MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

DUAL VEKTÖR HESABI ve REGLE YÜZEYLERE AİT BAZI UYGULAMALAR

Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Bedinur Demiray
Öğretim Görevlisi

1984

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna değin sürekli destek ve yardımlarını esirgemeyen , göster- diği sabır ve titizlikle çalışmanın gerçeklenmesini sağlayan Sayın tez hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN ' a ve çeşitli yardımlarını gördüğüm değerli arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

DUAL VEKTÖR HESABI VE
REGLE YÜZEYLERE AİT BAZI UYGULAMALAR

1 - <u>Dual Sayılar:</u> a ve a_0 reel sayılar olmak üzere

$$A = a + \varepsilon a_0 \tag{1.1}$$

şeklindeki sayılara dual sayılar denir. Burada

$$\varepsilon^2 = 0 \tag{1.2}$$

dır. a ya dual sayının reel kısmı, a_0' a dual sayının dual kısmı denir.

$$A = a + \varepsilon a_0 \ , \quad B = b + \varepsilon b_0$$

iki dual sayı olsun,

$$A = B \Leftrightarrow a = b \ , \ a_0 = b_0$$

$$A + B = (a + b) + \varepsilon (a_0 + b_0) \tag{1.3}$$

$$A \cdot B = a \cdot b + \varepsilon (a b_0 + a_0 b)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$A + B = B + A \ ; \quad A \cdot B = B \cdot A$$

dır.

$$A + X = B$$

olacak şekilde $X = x + \varepsilon x_0$ tek olarak belirlidir ve

$$X = B - A$$

yazılır.

$$A + 0 = A$$

olacak şekilde $0 = 0 + \varepsilon 0$ vardır.

$$A \cdot X = B \Rightarrow (a + \varepsilon a_0)(x + \varepsilon x_0) = b + \varepsilon b_0$$

olup (1 . 3) den

$$a x = b$$

$$a x_0 + a_0 x = b_0$$

olmalıdır. Bu denklemler ancak $a \neq 0$ olması halinde x ve x_0 a göre tek olarak çözülebilir. Yani $X = \frac{B}{A}$ bölümü, ancak paydanın reel kısmı sıfırdan farklı ise yapılabilir.

(1 . 4) $$f(a + \varepsilon a_0) = f(a) + \varepsilon a_0 f'(a)$$

fonksiyonu tanımlanır. Örnek olarak

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi_0$$

olmak üzere

(1 . 5)
$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}\Phi &= \operatorname{Cos}\varphi - \varepsilon \varphi_0 \operatorname{Sin}\varphi \\ \operatorname{Sin}\Phi &= \operatorname{Sin}\varphi + \varepsilon \varphi_0 \operatorname{Cos}\varphi \\ \operatorname{Tan}\Phi &= \operatorname{Tan}\varphi + \varepsilon \varphi_0 (1 + \tan^2\varphi) \end{aligned}$$

dir.

2 - <u>Dual Vektörler</u>: Yönlü bir A doğrusu ile A nın doğrultusunda ve yönünde $\vec{a}$ serbest birim vektörünü gözönüne alalım. A üzerinde bir x noktasının yer vektörü $\vec{ox} = \vec{x}$ olmak üzere

$$\vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a}$$

vektörüne $\vec{a}$ vektörünün, koordinat sisteminin O başlangıç noktasına göre vektörel momenti denir. Bu vektör x noktası nın seçilişine bağlı değildir. Gerçekten, A üzerinde herhangibir y noktası alsak

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \, \vec{a}$$

olur ve

$$\vec{y} \wedge \vec{a} = \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{a}_o$$

bulunur. $\vec{a}$ ve $\vec{a}_o$ verilmekle A doğrusu uzayda tamamen belirlenmiş olur. Burada

$$(2 . 1) \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \; , \; \vec{a} \cdot \vec{a}_o = 0$$

dır.

$$(2 . 2) \qquad \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \, \vec{a}_o$$

vektörüne DUAL VEKTÖR denir. Dual vektör yönlü bir doğruyu tek olarak belirler.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = 1 .$$

olduğu dual vektörlerin skaler çarpımından sonra açıklanacaktır. $\varepsilon^2 = 0$ konularak ,adi vektörler için yapılan tüm hesaplar dual vektörler içinde geçerlidir.

Dual vektörleri $\vec{A}$ ve $\vec{A}^*$ olan,yönlendirilmiş A ve A^* doğrularının dual açısı,

$$(2 . 3) \qquad \phi = \varphi + \varepsilon \, \varphi_o$$

ile tanımlanır. Burada φ doğrular arasındaki reel açıyı, φ_o ise aralarındaki enkısa uzaklığı göstermektedir.

<u>İki dual vektörün skaler çarpımı</u>:

$\vec{A}$ ve $\vec{A}^*$ dual vektörleri için

$$(2 . 4) \qquad \vec{A} \cdot \vec{A}^* = \cos \phi$$

dir. A ve A^* doğrularının B ortak dikmesini gözönüne alalım

X , Y dikme ayakları için

$$(2.5) \qquad \vec{a}_0 = \vec{x} \wedge \vec{a} \quad , \quad \vec{a}_0^* = \vec{y} \wedge \vec{a}^*$$

dır.

$$\vec{A} \cdot \vec{A}^* = \vec{a}.\vec{a}^* + \varepsilon\,(\vec{a}.\vec{a}_0^* + \vec{a}_0.\vec{a}^*)$$

olup

$$(2.6) \qquad \vec{a}.\vec{a}^* = \cos\varphi$$

dir. (2 . 5) bağıntıları gözönüne alınarak

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_0^* = \vec{a}.(\vec{y} \wedge \vec{a}^*) = \vec{y}.(\vec{a}^* \wedge \vec{a})$$

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{a}^* = (\vec{x} \wedge \vec{a}).\vec{a}^* = -\vec{x}.(\vec{a}^* \wedge \vec{a})$$

bulunur. Buradan

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_0^* + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}^* = (\vec{y} - \vec{x}).(\vec{a}^* \wedge \vec{a})$$

olur. Diğer taraftan

$$|\vec{a}^* \wedge \vec{a}| = \sin\varphi \quad , \quad |\vec{y} - \vec{x}| = \varphi_0$$

olduğundan

$$\vec{a}^* \wedge \vec{a} = -\frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|}\sin\varphi$$

ve dolayısıyla

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_0^* + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}^* = -|\vec{y} - \vec{x}|\sin\varphi$$

$$(2.7) \qquad \vec{a} \cdot \vec{a}_0^* + \vec{a}_0 \cdot \vec{a}^* = -\varphi_0 \sin\varphi$$

dir. (2 . 6) , (2 . 7) ve (1 . 5) ten

$$\vec{A} \cdot \vec{A}^* = \cos\varphi - \varphi_0\,\varepsilon \sin\varphi = \cos\Phi$$

bulunur. Bununsonucu olarak

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = 1$$

dir.

