T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TANIMLANAN KESİRLİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Esin İLHAN

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR / 2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TANIMLANAN KESİRLİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Esin İLHAN

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

KIRŞEHİR / 2020

Bu çalışma 03.01.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Hasan BULUT
Fırat Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Ercan ÇELİK
Atatürk Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi M. Baki YAĞBASAN
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Eğitim Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esin İLHAN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimimin tüm aşamalarında yardımlarını, ilgisini, sabrını ve desteğini hiç bir zaman esirgemeyen, bu süreçte bana her zaman yol gösteren, çalışmalarıma rehberlik eden ve değerli fikirleriyle katkıda bulunan danışman hocam Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a; tez izleme sürecinde görüş ve önerileriyle tez çalışmamın gelişimine katkı sağlayan Dr. Öğr. Üyesi M. Baki YAĞBASAN ve Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA'ya; her zaman yanımda olan ilk öğretmenlerim annem Emine AKMAN ve babam Mustafa AKMAN'a; canım kardeşim Esra MİLLİ'ye; zorlu lisansüstü eğitim sürecimde her zaman en büyük destekçim eşim Metin İLHAN'a ve mutluluk kaynaklarım çocuklarım Rüya, Batu ve Dila'ya çok teşekkür ederim.

Ocak, 2020 Esin İLHAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$AC[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$AC^n[a,b]$	: $n \in \mathbb{N},\ f:[a,b] \mapsto \mathbb{C}$ ve $D^{n-1}f \in AC[a,b]$
$L_p(a,b),\ (1 \leq p \leq \infty)$	: $[a,b]$ aralığında Lebesque ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$H^1(a,b)$	: Sobolev uzayı
$\Gamma(z)$	: Gama fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$(\lambda)_n$	: Pochhammer sembolü
${}_1F_1(a;c;z)$	: Konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}_2F_1(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z)$	: Genelleştirilmiş hipergometrik fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Tek değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	: İki değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E^\gamma_{\alpha,\beta}(z)$	: Üç değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_p\overset{\beta,\gamma}{M}_q(z)$	: Genelleştirilmiş M-serisi
${}_i\mathcal{M}^{\beta,\gamma}_{p,q}(t)$	: Kısıtlanmış M-serisi
$\left(\mathcal{I}^\alpha_{a+}f\right)(x)$	: Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$\left(\mathcal{D}^\alpha_{a+}f\right)(x)$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
$\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+}f\right)(x)$	: Caputo kesirli türev operatörü
${}^{CF}\mathcal{I}^{\alpha,\beta,\gamma}f(x)$	: Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
${}^{CF}\mathcal{D}^\alpha f(x)$	: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}_*D^{(\alpha)}_{a^+}f(x)$	: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{ABR}_{\ \ a}\mathcal{D}^\alpha_x[f(x)]$	: Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{ABC}_{\ \ a}\mathcal{D}^\alpha_x[f(x)]$	: Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{AB}_{\ a}\mathcal{I}^\alpha_x[f(x)]$	: Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
${}^{GAR}_{\ \ a}\mathcal{D}^{\alpha,\gamma}_x[f(x)]$	: Gomez-Atangana kesirli operatörü
${}^{GAC}_{\ \ a}\mathcal{D}^{\alpha,\gamma}_x[f(x)]$	: Gomez-Atangana kesirli operatörü
$\left[{}^{FR}\mathcal{D}^{\alpha,\beta,\gamma}_{a^+}f\right](x)$	: Konfluent çekirdekli kesirli türev operatürü
$\left[{}^{FC}\mathcal{D}^{\alpha,\beta,\gamma}_{a^+}f\right](x)$	: Konfluent çekirdekli kesirli türev operatürü
$\mathcal{T}_\alpha f(t)$	: Uyumlu kesirli türev operatörü
$\mathcal{D}^\alpha(f)(t)$	: Alternatif kesirli türev operatörü
$\mathcal{D}^\alpha_i(f)(t)$	: Kısıtlanmış alternatif kesirli türev operatörü
$\mathcal{D}^{\alpha;\beta}_M f(t)$	: M-kesirli türev operatörü
${}_i\mathcal{D}^{\alpha;\beta}_M f(t)$	: Kısıtlanmış M-kesirli türev operatörü
${}_i\mathcal{D}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}} f(t)$	: Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev operatörü
$\mathcal{I}^\alpha_{\mathcal{M}} f(t)$	: $\mathcal{M}$-kesirli integral operatörü

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TANIMLANAN KESİRLİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Esin İLHAN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Literatürde yer alan kesirli integral ve türev operatörlerinden büyük bir çoğunluğu çeşitli özel fonksiyonlar yardımıyla ya klasik türev operatöründen yola çıkarak ya da integraller kullanılarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada bu tür operatörlerden daha genel yapıya sahip, iki farklı tür, kesirli integral ve türev operatörleri tanımlanmıştır. İlk tür, çekirdeğinde kuvvet ve konfluent hipergeometrik fonksiyon içeren integraller yardımıyla; ikinci tür ise klasik türev operatöründe M-serisi kullanılarak elde edilmiştir. Tanımlanan tüm operatörlerin sağladıkları özellikler ayrıca incelenmiştir. Son olarak her iki tür kesirli türev operatörünü ayrı ayrı içeren diferensiyel denklemlere örnekler verilmiş ve bu denklemlerin analitik çözümlerine de ulaşılmıştır.

Ocak 2020, 83 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Riemann-Liouville kesirli operatörleri, Caputo kesirli türevi, Caputo-Fabrizio kesirli operatörleri, Atangana-Baleanu kesirli operatörleri, Gomez-Atangana kesirli operatörleri, uyumlu kesirli türev operatörü, alternatif kesirli operatörler, M-serisi, M-kesirli operatörleri.

ABSTRACT

PhD THESIS

FRACTIONAL OPERATORS DEFINED BY GENERALIZED SPECIAL FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Esin İLHAN

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. İ. Onur KIYMAZ

Most of the fractional integral and derivative operators in the literature are defined either from classical derivative operator or from integrals with the help of various special functions. In this study, two different types of fractional integral and derivative operators which have more general structure than the mentioned operators are defined. The first type was obtained by using integrals containing power and confluent hypergeometric function in their kernels, and the second type was obtained by using the M-series in the definition of classical derivative operator. Besides, the properties of all the operators defined here were examined. Finally, examples of differential equations including both types of fractional derivative operators separately, were given and analytical solutions of these equations were also obtained.

January 2020, 83 Pages.

Keywords: Riemann-Liouville fractional operators, Caputo fractional derivative, Caputo-Fabrizio fractional operators, Atangana-Baleanu fractional operators, Gomez-Atangana fractional operators, the conformable fractional derivative, alternative fractional operators, M-fractional operators, M-series.

1. GİRİŞ

1695 yılında L'Hospital Leibniz'e, yayınlarında f fonksiyonunun n. mertebeden türevi için kullandığı $\frac{D^n f(x)}{Dx^n}$ gösterimini kastederek, $n = 1/2$ olması durumunda sonucun ne olacağını sordu. Leibniz bu soruya 30 Eylül 1695 tarihli bir mektupla "bir gün faydalı sonuçların elde edilebileceği açık bir paradoks" yanıtını verdi. Bir çok yazar kesirli analizin başlangıcı olarak bu olayı işaret eder [21,26,35,40,46,52]. Zamanla kesirli analiz, Liouville, Grünwald, Riemann, Euler, Lagrange, Heaviside, Fourier, Abel vb. birçok ünlü matematikçi tarafından sağlam temeller üzerine oturtulmuştur. Bu matematikçilerden çoğu kendi kesirli türev ve integral operatörlerini farklı yaklaşımlarla tanımlamışlardır [21, 26, 35, 36, 40, 41, 43, 46, 52, 56].

Kesirli analiz, matematiğin hızla gelişen bir alanı olup klasik tamsayı üslü türev operatörü yerine keyfi üslü türev ve buna bağlı integral operatörleri kullanır. Tamsayı mertebeli türev ve integrallerin fiziksel ve geometrik anlamları açıktır ve klasik fizikte pek çok problemin tanımlanmasında kullanılır. Kesirli türev ve integrallerin, klasik türev ve integrallerin bir genelleştirmesi olduğundan daha geniş bir anlama sahip olduğu düşünülebilir. Ancak henüz literatürde böyle bir sonuca ulaşan yayına rastlanılmamıştır. Bununla birlikte kesirli analizin ilk uygulaması Abel (1823) tarafından, tautochrone (isochrone - eş zamanlı eğri) problemi için verilen integral denkleminin çözümünde yarı-türev ($n = 1/2$) kullanılarak yapılmıştır [43, 46]. Bu problem ilk olarak Johann Bernoulli (1696) tarafından ortaya atılmıştır ve sürtünmesiz bir ortamda, A noktasından bırakılan bir boncuğun B noktasına en kısa zamanda ulaşması için gereken eğriyi bulmayı amaçlar. Çözüm bir sikloiddir ve Bernoulli tarafından verilmiştir. Bunun dışında kesirli analizin fizik, biyoloji, mühendislik, ekonomi ve finans gibi pek çok farklı alanda uygulamaları bulunmaktadır [24, 52].

Uygulama alanlarının çeşitliliği ve gerçek hayat problemlerinin hepsine uyan tek bir kesirli operatör olmaması literatürde pek çok farklı kesirli türev ve integral tanımı bulunmasına yol açmıştır. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarla farklı türde kesirli türev ve integraller tanımlanmış, özellikleri incelenmiş ve çeşitli problemlere uygulanmıştır [3–6, 10, 16–18, 20, 23, 27, 30–32, 34, 36, 37, 39, 48, 55, 65–68, 72, 73]. Bu çalışmaların bir çoğunda kesirli operatörler özel fonksiyonlar yardımıyla ya genelleştirilmiş ya da yeniden tanımlanmışlardır.

Uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkan fonksiyonların büyük bir çoğunluğu, has olmayan integraller ya da sonsuz seriler yardımıyla tanımlanır. Bu tür fonksiyonlar "özel fonksiyonlar" olarak adlandırılır [1,2,11,25,44,45,53,59,60,63,70,71]. Son yıllarda yapılan çalışmalarla bazı özel fonksiyonların tanım aralıkları genişletilmiş ya da çeşitli şekillerde tanımları genelleştirilmiştir. Bu tür fonksiyonlara genişletilmiş ya da genelleştirilmiş özel fonksiyonlar denir. Ayrıca bu fonksiyonların özellikleri, diğer özel fonksiyonlar ile olan ilişkileri, toplam formülleri, integral gösterimleri ve doğurucu fonksiyon bağıntıları da pek çok makalede incelenmiştir [9,12–17,19,33,38,42,47–49,61,62,69].

Literatürde yer alan yayınlar incelendiğinde, araştırmacıları farklı problemler için farklı kesirli operatörleri seçmekten kurtaracak, daha fazla parametre içererek bir çok probleme uyacak, hem klasik operatörlerle ilişkili hem de kullanımı kolay kesirli operatörlere ihtiyaç duyulduğu gözlemlenmiştir.

Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen ihtiyaçtan hareketle, "Bu tür kesirli operatörler tanımlanabilir mi?" sorusu ele alınmış ve genelleştirilmiş özel fonksiyonlar yardımıyla literatürde yer alan kesirli operatörlerin bir çoğundan daha genel yapıya sahip, iki farklı türde, kesirli türev ve integral operatörleri tanımlanmış, özellikleri araştırılmış ve çeşitli problemlere uygulanarak bulunan sonuçlar incelenmiştir.

Tez, giriş niteliğindeki bu ilk bölüm hariç dört ana ve bir ek bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan özel fonksiyonlar, Riemann-Liouville kesirli operatörleri, Caputo kesirli türevi ve Laplace dönüşümü gibi temel kavramlar tanıtılmış ve bu kavramlara ait belirli özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, orjinal bir çalışma olup çekirdeğinde kuvvet ve konfluent hipergeometrik fonksiyon içeren kesirli operatörler hakkındadır. Yeni tanımlanan bu operatörlerin özellikleri ve uygulama problemlerinden elde edilen sonuçlar da yine bu bölümde yer almaktadır. Bu bölümün büyük bir kısmı tam metin olarak yayınlanmıştır [29]. Aslında bu tür bir integral denklemi daha önce Prabhakar [50, 51] tarafından da çalışılmıştır. Ancak bu çalışmalarda sadece integral denklemlerinin çözümleri, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü kullanılarak araştırılmıştır.

Dördüncü bölüm, tezin orjinal çalışma içeren bir diğer bölümüdür. Burada genelleştirilmiş M-serisi kullanılarak kısıtlanmış kesirli türev ve integral operatörleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu operatörlerin çeşitli özellikleri araştırılmış ve uygulama örnekleri verilmiştir. Bu bölümden elde edilen bulgularla hazırlanan bir makale alan indekslerince taranan uluslararası bir dergide yayına kabul edilmiştir [28].

Ana bölümlerin sonuncusu olan beşinci bölümde ise tez çalışmasından elde edilen bulgular değerlendirilerek ileride yapılacak olan diğer çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Son olarak Ek bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde verilen uygulama örneklerinden elde edilen çözüm fonksiyonlarının değişkenlerine özel değerler verilerek oluşturulan grafikleri yer almaktadır. Grafikler MAPLE 14 programı yardımıyla çizdirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Özel Fonksiyonlar ve Belirli Özellikleri

Bu kısımda, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde sıklıkla kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlara ait tanımlar verilmiş ve bu kavramların temel özelliklerine kısaca değinilmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için kaynakçada verilen [1,2,25,44,45,53,59,60,63,64,70,71] yayınlarına bakılabilir.

Tanım 2.1. Gama fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \ , & (Re(z) > 0) \\ \\ \dfrac{\Gamma(z+1)}{z} \ , & (Re(z) < 0, \ z \neq -1, -2, \ldots) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [63].

Gama fonksiyonu, $n = 0, 1, 2\ldots$ için $\Gamma(n+1) = n!$ özelliğini sağladığından faktoriyel fonksiyonunun bir genellemesidir ve bu sebeple kesirli analizde, faktoriyel fonksiyonunun klasik analizdeki kullanım alanlarına benzer alanlarda kullanılır.

Tanım 2.2. Beta fonksiyonu iki kompleks değişkenli bir fonksiyon olup birinci tür Euler integrali yardımıyla

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (Re(x) > 0, \ Re(y) > 0) \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır [64].

Bu fonksiyonun Gamma fonksiyonuyla olan ilişkisi

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (x, y \neq 0, -1, -2, \ldots) \tag{2.2}$$

eşitliği ile verilir [64]. Bu eşitlikten $B(x,y) = B(y,x)$ simetri özelliğinin sağlandığı da görülür.

Tanım 2.3. Pochhammer Sembolü (ötelenmiş faktoriyel)

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) & , n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca Pochhammer sembolü, gama fonksiyonu yardımıyla

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}, \quad (\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

olacak şekilde de tanımlanabilir [63].

Bu tanımdan yararlanarak Pochhammer sembolünün aşağıdaki eşitlikleri sağladığı gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
(1)_n &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = n! \\
(\lambda)_{m+n} &= \frac{\Gamma(\lambda+m+n)}{\Gamma(\lambda)} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+m+n)}{\Gamma(\lambda+m)} \\
&= (\lambda)_m(\lambda+m)_n \\
(\lambda)_{m+n} &= \frac{\Gamma(\lambda+n+m)}{\Gamma(\lambda)} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\lambda+n+m)}{\Gamma(\lambda+n)} \\
&= (\lambda)_n(\lambda+n)_m
\end{aligned}$$

Pochhammer sembolü ile gama ve beta fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} &= \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\beta-\alpha)} \quad (Re(\beta) > Re(\alpha) > 0) \\
&= \frac{B(\alpha+n, \beta-\alpha)}{B(\alpha, \beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

ilişkisi de mevcuttur [63].

Son olarak negatif tamsayı değerleri için Pochhammer sembolü

$$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

ile verilir [63].

Tanım 2.4. p, q sıfır ya da pozitif bir tamsayı, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{C}$, $(a)_n$ Pochhammer sembolü ve $\beta_j \neq 0, -1, -2, \ldots (j = 1, \ldots, q)$ olmak üzere genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.3}$$

serisi yardımıyla tanımlanır [63].

Bu seri

a) $p \leq q$ ise $|z| < \infty$ için yakınsak,

b) $p = q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsak,

c) $p > q + 1$ ise $z = 0$ hariç tüm z değerleri için ıraksaktır [63].

Ayrıca bu seri, $w = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$ ve $p = q + 1$ olmak üzere

a) $Re(w) > 0$ ise $|z| = 1$ için mutlak yakınsak,

b) $-1 < Re(w) \leq 0$ ise $|z| = 1, \ z \neq 1$ için şartlı yakınsak,

c) $Re(w) \leq -1$ ise $|z| = 1$ için ıraksaktır [63].

Tanım 2.5. $a, b, c \in \mathbb{C}$, $(a)_n$ Pochhammer sembolü ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots (j = 1, \ldots, q)$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < 1) \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. [63].

