MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

ÖZEL REGLE YÜZEYLER

Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Mehmet ÖZDOĞAN
Öğretim Görevlisi

1984

510
Ö 99
1984

Yüksek Lisans öğrenciliğim sırasında ve daha sonra tez hazırlama çalışmalarımda yardım ve desteklerini esirgemeyen , tezin bu aşamaya gelmesini sağlayan Sayın hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN 'a ayrıca yardımlarını gördüğüm değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZEL REGLE YÜZEYLER

1 - Yüksek lisans tezi olarak takdim ettiğimiz çalışmamızda metot olarak kullandığımız dual vektörler ve bazı temel formüller ile kısa bilgi vermek istiyoruz.

A, yönlü bir doğru ve $\vec{a}$, A ile aynı doğrultu ve yönde bir serbest birim vektör olsun. Uzayın sabit bir O noktasına göre A üzerinde ve $\vec{a}$ ya denk kayan vektörün momenti $\vec{a}_o$ ise

$$\vec{a}^2 = 1 \quad , \quad \vec{a}.\vec{a} = 0$$

dır. ve

$$(1.1) \qquad \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_o$$

yazılarak dual vektör tanımlanır. Dual vektörlerle işlem, adi vektörlerle yapılan işlemlere benzer biçimdedir. Ancak dual vektörlerle yapılan işlemlerde daima $\varepsilon^2 = 0$ alınır.

Biraz aşağıda yapacağımız iki dual vektörün skaler çarpımının bir sonucu olarak (1 . 1) dual vektörü birim vektördür.

$$\vec{A} . \vec{A} = 1$$

ve $\vec{A}$ birim dualvektörü A doğrusunu tek olarak belirler.

A ve B iki yönlü doğru olsun. A ve B doğruları arasındaki açıya φ ve bunların ortak dikme uzunluklarını φ_o ile gösterelim

$$\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi_o$$

biçiminde tanımlanan $\emptyset$ ye A ve B doğrularının dual açısı denir.

A ve B iki yönlü doğru olsun. A ve B doğrularının dual birim vektörleri

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\, \vec{a}_0 \quad , \quad \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\, \vec{b}_0$$

olmak üzere:

(1 . 2) $$\vec{A}.\vec{B} = \cos\phi = \cos\varphi - \varepsilon\varphi_0 \sin\varphi$$

bağıntısı ile $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual vektörlerinin skaler çarpımı tanımlanır.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual vektörlerin vektörel çarpımı

(1 . 3) $$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} \sin\phi$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon\, \vec{c}_0$ ile A ve B yönlü doğrularının ortak dikmelerinin birim dual vektörü tanımlanmıştır. (1 . 3) de $\mathrm{Sin}\phi = \sin\varphi + \varepsilon\varphi_0\cos\varphi$ yazılır ise:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{c} + \varepsilon\, \vec{c}_0) (\sin\varphi + \varepsilon\varphi_0 \cos\varphi)$$

yahut

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}_0 + \vec{a}_0 \wedge \vec{b}) \\ &= \vec{c} \sin\varphi + \varepsilon (\vec{c}\, \varphi_0 \cos\varphi + \vec{c}_0 \cos\varphi) \end{aligned}$$

dir.

Bir A doğrusu tarafından oluşturulan bir $[A]$ regle yüzeyi A doğuranının bir reel t parametresine bağlı olarak birim dual vektörü ile verilebilir.

$$\vec{A}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon\, \vec{a}_0(t)$$

A doğuranına ait x boğaz noktasındaki A_2 merkez normalini gözönüne alalım, $\vec{A} = \vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ ve bu iki dual vektörü doğru yönlü b i r d i k ü ç y ü z l ü y e tamamlayan y ü -

zeyin x boğaz noktasındaki $\vec{A}_3$ teğeti ile tanımlanan (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsüne BLASCHKE üçyüzlüsü denir.

u = u(t) olsun. $\frac{du}{dt} = u'$ koyalım. $\vec{A}_i'$ dual vektörlerini (i = 1,2,3), $\vec{A}_i$ ler cinsinden lineer olarak ifade eden denklemlere Blaschke denklemleri denir.

$$
\begin{aligned}
\vec{A}_1' &= P\,\vec{A}_2 \\
\vec{A}_2' &= -P\,\vec{A}_1 + Q\,\vec{A}_3 \\
\vec{A}_3' &= -Q\,\vec{A}_2
\end{aligned}
\tag{1 . 4}
$$

