(x) > \lambda\right\}$$

böylece

$$\sigma(G(\lambda)) \leq \sigma\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left(M_{\beta,\sigma}\left(f\sigma^{-1}\right)\right)^q(x) > \lambda\right\}\right).$$

Bu nedenle, Lemma 4.8. 'dan, (4.14) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(\Gamma(\lambda))d\lambda &\leq C \int_0^\infty \sigma(G(\lambda))d\lambda \\
&\leq C \int_0^\infty \sigma\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(M_{\beta,\sigma}\left(f\sigma^{-1}\right)\right)^q(x) > \lambda\right\}\right) d\lambda \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\beta,\sigma}\left(f\sigma^{-1}\right)\right)^q \sigma dx \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \sigma^{1-p} dx\right)^{q/p} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f\omega|^p dx\right)^{q/p}
\end{aligned}$$

ifadesine eşittir.

Böylece

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\beta,V,\eta} f\right)^q \omega^q dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \omega^p dx\right)^{1/p}.$$

■

5. SCHRÖDINGER TİPLİ OPERATÖRLER İÇİN AĞIRLIKLI NORM EŞİTSİZLİKLERİ

Teorem 5.1. T Schrödinger tipli bir operatör olsun. $1 < p < \infty$ ve l edelim ki $\omega \in A_p^\rho$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)|^p \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx$$

Ayrıca, $\omega \in A_1^\rho$ olması durumunda her $\lambda > 0$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\omega(x)dx$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır [35].

$V \in B_n$ olmak üzere $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$, $(-\Delta+V)^{-1/2}\nabla$ 'nin ağırlıklı sınırlılığı B. Bongioanni, E. Harboure ve O. Salinas [4] tarafından ispatlandı.

Şimdi maksimal Schrödinger tipli operatörlerin bir sonucunu verelim.

Teorem 5.2. $0 < p, \eta < \infty$ ve kabul edelim ki $\omega \in A_\infty^\rho$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|^p \, \omega(x)dx \leq C_{p,\eta} \int_{\mathbb{R}^n} |M_{V,\eta} f(x)|^p \, \omega(x)dx$$

ve

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > \lambda\}\right) \leq C \sup_{\lambda>0} \lambda\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{V,\eta} f(x) > \lambda\}\right).$$

Burada T^* maksimal operatörü

$$T^* f(x) := \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)| = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|y-x|>\epsilon} K(x,y) f(y) dy \right|$$

şeklinde tanımlanmaktadır [35].

Teorem 5.2. ispatında ihtiyaç duyuran lemma aşağıdaki gibidir.

Lemma 5.3. Herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı için $r \geq 1/m_V(x_0)$ ise bu durumda B yuvarı bazı $x \in Q_i = Q(x_i, r_i)$ için

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subset 2\sqrt{n}B$$

ve

$$\frac{r_i}{2} \leq \frac{1}{m_V(x)} \leq 2\sqrt{n}C_0 r_i$$

olacak şekilde $\{Q_i\}_{i=1,\ldots,m}$ sonlu ayrık küpleri parçalanması olabilir. Buradaki C_0 sabiti Lemma 4.5. deki benzer özelliklere sahiptir [35].

İspat. Q , merkezi x_0 ve yarı çapı $2r$ olan bir küp olsun. Dolayısıyla,

$$B \subset Q \subset 2\sqrt{n}B$$

elde edilir. Eğer Lemma 4.5. ve $r \geq 1/m_V(x_0)$ den

$$2r/2 \leq 1/m_V(x)$$

olacak şekilde bir $x \in Q$ noktası varsa, bu durumda

$$1/m_V(x) \leq 2\sqrt{n}C_0 2r$$

olur, böylece Q üzrindeki şartlar sağlanmış olur. Aksi takdirde, Q, r kenar uzunluklu ayrık Q_i küpleri 2^n parçalanır. Çünkü bazı $x \in Q_i$ için Q_i

$$r/2 \leq 1/m_V(x) \leq 2\sqrt{n}C_0 r$$

gerçekler, aksi takdirde Q_i yukardaki gibi sürekli parçalanır. Lemma 4.5.den, her $x \in Q$ için

$$1/m(x) > \left(1 + 2r\sqrt{n}/m_V(x_0)\right)^{-l_0} / \left(C_0 m_V(x_0)\right)$$