İki dual vektörün vektörel çarpımı:

$$\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\, \vec{b}_o$$

A ve A^* doğrularının ortak dikmesine karşı gelen dual vektör olmak üzere

$$(2.8) \qquad \vec{A} \wedge \vec{A}^* = \vec{B}\, \mathrm{Sin}\,\Phi = \vec{b}\, \mathrm{Sin}\,\varphi + \varepsilon\, (\vec{b}_o \mathrm{Sin}\,\varphi + \varphi_o \vec{b}\, \mathrm{Cos}\,\varphi)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\vec{A} \wedge \vec{A}^* = (\vec{a} \wedge \vec{a}^*) + \varepsilon\, [\, (\vec{a} \wedge \vec{a}_o^*) + (\vec{a}_o \wedge \vec{a}^*)\,]$$

dir. $\vec{a} \wedge \vec{a}^*$ doğrultusundaki birim vektör $\vec{b}$ olmak üzere

$$(2.9) \qquad \vec{a} \wedge \vec{a}^* = \vec{b}\, \mathrm{Sin}\,\varphi$$

yazılır. (2 . 5) ten

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_o^* = \vec{a} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{a}^*)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\vec{y} - \vec{x} = \varphi_o \vec{b}$$

den

$$\vec{y} = \vec{x} + \varphi_o \vec{b}$$

olup

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_o^* = \vec{a} \wedge [\, (\vec{x} + \varphi_o \vec{b}\,) \wedge \vec{a}^*\,]$$

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_o^* = \vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}^*) + \varphi_o \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}^*)$$

dir. (2 . 9) dan

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{a}^*}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

olduğundan

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_o^* = \vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}^*) + \frac{\varphi_o}{\mathrm{Sin}\,\varphi}\, \vec{a} \wedge [\, (\vec{a} \wedge \vec{a}^*) \wedge a^*\,]$$

olur. İkikat vektörel çarpım, skaler ve vektörel çarpım özellikleri ile (2 . 9) kullanılarak

$$(2.10) \qquad \vec{a} \wedge \vec{a}_0^* = \vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}^*) + \varphi_0 \vec{b} \operatorname{Cos} \varphi$$

elde edilir. (2 . 5) ten

$$(2.11) \qquad \vec{a}_0 \wedge \vec{a}^* = (\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{a}^*$$

olur. (2 .10) ve (2 . 11) den ikikat vektörel çarpım özel_likleri kullanılarak

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_0^* + \vec{a}_0 \wedge \vec{a}^* = \vec{x} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{a}^*) + \varphi_0 \vec{b} \operatorname{Cos} \varphi$$

yazılır. (2 . 9) ve $\vec{x} \wedge \vec{b} = \vec{b}_0$ dan

$$\vec{a} \wedge \vec{a}_0^* + \vec{a}_0 \wedge \vec{a}^* = \vec{b}_0 \operatorname{Sin} \varphi + \varphi_0 \vec{b} \operatorname{Cos} \varphi$$

elde edilir. O halde

$$\vec{A} \wedge \vec{A}^* = \vec{b} \operatorname{Sin} \varphi + \varepsilon (\vec{b}_0 \operatorname{Sin} \varphi + \varphi_0 \vec{b} \operatorname{Cos} \varphi)$$

dir.

Adi vektörler ile yapılan ikikat vektörel çarpım ve Lagrange özdeşlikleri , dual vektörler içinde geçerlidir.

3 - Blaschke Formülleri : Bir [A] regle yüzeyini belirlemek için , A doğuranının birim dual vektörü gerçel t parametresinin fonksiyonu olarak

$$(3.1) \qquad \vec{A}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon \vec{a}_0(t)$$

şeklinde verilir.

[A] yüzeyinin bir $A = A_1$ doğuranının boğaz noktası x , yüzeyin x deki normali A_2 olsun. A_1 ve A_2 ile doğru yönlü bir dik üçyüzlü oluşturan, yüzeyimizin x deki teğe ti A_3 olsun. (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsüne $[A]$ regle yüzeyinin A_1 doğuranına ait Blaschke üçyüzlüsü denir. $u = u(t)$ ise $\frac{du}{dt} = u'$ koyarak ve (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsünün ayrıtlarının dual birim vektörlerini sırayla $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ ile göstererek Blaschke tarafından aşağıdaki formüller elde edilmiştir.

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} \vec{A}_1' &= P\,\vec{A}_2 \\ \vec{A}_2' &= -P\,\vec{A}_1 + Q\,\vec{A}_3 \\ \vec{A}_3' &= -Q\,\vec{A}_2 \end{aligned}$$

Reel ve dual kısımlarını ayırarak

$$(3.2)' \qquad \begin{aligned} \vec{a}_1' &= p\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2' &= -p\vec{a}_1 + q\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3' &= -q\vec{a}_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \vec{a}_{10}' &= p_o\vec{a}_2 + p\,\vec{a}_{20} \\ \vec{a}_{20}' &= -p_o\vec{a}_1 + q_o\vec{a}_3 - p\,\vec{a}_{10} + q\,\vec{a}_{30} \\ \vec{a}_{30}' &= -q_o\vec{a}_2 - q\,\vec{a}_{20} \end{aligned}$$

$$(3.3) \qquad P = p + \varepsilon p_o = \sqrt{\vec{A}'^2} \quad , \quad p = \sqrt{\vec{a}'^2} \quad \text{ve} \quad p_o = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{a}_o'}{\sqrt{\vec{a}'^2}}$$

$$(3.4) \qquad Q = q + \varepsilon q_o = \frac{(\vec{A} \wedge \vec{A}') \cdot \vec{A}''}{\vec{A}'^2}$$

$$q = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \vec{a}''}{\vec{a}'^2}$$

$$q_o = \frac{(\vec{a}_o \wedge \vec{a}') \cdot \vec{a}'' + (\vec{a} \wedge \vec{a}_o') \cdot \vec{a}'' + (\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \vec{a}_o''}{\vec{a}'^2} - 2\,\frac{(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \vec{a}''(\vec{a}' \cdot \vec{a}_o')}{(\vec{a}'^2)^2}$$

dir.

x boğaz noktasının yer vektörü $\vec{x}$ olsun

$$(3.5) \qquad \vec{x}' = q_o\vec{a}_1 + p_o\vec{a}_3$$

dir. (3.2) Blaschke formülleri t nin seçimine bağlı olmamasına karşılık P ve Q dual büyüklüklerinin değerleri t nin seçimine bağlıdırlar. Bizler çalışmamızda parametre olarak [A] yüzeyinin (x) boğaz çizgisinin s yay uzunluğunu alacağız. Bu parametre seçiminin sonucu

$$\left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 = \vec{x}'^2 = 1$$

ve (3 . 5) denkleminden

$$p_o^2 + q_o^2 = 1 \tag{3.6}$$

yazılır.