Bu fonksiyonun, (2.3) genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun $p = 2,\ q = 1$ özel durumu olduğu kolayca görülebilir. Literatürdeki bazı kaynaklarda ${}_2F_1(a, b; c; z)$ gösterimi yerine $F(a, b; c; z)$ gösterimi de kullanılmıştır. Ayrıca (2.4) eşitliğinin sağ tarafındaki seri $|z| = 1$ olmak üzere

a) $Re(c - a - b) > 0$ ise mutlak yakınsak,

b) $-1 < Re(c - a - b) \leq 0$, $z \neq 1$ ise şartlı yakınsak,

c) $Re(c - a - b) \leq -1$ ise ıraksaktır [63].

Tanım 2.6. $a, c \in \mathbb{C}$, $(a)_n$ Pochhammer sembolü ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonu (Kummer fonksiyonu)

$$ {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty) $$

şeklinde tanımlanır [64].

Bu fonksiyonun da, (2.3) genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun $p = 1, q = 1$ özel durumu olduğu görülebilir. Bazı kaynaklarda ${}_1F_1(a; c; z)$ gösterimi yerine $\Phi(a; c; z)$ gösterimi de kullanılır.

Elementer fonksiyonların bazıları genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların özel durumları olarak yazılabilirler. Örneğin:

$$ \begin{aligned} e^z &= {}_1F_1(a; a; z) = {}_0F_0(-; -; z), \\ \ln(1 + z) &= z\, {}_2F_1(1, 1; 2; -z), \\ \cos(z) &= {}_0F_1(-; 1/2; -z^2/4), \\ \sin(z) &= z\, {}_0F_1(-; 3/2; -z^2/4), \\ \arcsin(z) &= z\, {}_2F_1(1/2, 1/2; 3/2; z^2), \\ \arctan(z) &= z\, {}_2F_1(1/2, 1; 3/2; -z^2), \\ (1 - z)^{-a} &= \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{z^n}{n!} = {}_2F_1(a, b; b; z) = {}_1F_0(a; -; z). \end{aligned} $$

Kesirli analizde önemli bir yere sahip olan Mittag-Leffler fonksiyonu, üstel fonksiyonun seri açılımında $k!$ yerine $(\alpha k)!$ alınarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.7. Tek değişkenli Mittag-Leffler Fonksiyonu $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.5}$$

ile verilir [25].

Bu seri $Re(\alpha) > 0$ için tüm kompleks düzlemde yakınsak, $Re(\alpha) < 0$ için ise tüm $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesinde ıraksaktır. Ayrıca $Re(\alpha) = 0$ için yakınsaklık yarıcapı $R = e^{\frac{\pi}{2}|Im(\alpha)|}$ olarak elde edilir.

Mittag-Leffler fonksiyonundaki α parametresinin özel değerleri için

$$\begin{aligned} E_0(\pm z) &= \frac{1}{1 \pm z}, \quad |z| < 1 \\ E_1(\pm z) &= e^{\pm z} \\ E_2(-z^2) &= \cos z \\ E_2(z^2) &= \cosh z \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir [25].

Tanım 2.8. İki değişkenli Mittag-Leffler Fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C};\ Re(\alpha) > 0) \tag{2.6}$$

biçiminde ve üç değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu (Prabhakar fonksiyonu) da

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}; Re(\alpha) > 0,\ Re(\beta) > 0) \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır [25].

Açıkça görülmektedir ki (2.7) fonksiyonunda $\gamma = 1$ alınırsa (2.6), $\gamma = \beta = 1$ alınırsa (2.5) fonksiyonları elde edilir. Yine (2.6) fonksiyonunda $\beta = 1$ alınırsa (2.5) fonksiyonuna ulaşılır.

Ayrıca üç değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu ile konfluent hipergeometrik fonksiyon arasında

$$\begin{aligned}\Gamma(\beta)E^{\gamma}_{1,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)}}\frac{z^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{(\beta)_k}\frac{z^k}{k!} = {}_1F_1(\gamma;\beta;z)\end{aligned}$$

ilişkisi vardır. Mittag-Leffler fonksiyonu ve çeşitli genelleştirmeleriyle ilgili daha ayrıntılı bilgi için [25, 44, 45, 51, 71] kaynaklarına bakılabilir.

M-serisi kavramından ilk olarak 2008 yılında Sharma tarafından yazılan [57] makalede bahsedilmiştir. 2009 yılında ise Sharma ve Jain [58], M-serisi tanımını genelleştirerek, hem genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon hem de Mittag-Leffler fonksiyonlarından daha genel bir yapıya sahip olan genelleştirilmiş M-serisi kavramını vermişlerdir.

Tanım 2.9. $\beta, \gamma, z \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{N},\ Re(\beta) > 0$ ve $c_i \neq 0, -1, -2, \ldots (i = 1, 2, \ldots, q)$ olmak üzere

$${}_p\overset{\beta,\gamma}{M}_q(z) := {}_p\overset{\beta,\gamma}{M}_q\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \\ & & & ; z \\ c_1 & \cdots & c_q \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+\gamma)}$$

şeklinde tanımlanan seriye genelleştirilmiş M-serisi denir [58]. $\gamma = 1$ durumunda klasik M-serisi tanımı elde edilir [57].

Genelleştirilmiş M-serisi

a) $p \leq q$ ise $|z| < \infty$ için yakınsak,

b) $p = q + 1$ ise $|z| < \delta = \beta^{\beta}$ için yakınsak,

c) $p > q + 1$ ise $z = 0$ hariç tüm z değerleri için ıraksaktır.

Ayrıca seri, $p = q+1$ ve $|z| = \delta$ için parametrelerinin durumuna bağlı olarak yakınsayabilir ve a_j $(1, 2, \ldots, p)$ parametrelerinin sıfır ya da negatif tamsayı olması durumunda M-serisi polinoma indirgenir [58].

Yukarıda tanımları verilen diğer özel fonksiyonlar, genelleştirilmiş M-serisinin özel durumlarına karşılık gelirler:

$$
\begin{aligned}
{}_1\overset{1,1}{M}_1\,(1;1;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z,\\
{}_1\overset{\beta,1}{M}_1\,(1;1;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+1)} = E_\beta(z),\\
{}_1\overset{\beta,\gamma}{M}_1\,(1;1;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+\gamma)} = E_{\beta,\gamma}(z),\\
{}_1\overset{\beta,\gamma}{M}_1\,(\sigma;1;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma)_k}{\Gamma(\beta k+\gamma)}\frac{z^k}{k!} = E^{\sigma}_{\beta,\gamma}(z),\\
{}_1\overset{1,1}{M}_1\,(a;c;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = {}_1F_1(a;c;z),\\
{}_2\overset{1,1}{M}_1\,(a,b;c;z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = {}_2F_1(a,b;c;z),\\
{}_p\overset{1,1}{M}_q\,(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k}\frac{z^k}{k!} = {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ c_1 & \cdots & c_q\end{matrix};z\right].
\end{aligned}
$$

2.2. Kesirli Operatörler ve Belirli Özellikleri

Bu kısımda, literatürde sıklıkla karşılaşılan Riemann-Liouville kesirli operatörleriyle Caputo kesirli türev operatörünün tanımları verilip, çeşitli özelliklerinden bahsedilmiştir. Uygulamaya uygunluk açısından sadece sol kesirli operatörler ele alınmıştır. Kesirli operatörler hakkında daha ayrıntılı bilgi için [26, 35, 40, 41, 43, 46, 52, 56] kaynaklarına bakılabilir.

$I^n f(x) = \int_a^x dx \int_a^x dx \cdots \int_a^x f(x)dx$ olmak üzere n-katlı integraller için verilen

$$
I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{2.8}
$$

formülünde $(n-1)! = \Gamma(n)$ kullanılırsa tamsayı olmayan n değerleri için de (2.8) eşitliği anlamlı olur. Böylece tamsayı mertebeden olmayan integral ve türev operatörü için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.10. $f \in L_1(a,b)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere, f fonksiyonunun α. dereceden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (x > a,\ Re(\alpha) > 0) \tag{2.9}$$

biçiminde ve α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ise $n = [Re(\alpha)] + 1$ ve $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &:= D^n \left(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f\right)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (x > a,\ Re(\alpha) \geq 0)\end{aligned} \tag{2.10}$$

biçiminde tanımlanır [35]. $[Re(\alpha)]$ ile $Re(\alpha)$ sayısının tamsayı kısmı kastedilmektedir.

Eğer $\beta \in \mathbb{C},\ Re(\beta) > 0$, ve $Re(\alpha) > 0$ ise $a = 0$ için

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1} dt && \text{((2.9) tanımından)}\\ &= \frac{x^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du && (t = ux \text{ dönüşümü ile})\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1}, && \text{((2.1) ve (2.2) ile)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer işlemler kullanılarak $Re(\alpha) \geq 0$ ve $a = 0$ için

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x t^{\beta-1}(x-t)^{n-\alpha-1} dt\\ &= \frac{(x^{\beta+n-\alpha-1})^{(n)}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{n-\alpha-1} du\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} (x^{\beta+n-\alpha-1})^{(n)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1}\end{aligned} \tag{2.11}$$

olacak biçimde elde edilir. Burada özel olarak $\beta = 1$ alınırsa sabit bir fonksiyon için Riemann- Liouville kesirli türevin sıfır olmadığı görülür.

Bununla birlikte, $\alpha = n$ olması durumunda f fonksiyonunun (2.9) kesirli integrali (2.8) n-katlı integral formülüne, (2.10) kesirli türevi de n.mertebeden klasik türeve dönüşür. Yine (2.10) için $\alpha = 0$ alınırsa $\left(D^0_{a^+}f\right)(x) = f(x)$ olduğu görülür [35].

Tanım 2.11. $f \in AC^n[a,b]$, $n = [Re(\alpha)]+1$ ve $Re(\alpha) \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$\left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) := \left(\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+}\mathcal{D}^n f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır [35].

(2.12) eşitliğinden, sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevinin sıfır olduğu açıktır. Benzer olarak $\alpha = n$ olması durumunda f fonksiyonunun (2.12) kesirli türevi n. mertebeden klasik türevine dönüşür. Yine $\alpha = 0$ olması durumunda $\left({}^C\mathcal{D}^0_{a^+}f\right)(x) = f(x)$ olduğu görülür [35].

Eğer $n = [Re(\alpha)] + 1$, $\beta \in \mathbb{C}$, $Re(\beta) > n$, ve $Re(\alpha) > 0$ ise $a = 0$ için benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
\left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+}t^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (t^{\beta-1})^{(n)}(x-t)^{n-\alpha-1}dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}\int_0^x t^{\beta-n-1}(x-t)^{n-\alpha-1}dt \\
&= \frac{\Gamma(\beta)x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}\int_0^1 u^{\beta-n-1}(1-u)^{n-\alpha-1}du \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha-1}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

elde edilir.

Riemann-Liouville kesirli operatörlerinin sağladığı özelliklerden bazıları aşağıda verilmiştir. İlk sonuç kesirli integralin yarı-grup özelliği olarak bilinir.

Lemma 2.12. Eğer $Re(\alpha) > 0,\ Re(\beta) > 0$ ise

$$\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{I}^{\beta}_{a^+}f\right)(x) = \left(\mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a^+}f\right)(x)$$

eşitliği $f \in L_p(a,b),\ (1 \leq p \leq \infty)$ için hemen hemen her $x \in [a,b]$ aralığında sağlanır. Ayrıca $\alpha + \beta > 1$ ise bu eşitlik her $x \in [a,b]$ için geçerlidir [35, Lemma 2.3].

Lemma 2.13. Eğer $Re(\alpha) > 0$ ve $f \in L_p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$ ise

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x)$$

eşitliği hemen hemen her $x \in [a,b]$ için geçerlidir [35, Lemma 2.4].

Lemma 2.14. Eğer $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$ ise $f \in L_p(a,b), (1 \leq p \leq \infty)$ için

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta}\right)(x)$$

eşitliği hemen hemen her $x \in [a,b]$ için geçerlidir [35, Property 2.2].

Lemma 2.15. $Re(\alpha) > 0, n = [Re(\alpha)] + 1$ olsun ve

$$f_{n-\alpha}(x) := \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x)$$
$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(L_p) := \{f : f = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\varphi,\ \varphi \in L_p(a,b)\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

biçiminde tanımlansın. Eğer

a) $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(L_p)$ ise

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x),$$

b) $f \in L_1(a,b)$ ve $f_{n-\alpha} \in AC^n[a,b]$ ise

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j},$$

eşitlikleri $[a,b]$ aralığının hemen hemen her yerinde geçerlidir [35, Lemma 2.5].

Caputo kesirli türev operatörü için aşağıdaki ilişkiler geçerlidir.

Lemma 2.16. $Re(\alpha) > 0$ ve $f \in C[a,b]$ ya da $f \in L_\infty(a,b)$ olsun.

a) Eğer $Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ya da $\alpha \in \mathbb{N}$ ise

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x),$$

b) eğer $Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ ya da $Im(\alpha) \neq 0$ ise

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = f(x) - \frac{\left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+1-n}f\right)(a+)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}$$

olarak elde edilir [35, Lemma 2.21].

Lemma 2.17. $Re(\alpha) > 0$ ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ olsun.

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\,{}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}$$

eşitliği $f \in C^{n}[a,b]$ ya da $f \in AC^{n}[a,b]$ ise geçerlidir [35, Lemma 2.22].

Sonuç 2.18. Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $n = [Re(\alpha)] + 1$ ise

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f\right)(x)$$

olması için gerek ve yeter şart $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ olmasıdır [35, p. 92].

2.3. Laplace Dönüşümü ve Konvolüsyon

Tanım 2.19. f, $x \geq 0$ için tanımlanan x reel değişkenine bağlı reel değerli bir fonksiyon olsun. F, tüm reel s değerleri için has olmayan

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

integralinin yakınsak olduğu bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ fonksiyonudur denir ve $F(s) = \mathfrak{L}\{f(x)\}$ ile gösterilir. [54].

Teorem 2.20. Eğer f fonksiyonu, her $b > 0$ için $x \in [0,b]$ aralığında parçalı sürekli ve α üstel mertebeden, yani; $M, K \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere $x \geq M$ iken $|f(x)| < Ke^{\alpha x}$ olacak biçimde $\alpha \in \mathbb{R}$ bulunabiliyorsa her $s > \alpha$ için f fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcuttur [54].

Laplace dönüşümü lineerdir ve uygun f fonksiyonları için aşağıdaki özellikleri sağlar [54]:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{f^{(n)}(x)\} &= s^n \mathfrak{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha \qquad (2.14)\\
\mathfrak{L}\{e^{ax}f(x)\} &= F(s-a), \quad s > \alpha + a\\
\mathfrak{L}\{t^n f(x)\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s), \quad s > \alpha.
\end{aligned}$$

Eğer $\mathfrak{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise F fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilir. Her fonksiyonun ters Laplace dönüşümü olmayabilir ancak varsa bu dönüşüm tektir [54].

Tanım 2.21. f ve g, her sonlu kapalı $0 \leq t \leq b$ aralığında parçalı sürekli ve α üstel mertebeli iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu $f * g$ ile gösterilir ve

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

ile tanımlanır [54].

Yukarıdaki koşulları sağlayan f ve g fonksiyonları için aşağıdaki özellikler geçerlidir [54]:

$$\begin{aligned}
f(x) * g(x) &= g(x) * f(x),\\
\mathfrak{L}\{f(x) * g(x)\} &= \mathfrak{L}\{f(x)\}\mathfrak{L}\{g(x)\} = F(s)G(s), \quad s > \alpha \qquad (2.15)\\
\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt\\
&= g(x) * f(x) = \int_0^x g(t)f(x-t)dt. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

3. KUVVET VE KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYON ÇEKİRDEKLİ KESİRLİ OPERATÖRLER

3.1. Çekirdeğinde Özel Fonksiyonlar İçeren Kesirli Operatörler

(2.12) ile verilen Caputo kesirli türev tanımı için $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{3.1}$$

elde edilir. 2015 yılında Caputo ve Fabrizio [10], (3.1) eşitliğinin sağ tarafındaki integralin çekirdeği olan $(x-t)^{-\alpha}$ ifadesini $e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)}$ ifadesiyle ve $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ ifadesini de $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ ifadesi ile değiştirerek $\alpha \in [0,1]$ ve $f \in H^1(a,b)$ olmak üzere

$$\mathscr{D}_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x f'(t) e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)} dt \tag{3.2}$$

biçiminde üstel çekirdekli yeni bir kesirli türev operatörü tanımlamışlardır. Burada $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ olacak şekilde bir normalizasyon fonksiyonudur. Ayrıca

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} e^{\left(-\frac{x-t}{\lambda}\right)} = \delta(x-t)$$

eşitliğinden

$$\lim_{\alpha \to 1} \mathscr{D}_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = f'(x)$$
$$\lim_{\alpha \to 0} \mathscr{D}_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = f(x) - f(a)$$

olduğunu göstermişlerdir [10].

Bu operatör sonradan Caputo-Fabrizio kesirli türevi olarak adlandırılmıştır [39]. (3.1) Caputo kesirli türevinde olduğu gibi (3.2) Caputo-Fabrizio türevinde de sabit bir fonksiyonun türevi sıfırdır ancak bu tanımda çekirdek, $x = t$ noktasında bir tekilliğe sahip değildir.