Bundan dolayı parçalanmalar sonlu olmalıdır. Böylece bazı $x \in Q_i = Q(x_i, r_i)$ için

$$Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$$

ve

$$r_i/2 \leq 1/m_V(x) \leq 2C_0 r_i$$

olacak şekilde sonlu ayrık Q_i küpleri elde edilir. Sonuç olarak Lemma 5.3. ispatlanmış olur.
■

İspat. (**Teorem 5.2. ispatı**) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > t\}$ kümesi açık bir kümedir. Böylece Ω kümesi Whitney küplerinin; $2\,\mathrm{diam}\,(Q_j) \leq \mathrm{dist}\,(Q_j, \Omega^c) \leq 8\,\mathrm{diam}\,(Q_j)$ ve karşılıklı olarak ayrık, $\Omega = \cup Q_j$ şeklinde ayrık birleşimi gibidir. Üstelik, $\{4Q_j\}$ ailesi daima 4^n sabiti ile ayrıktır ve $4Q_j \subset \Omega$.

Teorem 5.2. ispatlamak için, yalnızca her $t > 0$ ve $a < (1+\beta)^{-1-\frac{1}{p}}$ için

$$\begin{aligned} \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\}\right) \\ \leq a\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > t\}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

$Q_j = Q(x_j, r_j)$ olsun.

$$E_1 = \left\{ j : r_j \leq \frac{1}{m_V(x_j)} \right\}$$

ve

$$E_2 = \left\{ j : r_j > \frac{1}{m_V(x_j)} \right\}$$

tanımlansın.

Lemma 5.3. ispatından, herhangi bir $j \in E_2$ için, Q_j küpü

$$r_{ji}/2 \leq 1/m_V(x) \leq 2\sqrt{n} C_0 r_{ji}$$

ve

$$Q_j = \bigcup_{i=1}^{j_m} Q_j^i$$

olacak şekilde bazı $x \in Q_j^i$ için $\left\{Q_j^i\right\}_{i=1,\ldots,j_m}$ sonlu ayrık küplerin parçalanması olabilir. $\beta > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ verilsin, her $j \in E_1$ için

$$|\{x \in Q_j : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\} | \leq 4^n \alpha | Q_j|$$

ve her $j \in E_2$ için

$$|\left\{x \in Q_j^i : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\right\} | \leq 4^n \alpha | Q_j^i|$$

olacak şekilde bir $\eta = \eta(\beta, \alpha, n)$ olduğu gösterilecek olup burada $Q_j = \bigcup_{i=1}^{j_m} Q_j^i$ şeklindedir.

Buradan ve $q_0 = (20nC_0)^{(l_0+2)\alpha}$ ile Lemma 5.3. kullanılarak, her $j \in E_1$ için

$$\omega\left(\{x \in Q_j : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\}\right) \leq C\alpha^{\delta_1} \omega\left(Q_j\right) \tag{5.2}$$

ve her $j \in E_2$ için

$$\omega\left(\left\{x \in Q_j^i : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\right\}\right) \leq C\alpha^{\delta_1} \omega\left(Q_j^i\right) \tag{5.3}$$

elde edilir, burada $Q_j = \bigcup_{i=1}^{j_m} Q_j^i$ şeklindedir.

Özetle j ve i den

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\}\right) \leq C\alpha^{\delta_1} \omega(\Omega)$$

gerçeklenir.

α, $C\alpha^{\delta_1} < (1+\beta)^{-1-\frac{1}{p}}$ sağlayacak şekilde seçilirse (5.3) eşitsizliği elde edilir.

İlk olarak (5.2) eşitsizliğini gösterelim. Bu amaçla, j sabit ve $Q = Q_j = Q(x_0, r)$ şeklinde alınsın. $\bar{x} \in Q$ olacak şekilde bir nokta kabul edilirse böylece

$$M_{V,\eta} f(\bar{x}) \leq \gamma t.$$

$\operatorname{dist}(z, Q) = \operatorname{dist}(Q, \Omega^c)$ olmak üzere $z \in \Omega^c$ olsun. Böylece

$$Q \subset P = Q\left(\bar{x}, \frac{5}{2} r\right) \subset 4Q \subset Q_z = Q(z, 18r).$$