Uzay eğrileri için geçerli olan FRENET formülleri ile BLASCHKE formülleri arasındaki tam benzerlikten dolayı P ye ve Q ya [A] regle yüzeyinin dual eğriliği ve dual burulması denir.

4 - <u>Bir regle yüzeyin doğal denklemleri:</u> Boğaz çizgisinin yay uzunluğu s olan [A] regle yüzeyinin dual eğriliği P ve dual burulması Q olsun. P = P (s) , Q = Q (s) verildiğinde [A] yüzeyinin yerdeğiştirme farkıyla belirlenebileceğini ispatlıyalım.

Homolog $A_1(s)$ ve $A_1^*(s)$ doğurahları için aynı P (s) eğriliğine ve aynı Q (s) burulmasına sahip olan [A] ve [A^*] regle yüzeylerinin Blaschke üçyüzlüleri (A_1, A_2, A_3) ve (A_1^*, A_2^*, A_3^*) olsunlar.

(3 . 2) Blaschke formüllerini kullanarak

$$(\vec{A}_1 . \vec{A}_1^*)' = P\,(\vec{A}_1 . \vec{A}_2^* + \vec{A}_1^* . \vec{A}_2)$$
$$(\vec{A}_2 . \vec{A}_2^*)' = -P\,(\vec{A}_1 . \vec{A}_2^* + \vec{A}_1^* . \vec{A}_2) + Q\,(\vec{A}_2 . \vec{A}_3^* + \vec{A}_2^* . \vec{A}_3)$$
$$(\vec{A}_3 . \vec{A}_3^*)' = -Q\,(\vec{A}_2 . \vec{A}_3^* + \vec{A}_2^* . \vec{A}_3)$$

bulunur. Bu eşitlikleri toplarsak

$$(\vec{A}_1 . \vec{A}_1^*)' + (\vec{A}_2 . \vec{A}_2^*)' + (\vec{A}_3 . \vec{A}_3^*)' = 0$$

olur. (A_1, A_2, A_3) ve (A_1^*, A_2^*, A_3^*) Blaschke üçyüzlülerinin homolog kenarları ile oluşturulan dual açılar ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 olmak üzere

$$(4.1) \quad \vec{A}_1 . \vec{A}_1^* + \vec{A}_2 . \vec{A}_2^* + \vec{A}_3 . \vec{A}_3^* = \cos\phi_1 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3 = st$$

elde edilir. Eğer $s = 0$ a karşı gelen Blaschke üçyüzlüleri çakışıyorsa (4 . 1) sabiti 3 olur. (4 . 1) in reel kısmını gözönüne alırsak s nin her değeri için

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 3$$

olduğunu görürüz. Bu durum s nin aynı değeri için Blaschk üçyüzlülerinin aynı yöne sahip olduklarını gösterir.

$$(4.2) \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_1^* , \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_2^* , \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_3^*$$

olur. $P(s)$ dual eğriliği ve $Q(s)$ dual burulması aynı olan iki regle yüzey için (3 . 5) ten

$$\vec{x}' = q_0 \vec{a}_1 + p_0 \vec{a}_3$$
$$\vec{x}^{*\prime} = q_0 \vec{a}_1^* + p_0 \vec{a}_3^*$$

olup buradan

$$(\vec{x} - \vec{x}^*)' = 0 \qquad (4.3)$$

elde edilir. $s = 0$ için

$$\vec{x} - \vec{x}^* = 0$$

olur ve sonuç olarak (4 . 3) ten s nin her değeri için

$$\vec{x} = \vec{x}^* \qquad (4.4)$$

olacaktir. (4 . 2) ve (4 . 4) bağıntıları , homolog iki doğurana karşı gelen Blaschke üçyüzlüleri çakışayorsa [A] ve [A^*] regle yüzeylerinin de çakışacağını gösterir. Böylece bir yerdeğiştirme farkıyla belirlenmiş olan [A]regle yüzeyinin

$$P = P(s) \quad , \quad Q = Q(s) \qquad (4.5)$$

elemanlarına yüzeyin doğal denklemleri denir.

Bu özellik analitik olarak şöyle gösterilebilir. [A] yüzeyinin bir doğuranını gösteren $\vec{A}_1(s)$ dual birim vektörünün s nin kuvvetlerine göre açılabildiğini kabul edip bu açılımın nasıl bulunabileceğini göstereceğiz. $\frac{d^k\vec{A}_1}{ds^k} = \vec{A}_1^{(k)}$ ile $s = 0$ için $\vec{A}_1$ in k ıncı mertebeden türevi gösterilerek

$$\vec{A}_1(s) = \vec{A}_1(0) + \frac{s}{1!}\vec{A}_1'(0) + \frac{s^2}{2!}\vec{A}_1''(0) + \frac{s^3}{3!}\vec{A}_1'''(0) + \dots \qquad (4.6)$$

yazılır. Blaschke formülleri gereğince

$$\vec{A}_1' = P\,\vec{A}_2$$
$$\vec{A}_1'' = -P^2\vec{A}_1 + P'\vec{A}_2 + P\,Q\,\vec{A}_3$$
$$\vec{A}_1''' = -3\,PP'\vec{A}_1 + (-P^3 + P'' - PQ^2)\vec{A}_2 + (\,2P'Q + PQ'\,)\vec{A}_3$$

bulunur. Aynı formüller yardımıyla

$$(\,4\,.\,7\,) \qquad \vec{A}_1^{(n)} = u_n\vec{A}_1 + v_n\vec{A}_2 + w_n\vec{A}_3$$