Hemen ardından yapılan bir çalışmada Losada ve Nieto [39], Caputo-Fabrizio kesirli türevini $t \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ ve $f \in H^1(0,b),\ b > 0$ olmak üzere

$$ {}^{CF}D^{\alpha} f(x) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^x f'(t) e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)} dt \tag{3.3} $$

biçiminde yeniden tanımlamışlardır. Ayrıca Caputo-Fabrizio kesirli integralini de $t \geq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$ {}^{CF}I^{\alpha} f(x) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} f(x) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^x f(t) dt \tag{3.4} $$

şeklinde elde etmişlerdir.

Ardından, normalizasyon fonksiyonunu $M(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}$ olarak hesaplamışlar ve (3.3) ile (3.4) tanımlarını

$$ \begin{aligned} {}^{CF}I^{\alpha} f(x) &= (1-\alpha) f(x) + \alpha \int_0^x f(t) dt \\ {}^{CF}D^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^x f'(t) e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)} dt, \end{aligned} \tag{3.5} $$

olacak biçimde sadeleştirmişlerdir.

Yine aynı yıl içerisinde Yang ve diğ. [72], benzer işlemleri Riemann-Liouville kesirli türevine uygulayarak $x \geq a$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere yeni kesirli türev operatörünü

$$ {}_{*}D_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)} dt \tag{3.6} $$

biçiminde tanımlamışlardır.

2016 yılında Atangana ve Baleanu [3], çekirdeklerinde tek parametreli Mittag-Lefler fonksiyonu bulunan kesirli operatörleri, $\alpha \in [0,1]$ ve $f \in H^1(0,b),\ b > 0$ olmak üzere,

$$ {}^{ABC}_{\ \ a}D_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x f'(t) E_{\alpha} \left(\frac{-\alpha(x-t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) dt, $$

$$ {}^{ABR}_{\ \ a}D_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) E_{\alpha} \left(\frac{-\alpha(x-t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) dt $$

biçiminde tanımlamışlardır.

Burada da $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ olacak şekildeki normalizasyon fonksiyonudur. Bu operatörler sırasıyla "Caputo" ve "Riemann-Liouville" anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleri olarak adlandırılırlar. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü de

$$ {}^{AB}_{a}\mathcal{I}^{\alpha}_{x}[f(x)] = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(x) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt $$

şeklinde tanımlanır. Bu operatör, $\alpha = 1$ için fonksiyonun klasik integralini, $\alpha = 0$ için ise orjinal fonksiyonu verir. Eğer burada da Losada ve Nieto'nun normalizasyon fonksiyonunun değerini bulmak için yaptığı işlemler tekrarlanırsa $M(\alpha) = \frac{1}{1+\Gamma(\alpha)}$ değeri elde edilir.

2017 yılında ise Gomez-Aguilar ve Atangana üç parametreli, çekirdeğinde kuvvet, üstel ve Mittag-Leffler fonksiyonlarını barındıran kesirli türev operatörleri tanımlamışlardır (bkz. [23, Tanım 1]). Ayrıca, bu operatörlere özel değerler vererek, iki parametreli, çekirdeğinde kuvvet ve üstel fonksiyonları barındıran kesirli türev operatörlerini

$$ {}^{GAR}_{a}\mathcal{D}^{\alpha,\gamma}_{x}[f(x)] = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\gamma-n+1}} e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{n-\alpha}\right)} dt \tag{3.7} $$

ve

$$ {}^{GAC}_{a}\mathcal{D}^{\alpha,\gamma}_{x}[f(x)] = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\gamma-n+1}} e^{\left(\frac{-\alpha(x-t)}{n-\alpha}\right)} dt \tag{3.8} $$

biçiminde elde etmişlerdir [23, dnk. (8), dnk. (14)]. Burada $\alpha, \gamma \in (n-1, n]$ olup, $M(\alpha)$ önceki tanımlara benzer olan normalizasyon fonksiyonudur.

Aslında bu yayında Gomez-Aguilar ve Atangana üç parametreli operatörlerdeki parametrelere özel değerler vererek, hem önceden tanımlanmış Riemann-Liouville, Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu gibi kesirli operatörleri elde ettiklerini hem de (3.7) ve (3.8) gibi çok çeşitli yeni kesirli operatörleri Riemann-Liouville ve Caputo anlamında tanımladıklarını iddia etmişlerdir. Bununla birlikte, bu operatörlerin Laplace, Fourier, Mellin ve Sumudu dönüşümlerini hesaplayarak üç örnek için sayısal çözümlere ulaşmışlardır.

Farklı çekirdekli kesirli operatörler hakkında daha ayrıntılı bilgi için [3, 5, 10, 19, 23, 33, 34, 39, 72] yayınlarına bakılabilir.

3.2. Çekirdeğinde Kuvvet ve Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonlarını İçeren Yeni Kesirli Operatörler

Tez çalışmasının bu kısmında, yukarıda bahsedilen çalışmalardan da esinlenerek, çekirdeğinde kuvvet ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarını içeren yeni kesirli operatörler tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1. $0 < \alpha < 1, 0 \leq a \leq t \leq x < \infty, \beta > 0$ ve $f \in H^1(a,b)$ olmak üzere f fonksiyonunun Riemann-Liouville ve Caputo anlamında yeni kesirli türevleri sırasıyla

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) := \frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\beta}} {}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt \tag{3.9}$$

ve

$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) := \frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\beta}} {}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt \tag{3.10}$$

biçiminde verilir. Burada $N(\alpha,\beta)$, normalizasyon fonksiyonu olup $N(0,0) = N(1,1) = 1$ eşitliği geçerlidir.

Ayrıca konfluent hipergeometrik fonksiyon ile Prabhakar fonksiyonu arasında

$${}_1F_1(\gamma;\beta;x) = \Gamma(\beta) E_{1,\beta}^{\gamma}(x)$$

ilişkisi olduğundan, yukarıda verilen iki tanım alternatif olarak

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\beta}} E_{1,\beta}^{\gamma}\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt$$

ve

$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\beta}} E_{1,\beta}^{\gamma}\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt$$

biçiminde de yazılabilirler.

$0 \leq \alpha < 1$ ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere, α, β ve γ parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{0,1,\gamma} f\right](x) = N(0,1) f(x),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{0,1,\gamma} f\right](x) = N(0,1)[f(x) - f(a)],$$

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,1,0} f\right](x) = \frac{N(\alpha,1)}{1-\alpha} f(x),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,1,0} f\right](x) = \frac{N(\alpha,1)}{1-\alpha}\left[f(x) - f(a)\right],$$

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{0,\beta,\gamma} f\right](x) = N(0,\beta)\left(\mathcal{D}_{a^+}^{1-\beta} f\right)(x),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{0,\beta,\gamma} f\right](x) = N(0,\beta)\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{1-\beta} f\right)(x),$$

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,0} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}(\mathcal{D}_{a^+}^{1-\beta} f)(x),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,0} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{1-\beta} f\right)(x),$$

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,1,1} f\right](x) = N(\alpha,1)\, {}_{*}D_{a^+}^{(\alpha)} f(x),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1,1} f\right](x) = N(\alpha,1)\, {}^{CF}\mathcal{D}_{x}^{\alpha} f(x),$$

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\beta} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{M(\alpha)}\, {}^{GAR}_{\quad a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha,1-\beta}[f(x)], \quad (n = 1 \text{ için}),$$
$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta,\beta} f\right](x) = \frac{N(\alpha,\beta)}{M(\alpha)}\, {}^{GAC}_{\quad a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha,1-\beta}[f(x)], \quad (n = 1 \text{ için}).$$

Burada sırasıyla $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)$ ile (2.10) eşitliğinde verilen Riemann-Liouville kesirli türevi; $\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)$ ile (2.12) eşitliğinde verilen Caputo kesirli türevi; ${}_{*}D_{a^+}^{(\alpha)} f(x)$ ile (3.6) eşitliğinde verilen (Riemann-Liouville anlamında) Caputo-Fabrizio kesirli türevi; ${}^{CF}\mathcal{D}_{x}^{\alpha} f(x)$ ile (3.5) eşitliğinde verilen (Caputo anlamında) Caputo-Fabrizio kesirli türevi; ${}^{GAR}_{\quad a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha,1-\beta}[f(x)]$ ile (3.7) eşitliğinde verilen (Riemann-Liouville anlamında) Gomez-Atangana kesirli türevi ve ${}^{GAC}_{\quad a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha,1-\beta}[f(x)]$ ile (3.8) eşitliğinde verilen (Caputo anlamında) Gomez-Atangana kesirli türevi gösterilmektedir.

3.3. Yeni Kesirli Operatörlerin Çeşitli Özellikleri

Bu kısımda, (3.9) ve (3.10) eşitlikleriyle verilen yeni kesirli türev operatörünün $a = 0$ durumundaki çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu operatörlere karşılık gelen yeni bir kesirli integral operatörü de bu kısımda tanımlanmıştır.

Teorem 3.2. $s > 0$ ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, f fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmak üzere (3.9) ve (3.10) kesirli türevlerin Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x)\right\} = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha} F(s) s^{\gamma-\beta+1}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} \tag{3.11}$$

ve

$$\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x)\right\} = \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}\left(s\,F(s) - f(0)\right) s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} \tag{3.12}$$

biçimindedir.

İspat. (3.9) tanımından,

$$\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma}\right] f(x)\right\} = \frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)}\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\,{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt\right\}$$

elde edilir. Türevin Laplace dönüşümü (2.14) formülünden

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\,{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt\right\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\frac{{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)}{(x-t)^{1-\beta}}dt\right\}$$

sonucuna ulaşılır. Konvolüsyon (2.15) formülünden

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\frac{{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)}{(x-t)^{1-\beta}}dt\right\} = F(s)\mathcal{L}\left\{x^{\beta-1}\,{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)\right\}$$

bulunur. $\beta > 0$ için

$$\mathcal{L}\{x^{\beta-1}\,{}_1F_1(\gamma;\beta;\lambda x)\} = \Gamma(\beta)s^{\gamma-\beta}(s-\lambda)^{-\gamma} \tag{3.13}$$

formülü [22, s.217, (1)] kullanılarak

$$\mathcal{L}\left\{x^{\beta-1}{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)\right\}=\Gamma(\beta)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}$$

elde edilir. Yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma}\right]f(x)\right\}&=\frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)}sF(s)\Gamma(\beta)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\\&=\frac{N(\alpha,\beta)}{(1-\alpha)}F(s)s^{\gamma-\beta+1}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\end{aligned}$$

bulunur ki bu istenen sonuçtur. Benzer şekilde (3.10) tanımından

$$\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma}\right]f(x)\right\}=\frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)}\mathcal{L}\left\{\int_0^x f'(t)(x-t)^{1-\beta}{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt\right\}$$

elde edilir. (2.15) konvolüsyon formülünden

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left\{\int_0^x f'(t)(x-t)^{1-\beta}{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt\right\}\\&\qquad=\mathcal{L}\{f'(t)\}\mathcal{L}\left\{x^{1-\beta}{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)\right\}\end{aligned}$$

olup (2.14) ve (3.13) formüllerinden

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left\{\int_0^x f'(t)(x-t)^{1-\beta}{}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt\right\}\\&\qquad=\left(sF(s)-f(0)\right)\Gamma(\beta)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma}\right]f(x)\right\}&=\frac{N(\alpha,\beta)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)}\left(sF(s)-f(0)\right)\Gamma(\beta)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\\&=\frac{N(\alpha,\beta)}{(1-\alpha)}\left(sF(s)-f(0)\right)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 3.3. $0 < \alpha < 1$, $x \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda iki türev operatörü arasında

$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) - \frac{N(\alpha,\beta)f(0)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)} x^{\beta-1} {}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)$$

ilişkisi geçerlidir.

İspat. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x)\right\} =& \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}\left(sF(s)-f(0)\right)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} \\
=& \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}F(s)s^{\gamma-\beta+1}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} \\
&-\frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}f(0)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} \\
=&\mathcal{L}\left\{\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x)\right\} - \frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}f(0)s^{\gamma-\beta}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa (3.13) formülünün de yardımıyla

$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) - \frac{N(\alpha,\beta)f(0)}{\Gamma(\beta)(1-\alpha)} x^{\beta-1} {}_1F_1\left(\gamma;\beta;\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)$$

eşitliği elde edilir. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak, $f(0) = 0$ olduğunda iki operatörün Laplace dönüşümlerinin birbirine eşit olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4. $0 < \alpha, \beta < 1$, $x \geq 0$ olmak üzere

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = g(x) \tag{3.14}$$

kesirli diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\beta}} {}_1F_1\left(-\gamma;1-\beta;\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)dt \tag{3.15}$$

biçimindedir.

İspat. $\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](t) = g(t)$ denkleminde her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha} F(s) s^{\gamma-\beta+1} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} = G(s)$$

olduğu görülür. Buradan $F(s)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$F(s) = \frac{(1-\alpha) G(s) \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}}{N(\alpha,\beta) s^{\gamma-\beta+1}}, \ (s > 0)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \underbrace{s^{\beta-\gamma-1} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}}_{H(s)} \right\}$$

sonucuna ulaşılır. $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(x)$ olmak üzere (3.13) formülünden $\beta < 1$ için

$$h(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{\beta-\gamma-1} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma} \right\} = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} {}_1F_1 \left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)$$

bulunur. Böylece (2.16) formülünden

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} [g(x) * h(x)] = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} \int_0^x g(x) h(x-t) dt$$

yazılabilir. Bulunanlar yerine yazıldığında (3.15) eşitliğine ulaşılır. ■

Teorem 3.5. $0 < \alpha, \beta < 1$, $x \geq 0$ olmak üzere

$$\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = g(x) \tag{3.16}$$

kesirli diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\beta}} {}_1F_1 \left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt + f(0) \tag{3.17}$$

biçimindedir.

İspat. $\left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = g(x)$ denkleminde her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{N(\alpha,\beta)}{1-\alpha}\left(sF(s) - f(0)\right)s^{\gamma-\beta}\left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\gamma} = G(s)$$

olduğu görülür. Buradan $F(s)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$F(s) = \frac{(1-\alpha)G(s)s^{\beta-\gamma-1}\left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}}{N(\alpha,\beta)} + \frac{f(0)}{s}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\,\underbrace{s^{\beta-\gamma-1}\left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}}_{H(s)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(0)}{s}\right\}$$

sonucuna ulaşılır. $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(x)$ olmak üzere (3.13) formülünden $\beta < 1$ için

$$h(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\beta-\gamma-1}\left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}\right\} = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}{}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)$$

bulunur. Böylece (2.16) formülünden

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\left[g(x) * h(x)\right] + f(0) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\int_0^x g(x)h(x-t)dt + f(0)$$

yazılabilir. Bu ise (3.17) eşitliğini verir. ■

Uyarı 3.6. $0 < \alpha, \beta < 1$, $x \geq 0$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda (3.14) ve (3.16) kesirli diferansiyel denklemlerinin çözümü aynıdır ve bu çözüm (3.15) denklemi ile bulunabilir.

Sonuç 3.7. $0 < \alpha, \beta < 1, x \geq 0$ olmak üzere f_1 ve f_2 fonksiyonları sırasıyla kesirli

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = 0 \quad \text{ve} \quad \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) = 0$$

diferansiyel denklemlerinin çözümleri olsunlar. O halde $f_1(x) = 0$ ve $f_2(x) = f(0)$ olur.

İspat. Sırasıyla (3.15) ve (3.17) çözümlerinde $g(x) = 0$ alınırsa istenilen sonuç kolayca elde edilir. ■

Teorem 3.8. $0 < \alpha, \beta < 1$, $x \geq 0$ için eğer g fonksiyonu türevlenebilir ve $\int_0^x g(t)dt$ integrali mevcut ise

$$\int_0^x \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g\right](t)dt = \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} \int_0^x g(t)dt\right](x),$$
$$\int_0^x \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g'\right](t)dt = \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g\right](x)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.14) ve (3.16) denklemleri verilsin. Bu durumda (3.15) denkleminin her iki yanının diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt \\ =& \left(\frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\right)^2 \frac{N(\alpha,\beta)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt \\ =& \left(\frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\right)^2 \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g\right](x) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki yanın integrali alınırsa $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ olup

$$f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\right)^2 \int_0^x \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g\right](t)dt + f(0) \tag{3.18}$$

bulunur. $v(x) = \int_0^x g(t)dt$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $v'(x) = g(x)$ olup (3.17) denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{v'(t)}{(x-t)^\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt + f(0) \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\right)^2 \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} v\right](x) + f(0) \\ &= \left(\frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)}\right)^2 \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} \int_0^x g(t)dt\right](x) + f(0) \end{aligned} \tag{3.19}$$

sonucuna ulaşılır. (3.18) ve (3.19) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$\int_0^x \left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} g\right](t)dt = \left[{}^{FC}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,1-\beta,-\gamma} \int_0^x g(t)dt\right](x)$$

eşitliği elde edilir. İlk sonuçta g yerine g' alınarak ikinci sonuca da ulaşılır. ■

Eğer $f(0) = 0$ ise (3.15) ve (3.17) denklemlerinin eşit oldukları açıktır. Bu denklemlerden hareketle çekirdeğinde kuvvet ve konfluent hipergeometrik fonksiyon içeren yeni kesirli integral opeartörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.9. $0 < \alpha, \beta < 1$ ve $x \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun kesirli integrali

$$\left[{}^{F}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f\right](x) := \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta}} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt$$

biçiminde tanımlanır.