$f_1 = f \chi_{Q_z}$ ve $f_2 = f - f_1$ olsun. $r < 1/m_V(x_0)\, \Psi(Q_z) \sim 1$ yi gerektirir. $x \in Q$ için

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f_1(x)| &\leq |T_\epsilon (f \chi_P)(x)| + \frac{C}{r^n} \int_{Q_z} |f(y)| dy \\ &\leq |T^* (f \chi_P)(x)| + C M_{V,\eta} f(\bar{x}) \\ &\leq |T^* (f \chi_P)(x)| + C \gamma t. \end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$|T_\epsilon f(x)| \leq |T_\epsilon f_2(x)| + |T^* (f \chi_P)(x)| + C \gamma t$$

Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$|T_\epsilon f_2(x) - T_\epsilon f_2(z)| \leq C M_{V,\eta} f(\bar{x})$$

ve

$$|T_\epsilon f_2(z)| \leq T^* f(z) \leq t$$

elde edilir.

Böylece

$$T^* f(x) \leq T^* (f \chi_P)(x) + (1 + C\gamma) t, \quad x \in Q.$$

γ, $2C\gamma \leq \beta$ sağlayacak şekilde alınsın. Dolayısıyla

$$\{x \in Q_j : T^* f(x) > (1+\beta)t \text{ ve } M_{V,\eta} f(x) \leq \gamma t\} \\ \subset \left\{x \in Q : T^*\left(f\chi_P\right)(x) > \tfrac{\beta}{2} t\right\}$$

elde edilir.

T^* operatörünün zayıf (1,1) tipinden, γ yeterince küçük seçilirse $C\beta^{-1}\gamma \leq \alpha$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in Q : T^*\left(f\chi_P\right)(x) > \frac{\beta}{2} t\right\}\right| &\leq \frac{C}{\beta t} \int_P |f(y)| dy \\ &\leq \frac{C|Q|}{\beta t} \frac{1}{|4Q|} \int_{4Q} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{C|Q|}{\beta t} M_{V,\eta} f(\bar{x}) \\ &\leq \frac{C\gamma|Q|}{\beta} \leq \alpha|Q| \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak (5.3) eşitsizliği gösterelim. (5.2) eşitsizliğindeki gibi$j$,i sabit ve $Q = Q_j^i$, $r = l(Q)$ şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki $\bar{x} \in Q$ böylece $M_{V,\eta} f(\bar{x}) \leq \gamma t$. Burada belirtelim ki

$$Q \subset P = Q\left(\bar{x}, \frac{5}{2} r\right) \subset 4Q \subset Q_{\bar{x}} = Q(\bar{x}, 18r).$$

$f_1 = f\chi Q_{\bar{x}}$ ve $f_2 = f - f_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x \in Q$ için

$$\begin{aligned} |T_\epsilon f_1(x)| &\leq |T_\epsilon\left(f\chi_P\right)(x)| + \frac{C}{r^n} \int_{Q_{\bar{x}}} |f(y)| dy \\ &\leq |T^*\left(f\chi_P\right)(x)| + C M_{V,\eta} f(\bar{x}) \\ &\leq |T^*\left(f\chi_P\right)(x)| + C\gamma t \end{aligned}$$

yani

$$|T_\epsilon f(x)| \leq |T_\epsilon f_2(x)| + |T^*\left(f\chi_P\right)(x)| + C\gamma t$$

Gerekli düzenlemeler ve hesaplamalar yapılarak

$$|T_\epsilon f_2(x)| \leq CM_{V,\eta} f(\bar{x})$$

elde edilir.
Bundan dolayı

$$T^* f(x) \leq T^*\left(f\chi_P\right)(x) + C\gamma t, \quad x \in Q.$$

İspatın geri kalanı (5.2) eşitsizliğinin ispatına benzer şekilde yapılır. Böylece Teorem 5.2. ispatlanmış olur. ■

Schrödinger operatörlerin doğurduğu Riesz dönüşümleri için $n/2 \leq q$ olmak üzere diğer bir $V \in B_q$ sınıfı göz önüne alınsın.

$$T_1 = (-\Delta + V)^{-1} V,$$

$$T_2 = (-\Delta + V)^{-1/2} V^{1/2},$$

$$T_3 = (-\Delta + V)^{-1/2} \nabla$$

olsun.