elde edilir. u_n , v_n , w_n ile P ve Q nun ve bunların ardışık türevlerinin bilinen fonksiyonları gösterilmiştir. (4 . 7) den türev alınarak

$$\vec{A}_1^{(n+1)} = (\frac{du_n}{ds} - Pv_n\,)\vec{A}_1 + (\frac{dv_n}{ds} + Pu_n - Qw_n)\vec{A}_2 + (\frac{dw_n}{ds} + Qv_n)\vec{A}_3$$

ve buradan

$$(\,4\,.\,8\,) \qquad \begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{du_n}{ds} - Pv_n \\ v_{n+1} &= \frac{dv_n}{ds} + Pu_n - Qw_n \\ w_{n+1} &= \frac{dw_n}{ds} + Qv_n \end{aligned}$$

rekürans formülleri elde edilir. u_n, v_n , w_n katsayıları P ve Q ile P nin n-2 incimertebeye kadar, Q nun n -3 cü mertebeye kadar türevlerinin fonksiyonlarıdır. (4 . 6) formülü

$$(\,4\,.\,9\,) \qquad \vec{A}_1(s) = \vec{A}_1(0) + \frac{s}{1!}P\vec{A}_2(0) + \frac{s^2}{2!}(-P^2\vec{A}_1(0) + P'\vec{A}_2(0) + PQ\vec{A}_3(0)) + \cdots$$

yazılır. P ve Q ve bunların türevleri için $s = 0$ daki değerler alınmıştır.

5 - <u>Boğaz çizgisinin Frenet üçyüzlüsü:</u> A doğurasının oluşturduğu regle yüzey $[A]$, A nın boğaz noktası x , $[A]$ regle yüzeyinin boğaz çizgisi (x) olsun. (x) boğaz çizgisinin x boğaz noktasındaki Frenet üçyüzlüsünü $[A]$ regle yüzeyinin x boğaz noktasındaki Blaschke üçyüzlüsüne nisbet edelim. (3 . 5) ten (x) boğaz çizgisinin x boğaz noktasındaki birim teğet vektörü

$$(5.1) \qquad \vec{t} = q_o \vec{a}_1 + p_o \vec{a}_3$$

ile verilmiştir.

Yukarıda da işaret ettiğimiz gibi , türevleri daima (x) in s yay uzunluğuna göre alacağız. (x) in x noktasındaki Frenet üçyüzlüsünü ($\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$) ile göstererek Frenet formüllerini ve (3 . 2)' Blaschke formüllerini kullanarak

$$(5.2) \qquad \rho \vec{n} = q_o' \vec{a}_1 + (p\, q_o - q\, p_o)\, \vec{a}_2 + p_o' \vec{a}_3$$

bulunur. Buradan

$$(5.3) \qquad \rho^2 = p_o'^2 + q_o'^2 + (\, p\, q_o - q\, p_o)^2$$

elde edilir.

$\vec{t}$ vektörü $[A]$ regle yüzeyinin x boğaz noktasındaki (A_1, A_3) teğet düzlemine paraleldir. $\vec{n}$, $\vec{b}$, $\vec{a}_2$ vektörlerinin üçü de $\vec{t}$ ye diktir ve bunun sonucu aynı bir düzleme paraleldirler. $\vec{a}_2$ ile $\vec{n}$ asal normalinin açısı θ olsun. $\vec{a}_2$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ olacaktır.

$$\vec{b}.\vec{a}_2 = |\vec{b}|.|\vec{a}_2|.\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

-dan

$$(5.4) \qquad \vec{b}.\vec{a}_2 = \operatorname{Sin}\theta$$

olur. (5 . 4) ten türev alarak

$$\vec{b}'.\vec{a}_2 + \vec{b}.\vec{a}_2' = \theta'.\operatorname{Cos}\theta$$

ve

$$\vec{b}' = -\tau\vec{n} \quad , \quad \vec{b} = \vec{t}\wedge\vec{n}$$

koyarak

$$-\tau\vec{n}.\vec{a}_2 + (\vec{t}\wedge\vec{n}).\vec{a}_2' = \theta'.\operatorname{Cos}\theta$$

bulunur. $\vec{n}.\vec{a}_2 = \operatorname{Cos}\theta$ ve karma çarpım özelliğinden yukarıdaki ifade

$$-\tau\operatorname{Cos}\theta + (\vec{a}_2' \wedge \vec{t}).\vec{n} = \theta'.\operatorname{Cos}\theta$$

şekline dönüşür. (3 . 2)' ve (5 . 1) den

$$-\tau\operatorname{Cos}\theta + (p\,p_0 + q\,q_0)\vec{a}_2.\vec{n} = \theta'.\operatorname{Cos}\theta$$

yazılabilir. Buradan ise

$$(5.5) \qquad \tau = p\,p_0 + q\,q_0 - \theta'$$

elde edilir. Buradan $p\,p_0 + q\,q_0$ ifadesinin , boğaz çizgisinin geodezik burulmasına eşit olduğu sonucu çıkar.

6 - <u>Konormal regle yüzeyler:</u> Bir A_1 doğrusunun oluşturduğu regle yüzey $[A]$, A_1 in boğaz noktası x olsun. $[A]$ regle yüzeyinin x noktasındaki A_2 normaline x boğaz noktasındaki merkez normali diyeceğiz.

Birinin merkez normali diğerininde merkez normali olan $[A]$ ve $[A^*]$ regle yüzeylerine konormal regle yüzeyler denir.

$[A]$ ve $[A^*]$ konormal regle yüzeylerinin doğuranları $\vec{A}_1(s)$ ve $\vec{A}_1^*(s^*)$ dual vektörleri olsunlar. Burada s ve s^* iki yüzeyin boğaz çizgisinin yay uzunluklarıdır. $\vec{A}_1(s)$ ve $\vec{A}_1^*(s^*(s))$ aynı merkez normale sahip olduğu takdirde s^* s in fonksiyonu olarak düşünülebilir. ϕ, $\vec{A}_1(s)$ ve $\vec{A}_1^*(s^*)$ arasındaki dual açı olsun. (2 . 4) ve (2 . 8) den

$$(6.1) \qquad \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1^* = \cos\phi$$

$$(6.2) \qquad \vec{A}_1 \wedge \vec{A}_1^* = \vec{A}_2 \sin\phi$$

olur. (6 . 2) bağıntısını $\vec{A}_1$ ile vektörel olarak çarpalım

$$\vec{A}_1 \wedge (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_1^*) = (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2)\sin\phi$$

olur. İkikat vektörel çarpım özelliğinden ve $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2 = \vec{A}_3$ den

$$(\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1^*)\vec{A}_1 - (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1)\vec{A}_1^* = \vec{A}_3 \sin\phi$$