3.4. Yeni Kesirli Türev Operatörü İçeren Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Örnek 3.10. Gerekli şartlar altında

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f_1\right](x) = x^{\rho} \tag{3.20}$$

kesirli diferansiyel denklemi verilmiş olsun. (3.15) denkleminden çözüm fonksiyonu

$$f_1(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{t^{\rho}}{(x-t)^{\beta}} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt$$

olarak bulunur. Eşitliğin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_1(x)\} &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \mathcal{L}\{x^{\rho}\} \mathcal{L}\left\{x^{-\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)\right\} \\
&= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{s^{\rho+1}} \Gamma(1-\beta) s^{\beta-\gamma-1} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma} \\
&= \frac{(1-\alpha)\Gamma(1+\rho)}{N(\alpha,\beta)} s^{\beta-\gamma-\rho-2} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanına bu sefer ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{(1-\alpha)\Gamma(1+\rho)}{N(\alpha,\beta)} \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\beta-\gamma-\rho-2} \left(s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma}\right\} \\
&= \frac{(1-\alpha)\Gamma(1+\rho)}{N(\alpha,\beta)\Gamma(\rho-\beta+2)} x^{\rho-\beta+1} {}_1F_1\left(-\gamma; \rho-\beta+2; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Burada özel olarak $\rho = \beta$ alınırsa çözüm fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_1(x) = \frac{(1-\alpha)\Gamma(1+\beta)}{N(\alpha,\beta)}\, x\, {}_1F_1\left(-\gamma; 2; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right). \tag{3.21}$$

Kilbas ve diğ. tarafından verilen bir örnekte (bkz. [35, syf. 296, Örnek 5.8]), $x > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevi içeren

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{m-1/2} y\right)(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

diferensiyel denklemin çözümü

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{m-3/2} E_{m-1/2,m-1/2}\left[\lambda (x-t)^{m-1/2}\right] f(t)dt$$

olarak bulunur. Burada $\lambda = 0$, $f(x) = x^{3/2-m}$ alınırsa denklem

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{m-1/2} y\right)(x) = x^{3/2-m}$$

şekline dönüşüp çözüm fonksiyonu yukarıda verilen eşitlikten

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-1/2)} \int_0^x t^{3/2-m}(x-t)^{m-3/2} dt \\ &= \frac{x}{\Gamma(m-1/2)} \int_0^1 u^{3/2-m}(1-u)^{m-3/2} du \\ &= \frac{B(5/2-m, m-1/2)}{\Gamma(m-1/2)} x = \Gamma(5/2-m)x \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.20) denkleminde $\alpha = 0$, $\beta = 3/2 - m$ ve $\rho = \beta$ alınırsa

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{0,3/2-m,\gamma} y\right](x) = N(0, 3/2-m)\left(\mathcal{D}_{0^+}^{m-1/2} y\right)(x) = x^{3/2-m}$$

denklemi elde edilir. Çözüm fonksiyonu ise (3.21) denkleminden

$$y(x) = \frac{\Gamma(5/2-m)x}{N(0, 3/2-m)}$$

şeklinde bulunur ki bu, iki çözümün çakıştığını gösterir.

$N(\alpha,\beta) = 1$ olmak üzere α,β ve γ değişkenlerinin farklı değerleri için (3.21) çözüm fonksiyonunun grafikleri tez çalışmasının ekindedir (bkz. syf. 67, Şekil 5.1).

Örnek 3.11. Kabul edelim ki

$$\left[{}^{FR}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta,\gamma} f_2\right](x) = e^{\frac{-\alpha x}{1-\alpha}}$$

kesirli diferansiyel denklemi verilsin. (3.15) denkleminden çözüm fonksiyonu

$$f_2(x) = \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}}}{(x-t)^\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) dt$$

biçiminde bulunur. Eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_2(x)\} &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(1-\beta)} \mathcal{L}\left\{e^{\frac{-\alpha x}{1-\alpha}}\right\} \mathcal{L}\left\{x^{-\beta} {}_1F_1\left(-\gamma; 1-\beta; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right)\right\} \\ &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} s^{\beta-\gamma-1}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanına bu sefer ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)} \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\beta-\gamma-1}\left(s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\gamma-1}\right\} \\ &= \frac{1-\alpha}{N(\alpha,\beta)\Gamma(2-\beta)} x^{1-\beta} {}_1F_1\left(1-\gamma; 2-\beta; \frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right) \qquad (3.22)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$N(\alpha,\beta) = 1$ olmak üzere farklı α,β ve γ değerleri için (3.22) çözüm fonksiyonunun grafikleri tez çalışmasının ekindedir (bkz., syf. 68, Şekil 5.2).

4. KISITLANMIŞ $\mathcal{M}$-KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

4.1. Uyumlu Kesirli Türev Operatörleri ve Özellikleri

Literatürde pek çok kesirli türev tanımı mevcuttur. Önceki bölümlerde ele alınan tüm kesirli türev operatörleri (ve benzerleri) lineer operatörlerdir. Ancak kesirli türev opeatörleri klasik türev operatörünün sağladığı diğer özellikleri genellikle sağlamazlar. Örneğin; iki fonksiyonun çarpımı için verilen türev formülü ya da zincir kuralı gibi özellikler kesirli türev operatörleri tarafından sağlanmazlar. Bu sebeple, basit gibi gözüken bir kesirli diferensiyel denklemin çözümüne ulaşmak oldukça zor olabilir.

Örnek 4.1. $\lambda, c \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\left({}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) - \lambda f(t) = 0, \quad y(0) = c \tag{4.1}$$

Caputo kesirli türevli başlangıç değer probleminin çözümünü elde etmenin en kolay yolu Laplace dönüşümünden yararlanmaktır. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathfrak{L}\left\{{}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f\right\}(s) = s^{\alpha}\mathfrak{L}\left\{f\right\}(s) - cs^{\alpha-1}$$

biçimindedir [35]. (4.1) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathfrak{L}\left\{f\right\}(s) = \frac{cs^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \tag{4.2}$$

sonucuna ulaşılır. $Re(s) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda s^{-\alpha}| < 1$ olmak üzere

$$\mathfrak{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

eşitliği [25] göz önüne alınır ve (4.2) eşitliğinin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa (4.1) probleminin çözümü

$$f(t) = cE_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = cE_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$$

biçiminde elde edilir.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, klasik türev operatörüyle daha uyumlu olan yeni kesirli türev operatörleri tanımlanmıştır. Bu kesirli türevler klasik analizde verilen lineerlik, çarpım kuralı, bölüm kuralı, bileşke fonksiyon kuralı ve zincir kuralı gibi çeşitli özellikleri sağlarlar. Ayrıca bu kesirli türevler için analizde önemli yeri olan Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri gibi önemli teoremler de verilebilir.

İlk olarak 2014 yılında Khalil ve diğ. [31], uyumlu (conformable) kesirli türev operatörünü $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ ve $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{T}_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} =: f^{(\alpha)}(t)$$

biçiminde tanımlamışlardır. Eğer bu limit mevcutsa f fonksiyonuna α-diferansiyellenebilir fonksiyon denir. Ayrıca $a > 0$ olmak üzere f, $(0, a)$ aralığında α-diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcut ise

$$f^{(\alpha)}(0) := \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

biçiminde tanımlanır. Khalil ve arkadaşları, uyumlu kesirli türev operatörünün lineerlik

$$\mathcal{T}_\alpha(af + bg)(t) = a\mathcal{T}_\alpha f(t) + b\mathcal{T}_\alpha g(t),$$

çarpım kuralı

$$\mathcal{T}_\alpha(f \cdot g)(t) = f(t)\mathcal{T}_\alpha g(t) + g(t)\mathcal{T}_\alpha f(t),$$

bölüm kuralı

$$\mathcal{T}_\alpha \left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{g(t)\mathcal{T}_\alpha f(t) - f(t)\mathcal{T}_\alpha g(t)}{[g(t)]^2},$$

ve eğer $f'(g(t))$ mevcutsa bileşke fonksiyon kuralı

$$\mathcal{T}_\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t))\mathcal{T}_\alpha g(t)$$

özelliklerini sağladığını da göstermişlerdir [31].

Aynı makalede yazarlar, uyumlu kesirli türev operatörü ile klasik türev operatörü arasında

$$\mathcal{T}_\alpha f(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t) \tag{4.3}$$

ilişkinin var olduğunu ispatlamışlar, çeşitli fonksiyonların uyumlu kesirli türevlerini hesaplamışlar ve klasik türev teorisinde yer alan, aralarında Rolle ve Ortalama Değer teoremlerinin de olduğu bir çok teoremi, bu operatör için ifade ve ispat etmişlerdir. Son olarak, uyumlu kesirli türev operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörünü $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \tag{4.4}$$

has olmayan Riemann integrali yardımıyla tanımlamışlardır.

Aynı yıl, Katugampola [30], alternatif kesirli türev operatörünü $t > 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}^\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu operatör için de (4.3) ilişkisi geçerlidir. Ayrıca [31] makalesinde verilen tüm özelliklerin bu kesirli türev operatörü için de sağlandığını göstermiş ve kesirli türev operatörüne karşılık gelen kesirli integral operatörünü (4.4) olarak elde etmiştir. Son olarak yazar, uyumlu ve alternatif kesirli türev operatörlerinin bir genelleştirmesi olarak kısıtlanmış (truncated) alternatif kesirli türev operatörünü $\alpha \in (0,1)$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_i^\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(te_i^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{4.6}$$

biçiminde vermiştir. Buradaki e_i^x terimi ile $e_i^x := \sum_{k=0}^{i}\frac{x^k}{k!}$ biçiminde verilen kısıtlanmış üstel fonksiyon kastedilmektedir. Böylece i parametresinin özel durumları için

$$\mathcal{D}_1^\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(te_1^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{T}_\alpha f(t),$$
$$\mathcal{D}_\infty^\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}^\alpha(f)(t)$$

eşitlikleri elde edilir.

Yakın zamanda, Sousa ve de Oliveira [65, 67] benzer bir çalışmayla M-kesirli türev ve kısıtlanmış M-kesirli türev operatörlerini $\beta, t > 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_M^{\alpha;\beta} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{4.7}$$

$$_i\mathcal{D}_M^{\alpha;\beta} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_i E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{4.8}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Bu tanımlarda tek değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu [25] ve

$$_iE_\beta(z) := \sum_{k=0}^{i} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + 1)}$$

kısıtlanmış versiyonu kullanılmıştır. Bu türev operatörüyle klasik türev operatörü arasında

$$\mathcal{D}_M^{\alpha;\beta} f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} \frac{d}{dt} f(t)$$

ilişkisi mevcuttur ve ilk iki makalede verilen tüm özellikler bu kesirli türev operatörü için de geçerlidir. Yine bu operatöre karşılık gelen kesirli integral operatörü $\alpha \in (0,1)$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$_M\mathcal{I}_a^{\alpha,\beta} f(t) = \Gamma(\beta+1) \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

biçiminde tanımlanmıştır. Ayrıca parametrelerin özel durumları için

$$
\begin{aligned}
_1\mathcal{D}_M^{\alpha;1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_1 E_1(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{T}_\alpha f(t), \\
_\infty\mathcal{D}_M^{\alpha;1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_\infty E_1(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}^\alpha(f)(t), \\
_i\mathcal{D}_M^{\alpha;1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_i E_1(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}_i^\alpha(f)(t), \\
_\infty\mathcal{D}_M^{\alpha;\beta} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_\infty E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}_M^{\alpha;\beta} f(t)
\end{aligned}
$$

sonuçları da elde edilerek, bu operatörün yukarıda tanımları verilen tüm operatörlerden daha genel bir operatör olduğu gösterilmiştir. Bu tür kesirli operatörler hakkında daha fazla bilgi için [4, 18, 27, 30, 31, 55, 65–68, 73] kaynaklarına bakılabilir.

4.2. Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli Türev Operatörü ve Özellikleri

Bu kısımda 4.1. Bölümde bahsedilen yayınlardan esinlenerek diğer tüm operatörlerden daha genel bir uyumlu kesirli türev operatörü, aşağıda tanımı verilecek olan kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisi yardımıyla tanımlanmış ve benzer özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.2. Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisi, $n = 1, 2, \ldots, p;\ \ m = 1, 2, \ldots, q$ için $a_n, c_m \in \mathbb{R}$, $c_m \neq 0, -1, -2, \ldots$ ile $\beta, \gamma, t \in \mathbb{R},\ \beta > 0$ ve $p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(t) = {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}\left[\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ c_1 & \cdots & c_q \end{matrix}; t\right] := \sum_{k=0}^{i} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(c_1)_k \cdots (c_q)_k} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + \gamma)} \tag{4.9} $$

biçiminde tanımlanır.

10. sayfada verilen eşitliklerden de görülebileceği gibi M-serisi, üstel, Mittag-Leffler ve hipergeometrik fonksiyonlar gibi pek çok özel fonksiyondan daha genel yapıya sahip bir fonksiyondur. Böylece aşağıda tanımlanacak olan kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev operatörü, önceki bölümde bahsedilen tüm operatörlerden daha genel bir yapıya sahip olacaktır.

Tanım 4.3. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olsun. $\beta > 0,\ t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$ \begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) &= {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha}\left[\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ c_1 & \cdots & c_q \end{matrix}; \beta, \gamma\right] f(t) \\ &:= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\big(\Gamma(\gamma) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - f(t)}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{4.10} $$

türevine bir f fonksiyonunun α. mertebeden kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi denir. Burada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ p, q \in \mathbb{N}, a_n, c_m \in \mathbb{R},\ c_m \neq 0, -1, -2, \ldots (n = 1, 2, \ldots, p; m = 1, 2, \ldots, q)$ ve ${}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}$, (4.9) ile verilen kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisidir. f fonksiyonunun kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi varsa, bu fonksiyona $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilirdir denir. Ayrıca, eğer f, $a > 0$ olmak üzere $(0, a)$ aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \to 0^+} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha} f(t)$ mevcutsa

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(0) = \lim_{t \to 0^+} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t). $$

olarak tanımlanır.

(4.10) ile verilen kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev tanımında $p = q = 1$ ve $a_1 = c_1$ olarak seçilsin. Eğer $\gamma = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_i\mathcal{M}_{1,1}^{\beta,1}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_iE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} = {}_i\mathcal{D}_{M}^{\alpha;\beta} f(t), \end{aligned}$$

(4.8) kısıtlanmış M-kesirli türevi; ayrıca $i \to \infty$ için

$$\begin{aligned} {}_\infty\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_\infty\mathcal{M}_{1,1}^{\beta,1}\right) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, E_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}_{M}^{\alpha;\beta} f(t), \end{aligned}$$

(4.7) M-kesirli türevi elde edilir. Eğer $\gamma = \beta = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,1,1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_i\mathcal{M}_{1,1}^{1,1}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, e_i^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}_i^{\alpha} f(t), \end{aligned}$$

(4.6) kısıtlanmış alternatif kesirli türevi; ayrıca $i \to \infty$ için

$$\begin{aligned} {}_\infty\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,1,1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_\infty\mathcal{M}_{1,1}^{1,1}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, e^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{D}^{\alpha} f(t) \end{aligned}$$

(4.5) alternatif kesirli türevi elde edilir. Eğer $\gamma = \beta = 1$ alınırsa $i = 1$ için

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,1,1} f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t\, {}_1\mathcal{M}_{1,1}^{1,1}(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t\, e_1^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t + \varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon} = \mathcal{T}_{\alpha} f(t) \end{aligned}$$

(4.3) uyumlu kesirli türevi elde edilir. Son olarak $\mathcal{M}$-kesirli türevi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ alınması durumunda $i = 1$ için ${}_1\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{1,1,1} f(t) = f'(t)$ klasik türeve indirgenir.

Bu bölüm boyunca $n=1,2,\ldots,p;\ \ m=1,2,\ldots,q$ için $a_n, c_m \in \mathbb{R}$, $c_m \neq 0,-1,-2,\ldots$ olduğu ve $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \beta>0$ ile $p,q\in\mathbb{N},\ p>0,\ q>0$ olduğu kabul edilecektir.

Teorem 4.4. $\alpha \in (0,1]$ için $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0>0$ noktasında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir ise, f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

İspat. $\alpha \in (0,1]$ için $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0>0$ noktasında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir olsun.

$$f\big(\Gamma(\gamma)t_0\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t_0)=\frac{f\big(\Gamma(\gamma)t_0\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon$$

özdeşliğinin her iki yanının $\varepsilon\to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\big(\Gamma(\gamma)t_0\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f\big(\Gamma(\gamma)t_0\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t_0)}{\varepsilon}\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon$$

elde edilir. f fonksiyonu $t_0>0$ noktasında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir olduğundan

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\big(\Gamma(\gamma)t_0\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t_0)={}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0$$

olarak bulunur. O halde f, t_0 noktasında süreklidir. ■

Uyarı 4.5. Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisinin tanımı kullanılarak

$$f\big(\Gamma(\gamma)t\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)=f\left(\Gamma(\gamma)t\sum_{n=0}^{i}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k+\gamma)}\right).$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan $\varepsilon\to 0$ için her iki tarafın limiti alındığında

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\big(\Gamma(\gamma)t\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)=f\left(\Gamma(\gamma)t\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{i}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k+\gamma)}\right).$$

elde edilir. Burada sağ taraftaki limit $\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ olduğundan

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\big(\Gamma(\gamma)t\,{}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)=f(t) \tag{4.11}$$

elde edilir.