Teorem 5.4. Kabul edelim ki $V \in B_q$ ve $q \geq n/2$ olsun. Dolayısıyla:

(i) $q' \leq p < \infty$ ve $\omega \in A^{\rho}_{p/q'}$ ise bu durumda

$$\|T_1 f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}.$$

(ii) $(2q)' \leq p < \infty$ ve $\omega \in A^{\rho}_{p/(2q)'}$ ise bu durumda

$$\|T_2 f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}.$$

(iii) $p_0' \leq p < \infty$ ve $\omega \in A^{\rho}_{p/p_0'}$ ise, $1/p_0 = 1/q - 1/n$ ve $n/2 \leq q < n$ olmak üzere bu durumda

$$\|T_3 f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}$$

[35].

$$T_1^* = V(-\Delta + V)^{-1},$$

$$T_2^* = V^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2},$$

$$T_3^* = \nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$$

için aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir.

Sonuç 5.5. Kabul edelim ki $V \in B_q$ ve $q \geq n/2$ olsun. Dolayısıyla:

(i) $1 < p \leq q$ ve $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/q'}$ ise bu durumda

$$\|T_1^* f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}.$$

(ii) $1 < p \leq 2q$ ve $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/(2q)'}$ ise bu durumda

$$\|T_2^* f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}.$$

(iii) $1 < p \leq p_0$ ve $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A^{\rho}_{p'/p_0'}$ ise, $1/p_0 = 1/q - 1/n$ ve $n/2 \leq q < n$ olmak üzere bu durumda

$$\|T_3^* f\|_{L_p(\omega)} \leq C\|f\|_{L_p(\omega)}$$

[35].

T_3, T_3^* operatörlerinin ağırlıklı $L_p(\omega)$ uzayındaki sınırlılıklarının ispatı B. Bongioanni, E. Harboure ve O. Salinas [4] taraflarından ispatlanmıştır. Son olarak $0 < \beta < n$ için

$$\begin{aligned} I_\beta f(x) &= L^{-\beta/2} f(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-tL} f(x) t^{\beta/2-1} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k_\beta(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

Schrödinger operatörlerinin doğurduğu kesirli integraller için bazı ağırlıklı eşitsizlikleri ispatsız olarak verelim.

Lemma 5.6. Eğer $V \in B_q(\mathbb{R}^n)$,$q \geq n/2$ ve $0 < \beta < n$ ve k_β, I_β kesirli integralinin çekirdeği ise bu durumda herhangi bir $l > 0$ için $x, y, h \in \mathbb{R}^n$ ve $|h| < |x-y|/2$ olmak üzere

$$|k_\beta(x,y)| \leq \frac{C_l}{(1 + |x-y|(m_V(x) + m_V(y)))^l} \frac{1}{|x-y|^{n-\beta}}$$

ve

$$|k_\beta(x+h,y) - k_\beta(x,y)| \leq \frac{C_l}{\Big(1 + |x-y|(m_V(x) + m_V(y))\Big)^l} \frac{|h|^{\delta_0}}{|x-y|^{n-\beta+\delta_0}}$$

olacak şekilde bir $C_l > 0$ sabiti vardır öyle ki $\delta_0 = \delta_0(q) > 0$ dır [35].

Teorem 5.7. $0 < \beta < n$,$1 < p < \beta/n$ ve $1/q = 1/p - \beta/n$ olsun. Bu durumda her bir $\omega \in A^\rho_{(p,q)}$ için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\beta f(x)|^q \omega(x)^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Ayrıca kabul edelim ki $\mu = \omega^q \in A^\rho_1$ ve $q = n/(n-\beta)$ olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\beta f(x)| > \lambda\}\right)^{1/q} \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \omega(x) dx$$

olacak şekilde C sabiti vardır [35].

KAYNAKLAR

[1]. Alp, M. and Musayev, B., 2000, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları.

[2]. Balcı, M., 1997, *Analiz I*, Balcı Yayınları, 23.

[3]. Balcı, M., 1998, *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, 93.

[4]. Bongioanni, B., Harboure E. and Salinas O., 2011, *Classes of weights related to Schrödinger operators.*, J. Math. Anal. Appl., 373, 563-579.

[5]. Bennett, C. and Sharpley, R., 1988, *Interpolation of Operators*, Academic Press.

[6]. Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Tararykova, T.V. and Serbetci, A., 2008, *Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Genuine Singular Integral Operators in Local Morrey-Type Spaces*, Doklady Akademii Nauk, 1, 11-14.