Burada

$$
\begin{aligned}
P &= p + \varepsilon\, p_0 = \sqrt{\vec{A}'^2} \\
Q &= q + \varepsilon\, q_0 = \frac{(\vec{A} \wedge \vec{A}').\vec{A}''}{\vec{A}'^2}
\end{aligned}
\tag{1 . 5}
$$

dır ve P ve Q sırayla, [A] regle yüzeyinin dual eğriliği ve dual burulmasıdar. (1 . 4) formüllerinin reel ve dual kısımları:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1' &= p\,\vec{a}_2 \\
\vec{a}_2' &= -p\,\vec{a}_1 + q\,\vec{a}_3 \\
\vec{a}_3' &= -q\,\vec{a}_2
\end{aligned}
\tag{1 . 6}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{10}' &= p_0\vec{a}_2 + p\,\vec{a}_{20} \\
\vec{a}_{20}' &= -p_0\vec{a}_1 + q_0\vec{a}_3 - p\,\vec{a}_{10} + q\,\vec{a}_{30} \\
\vec{a}_{30}' &= -q_0\vec{a}_2 - q\,\vec{a}_{20}
\end{aligned}
\tag{1 . 7}
$$

dır.

Nihayet, [A] yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda = \frac{p_0}{p} \tag{1.8}$$

ve A_2, A_3 doğrularının oluşturduğu $[A_2]$ ve $[A_3]$ regle yüzeylerinin λ_2 ve λ_3 dağılma parametreleri

$$\lambda_2 = \frac{p\,p_0 + q\,q_0}{p^2 + q^2}$$

$$\lambda_3 = \frac{q_0}{q}$$

dır.

2- Bir A doğrusu tarafından oluşturulan bir [A] regle yüzeyi gözönüne alalım. A doğuranına ait boğaz noktasını x ,[A] nin boğaz çizgisini (x) ile göstereceğiz. A doğrusunun bağlı olduğu parametreyi (x) in s yay uzunluğu olarak seçeceğiz ve [A] yüzeyini

$$(2 . 1) \qquad \vec{A}_1(s) = \vec{a}_1(s) + \varepsilon\, \vec{a}_{10}(s)$$

dual birim vektörü ile göstereceğiz.

[A] regle yüzeyinin A doğuranına ait (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsüne katı olarak bağlı bir E doğrusu gözönüne alalım. A doğrusu [A] yüzeyini oluştururken E doğrusu bir [E] regle yüzeyi oluşturur. [E] nin E doğuranına ait dual vektör için

$$(2 . 2) \qquad \vec{E}_1 = \Delta_1 \vec{A}_1 + \Delta_2 \vec{A}_2 + \Delta_3 \vec{A}_3$$

yazılır. Burada Δ_i ler sabitler olup

$$(2 . 3) \qquad \sum \Delta_i^2 = 1$$

dir. Şuhalde $\Delta_i = \delta_i + \varepsilon\, \delta_{i0}$ olduğuna göre

$$(2 . 4) \qquad \begin{aligned} \sum \delta_i^2 &= 1 \\ \sum \delta_i \delta_{i0} &= 0 \end{aligned}$$

dir. Şimdi [E] yüzeyinin λ^* dağılma parametresini hesaplıyalım. [E] yüzeyinin boğaz çizgisi (x^*) , ve bunun yay uzunluğu s^* olsun. $\vec{E}_1 = \vec{E}_1(s^*)$ dir ve (2 . 2) bağıntısından türev alarak ve Blaschke formüllerini kullanarak

$$(2.5) \qquad \frac{ds^*}{ds} P^* \vec{E}_2 = -\Delta_2 P \vec{A}_1 + (\Delta_1 P - \Delta_3 Q)\vec{A}_2 + \Delta_2 Q \vec{A}_3$$

bulunur.

$$(2.6) \qquad P^* = p^* + \varepsilon p_0^*$$

[E] yüzeyinin dual eğriliğidir ve

$$(2.7) \qquad \lambda^* = \frac{p_0^*}{p^*}$$

dir.

$$(2.8) \qquad m = \frac{ds^*}{ds}$$

koyarak ve (2 . 5) bağıntısından, iki tarafın karesini alarak

$$m^2 P^{*2} = \Delta_2^2 P^2 + (\Delta_1 P - \Delta_3 Q)^2 + \Delta_2^2 Q^2$$

yahut (2 . 3) gözönüne alınarak

$$(2.9) \qquad m^2 P^{*2} = P^2 + Q^2 - (\Delta_3 P + \Delta_1 Q)^2$$

yazılır. (2 . 9) bağıntısında reel ve dual kısımları ayıralım:

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} m^2 p^{*2} &= p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2 \\ 2m^2 p^* p_0^* &= 2\left[pp_0 + qq_0 - (\delta_3 p + \delta_1 q)(\delta_3 p_0 + \delta_1 q_0 + \delta_{30} p + \delta_{10} q)\right] \end{aligned}$$

Buradan(2 . 7) ye göre [E] regle yüzeyinin dağılma parametresi için

$$(2 . 11) \qquad \lambda^{*} = \frac{p p_0 + q q_0 - (\delta_3 p + \delta_1 q)(\delta_3 p_0 + \delta_1 q_0 + \delta_{30} p + \delta_{10} q)}{p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2}$$

bulunur. İleri paragraflarda (2 . 11) bağıntısından hareket edilerek bazı özel regle yüzeyleri inceleyeceğiz.

3 - [A] regle yüzeyinin x boğaz noktasından geçen ve E doğrusunu dik olarak kesen D doğrusunu belirleyelim. D doğrusuna ait birim dual vektörünü

$$(3 . 1) \qquad \vec{D} = \alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 + \alpha_3 \vec{A}_3$$

şeklinde yazabiliriz, burada α_i ler reel sabitler olup

$$(3 . 2) \qquad \sum \alpha_i^2 = 1$$

dir. α_i leri belirlemek için dual vektörlerin skaler çarpımının özelliğinden faydalanacağız. (2 . 2) ve (3 . 1) gözönüne alınarak

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = (\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 + \alpha_3 \vec{A}_3) \cdot (\Delta_1 \vec{A}_1 + \Delta_2 \vec{A}_2 + \Delta_3 \vec{A}_3)$$
$$= 0$$

yahut

$$(3 . 3) \qquad \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_3 = 0$$

olmalıdır. (3 . 3) de $\Delta_i = \delta_i + \varepsilon \delta_{i0}$ koyarak ve reel ve dual kısımları ayırarak

$$\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2+\alpha_3\sigma_3+\varepsilon(\alpha_1\sigma_{10}+\alpha_2\sigma_{20}+\alpha_3\sigma_{30})=0$$

ve buradan

$$(3.4)\qquad \begin{aligned}&\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2+\alpha_3\sigma_3=0\\ &\alpha_1\sigma_{10}+\alpha_2\sigma_{20}+\alpha_3\sigma_{30}=0\end{aligned}$$

bulunur. (3 . 2) , (3 . 4) ve (2 . 4) bağıntıları gözönüne alınarak α_i ler için

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}\alpha_1&=\frac{\sigma_2\sigma_{30}-\sigma_3\sigma_{20}}{\sqrt{\sum\sigma_{i0}^2}}\\ \alpha_2&=\frac{\sigma_3\sigma_{10}-\sigma_1\sigma_{30}}{\sqrt{\sum\sigma_{i0}^2}}\\ \alpha_3&=\frac{\sigma_1\sigma_{20}-\sigma_2\sigma_{10}}{\sqrt{\sum\sigma_{i0}^2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

D doğrusunun E yi kestiği nokta y olsun. [E] regle yüzeyinin E doğuranına ait boğaz noktasını x^* ile gösterelim. 4. paragrafta $y\,x^*$ uzaklığını ve [E] yüzeyinin x^* dan geçen E_2 merkez normalinin D doğrusuna göre durumunu incelemek istiyoruz.

4 - yx^* uzaklığını hesaplamak için:

$$(4.1) \quad \vec{D} \wedge \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \operatorname{Sin} \phi \quad , \quad (\phi = \varphi + \varepsilon \varphi_0)$$

olduğunu işaret edelim; burada

$$(4.2) \quad \varphi_0 = yx^*$$

dır. φ ise E_2 merkez normalinin D doğrusu ile yaptığı açıdır. (2 . 5) , (2 . 8) ve (3 . 1) den

$$(4.3) \quad \vec{D} \wedge \vec{E}_2 = \frac{1}{mP}\left[\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 + \alpha_3 \vec{A}\right] \wedge \left[-\Delta_2 P \vec{A}_1 + (\Delta_1 P - \Delta_3 Q)\vec{A}_2 + \Delta_2 Q \vec{A}_3\right]$$

$$V_1 = \frac{-\alpha_3 \Delta_1 P + (\alpha_2 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_3)Q}{mP^*}$$

$$(4.4) \quad V_2 = -\frac{\alpha_3 \Delta_2 P + \alpha_1 \Delta_2 Q}{mP^*}$$

$$V_3 = \frac{(\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2)P - \alpha_1 \Delta_3 Q}{mP^*}$$