Sıradaki teorem $\mathcal{M}$-kesirli türevin basit özellikleriyle ilgilidir.

Teorem 4.6. $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için f ile g $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(a) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(af + bg)(t) = a\, {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) + b\, {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t)$.

(b) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) + g(t) \cdot {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)$.

(c) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \dfrac{g(t) \cdot {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) - f(t) \cdot {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t)}{[g(t)]^2}$.

(d) Eğer $f'(g(t))$ mevcutsa

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(f \circ g)(t) = f'(g(t))\, {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t). $$

(e) Eğer f türevlenebilir ise

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t). \tag{4.12} $$

İspat. **(a)** Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisinin tanımından

$$ \begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(af + bg)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(af + bg)\big(\Gamma(\gamma) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - (af + bg)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af\big(\Gamma(\gamma)\big) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha}) + bg\big(\Gamma(\gamma) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - af(t) + bg(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af\big(\Gamma(\gamma)\big) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha}) - af(t)}{\varepsilon} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{bg\big(\Gamma(\gamma) t\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - bg(t)}{\varepsilon} \\ &= a_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) + b_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) \end{aligned} $$

sonucuna ulaşılır.

(b) Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisinin tanımından ve (4.11) özdeşliğinden

$$
\begin{aligned}
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(f\cdot g)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\big(\Gamma(\gamma)\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)g\big(\Gamma(\gamma)\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)g(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)}{\varepsilon}\right.\\
&\quad\left.+\frac{f(t)g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)g(t)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)}{\varepsilon}\right)\lim_{\varepsilon\to 0}g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)\\
&\quad\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-g(t)}{\varepsilon}\right)f(t)\\
&= {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)\cdot g(t)+{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}g(t)\cdot f(t)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

(c) Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisinin tanımından ve (4.11) özdeşliğinden

$$
\begin{aligned}
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{f\left(\Gamma(\gamma)\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)}{g\left(\Gamma(\gamma)\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)}-\frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{g(t)f\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)g(t)}{\varepsilon g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)g(t)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{f(t)g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)g(t)}{\varepsilon g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)g(t)}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{g(t)\left[f\left(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-f(t)\right]}{\varepsilon}-\frac{f(t)\left[g\left(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-g(t)\right]}{\varepsilon}}{g\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)g(t)}\\
&= \frac{g(t)\cdot\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)-f(t)\cdot\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}g(t)}{[g(t)]^2}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

(d) Varsayalım ki g, a noktasının komşuluğunda sabit bir fonksiyon olsun. Bu durumda ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(g(a)) = 0$ olduğu açıktır. Şimdi g fonksiyonunun sabit fonksiyon olmadığını varsayalım. Yani, her $\varepsilon > 0$ için $g(t_1) \neq g(t_2)$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sayıları bulunabilsin. g fonksiyonu $a > 0$ noktasında sürekli olduğundan yeteri kadar küçük ε değerleri için

$$
\begin{aligned}
{}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(f\circ g)(a) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\big(g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))\big)-f\big(g(a)\big)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\big(g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))\big)-f\big(g(a)\big)}{g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))-g(a)}\,\frac{g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))-g(a)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{f\big(g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))\big)-f\big(g(a)\big)}{\varepsilon_1}.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(\Gamma(\gamma)a\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon a^{-\alpha}))-g(a)}{\varepsilon}\\
&= f'(g(a))\,{}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}g(a)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

(e) Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisinin tanımından

$$
\begin{aligned}
{}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\big(\Gamma(\gamma)t\,{}_{i}\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big)-f(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(\Gamma(\gamma)t\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)}+\frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\varepsilon t^{-\alpha}}{\Gamma(\beta+\gamma)}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\right)-f(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\left(\frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)\right)-f(t)}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $h=\varepsilon t^{1-\alpha}\big(\frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}+\mathcal{O}(\varepsilon)\big)$ biçiminde seçilirse $\varepsilon\to 0$ için $h\to 0$ olup

$$
\begin{aligned}
{}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\big(t+h\big)-f(t)}{\frac{h}{\frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}t^{1-\alpha}+\mathcal{O}(\varepsilon)}}\\
&= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. ■

Uyarı 4.7. Son elde edilen sonuç (4.12) ile kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev ile klasik türev arasındaki ilişki verilmiştir. Buna göre f fonksiyonunun türevi alınabiliyorsa kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi de kolaylıkla hesaplanabilir. Ayrıca kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev içeren bir diferensiyel denklem, (4.12) ilişkisinden yararlanarak, klasik türevli değişken katsayılı bir diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. Böylece kesirli türev içeren bir denklemi çözmek yerine değişken katsayılı bir diferensiyel denklem çözülebilir.

Aşağıda bazı temel fonksiyonların kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevleri hesaplanmıştır.

Örnek 4.8. $n \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere bazı fonksiyonların kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevleri aşağıdadır:

(a) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(c) = 0,\ c \in \mathbb{R}$.

(b) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(e^{nt}) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} n t^{1-\alpha} e^{nt}$.

(c) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(\sin nt) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} n t^{1-\alpha} \cos nt$.

(d) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(\cos nt) = -\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} n t^{1-\alpha} \sin nt$.

(e) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(t^n) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} n t^{n-\alpha}$.

(f) ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$.

Uyarı 4.9. 4.8. Örneğin (e) şıkkından

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(t^{\beta-1}) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} (\beta-1) t^{\beta-\alpha-1} $$

bulunur ki bu sonuç ile (2.11) ve (2.13) sonuçları bir sabit farkıyla aynıdır. Bu ise, sadece polinom fonksiyonları göz önüne alındığında, kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev ile Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevlerinin bir sabit farkıyla aynı olması demektir.

Teorem 4.10. (Rolle teoremi) $a > 0$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için (a,b) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir ve $f(a) = f(b)$ oluyorsa ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İspat. f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise bu aralıkta minimum (m) ve maksimum (M) değerlerini en az bir kez alır. Eğer $m = M$ ise f sabit fonksiyon olup 4.8. Örneğin (a) şıkkından ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(c) = 0$ bulunur. Eğer $m < M$ ise ya m ya da M uç noktalardaki değerlerden farklıdır. Varsayalım ki $M > f(a)$ olsun. Bu durumda bir $c \in (a,b)$ noktası için $f(c) = M$ olmalıdır. Bu ise

$$ \begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) &= \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f\big(\Gamma(\gamma) c\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - f(c)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f\big(\Gamma(\gamma) c\, {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha})\big) - f(c)}{\varepsilon} \end{aligned} $$

olması anlamına gelir.

Ancak

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}} {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}$$

olduğundan iki limit zıt işarete sahiptir. Dolayısıyla ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) = 0$ olmalıdır. Fakat eğer $M = f(a)$ ise $m < f(a)$ olup bir $c \in (a,b)$ noktası için $f(c) = m$ olmalıdır. Benzer işlemlerle $f(c) = 0$ olduğu görülebilir. ∎

Teorem 4.11. (Ortalama değer teoremi) $a > 0$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Öyleki, f $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için (a,b) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir ise

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) = \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\frac{f(b)-f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha}-\frac{a^\alpha}{\alpha}}.$$

olacak biçimde bir $c \in (a,b)$ mevcuttur.

İspat. Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$g(t) = f(t) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha}-\frac{a^\alpha}{\alpha}}\right)\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{a^\alpha}{\alpha}\right).$$

Burada verilen g fonksiyonu, Rolle teoreminin şartlarını sağlar. Yani bir $c \in (a,b)$ noktası için ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(c) = 0$ olur. Eşitliğin her iki yanının kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi alınırsa

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) - \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\frac{f(b)-f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha}-\frac{a^\alpha}{\alpha}}$$

bulunur. İstenilen sonuç bu eşitlikte $t = c$ alınarak elde edilir. ∎

Teorem 4.12. (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) $a > 0$ için $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için (a,b) üzerinde $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir ise

$$\frac{{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c)}{{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İspat. Rolle teoreminin ispatındaki g fonksiyonu yerine

$$F(t) = f(t) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)(g(t) - g(a))$$

fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç benzer yolla elde edilir. ■

Teorem 4.13. $a > 0$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve f, $[a,b]$ aralığında sürekli, $\alpha \in (0,1)$ için (a,b) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir olsun. Eğer her $t \in (a,b)$ için ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) = 0$ ise f, $[a,b]$ üzerinde sabit bir fonksiyondur.

İspat. $\forall t \in (a,b)$ için ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) = 0$ ve $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [a,b]$ olduğunu varsayalım. f, $[t_1,t_2]$ aralığında sürekli, (t_1,t_2) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir olduğundan Rolle teoremi gereği öyle bir $c \in (t_1,t_2)$ noktası vardır ki

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\frac{t_2^\alpha}{\alpha} - \frac{t_1^\alpha}{\alpha}} = 0.$$

eşitliği sağlanır. Buradan $f(t_1) = f(t_2)$ elde edilir ki bu, $t_1 < t_2$ noktaları $[a,b]$ aralığından keyfi seçildiğinden, f fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasını gerektirir. ■

Teorem 4.14. f ve g, 4.13. Teoremdeki şartları sağlasın. Eğer ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t)$ ise $f(t) = g(t) + c$ olacak şekilde bir c sabiti vardır.

İspat. İspat için 4.13. Teoremde f fonksiyonu yerine $f - g$ fonksiyonunu kullanmak yeterlidir. ■

Teorem 4.15. Kabul edelim ki $\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} > 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda, her $t \in (a,b)$ için f, eğer ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) > 0$ ise $[a,b]$ aralığında artan; ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) < 0$ ise $[a,b]$ aralığında azalandır.

İspat. 4.13.Teoremden keyfi seçilen $t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları için

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\frac{t_2^\alpha}{\alpha} - \frac{t_1^\alpha}{\alpha}}$$

eşitliği sağlayan bir $c \in (t_1, t_2)$ noktasının varlığı biliniyor. Kabulden $\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} > 0$ olduğu göz önüne alınarak, ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) > 0$ ise $t_2 > t_1$ için $f(t_2) > f(t_1)$ olacağından f artan; ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(c) < 0$ ise $t_2 < t_1$ için $f(t_2) > f(t_1)$ olacağından f azalandır. ■

Teorem 4.16. Varsayalım ki $\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve her $t \in [a,b]$ için ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) \leq {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t)$ olsun. Bu durumda eğer $f(a) = g(a)$ ise $f(t) \leq g(t)$; eğer $f(b) = g(b)$ ise $f(t) \geq g(t)$ olur.

İspat. 4.15. Teoremde f fonksiyonu yerine $g - f$ fonksiyonu alınarak kolayca görülür. ■

Teorem 4.17. Kabul edelim ki $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ iki defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t > 0$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ olmak üzere aşağıdaki durum geçerlidir:

$$
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta,\gamma} \left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta,\gamma} f \right)(t) \neq {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1+\alpha_2,\beta,\gamma} f(t).
$$

İspat. (4.12) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta,\gamma} \left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta,\gamma} f \right)(t) &= {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta,\gamma} \left(\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} t^{1-\alpha_2} f'(t) \right) \\
&= \left(\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \right)^2 t^{1-\alpha_1} \left(t^{1-\alpha_2} f'(t) \right)' \\
&= \left(\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \right)^2 t^{1-\alpha_1-\alpha_2} \left((1-\alpha_2) f'(t) + t f''(t) \right)
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1+\alpha_2,\beta,\gamma} f(t) = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} t^{1-\alpha_1-\alpha_2} f'(t) \tag{4.14}
$$

yazılabilir. (4.13) ve (4.14) eşitliklerinden ispat açıktır. ■

Sonuç 4.18. 4.17. Teoremin şartları sağlansın. Bu durumda

$$
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta,\gamma} \left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta,\gamma} f \right)(t) \neq {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta,\gamma} \left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta,\gamma} f \right)(t)
$$

olacağı aşikârdır.

Aşağıdaki tanım kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev operatörünün mertebesi olan α değerini $(0,1)$ aralığında olmaktan kurtarır.

Tanım 4.19. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olmak üzere α. mertebeden kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi eğer aşağıdaki limit mevcutsa

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f^{(n)}\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{n-\alpha})\big) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} \tag{4.15} $$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 4.20. 4.19. Tanımın şartlarına ek olarak f fonksiyonu $(n+1)$ defa türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f(t) = \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t) \tag{4.16} $$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bunun için (4.15) eşitliğinin

$$ \begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f^{(n)}\big(\Gamma(\gamma)t\ {}_i\mathcal{M}_{p,q}^{\beta,\gamma}(\varepsilon t^{n-\alpha})\big) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} \\ &= {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha-n,\beta,\gamma} f^{(n)}(t) \end{aligned} $$

biçiminde yazılabildiğini görmek yeterlidir. ■

Örnek 4.21. $\alpha \in (2,3]$ olmak üzere $e^{\lambda t}$ fonksiyonunun Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türevi

$$ \begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;2} e^{\lambda t} = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha-2,\beta,\gamma}(e^{\lambda t})'' &= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} t^{3-\alpha}(e^{\lambda t})''' \\ &= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \lambda^3 t^{3-\alpha} e^{\lambda t} \\ &= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \lambda^3 t^{3-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \lambda^3 t^{3-\alpha} E_{1,1}(\lambda t) \end{aligned} $$

olarak elde edilir.

4.3. $\mathcal{M}$-Kesirli İntegral Operatörü ve Özellikleri

Kısıtlanmış $\mathcal{M}$-kesirli türev operatörüne karşılık gelen $\mathcal{M}$-kesirli integral operatörünün

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)\right) = f(t) $$

eşitliği sağlayacak şekilde tanımlanması gerekir. $F(t) = \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun türevlenebilir bir fonksiyon olduğu varsayılırsa (4.12) eşitliğinden

$$ f(t) = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(F(t)\right) = \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}t^{1-\alpha}\frac{dF(t)}{dt} $$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin $a_n \neq 0,\ (n = 1, 2, \ldots, p)$ için bir çözümü

$$ F(t) = \frac{c_1\cdots c_q}{a_1\cdots a_p}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt $$

biçiminde elde edilir. Böylece aşağıdaki tanıma ulaşılır.

Tanım 4.22. $a \geq 0$ ve $t \geq a$ olmak üzere f, $(a, t]$ aralığında tanımlansın. $\alpha \in (0, 1)$ için f fonksiyonunun α. mertebeden $\mathcal{M}$-kesirli integrali $a_n \neq 0,\ (n = 1, 2, \ldots, p)$ olmak üzere

$$ \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) := \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left[\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ c_1 & \cdots & c_q \end{matrix};\beta,\gamma\right]f(t) = \frac{c_1\cdots c_q}{a_1\cdots a_p}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t\frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \quad (4.17) $$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 4.23. $\mathcal{M}$-kesirli integral operatörünün tanımından, integral operatörünün lineerliği ve $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(a) = 0$ eşitliğini sağladığı kolayca görülebilir. Ayrıca eğer $f(t) \geq 0$ ise $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t) \geq 0$ olur.

Çalışmanın devamında $n = 1, 2, \ldots, p$ için $a_n \neq 0$ kabul edilecektir.

Teorem 4.24. $a > 0,\ \alpha \in (0, 1)$ ve $f,\ \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)$ var olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun. O halde her $t \geq a$ için ${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(t)\right) = f(t)$ olur.