(6 . 1) ve $\vec{A} \cdot \vec{A} = 1$ den

$$\vec{A}_1 \cos\phi - \vec{A}_1^* = \vec{A}_3 \sin\phi$$

ve nihayet

$$(6.3) \qquad \vec{A}_1^* = \vec{A}_1 \cos\phi - \vec{A}_3 \sin\phi$$

elde edilir. (6 . 3) den türev alarak ve $\vec{A}_2^* = \vec{A}_2$ koyarak Blaschke formüllerinden

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot \frac{d\vec{A}_1^*}{ds^*} = \frac{d\vec{A}_1}{ds}\cos\phi - \frac{d\phi}{ds}\vec{A}_1 \sin\phi - \frac{d\vec{A}_3}{ds}\sin\phi - \frac{d\phi}{ds}\vec{A}_3 \cos\phi$$

$$s^{*\prime} P^* \vec{A}_2 = (P\cos\phi + Q\sin\phi)\vec{A}_2 - \phi'(\vec{A}_1 \sin\phi + \vec{A}_3 \cos\phi)$$

bulunur. Bu son bağıntıdan

$$\phi' = 0$$

ve buradan

$$\phi = \varphi + \varepsilon \varphi_0 = \text{sabit}$$

(6 . 4) $$s^{*'} P^* = P \cos\phi + Q \sin\phi$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak şunu söyliyebiliriz: İki konormal regle yüzeyin (A_1, A_2, A_3) , (A_1^*, A_2^*, A_3^*) Blaschke üçyüzlüleri birbirlerine katı olarak bağlıdırlar.

$$\vec{A}_3^* = \vec{A}_1^* \wedge \vec{A}_2^*$$

dır. $\vec{A}_2^* = \vec{A}_2$ ve (6 . 3) den

(6 . 5) $$\vec{A}_3^* = \vec{A}_1 \sin\phi + \vec{A}_3 \cos\phi$$

olur. ϕ = sabit olduğunu gözönünde bulundurarak s e göre türev alalım. $\vec{A}_2^* = \vec{A}_2$ koyarak, Blaschke formülleri de kullanılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot \frac{d\vec{A}_3^*}{ds^*} = \frac{d\vec{A}_1}{ds} . \sin\phi + \frac{d\vec{A}_3}{ds} \cos\phi$$

$$s^{*'} Q^* \vec{A}_2 = (- P \sin\phi + Q \cos\phi) \vec{A}_2$$

(6 . 6) $$s^{*'} Q^* = - P \sin\phi + Q \cos\phi$$

bulunur. $\vec{A}_2 = \vec{A}_2^*$ dan s e göre türev alıp, Blaschke formüllerini kullanırsak

$$- P \vec{A}_1 + Q \vec{A}_3 = (- P^* \vec{A}_1^* + Q^* \vec{A}_3^*) s^{*'}$$

olur. Yukarıdaki bağıntıyı (6 . 3), (6 . 4), (6 . 5), (6 . 6) bağıntılarının gerçeklediği kolayca görülür.

Buradan şu sonuç çıkarılır: Bir $[A]$ regle yüzeyinin(A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsüne A_2 ve A_2^* ın çakışması koşulu ile katı olarak bağlı bulunan bir (A_1^*, A_2^*, A_3^*) üçyüzlüsü $[A]$ nin bir konormal yüzeyi olan $[A^*]$ regle yüzeyinin Blaschke üçyüzlüsü olur.

Şu noktaya işaret edelim: Aynı asal normale sahip olan uzay eğri çiftlerinde (Bertrand eğrileri), eğri çiftlerinden biri gelişigüzel seçilemez. Halbuki konormal regle yüzey çiftlerinde, iki yüzeyden biri herhangibir regle yüzey olarak seçilebilir.

(6 . 3) ve (6 . 5) ten

$$\vec{a}_1^* = \vec{a}_1 \cos\varphi - \vec{a}_3 \sin\varphi$$
$$\vec{a}_3^* = \vec{a}_1 \sin\varphi + \vec{a}_3 \cos\varphi$$

yazılabilir. (6 . 4) ve (6 . 6) dan

$$p_0^* s^{*\prime} = p_0 \cos\varphi + q_0 \sin\varphi - \varphi_0 (p \sin\varphi - q \cos\varphi)$$
$$q_0^* s^{*\prime} = - p_0 \sin\varphi + q_0 \cos\varphi - \varphi_0 (p \cos\varphi + q \sin\varphi)$$

bulunur. Buradan da (3 . 5) formülüne benzer olarak

$$\vec{x}^{*\prime} = (q_0^* \vec{a}_1^* + p_0^* \vec{a}_3^*)\, s^{*\prime}$$

yazılır. $\vec{a}_1^*$, $\vec{a}_3^*$, $p_0^* s^{*\prime}$, $q_0^* s^{*\prime}$ için yukarıdaki değerler yerlerine konursa

$$(6.7) \qquad \vec{x}^{*\prime} = (q_0 - \varphi_0 p)\, \vec{a}_1 + (p_0 + \varphi_0 q)\, \vec{a}_3$$

bulunur.

$$\vec{x}^{*\prime} = (q_o^* \vec{a}_1^* + p_o^* \vec{a}_3^*)\, s^{*\prime} = (q_o - \varphi_o p)\, \vec{a}_1 + (p_o + \varphi_o q)\, \vec{a}_3$$

olduğunu gözönüne alarak $s^{*\prime}$ ünü hesaplıyalım. Yukarıdaki ifadenin skaler karesini alıp $p_o^{*2} + q_o^{*2} = 1$ yazarsak

$$s^{*\prime} = \left[(q_o - \varphi_o p)^2 + (p_o + \varphi_o q)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$(6.8) \qquad s^{*\prime} = \left[1 - 2\varphi_o (p\, q_o - q\, p_o) + \varphi_o^2 (p^2 + q^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

olur. İleride aynı boğaz çizgisine sahip olan konormal regle yüzeylerin incelenmesinde $\varphi_o = 0$ hali üzerinde duracağız.