[7]. Burenkov, V.I. and Guliyev, V.S., 2009, *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces*, Potential Anal., 30, 3, 211-249.

[8]. Coifman, R. and Fefferman C., 1974, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math., 51, 241-250.

[9]. Duoandikoetxea, J., 2000, *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island, 29.

[10]. Duandikoetxea, J., 2001, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math., AMS, Providence, RI, 1, 29.

[11]. Dyn'kin, E.M., 1991, *Methods of singular integrals: Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory*, Commutative Harmonic Analysis I. Encyclopaedia of Math. Sci., 15, 167-259.

[12]. Fefferman, C., 1983, *The uncertainty principle.*, Bull. Am. Math. Soc., 2, 129-206.

[13]. Garcia-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J.L., 1985, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics.*, North-Holland Mat., Amsterdam, 116.

[14]. Guliyev, V.S., 1994, *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 329pp.

[15]. Guliyev, V.S., 1999, *Integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications*, Function spaces, Casioglu, Baku, 332pp.

[16]. Guliyev V. S., Seymur S. Aliyev, Turhan Karaman and Parviz S. Shukurov, 2011, *Boundedness of Sublinear Operators and Commutators on Generalized Morrey Spaces.*, Integr. Equ. Oper. Integr. Equ. Oper., 71, 327-353.

[17]. Jawerth B. and Sbordone, C., 1986, *Weighted inequalities for maximal operators: Linearization, location and factorixation*, Amer. J. Math., 108, 361-414.

[18]. Kurata, K. and Sugano, S., 2000, *A remark on estimates for uniformly elliptic operators on weighted Lp spaces and Morrey spaces.*, Math. Nachr., 209, 137-150.

[19]. Li, H.Q., 1999, *Estimations Lp des operateurs de Schrödinger sur les groupes nilpotents.*, J. Funct. Anal., 161, 152-218.

[20]. Liu, L.Z. and Lu, S.Z., 2003, *Weighted weak type inequalities for Maksimal commutators of Bochner-Riesz operator.*, Hokkaido Math. J., 32, 85-89.

[21]. Lu, S.Z., 1995, *Four Lectures on Real Hp Spaces.*World Scientific, River Edge.

[22]. Lu, G.Z., 1996, *A Fefferman-Phong type inequality for degenerate vector fields and applications.*, Panamer. Math. J., 6, 37-57.

[23]. Meskhi, A., 2011, *Maksimal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations, 56, 1003-1019.

[24]. Muckenhoupt, B., 1972, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., 165, 207-226.

[25]. Muckenhoupt, B. and Wheeden R., 1974, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 192, 261-273.

[26]. Pick, L., Kufner, A. and John, O., 2012.

[27]. Royden, H. L., 1968, *Real Analysis*, 2nd ed., MacMillan, New York.

[28]. Rudin, W., 1991, *Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics.*, McGraw-Hill, Inc., New York.

[29]. Sadosky, C., 1979, *Interpolation of operators and Singular integrals: An Introduction to Harmonic Analysis*, Marcel Dekker Inc..

[30]. Shen, Z.W., 1995, *Lp estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 45(2), 513-546.

[31]. Stein E. M., 1958, *On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz*, Trans. Amer. Math. Soc., 88, 430-466.

[32]. Stein E.M., 1970, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[33]. Stein E. M., 1993, *Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Harmonic Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[34]. Sugano, S., 1998, *Estimates for the operators V0 with certain nonnegative potentials* V . Tokyo J. Math., 21(2), 441-452.

[35]. Tang, L., 2015, *Weighted norm inequalities for Schrödinger type operators*, Forum Math, 27(2015), 2491-2532.

[36]. Torchinsky A. and Wang S., 1990, *A note on the Marcinkiewicz integral*, Coloq Math., 60, 61, 235-243.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Muhammed Sibgatullah KİP
Doğum Yeri	Van
Doğum Tarihi	1992
Uyruğu	T.C.
Telefon	05418362331
E-Posta Adresi	muhammed.sibgatullah@gmail.com
Web Adresi	...

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2016

Ön Lisans	
Üniversite	Anadolu Üniversitesi
Fakülte	Açıköğretim Fakültesi
Bölüm	İlahiyat Bölümü
Mezuniyet Yılı	2014