İspat. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)$ türevlenebilirdir. (4.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) &= \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) \\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx\right) \end{aligned}$$

olup Leibniz kuralı kullanılarak

$$ {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t)$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.25. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. Bu durumda her $t>a$ için

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = f(t)-f(a)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\mathcal{M}$-kesirli integral operatörünün tanımından

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = \frac{c_1\cdots c_q}{a_1\cdots a_p}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t \frac{{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(x)}{x^{1-\alpha}}dx$$

olur. f fonksiyonu türevlenebilir olduğudan (4.12) eşitliği kullanılarak

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = \int_a^t \frac{df(x)}{dx}dx$$

sonucuna ulaşılır. Tamsayı mertebeden türevler için analizin esas teoremi kullanılarak

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = f(t)-f(a)$$

olduğu gösterilir. ■

Sonuç 4.26. Eğer $f(a)=0$ ise aşağıdaki sonuç açıktır:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)\right) = f(t).$$

Teorem 4.27. $a \geq 0,\ t \geq a,\ \alpha, \nu \in (0,1)$ ve $f,\ \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t),\ \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(t)$ integralleri var olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(t) \right) \neq \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha+\nu,\beta,\gamma} f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (4.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(t) \right) &= \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \\
&= \left(\frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \right)^2 \int_a^t \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_a^x \frac{f(s)}{s^{1-\nu}} ds dx \\
&= \left(\frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \right)^2 \int_a^t \frac{f(s)}{s^{1-\nu}} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{s^\alpha}{\alpha} \right) ds \\
&= \left(\frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \right)^2 \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \int_a^t \frac{f(s)}{s^{1-\nu}} - \frac{1}{\alpha} \int_a^t \frac{f(s)}{s^{1-\alpha-\nu}} \right) ds
\end{aligned}$$

olup bu

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \left(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(t) \right) = \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\nu,\beta,\gamma} f(t) - \frac{1}{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha+\nu,\beta,\gamma} f(t) \right)$$

biçiminde de yazılabilir. Ancak

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha+\nu,\beta,\gamma} f(t) = \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha-\nu}} dx$$

biçimindedir. Böylece eşit olmadıkları görülür. ∎

Teorem 4.28. $0 < a < b$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} > 0$ için

$$|\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f|(t) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} |f|(t).$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\mathcal{M}$-kesirli integral tanımında her iki yanın mutlak değerleri alınarak

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)| &= \left| \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \right| \\
&\leq \left| \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \right| \left| \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \right| \\
&\leq \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{|f(x)|}{x^{1-\alpha}} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.29. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $N = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ olsun. Bu durumda her $t \in [a,b],\ 0 < a < b,\ \alpha \in (0,1)$ ve $\frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} > 0$ için

$$|\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t)| \leq \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} N \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. 4.28. Teoremden

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f|(t) &\leq \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} |f|(t) \\
&= \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{|f(x)|}{x^{1-\alpha}} dx \\
&\leq \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} N \int_a^t x^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.30. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Bu durumda $d_\alpha t = \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} t^{\alpha-1} dt$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\, {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t)\, {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) d_\alpha t$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitliğin sol yanında $d_\alpha t$ yerine yazılırsa

$$\int_a^b f(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = \frac{c_1\cdots c_q}{a_1\cdots a_p}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\int_a^b \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) dt$$

elde edilir. Burada g türevlenebilir olduğundan (4.12) eşitliği kullanılarak

$$\int_a^b f(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}dt$$

sonucuna ulaşılır. Kısmi integrasyonla

$$\int_a^b f(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}dt$$

bulunur. Buradan $d_\alpha t$ ifadesine geri dönülerek

$$\int_a^b f(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \frac{a_1\cdots a_p}{c_1\cdots c_q}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_a^b g(t)t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt}d_\alpha t$$

elde edilir. Son olarak f türevlenebilir olduğundan (4.12) eşitliği kullanılarak

$$\int_a^b f(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} g(t) d_\alpha t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b g(t)\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} f(t) d_\alpha t$$

sonucuna ulaşılır. ■

Tanım 4.31. $a \geq 0$ ve $t \geq a$ olmak üzere f, $(a,t]$ aralığında tanımlansın. $\alpha \in (n, n+1)$ için f fonksiyonunun α. mertebeden $\mathcal{M}$-kesirli integrali $a_n \neq 0$, $(n = 1, 2, \ldots, p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f(t) &:= \mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n}\left[\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ c_1 & \cdots & c_q\end{matrix};\beta,\gamma\right] f(t) \\ &= \frac{c_1\cdots c_q}{a_1\cdots a_p}\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\underbrace{\int_a^t dt\int_a^t dt\cdots\int_a^t}_{n+1}\frac{f(t)}{t^{n+1-\alpha}}dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.32. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $t > a$ için $(n+1)$ defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha;n}\left({}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (4.16) ve (4.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha;n}\left({}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f\right)(t) &= \frac{c_1 \cdots c_q}{a_1 \cdots a_p} \frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t}_{n+1} \frac{{}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;n} f(t)}{t^{n+1-\alpha}} dt \\
&= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t}_{n+1} f^{(n+1)}(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu istenen sonucu verir. ■

Örnek 4.33. 4.21.Örnekteki fonksiyonu göz önüne alınsın ve $a = 0$ varsayılsın. Bu durumda

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha;2}\left({}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;2} e^{\lambda t}\right)(t) = e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{2} \frac{(e^{\lambda t})^{(k)}(0) t^k}{k!}$$

olup, $(e^{\lambda t})^{(k)}(0) = \lambda^k$ olacağından

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha;2}\left({}_{i}\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma;2} e^{\lambda t}\right)(t) &= e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+3}}{(k+3)!} \\
&= (\lambda t)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+4)} \\
&= (\lambda t)^3 E_{1,4}(\lambda t)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

4.4. $\mathcal{M}$-kesirli Türev Operatörü İçeren Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bu kısımda, $\mathcal{M}$-kesirli türev operatörü içeren bazı lineer kesirli diferansiyel denklemlerin genel çözümleri elde edilecektir. Bu çözümler sırasında basitlik açısından $a = 0$ kabul edilecektir. Ayrıca kısalığın hatrına $\mathcal{K} = \frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$ olarak alınacaktır.

Örnek 4.34. $u = u(t)$ bir $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir fonksiyon olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ için

$$
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} u(t) + p(t)u(t) = q(t) \tag{4.19}
$$

$\mathcal{M}$-kesirli diferansiyel denklemi ele alınsın. Eğer u aynı zamanda diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise (4.12) eşitliği kullanılarak (4.19) denklemi

$$
\frac{du(t)}{dt} + \frac{t^{\alpha-1} p(t)}{\mathcal{K}} u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\mathcal{K}} q(t)
$$

adi lineer diferansiyel denklemi şeklinde yazılabilir. Bu denkleme karşılık gelen integral çarpanı $\mu(t) = e^{\frac{1}{\mathcal{K}} \int \frac{p(t)}{t^{1-\alpha}} dt}$ olarak bulunur. Buradan C bir sabit olmak üzere, genel çözüm

$$
u(t) = e^{-\frac{1}{\mathcal{K}} \int \frac{p(t)}{t^{1-\alpha}} dt} \left[\frac{1}{\mathcal{K}} \int \frac{q(t)}{t^{1-\alpha}} e^{\frac{1}{\mathcal{K}} \int \frac{p(t)}{t^{1-\alpha}} dt} dt + C \right]
$$

biçiminde elde edilir. $\mathcal{M}$-kesirli integral operatör tanımından son eşitlik

$$
u(t) = e^{-\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} p(t)} \left[\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \left(q(t) e^{\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} p(t)} \right) + C \right] \tag{4.20}
$$

şeklinde de yazılabilir. Özel olarak $p(t) = -\lambda$ ve $q(t) = 0$ seçilirse (4.19) lineer $\mathcal{M}$-kesirli diferansiyel denklemi

$$
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} u(t) = \lambda u(t)
$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü (4.20) eşitliğinden $u(t) = Ce^{\frac{\lambda}{\alpha\mathcal{K}} t^\alpha}$ olarak bulunur. $e^t = {}_\infty\mathcal{M}_{1,1}^{1,1}(t)$ olduğundan, çözüm kısıtlanmış $\mathcal{M}$-serisi cinsinden

$$
u(t) = C {}_\infty\mathcal{M}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{\lambda}{\alpha\mathcal{K}} t^\alpha \right) \tag{4.21}
$$

biçiminde de yazılabilir.

(4.21) sonucunda $a_n = 1,\ c_m = 1,\ (n = 1,2,\ldots,p;\ m = 1,2,\ldots,q)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.21) çözümü

$$u(t) = C_\infty \mathcal{M}_{1,1}^{1,1}\left(\frac{\Gamma(\beta+\gamma)\lambda}{\Gamma(\gamma)\alpha}t^\alpha\right)$$

biçiminde yazılabilir.

Uyarı 4.35. Aynı problem [18, 65, 67] çalışmalarında da çözülmüş ancak sonuçlar işaret farkıyla hatalı yazılmıştır. Bu son çözümde $\gamma = 1$ alınırsa [65, 67] çalışmalarında bulunması gereken doğru çözüme, $\beta = \gamma = 1$ alınırsa [18] çalışmasında bulunması gereken doğru çözüme ulaşılır. Ayrıca bu çözüm $\alpha = \beta = \gamma = 1$ için karşılık gelen tamsayı mertebeden problemin çözümü ile de örtüşür.

$C = \lambda = 1$ ve $a_n = 1,\ c_m = 1,\ (n = 1,2,\ldots,p;\ m = 1,2,\ldots,q)$ olmak üzere, farklı α, β ve γ değerleri için (4.21) çözüm fonksiyonunun grafikleri tez çalışmasının ekindedir (bkz. syf. 69, Şekil 5.3).

Örnek 4.36. Bir boyutlu

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \tag{4.22}$$

ısı denklemi ile

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ u(x,0) = f(x), \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq L$$

başlangıç ve sınır şartları göz önüne alınsın. Burada k pozitif bir sabit, $\alpha \in (0,1]$, $u(x,t)$, $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} = {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$ olarak alınmıştır.

Eğer $u(x,t) = P(x)Q(t)$ biçiminde yazılabileceği kabul edilirse değişkenlerine ayırma yöntemi ile

$$\frac{d^2}{dx^2}P(x) - \xi P(x) = 0, \quad P(0) = 0,\ P(L) = 0 \tag{4.23}$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}Q(t) - k\xi Q(t) = 0 \tag{4.24}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada (4.23) bir Sturm-Liouville problemidir ve çözümü için üç durum söz konusudur: $\xi = 0$, $\mu > 0$ olmak üzere $\xi = \mu^2$ ve $\xi = -\mu^2$.

$\xi = 0$ ve $\xi = \mu^2$ için aşikâr çözüm bulunacağından $\xi = -\mu^2$ durumu incelenir. Böylece

$$\frac{d^2}{dx^2}P(x) + \mu^2 P(x) = 0, \quad P(0) = 0,\ P(L) = 0$$

probleminin aşikâr olmayan çözümü $\sin(\mu x) = 0$ ifadesinden $\mu = \frac{n\pi}{L}$ olmak üzere $P_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ biçiminde elde edilir. Ayrıca, (4.24) problemi ise

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}Q(t) + k\mu^2 Q(t) = 0$$

olup 4.34. Örnekte verilen probleme dönüşür. (4.20) eşitliğinde $p(t) = k\mu^2 = k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ alınırsa

$$Q_n(t) = e^{-\frac{1}{K}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{k}{\alpha} t^\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.22) ısı denkleminin çözümü $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ olmak üzere

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{1}{K}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{k}{\alpha} t^\alpha} \tag{4.25}$$

şeklinde bulunur.

(4.25) sonucunda $a_n = 1$, $c_m = 1$, $(n = 1, 2, \ldots, p;\ m = 1, 2, \ldots, q)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.25) çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{k}{\alpha} t^\alpha}$$

biçiminde yazılabilir.

Uyarı 4.37. Aynı problem [18, 67] çalışmalarında da çözülmüştür. Bu son çözüm, $\gamma = 1$ için [67] çalışmasında elde edilen çözümle, $\beta = \gamma = 1$ için [18] çalışmasında elde edilen çözümle ve $\alpha = \beta = \gamma = 1$ için tamsayı mertebeli klasik ısı denkleminden elde edilen çözüm ile örtüşür.

Örnek 4.38. 4.36. Örnekte eğer özel olarak $f(x) = \sin(x),\ L = \pi,\ k = 1$ alınırsa (4.25) eşitliğinden

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(nx)dx\right)\sin(nx)e^{-\frac{1}{K}\frac{n^2}{\alpha}t^{\alpha}}$$

sonucuna ulaşılır. İntegral değeri sadece $n = 1$ için sıfırdan farklı olduğundan problemin çözümü

$$u(x,t) = \sin(x)e^{-\frac{1}{K}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir. Burada $a_n = 1,\ c_m = 1,\ (n = 1,2,\ldots,p;\ m = 1,2,\ldots,q)$ olmak üzere $\alpha = \beta = \gamma = 1$ seçilirse elde edilecek çözüm karşılık gelen tamsayı mertebeli klasik ısı denkleminden elde edilen çözüm ile aynı olacaktır.

Sabit $a_n = 1, c_m = 1, (n = 1,2,\ldots,p; m = 1,2,\ldots,q)$ değerleri ve çeşitli $\alpha,\ \beta, \gamma$ değerleri için (4.26) çözüm fonksiyonunun grafikleri tez çalışmasının ekindedir (bkz. syf. 70, Şekil 5.4).

Örnek 4.39. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t > a > 0$ olmak üzere

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f\right) + p(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f + q(t)f = 0 \tag{4.27}$$

$\mathcal{M}$-kesirli diferansiyel denklemi verilsin. Burada p ve q, t değişkeninin $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir fonksiyonları olsunlar. Varsayalım ki f_1, (4.27) denkleminin bir çözümü olsun. Kabul edelim ki, (4.27) denkleminin lineer bağımsız ikinci çözümü $v = v(t)$, $\mathcal{M}$-diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f_2(t) = v(t)f_1(t)$ biçiminde olsun. Bu durumda zincir kuralından

$$\begin{aligned}
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_2(t) =& {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}(vf_1)(t) = v(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t) + f_1(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t),\\
{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_2\right)(t) =& {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(v(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t) + f_1(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)\right)\\
=& v(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1\right)(t) + {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)\\
&+ f_1(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v\right)(t) + {}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t){}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilenler (4.27) eşitliğinde yerlerine yazılır ve f_1 fonksiyonunun denklemin bir çözümü olduğu hatırlanırsa

$$f_1(t)_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left({}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v\right)(t)+2_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t)_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)+p(t)f_1(t)_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)=0$$

sonucuna ulaşılır. $w(t)={}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}v(t)$ olsun. Bu durumda denklem

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}w(t)+\left(p(t)+2\frac{{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t)}{f_1(t)}\right)w(t)=0$$

biçimine dönüşür. 4.34. Örnekten bu denklemin çözümü

$$w(t)=Ce^{-\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(p(t)+2\frac{{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}f_1(t)}{f_1(t)}\right)}=C\frac{e^{-\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}p(t)}}{f_1^2(t)},\quad (C\in\mathbb{R})$$

olarak bulunur. Bu çözüm,

$$v(t)=C\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{e^{-\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}p(t)}}{f_1^2(t)}\right)$$

denklemini sağlar ve böylece lineer bağımsız ikinci çözüm

$$f_2(t)=Cf_1(t)\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{e^{-\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}p(t)}}{f_1^2(t)}\right)\tag{4.28}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.40. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t>a>0$ için

$${}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}f-t^{\frac{1}{3}}\,{}_i\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}f=0$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklem 4.39. Örneğin $\alpha=\frac{2}{3},\ p(t)=-t^{\frac{1}{3}}$ ve $q(t)=0$ alınmış bir özel halidir. Açıktır ki $f_1(t)=1$ bu denklemin bir çözümüdür. Böylece (4.28) eşitliği kullanılarak ikinci çözüm

$$f_2(t)=C\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}\left(e^{\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}\left(t^{\frac{1}{3}}\right)}\right)$$

şeklinde bulunur.

Buradan $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}$ tanımı kullanılarak

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3}}(t^{\frac{1}{3}}) = \frac{t-a}{\mathcal{K}}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$\begin{aligned} f_2(t) &= C\mathcal{I}_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3},\beta,\gamma}\left(e^{\frac{t-a}{\mathcal{K}}}\right) \\ &= \frac{C}{\mathcal{K}} e^{-\frac{a}{\mathcal{K}}} \int_a^t x^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{\mathcal{K}}} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $u = -\frac{x}{\mathcal{K}}$ dönüşümü ile ikinci çözüm

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{C}{\mathcal{K}^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{a}{\mathcal{K}}} \left[\int_{-\frac{a}{\mathcal{K}}}^{-\frac{t}{\mathcal{K}}} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du\right] \\ &= \frac{C}{\mathcal{K}^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{a}{\mathcal{K}}} \left[\int_{-\frac{a}{\mathcal{K}}}^{\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du - \int_{-\frac{t}{\mathcal{K}}}^{\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du\right], \ (t > a > 0) \\ &= \frac{C}{\mathcal{K}^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{a}{\mathcal{K}}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, -\frac{a}{\mathcal{K}}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, -\frac{t}{\mathcal{K}}\right)\right] \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Burada Γ tam olmayan gama fonksiyonudur ve $\delta > 0$ için

$$\Gamma(\delta, \nu) = \int_{\nu}^{\infty} t^{\delta-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlanır. Böylece denklemin genel çözümü

$$f(t) = 1 + \frac{C}{\mathcal{K}^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{a}{\mathcal{K}}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, -\frac{a}{\mathcal{K}}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, -\frac{t}{\mathcal{K}}\right)\right] \tag{4.29}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç $a_n = 1$, $c_m = 1$, $(n = 1, 2, \ldots, p;\ m = 1, 2, \ldots, q)$ ve $C = \beta = \gamma = 1$ alındığında [27] çalışmasındaki sonuçla örtüşür.