7 - Dual eğriliği sabit olan regle yüzeyler: Bir $[A]$ regle yüzeyinin dual eğriliği

$$P = p + \varepsilon\, p_o = \text{st.}$$

ise, $p = \text{st.}$, $p_o = \text{st.}$ olur. Ayrıca $p_o^2 + q_o^2 = 1$ den $q_o = \text{st.}$ olur. (5 . 1) formülü, $[A]$ yüzeyinin boğaz çizgisinin teğetinin doğuranı $\arccos q_o$ ' a eşit sabit bir açı ile kestiğini gösterir. (5 . 2) den merkez normali ile boğaz çizgisinin asal normali arasındaki θ açısının sıfır olduğu görülür. O halde boğaz çizgisi, $[A]$ regle yüzeyinin bir geodeziğidir.

(5 . 3) ve (5 . 5) den

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} \rho &= p\, q_o - q\, p_o \\ \tau &= p\, p_o + q\, q_o \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadelerden birinciyi q_o, ikinciyi p_o ile çarparak toplıyalım ve (3 . 6) kullanılarak

$$(7.2) \qquad q_0 \rho + p_0 \tau = p$$

bulunur. Burada p_0, q_0, p sabit olduğundan, gözönüne alınan yüzeyin boğaz çizgisi bir BERTRAND eğrisidir.

Dual eğriliği sabit olan regle yüzeyler bir dereceye kadar MONGE eğrileri denilen, eğriliği sabit olan uzay eğrilerine tekabül ederler.

Bir (y) Monge eğrisinin y^* eğrilik merkezlerinin geometrik yeri bir (y^*) Monge eğrisi olup, homolog y ve y^* noktalarında Frenet üçyüzlüleri paraleldir ve iki eğri boyunca τ ve τ^* burulmaları çarpımı sabittir. Dual eğriliği sabit olan regle yüzeyler için benzer bir özelliğin varlığını görelim.

Böyle bir yüzeyin A_1 doğuranının boğaz noktası x ve x deki merkez normali de A_2 olsun. (A_2, A_3) düzleminin karekteristiğinin A_2 normalini kestiği x^* noktasını arayalım. Bunun için (A_2, A_3) düzleminin herhangi bir z noktasını alalım. Bu düzlemin denklemi:

$$(7.3) \qquad (\vec{z} - \vec{x}).\vec{a}_1 = 0$$

dır. Buradan türev alarak

$$-\vec{x}'.\vec{a}_1 + (\vec{z} - \vec{x}).\vec{a}_1' = 0$$

bulunur. $\vec{x}' = \vec{t}$, $\vec{t}.\vec{a}_1 = q_0$, $\vec{a}_1' = p\,\vec{a}_2$ koyarak

$$-q_0 + (\vec{z} - \vec{x})\, p\, \vec{a}_2 = 0$$

ve nihayet

$$(\vec{z}-\vec{x}).\vec{a}_2=\frac{q_o}{p} \qquad (7.4)$$

elde edilir. (7 . 3) ve (7 . 4) denklemleri aranan karekteristiği belirler. z noktasının x^* noktası ile çakıştığı gözönüne alınarak, (7 . 4) denkleminden

$$\vec{x}^*-\vec{x}=\frac{q_o}{p}\vec{a}_2 \qquad (7.5)$$

yazılır. x^* noktalarının (x^*) geometrik yerinin denklemi

$$\vec{x}^*=\vec{x}+\frac{q_o}{p}\vec{a}_2 \qquad (7.6)$$

dir. (x^*) eğrisinin teğetine , asal normaline ve binormaline paralel birim vektörler $\vec{t}^*$, $\vec{n}^*$, $\vec{b}^*$ ve (x^*) eğrisinin yay uzunluğu s^* olsun. p ,p_o ,q_o ın sabitler olduğu gözönünde tutularak (7 . 6) dan türev alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds}\cdot\frac{d\vec{x}^*}{ds^*}=\frac{d\vec{x}}{ds}+\frac{q_o}{p}\cdot\frac{d\vec{a}_2}{ds}$$

$$s^{*\prime}\vec{t}^*=\vec{t}+\frac{q_o}{p}(-p\,\vec{a}_1+q\,\vec{a}_3)$$

olur. (5 . 1) den

$$s^{*\prime}\vec{t}^*=\left(\frac{p\,p_o+q\,q_o}{p}\right)\cdot\vec{a}_3$$

bulunur. Burada

$$\vec{t}^*=\vec{a}_3 \quad , \quad s^{*\prime}=\frac{p\,p_o+q\,q_o}{p} \qquad (7.7)$$

bulunur. (7 . 7) den türev alarak

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot \frac{d\vec{t}^*}{ds^*} = \frac{d\vec{a}_3}{ds}$$

veya

$$s^{*'} \rho^* \vec{n}^* = - q \, \vec{a}_2$$

buradan

$$\vec{n}^* = - \frac{1}{\rho^*} \cdot \frac{p \, q}{p \, p_0 + q \, q_0} \vec{a}_2$$

yazılır. $\vec{n}^*$ ın işareti

$\dfrac{p \, q}{p \, p_0 + q \, q_0}$, a bağlıdır. $\lambda = \mp 1$ olmak üzere

$$\vec{n}^* = \lambda \, \vec{a}_2$$

olur. Böylece

$$\vec{b}^* = - \lambda \, \vec{a}_1$$

bulunur. Buradan türev alarak

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot \frac{d\vec{b}^*}{ds^*} = - \lambda \frac{d\vec{a}_1}{ds}$$

(3 . 2)' , (7 . 7) ve Frenet formüllerinden

$$\frac{p \, p_0 + q \, q_0}{p} \left(- \tau^* \vec{n}^* \right) = - \lambda \, p \, \vec{a}_2$$

yazılır. Buradan

$$\left(\frac{p \, p_0 + q \, q_0}{p} \right)^2 \cdot \tau^{*2} = \lambda^2 p^2$$

yahut

(7 . 8) $$\tau^* = \frac{p^2}{p \, p_0 + q \, q_0}$$

bulunur. (7 . 1) ve (7 . 8) den

(7 . 9) $$\tau \tau^* = p^2 = \text{sabit}$$

elde edilir. Şu halde yukarıda sözü edilen Monge eğrilerinin özellikleri , dual eğriliği sabit regle yüzeyler için de vardır.

Nihayet şu problemi inceleyelim. Bir [A] regle yüzeyinin boğaz çizgisi (x) olsun. [A] nın öyle bir $[A^*]$ konormal regle yüzeyi bulunsun, şöyleki $[A^*]$ ın da boğaz çizgisi (x) ve P^* dual eğriliği sabit olsun. Böyle bir yüzey için $\varphi_0 = 0$ ve $\emptyset = \varphi$ dır. (6 . 4) den P^* keyfi bir dual sabit olduğuna göre

$$P^* = P \operatorname{Cos}\varphi + Q \sin\varphi$$

olmalıdır. Gözönüne alınan yüzeyler M ve N dual sabitler olmak üzere

$$MP + NQ = 1 \tag{7 . 10}$$

bağıntısı ile karakterize edilir. Bu yüzeyler Bertrand eğrileri ile bazı benzerlikler gösterir, öyleki herikisinde de burulma ve eğrilik arasında lineer bir bağıntı vardır.

8 - <u>Dual eğriliği ve dual burulması lineer bir bağıntı ile bağlı olan regle yüzeyler :</u> $MP + NQ = 1$

(M ve N dual sabitlerdir)

İki hal gözönüne alacağız.

1: $\frac{M}{N} = \text{reel}$

$M = m + \varepsilon m_0$, $N = n + \varepsilon n_0$ koyarak, paydanın eşleniği ile pay ve paydayı çarparak

$$\frac{m+\varepsilon m_o}{n+\varepsilon n_o}=\frac{(m+\varepsilon m_o)(n-\varepsilon n_o)}{n^2}=\text{reel}$$

veya

$$\frac{m\,n-\varepsilon(m\,n_o-n\,m_o)}{n^2}=\text{reel}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağlanması için,

$$(8.1)\qquad m\,n_o-n\,m_o=0$$

olmalıdır. Ayrıca $MP+NQ=1$ den

$$(m\,p+n\,q)+\varepsilon(m\,p_o+m_o p+n\,q_o+n_o q)=1$$

yazılır. Bu son eşitliğin sağlanması için

$$(8.2)\qquad \begin{aligned} m\,p+n\,q&=1\\ m\,p_o+m_o p+n\,q_o+n_o q&=0\end{aligned}$$

olmalıdır. (8 . 1) gözönüne alınarak, (8 . 2) bağıntıları arasında q yok edilirse

$$m\,p_o+n\,q_o=-\frac{n_o}{n}$$

elde edilir. (5 . 6) gözönüne alınarak $p_o=st.$,$q_o=st$ bulunur. Bu ise boğaz çizgisinin teğetinin , doğuranla sabit açı yaptığını gösterir. (5 . 2) gözönüne alınırsa , asal normalin ,merkez normalle yaptığı θ açısı sıfırdır o hal de boğaz çizgisi yüzeyin bir geodeziğidir.

2 : M ve N reel

Bu halde $m_0 = n_0 = 0$ dır.

$$mP + nQ = 1$$

yazılır ve

$$m\,p + n\,q = 1 \qquad (8.3)$$
$$m\,p_0 + n\,q_0 = 0$$

bulunur. (3 . 6) bağıntısı da gözönüne alınarak $p_0 =$ st. $q_0 =$ st. bulunur. (5 . 1) formülü [A] nın boğaz çizgisinin teğetinin, doğuranı $\arccos q_0$' a eşit sabit bir açı altında kestiğini gösterir. Diğer taraftan (5 . 2) formülü, boğaz çizgisinin asal normalinin , merkez normalle yaptığı θ açısının sıfır olduğunu gösterir. Şu halde boğaz çizgisi gözönüne alınan yüzeyin bir geodeziğidir.(5 . 3) den

$$\rho = p\,q_0 - q\,p_0 \qquad (8.4)$$

yazılır.(8 . 3) bağıntı larından n yi yok edelim

$$p\,q_0 - q\,p_0 = \frac{q_0}{m}$$

bulunur. (8 . 4) gözönüne alınarak

$$\rho = \frac{q_0}{m} = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu ise gözönüne alınan yüzeyin boğaz çizgisinin yüzeyin bir Monge eğrisi olduğunu gösterir.

9 - P / Q = sabit olan regle yüzeyler: [A] regle yüzeyi için P / Q = st. olsun. [A] nın konormal yüzeylerini inceleyelim. (6 . 4) ve (6 . 6) dan konormal regle yüzeylerden herhangibiri için

$$\frac{P^*}{Q^*} = \frac{P\cos\phi + Q\sin\phi}{-P\sin\phi + Q\cos\phi} = \text{sabit}$$

olur. Şu halde dual eğriliği ve dual burulması arasında P / Q = st. bağıntısı bulunan regle yüzeylerin konormal yüzeylerinin de dual eğriliğinin dual burulmasına oranı sabittir. ϕ Bir sabit dual açı olmak üzere

$$\frac{P}{Q} = \operatorname{tg}\phi$$

yahut

(9 . 1) $$P\cos\phi - Q\sin\phi = 0$$

yazılır. Bu eşitliğin iki tarafını $\vec{A}_2$ ile çarpalım,

$$P\vec{A}_2\cos\phi - Q\vec{A}_2\sin\phi = 0$$

olur. Blaschke formüllerinden

$$\vec{A}_1'\cos\phi + \vec{A}_3'\sin\phi = 0$$

ve nihayet

(9 . 2) $$\vec{A}_1\cos\phi + \vec{A}_3\sin\phi = \vec{U}$$

bulunur. Burada $\vec{U}$ sabit bir, birim dual vektördür ve bir sabit doğru gösterir.

$$\vec{U}.\vec{A}_1 = \cos\phi = \text{sabit}$$

dir. O halde [A] nın doğuranları , sabit doğru ile ϕ sabit dual açısı yaparlar.

$$\vec{U}.\vec{A}_2 = 0$$

olur. Bu ise sabit doğrunun, [A] yüzeyinin bütün merkez normallerini dik olarak kestiğini gösterir. O halde, bir regle yüzeyin dual eğriliği ve burulması arasında sabit bir oran varsa , bu yüzeyin merkez normallerinin bir ortak dikmesi vardır.

Bunun karşıtını gösterelim:

$\vec{U}$, $\vec{A}_2$ ye dik olduğundan ($\vec{A}_1$, $\vec{A}_3$) düzlemine paraleldir.

$$\vec{U} = \vec{A}_1 \cos\phi + \vec{A}_3 \sin\phi$$

yazılır. Türev alarak Blaschke formüllerini kullanırsak

$$0 = -\phi'\vec{A}_1 \sin\phi + (P\cos\phi - Q\sin\phi)\vec{A}_2 + \phi'\vec{A}_3\cos\phi$$

olur . Bu eşitliğin sağlanması için,

$$\phi' = 0 \qquad \text{veya} \qquad \phi = \text{sabit}$$

ve

$$P\cos\phi - Q\sin\phi = 0$$

yahut

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}=\text{sabit}$$

olmalıdır.