$a = 1$, $C = 1$, $\alpha = \frac{2}{3}$ ve $\frac{a_1 \cdots a_p}{c_1 \cdots c_q} = -1$ olmak üzere farklı β ve γ değerleri için çözüm fonksiyonunun grafiği tez çalışmasının ekindedir (bkz. syf. 71, Şekil 5.5).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

ScienceDirect üzerinden yapılan aramalarda 2016 yılından 2019 Aralık ayına kadar adında, özetinde ya da anahtar kelimelerinde “Caputo-Fabrizio” geçen 85, “Atangana-Baleanu” geçen 139, “conformable derivative” geçen 36, “M-fractional” geçen 4 yayına rastlanmıştır. Bu bilgi hem farklı çekirdekli kesirli operatörler konusunun ne kadar popüler olduğunun hem de uyumlu kesirli türev konusunda yapılan çalışmaların henüz çok yeni olduğunun bir göstergesi niteliğindedir. Ulusal Tez Merkezinde yapılan aramalarda ise konuyla alakalı sadece 5 adet Doktora ve 19 adet Yüksek Lisans tez çalışmasına rastlanmıştır. Bu tez çalışmasının bu alanda oldukça az sayıda çalışma yapılmış olması sebebiyle de, ileride yapılacak olan çalışmalara kaynak teşkil etmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu tez çalışması aslında yukarıda bahsedilen ve 3 ile 4. Bölümlerde ayrıntılı olarak incelenen iki ayrı problem üzerine yapılan çalışmaları içerir. Her iki problemin de genel amacı önceden tanımlanmış olan benzer kesirli operatörlerden çok daha genel bir yapıya sahip yeni kesirli operatörler tanımlayarak, bu operatörlerin daha geniş yelpazede yer alan problemlerinin çözümlerinde kullanılabilir olmasını sağlamaktır.

3. Bölümde, çekirdeğinde üstel ve confluent hipergeometrik fonksiyon içeren kesirli türev ve integral operatörleri tanımlanarak çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca iki örnek üzerinden, bu tür kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerine de ulaşılmıştır. Ancak uygulama örneklerinden de görülebileceği gibi, bu tür kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin hepsinin analitik çözümlerine ulaşmak, ters Laplace dönüşümünün her zaman hesaplanamayacak olmasından dolayı mümkün görünmemektedir. Yine de benzer çalışmalar incelendiğinde bu tür problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilebileceği anlaşılmaktadır.

4. Bölümde ise klasik türev tanımında M-serisi kullanılarak yeni bir uyumlu kesirli türev operatörü tanımlanmıştır. Bu operatörün de çeşitli özellikleri incelenmiş ve klasik türev operatörü için geçerli olan pek çok özelliği sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca klasik analizde yer alan bazı önemli teoremler bu operatör için de verilmiştir. Son olarak kesirli türev operatöründen yararlanılarak kesirli integral operatörü tanımlanmış ve iki operatör arasındaki ilişkiler de ele alınmıştır. Bununla birlikte, bu tür kesirli türev belli şartlar altında klasik

türevle ilişkili olduğundan, kesirli türev içeren diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerine kolaylıkla ulaşılabileceği çeşitli örneklerle gösterilmiştir.

Burada elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, uyumlu kesirli operatörlerin uygulamada araştırmacıya diğer kesirli operatörlere kıyasla kolaylık sağladığı söylenebilir. Klasik türev operatörüyle olan ilişkisi kullanılarak, kesirli diferensiyel denklemler değişken katsayılı klasik diferensiyel denklemlere dönüştürülebilirler. Bu sayede kesirli problemlerin çözümlerinin geometrik ve fiziksel durumları, klasik problemlerle benzer olarak yorumlanabilir.

İlerleyen çalışmalarda uyumlu kesirli türev operatörlerinin klasik türev ile olan ilişkisinden yararlanarak, çeşitli kesirli problemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği ile salınımlı olup olmadığı incelenebilir; analitik ve sayısal çözümlerine ulaşmak için kullanılacak yöntemler geliştirilebilir. Bununla birlikte, çeşitli şekillerde literatürde yer alan operatörlerden daha genel yapıya sahip yeni kesirli operatörler de tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Altın, A., 2011, *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara.

[2]. Andrews, L.C., 1985, *Special functions for engineers and applied mathematicians*, Macmillan Publishing Company, New York.

[3]. Atangana, A., Baleanu, D., 2016, New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel:Theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20 (2), 763–769.

[4]. Atangana, A., Baleanu, D., Alsaedi, A., 2015, New properties of conformable derivative, *Open Math.*, 13, 889–898.

[5]. Atangana, A., Gómez-Aguilar, J.F., 2017, Hyperchaotic behavior obtained via a nonlocal operator with exponential decay and Mittag-Leffler laws, *Chaos Solitons Fractals*, 102, 285–294.

[6]. Baleanu, D., Agarwal, P., 2014, On generalized fractional integral operators and the generalized Gauss hypergeometric functions, *Abstr. Appl. Anal.*, Volume 2014, Article ID 630840.

[7]. Bailey, W.N., 1935, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 32, Cambridge University Press, Cambridge.

[8]. Butzer, P.L., Jansche, A., 1997, A direct approach to the Mellin transform. *J.Fourier Anal. Appl.*, 3, 325–376.

[9]. Bozer, M., Özarslan, M.A., 2013, Notes on generalized gamma, beta and hypergeometric functions, *J. Comput. Anal. Appl.*, 15, 1194–1201.

[10]. Caputo, M., Fabrizio, M., 2015, A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.,* 1 (2), 73–85.

[11]. Carlson, B.C. (1977). *Special functions of applied mathematics*. Academic Press, New York.

[12]. Chaudhry M.A., Zubair, S.M., 1994, Generalized incomplete gamma functions and applications, *J. Comput. Appl. Math.*, 55, 99–124.

[13]. Chaudhry, M.A.,; Qadir, A., Rafique, M., Zubair, S.M., 1997, Extension of Euler's Beta Function, *J. Comput. Appl. Math.*, 78 (1), 19–32.

[14]. Chaudhry, M.A., Zubair, S.M., 2002, *On a class incomplete Gamma functions with applications*, Chapman&Hall/CRC, Saudi Arabia.

[15]. Chaudhry, M.A., Qadir, A., Srivastava, H.M., Paris, R.B., 2004, Extended hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Appl. Math. Comput.*, 159, 589–602.

[16]. Choi, J., Agarwal, P., Jain, S., 2015, Certain fractional integral operators and extended generalized Gauss hypergeometric functions, *Kyungpook Math. J.*, 55 (3), 695–703.

[17]. Choi, J., Agarwal, P., 2014, Certain integral transform and fractional integral formulas for the generalized Gauss hypergeometric functions, *Abstr. Appl. Anal.*, Volume 2014, Article ID 735946.

[18]. Çenesiz Y., Kurt A., 2015, The solutions of time and space conformable fractional heat equations with conformable Fourier Transform, *Acta Univ. Sapientiae Math.*, 7, 130–140.

[19]. Çetinkaya, A., Yağbasan, M.B., Kıymaz, İ.O., 2016, The extended Srivastava's triple hypergeometric functions and their integral representations, *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 4860–4866.

[20]. Çetinkaya, A., Kıymaz, İ.O., Agarwal, P., Agarwal, R.P., 2018, A comparative study on generating function relations for generalized hypergeometric functions via generalized fractional operators, *Advances in Difference Equations*, 2018:156.

[21]. Das, S., 2011, *Functional Fractional Calculus*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[22]. Erdélyi, A., 1954, *Tables of Integral Transform*, Vol. I, McGraw-Hill Book Company, New York.

[23]. Gomez-Aguilar, J.F., Atangana, A., 2017, New insight in fractional differentiation: Power, exponential decay and Mittag-Leffler laws and applications, *EPJ Plus*, 132 (13), 1–21.

[24]. Gorenflo R., Mainardi F., 2000, Essentials of Fractional Calculus, Preprint submitted to MaPhySto Center, preliminary version.

[25]. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V., 2014, *Mittag-Leffler Functions, Related Topic and Applications*, Springer, Berlin.

[26]. Hilfer, R., 2000, *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, Singapore.

[27]. Iyiola, O.S., Nwaeze, E.R., 2016, Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2 (2), 115–122.

[28]. İlhan, E., Kıymaz, İ.O., 2019, A generalization of truncated M-fractional derivative and applications to fractional differential equations, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, (basım aşamasında).

[29]. İlhan, E., Kıymaz, İ.O., 2019, Fractional operators with power and confluent hypergeometric function in their kernels, *Full Text Book: The fourth international conference on computational mathematics and engineering sciences*, ISBN:77733, 380–388.

[30]. Katugampola U.R., 2014, A new fractional derivative with classical properties, arXiv:1410.6535v2.

[31]. Khalil R., Horani M.A., Yousef A., 2014, Sababheh M., A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 264, 65–70.

[32]. Kıymaz, İ.O., Çetinkaya, A., Agarwal, P., 2016, An extension of Caputo fractional derivative operator and its applications, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9, 3611–3621.

[33]. Kıymaz, İ.O., Çetinkaya, A., Agarwal, P., 2017, A Study on the k-generalizations of Some Known Functions and Fractional Operators, *Journal of Inequalities and Special Functions*, 8 (4), 31–41.

[34]. Kıymaz, İ.O., Çetinkaya, A., Agarwal, P., Jain, S., 2017, *On a New Extension of Caputo Fractional Derivative Operator: Advances in Real and Complex Analysis with Applications*, Birkhäuser, Basel, 261–275.

[35]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujilli J.J., 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, North-Holland Mathematical Studies 204, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands.

[36]. Kober, H., 1940, On fractional integrals and derivatives, *Quart. J. Math.*, 11, 193–211.

[37]. Kumar D., Saxena R.K., 2015, Generalized fractional calculus of the M-Series involving F3 hypergeometric function, *Sohag J. Math.,* 2 (1), 17–22.

[38]. Lee, D.M, Rathie, A.K., Parmar, R.K., Kim, Y.S., 2011, Generalization of extended beta function, hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Honam Mathematical J.*, 33 (2), 187–206.

[39]. Losada, J., Nieto, J.J., 2015, Properties of a new fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 1 (2), 87–92.

[40]. Loverro, A., 2004, *Fractional calculus: history, definition and applications for the engineer*, University of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering, IN, USA.

[41]. McBride, C.C., 1979, *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*, Piman Publishing Limited, London.

[42]. Miller, A.R., 1998, Remarks on a generalized beta function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 100, 23–32.

[43]. Miller, K.S., Ross, B., 1993, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane Toronto and Singapore.

[44]. Mittag-Leffler, G.M., 1903, Une generalisation de I'integrale de Laplace-Abel, *C.R. Math. Acad. Sci. Soc R. Can.*, 137, 537–539.

[45]. Mittag-Leffler G.M., 1903, Sur la nouvelle fonction $E(x)$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 137, 554–558.

[46]. Oldham, K., Spanier, J., 1974, *The fractional calculus*, Academic Press, New York.

[47]. Özarslan, M.A., 2012, Some remarks on extended hypergeometric, extended confluent hypergeometric and extended Appell's functions, *J. Comput. Anal. Appl.*, 14, 1148–1153.

[48]. Özarslan, M.A., Özergin, E., 2010, Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator, *Math. Comput. Modelling*, 52, 1825–1833.

[49]. Özergin, E., Özarslan, M.A., Altın, A., 2011, Extension of gamma, beta and hypergeometric functions, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 4601–4610.

[50]. Prabhakar, T.R., (1969), Two singular integral equations involving confluent hypergeometric functions, *Proc. Comb. Phil. Soc.*, 66 (1), 71–89.

[51]. Prabhakar, T.R., 1971, A singular integral equation with a generalized Mittag Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 19, 7–15.

[52]. Podlubny, I., 1999, *Fractional differential equations*, Academic Press, New York.

[53]. Rainville, E.D., 1960, *Special functions*, Macmillan Company, New York.

[54]. Ross, S.L., 1980, *Introduction to ordinary differential equations*, John Wiley and Sons.

[55]. Salahshour, S., Ahmadian, A., Abbasbandy, S., Baleanu, D., 2018, M-fractional derivative under interval uncertainty: Theory, properties and applications, *Chaos Solitons Fractals*, 117, 84-93.

[56]. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., 1993, *Fractional Integrals and Derivatives:Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.

[57]. Sharma M., 2008, Fractional integration and fractional differentiation of the M-series, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 11 (2), 187–191.

[58]. Sharma M., Jain R., 2009, A note on a generalized M-series as a special function of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 12 (4), 449–452.

[59]. Slater, L.J., 1960, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[60]. Slater, L.J., 1966, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge.

[61]. Srivastava, H.M., Chaudhry, M.A., & Agarwal, R.P. (2012). The incomplete Pochhammer symbols and their applications the hypergeometric and related functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, *23*, 659–683.

[62]. Srivastava, H.M., Çetinkaya, A., Kıymaz, İ.O., 2014, A certain generalized Pochhammer symbol and its applications to hypergeometric functions, *Applied Mathematics and Computation*, 226, 484–491.

[63]. Srivastava, H.M., Karlsson, P.W., 1985, *Multiple gaussian hypergeometric series*, Halsted Press, John Wiley and Sons, New York.

[64]. Srivastava, H.M., Manocha, H.L., 1984, *A treatise on generating functions*, Halsted Press Wiley, New York.

[65]. Sousa J.V.C., de Oliveira E.C., 2017, On the local M-derivative, arXiv: 1704.08186v3.

[66]. Sousa J.V.C., de Oliveira E.C., 2017, Mittag-Leffler Functions and the Truncated $\mathcal{V}$-fractional Derivative, *Mediterr. J. Math.,* 14 (6), 1–24.

[67]. Sousa J.V.C., de Oliviera E.C., 2018, A new truncated M-fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties, *Inter. of Jour. Analy. and Appl.*, 16 (1), 83–96.

[68]. Sousa J.V.C., de Oliviera E.C., 2018, A Truncated ν-Fractional Derivative in R^n, *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 8, 49-64.

[69]. Şahin, R., Altın, A., 2011, An extension of F_1, F_2, F_3 Appell's hypergeometric functions, *Ars. Combin.*, 100, 97–105.

[70]. Wang. Z.X., Guo, D.R., 1989, *Special functions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

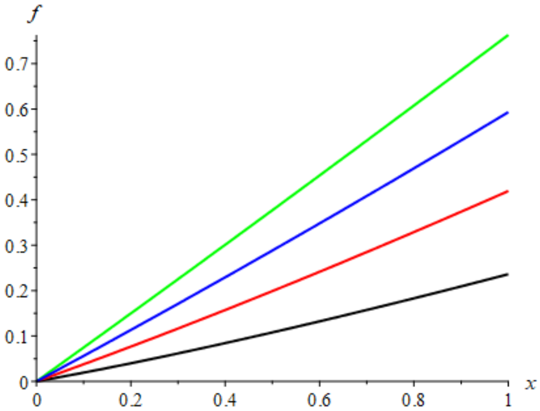
[71]. Wiman A., 1905, Uber den Fundamental satz in der Theorie de Funktionen $E(x)$, *Acta Math.*, 29, 191–201.

[72]. Yang, X.J., Srivastava, H.M., Macchado, A.T., 2016, *A new fractional derivative without singular kernel*, Thermal Science, 20 (2), 753–756.

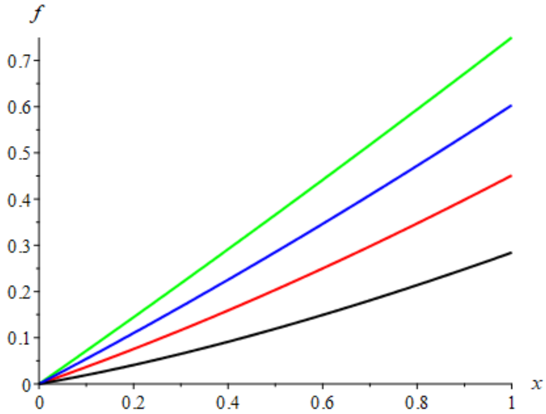
[73]. Yépez-Martínez, H., Gómez-Aguilar, J. F., 2018, Local M-derivative of order α and the modified expansion function method applied to the longitudinal wave equation in a magneto electro-elastic circular rod, *Optical and Quantum Electronics*, 50:375.