10 - <u>Dual eğriliği ile dual burulması arasında $P^2+Q^2=$ sabit bağıntısı bulunan regle yüzeyler:</u> Bu halde $P^2+Q^2=K^2$ $(K=k+\varepsilon k_o)$ yazılabilir. Bu durumda

$$p^2+q^2+2\varepsilon(p\,p_o+q\,q_o)=k^2+2\varepsilon\,k\,k_o$$

olur. Buradan ise ,

$$(10.1)\qquad \begin{aligned} p^2+q^2&=k^2\\ p\,p_o+q\,q_o&=k\,k_o\end{aligned}$$

bulunur. (10 . 1) bağıntılarının birincisinden, ikincinin karesini çikarıp, $p_o^2+q_o^2=1$ den yararlanarak

$$(p\,q_o-q\,p_o)^2=k^2(1-k_o^2)$$

bulunur.ve nihayet

$$(10.2)\qquad p\,q_o-q\,p_o=\mp k\sqrt{1-k_o^2}$$

bulunur. $|k_o|\leqslant 1$ olmalıdır. $\varphi=$ sabit bir açıyı göstermek üzere, $k_o=\cos\varphi$ yazabiliriz.(10.1) ve (10.2) den

$$(10.3)\qquad \begin{aligned} p\,p_o+q\,q_o&=k\cos\varphi\\ p\,q_o-q\,p_o&=\mp k\sin\varphi\end{aligned}$$

bulunur.Bu bağıntının birincisi, boğaz çizgisinin geodezik burulmasının sabit olduğunu gösterir.

$\vec{n}.\vec{a}_2 = \cos\theta$ koyalım ve (5 . 2) den

$$\cos\theta = \frac{p\,q_0 - q\,p_0}{\rho}$$

olur. (10 . 3) gözönüne alınarak

$$\text{(10 . 4)} \qquad \cos\theta = \frac{\mp k \sin\varphi}{\rho}$$

bulunur. (10 . 4) ten türev alarak

$$\text{(10 . 5)} \qquad \theta' \sin\theta = \mp \frac{\rho'}{\rho^2} k \sin\varphi$$

olur. (10 .4) ile (10 . 5) arasında θ yok edilerek

$$\theta'^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \cdot \frac{k^2 \sin^2\varphi}{\rho^2 - k^2 \sin^2\varphi}$$

yazılır.(10 . 3) ün birinci ifadesinden ve θ' nün (5 . 5) deki değerinden

$$\text{(10 . 6)} \qquad (k \cos\varphi - \tau)^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \cdot \frac{k^2 \sin^2\varphi}{\rho^2 - k^2 \sin^2\varphi}$$

elde edilir. Şu halde gözönüne alınan regle yüzeylerin boğaz çizgisinin ρ eğriliği ile τ burulması arasında (10 . 6) bağıntısı vardır.

Şimdi aşağıdaki özel halleri inceleyelim:

1 : $\varphi = 0$ ($k_0 = 1$) hali: (10 . 4) ve (10 . 6) bağıntılarından

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tau = k$$

bulunur. (5 . 4) eşitliğine göre x boğaz noktasında (x) boğaz çizgisinin binormali, merkez normali ile çakışır , bir başka deyimle (x) boğaz çizgisinin oskülatör düzlemi x boğaz noktasında yüzeye teğettir. Buradan şu sonucu ifade edebiliriz:Söz konusu regle yüzeylerde,boğaz çizgisinin burulması $\tau = k$ olup , boğaz çizgisi, yüzeyin bir asimptotik çizgisidir.

2 : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($k_0 = 0$) hali : Bu durumda (10.3)ün birinci bağıntısı

$$p\,p_0 + q\,q_0 = 0$$

verir. Şu halde (5 . 5) den çıkarılan sonuca göre yüzeyin boğaz çizgisinin geodezik burulması sıfıra eşittir. Diğer taraftan, (10 . 6) bağıntısı $\varphi = \frac{\pi}{2}$ için

$$\tau^2 = \frac{k^2}{\rho^2 - k^2} \cdot \frac{\rho'^2}{\rho^2}$$

yazılır. Bu bağıntıda , R ve T sırayla eğrilik yarıçapı ve burulma yarıçapı olmak üzere $R = \frac{1}{\rho}$, $T = \frac{1}{\tau}$ ve $a = \frac{1}{k}$ koyalım

$$(10.7) \qquad R^2 + T^2 R'^2 = a^2$$

bulunur.(10 . 7) denklemi boğaz çizgisi için iki çözüm verir.

I : $R = \frac{1}{\rho} = a$ Bu halde boğaz çizgisi eğriliği sabit olan bir eğri (Monge eğrisi) dir.

II : Boğaz çizgisinin,yarıçapı $a = \frac{1}{k}$ olan bir Σ küresi üzerine çizilmiş bir küresel eğri olmasıdır. İncelediğimiz bu halde ($k_o = 0$) , (10 . 6) bağıntılarının ikincisinden

$$p\, p_o + q q_o = 0$$

olu r. Diğer taraftan bir regle yüzeyin A_2 merkez normallerinin oluşturduğu [A_2] regle yüzeyinin λ_2 dağılma parametresi

$$\lambda_2 = \frac{p\, p_o + q\, q_o}{p^2 + q^2}$$

olduğundan , söz konusu regle yüzeyin merkez normallerinin oluşturduğu [A_2] regle yüzeyi bir açılabilir regle yüzeydir ve bunun sonucu [A] yüzeyimizin (x) boğaz çizgisi yüzeyin bir eğrilik çizgisidir. Şu halde JOACHIMSTHAL'a ait bir teorem gereği, regle yüzeyimiz Σ küresini ,boğaz çizgisi boyunca bir sabit açı altında keser.

K A Y N A K L A R

1- W. BLASCHKE

Diferensiyel Geometri dersleri Cilt I (K.Erim)

2- L. BİRAN

İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt VI, seri A, sayı 3-4

3- L. BİRAN

İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt VIII, seri A, sayı 1

4- C. CAILLER

Intoduction Géométrique à la Mécanique Rationnelle