EKLER

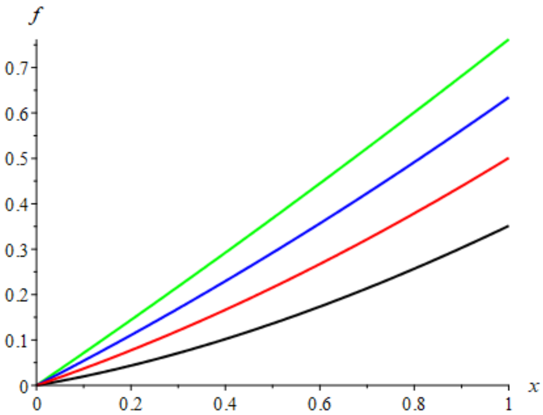
Ek 1. Uygulama Problemlerine Ait Çözüm Fonksiyonlarının Grafikleri



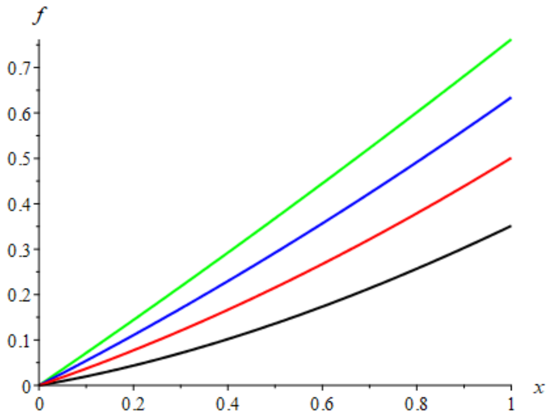
(a) $\beta = 0.8$ ve $\gamma = 0.2$



(b) $\beta = 0.6$ ve $\gamma = 0.4$

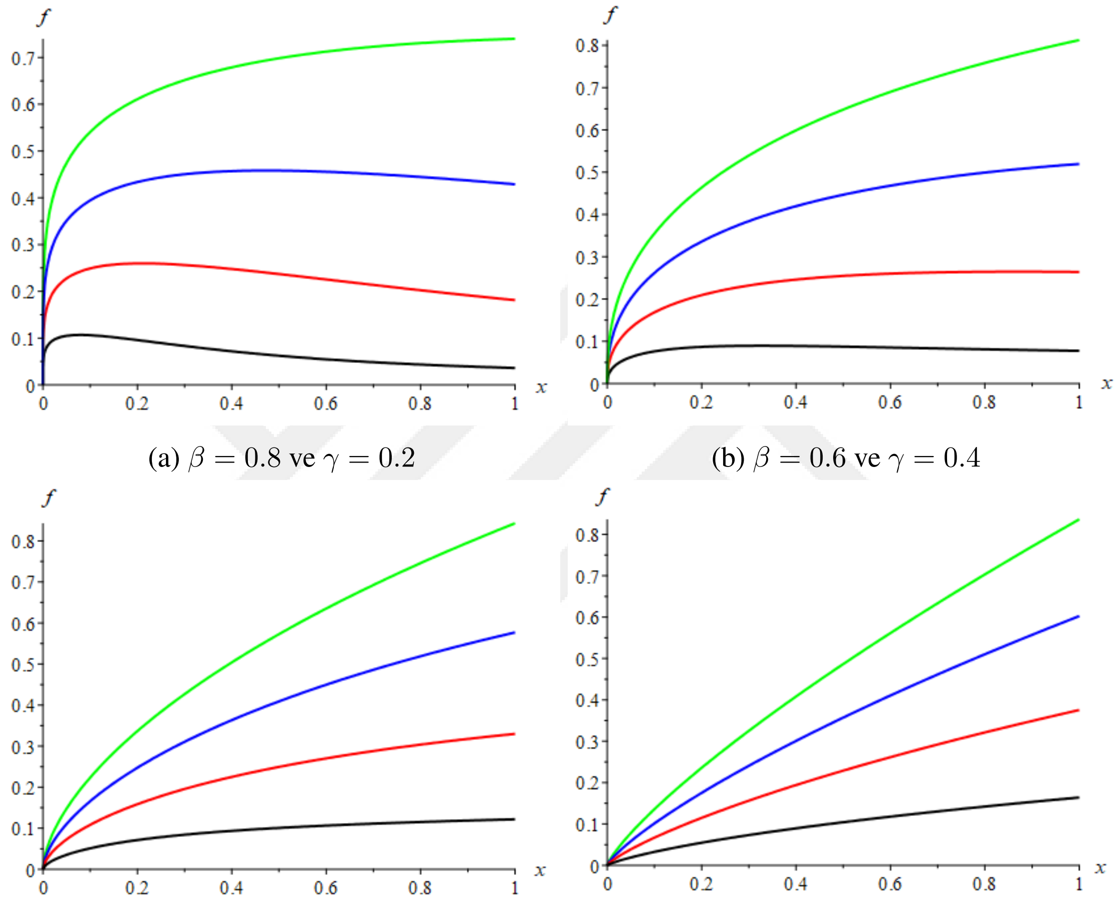


(c) $\beta = 0.4$ ve $\gamma = 0.6$



(d) $\beta = 0.2$ ve $\gamma = 0.8$

Şekil 5.1: (3.21) çözüm fonksiyonunun $\alpha = 0.2$ (yeşil), $\alpha = 0.4$ (mavi), $\alpha = 0.6$ (kırmızı) ve $\alpha = 0.8$ (siyah) değerlerine karşılık elde edilen grafikleri



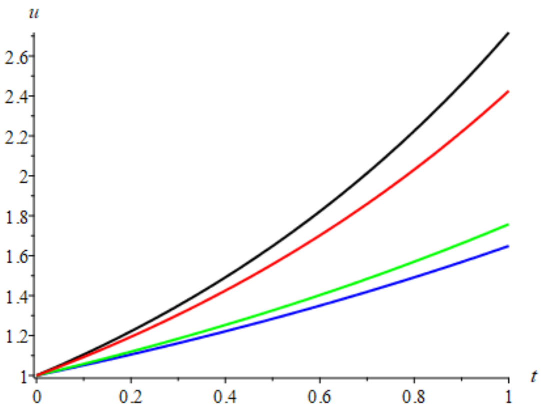
(a) $\beta = 0.8$ ve $\gamma = 0.2$

(b) $\beta = 0.6$ ve $\gamma = 0.4$

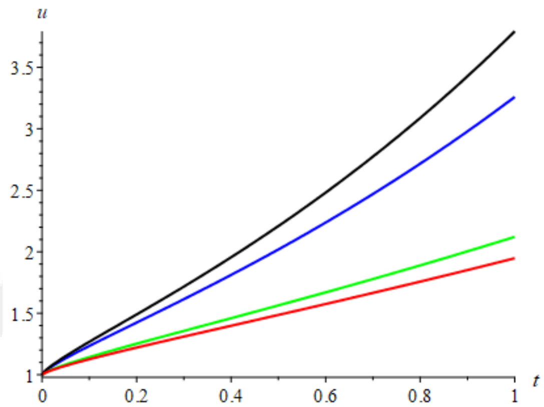
(c) $\beta = 0.4$ ve $\gamma = 0.6$

(d) $\beta = 0.2$ ve $\gamma = 0.8$

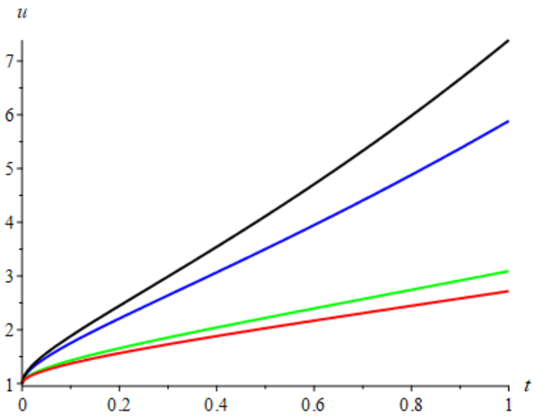
Şekil 5.2: (3.22) çözüm fonksiyonunun $\alpha = 0.2$ (yeşil), $\alpha = 0.4$ (mavi), $\alpha = 0.6$ (kırmızı) ve $\alpha = 0.8$ (siyah) değerlerine karşılık elde edilen grafikleri



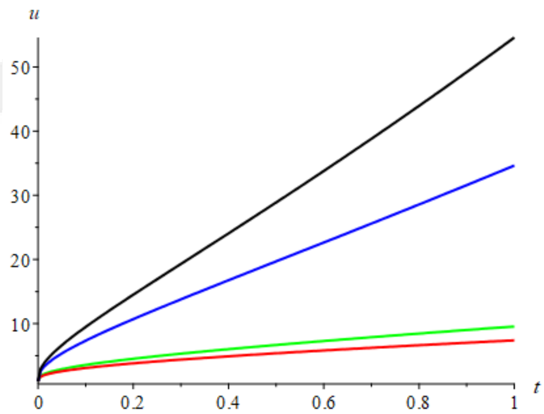
(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 0.75$

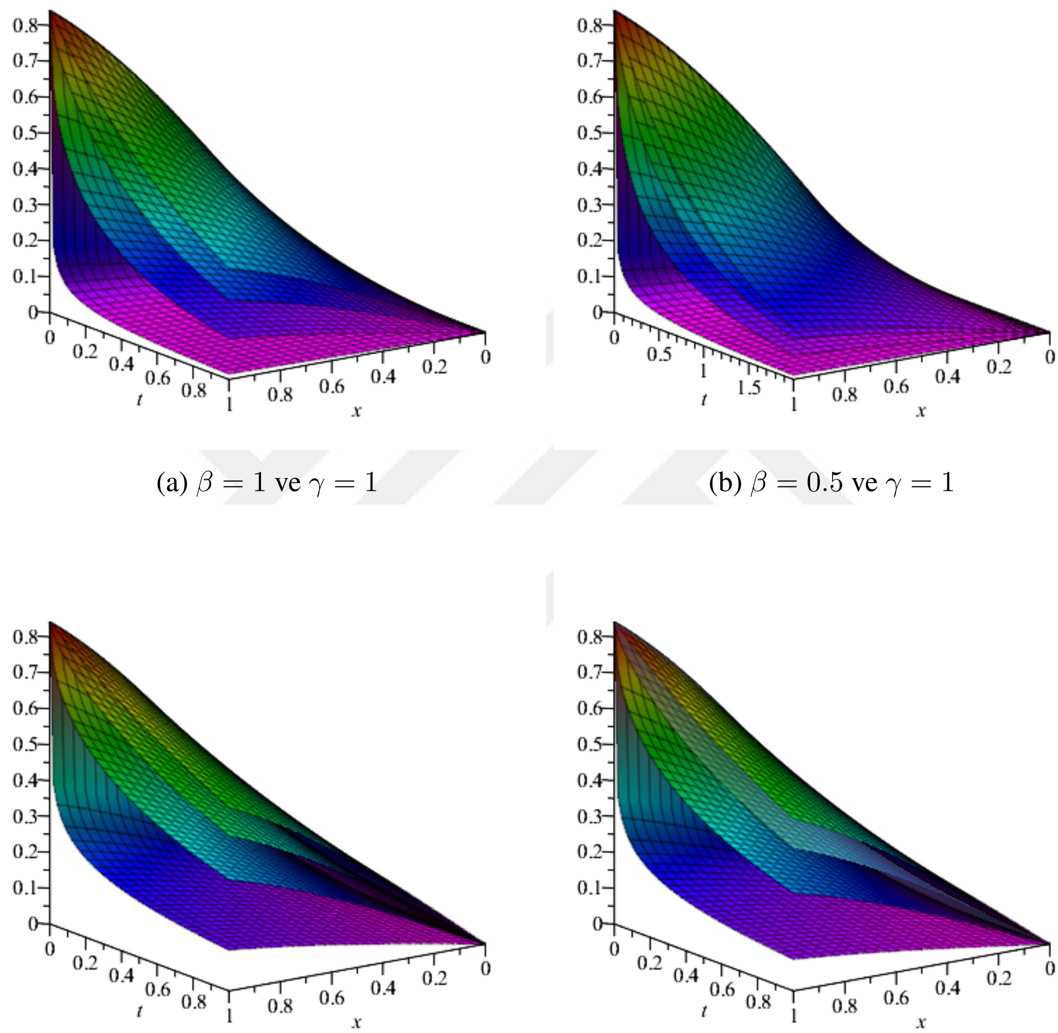


(c) $\alpha = 0.5$



(d) $\alpha = 0.25$

Şekil 5.3: (4.21) çözüm fonksiyonunun $\beta = \gamma = 1$ (siyah), $\beta = 0.5, \gamma = 1$ (kırmızı), $\beta = 1, \gamma = 0.5$ (mavi) ve $\beta = 0.5, \gamma = 0.5$ (yeşil) değerleri için elde edilen grafikleri.



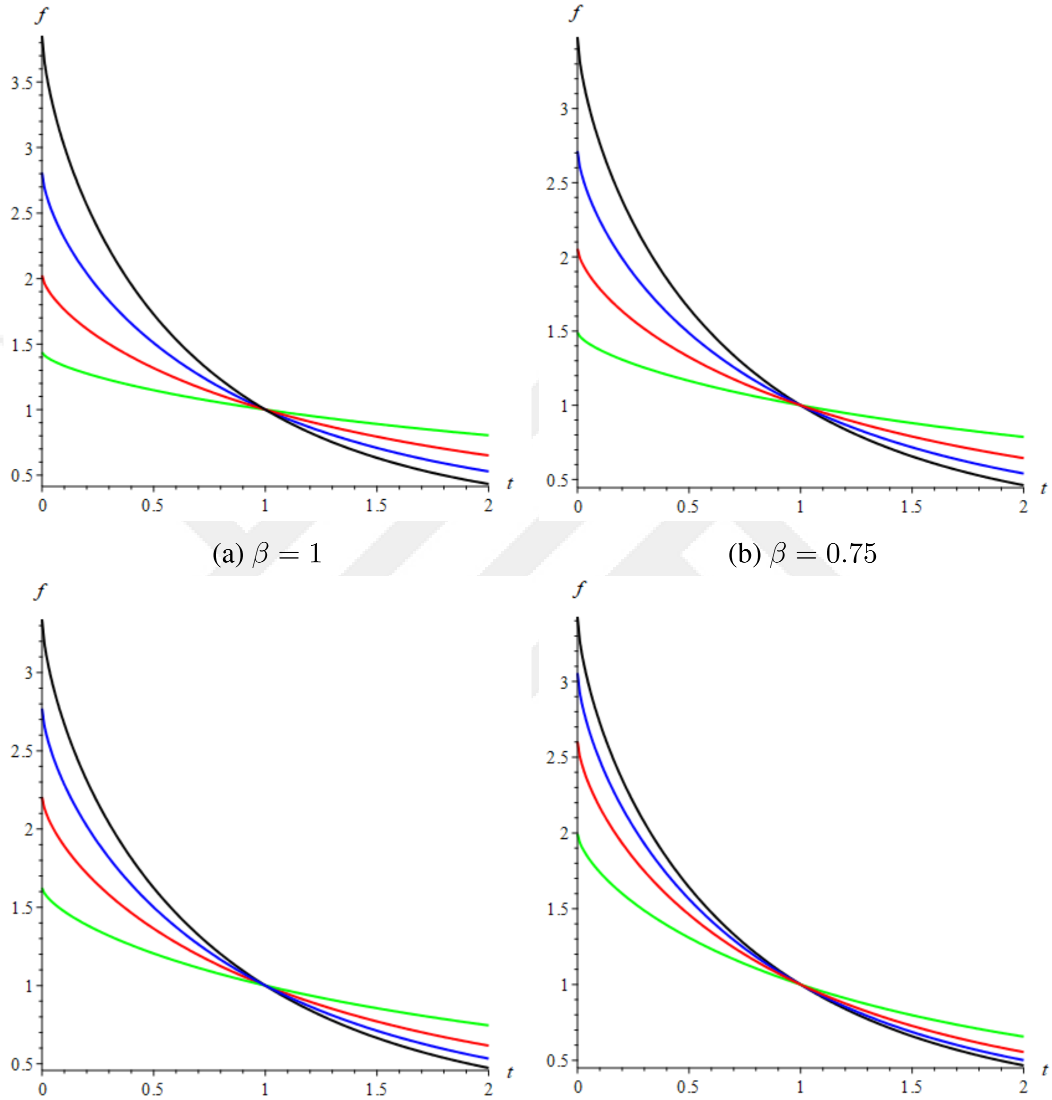
(a) $\beta = 1$ ve $\gamma = 1$

(b) $\beta = 0.5$ ve $\gamma = 1$

(c) $\beta = 1$ ve $\gamma = 0.5$

(d) $\beta = 0.5$ ve $\gamma = 0.5$

Şekil 5.4: (4.26) çözüm fonksiyonunun $\alpha = 0.25$ değerinden (en alt), $\alpha = 1$ değerine (en üst) 0.25 artışla elde edilen grafikleri.



(a) $\beta = 1$ (b) $\beta = 0.75$

(c) $\beta = 0.5$ (d) $\beta = 0.25$

Şekil 5.5: (4.29) denkleminin $\gamma = 1$ (siyah); $\gamma = 0.75$ (mavi); $\gamma = 0.5$ (kırmızı) ve $\gamma = 0.25$ (yeşil) değerleri için grafikleri.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Esin İLHAN
Doğum Yeri	Kırşehir
Doğum Tarihi	24.11.1979
Uyruğu	TC
Telefon	05054529413
E-Posta Adresi	eilhan@ahievran.edu.tr

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fatih Eğitim Fakültesi
Bölüm	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2003
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Lisans Programı
Mezuniyet Yılı	2011
Doktora	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Doktora Programı
Mezuniyet Yılı	...

Makale ve Bildiriler
1. İlhan, E., Kıymaz, İ.O., 2019, A generalization of truncated M-fractional derivative and applications to fractional differential equations, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, (basım aşamasında).
2. İlhan, E., Kıymaz, İ.O., 2019, Fractional operators with power and confluent hypergeometric function in their kernels, *Full Text Book: The fourth international conference on computational mathematics and engineering sciences*, ISBN:77733, 380-388.
3. İlhan, E., Kıymaz, İ.O., 2019, Further properties of the truncated M-Fractional derivative, *The fourth international conference on computational mathematics and engineering sciences*, 20-22 April 2019 Antalya.