koyarak (4 . 3) bağıntısı

$$(4.5) \quad \vec{D} \wedge \vec{E}_2 = V_1 \vec{A}_1 + V_2 \vec{A}_2 + V_3 \vec{A}_3$$

yazılır. (4 . 1) bağıntısı , (2 . 2) ve (4 . 5) den

$$\sum V_i \vec{A}_i = (\sum \Delta_i A_i) \operatorname{Sin} \phi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ve bu bağıntıda aynı $\vec{A}_i$ lerin katşayıları eşit olacağından, örneğin $\vec{A}_2$ lerin katsayılarını eşitleyerek ve (4.4) ün ikinci eşitliğini gözönüne alarak

$$(4\ .\ 6)\qquad -\frac{\alpha_3 P + \alpha_1 Q}{mP^*} = \operatorname{Sin}\Phi$$

elde edilir. Bu bağıntıda iki tarafta reel ve dual kısımları ayıralım:

$$-\frac{\alpha_3 p + \alpha_1 q}{mp^*} - \varepsilon\left[\frac{\alpha_3 p_0 + \alpha_1 q_0}{mp^*} - \frac{p_0^*}{p^*}\ \frac{\alpha_3 p + \alpha_1 q}{mp^*}\right] = \operatorname{Sin}\varphi + \varepsilon\varphi_0 \operatorname{Cos}\varphi$$

Buradan (2 . 7) ve (2 . 10) un ilk bağıntısı gözönüne alınarak

$$(4\ .\ 7)\qquad \begin{aligned} \operatorname{Sin}\varphi &= -\frac{\alpha_3 p + \alpha_1 q}{\sqrt{p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2}} \\ \varphi_0 \operatorname{Cos}\varphi &= -\frac{\alpha_3 p_0 + \alpha_1 q_0}{\sqrt{p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2}} + \lambda^* \frac{\alpha_3 p + \alpha_1 q}{\sqrt{p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2}} \end{aligned}$$

ve [E] regle yüzeyinin λ^* dağılma parametresi için

$$(4\ .\ 8)\qquad \lambda^* = \frac{\alpha_3 p_0 + \alpha_1 q_0}{\alpha_3 p + \alpha_1 q} - \varphi_0 \operatorname{Cotg}\varphi$$

ifadesi bulunur.

5 - Bu paragrafta λ^* dağılma parametresinin (2.11) ve (4 . 8) ifadelerinden çıkartılan bazı sonuçlar üzerinde duracağız. Önce [A] nın x boğaz noktasından geçen E doğrularının dağılma parametresi sıfıra eşit olanlarına inceleyelim. Böyle doğrular için δ_{i0} lar sıfıra eşittir ve (2 , 11) formülünden

$$p\, p_0 + q\, q_0 - (\delta_3 p + \delta_1 q)(\delta_3 p_0 + \delta_1 q_0) = 0$$

yahut

$$(\delta_3 p + \delta_1 q)(\delta_3 p_0 + \delta_1 q_0) = p\, p_0 + q\, q_0 \tag{5.1}$$

bulunur.

Önce şu noktayı belirtelim. (5 .1) denklemi (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsü içinde doğuranları x boğaz noktasından geçen ikinci dereceden bir koni denklemidir ve bu koninin doğuranları açılabilir yüzeyler oluşturur. Şimdi hangi [A] regle yüzeyleri için (5 . 1) konisinin (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsüne katı olarak bağlı kalacağına araştıralım. Bunun için (5 . 1) denkleminin iki tarafını qq_0 ile bölelim.

$$\left(\delta_3 \frac{p}{q} + \delta_1\right)\left(\delta_3 \frac{p_0}{q_0} + \delta_1\right) = \frac{p}{q}\,\frac{p_0}{q_0} + 1 \tag{5.2}$$

Buradan

$$\frac{p}{q} = st \quad , \quad \frac{p_0}{q_0} = st \tag{5.3}$$

bağıntıları bulunur. Şimdi (5 . 3) koşullarının geometrik açıklamasını yapalım. φ sabit bir açı olmak üzere

$$\frac{p}{q} = \tan\varphi$$

koyalım. Buradan

$$p\cos\varphi - q\sin\varphi = 0$$

yahut $$p\,\vec{a}_2\cos\varphi - q\,\vec{a}_2\sin\varphi = 0$$

ve Blaschke formüllerinin reel kısımlarını gözönüne alarak ve $\vec{k}$ sabit bir birim vektör olmak üzere

$$\vec{a}_1\cos\varphi + \vec{a}_3\sin\varphi = \vec{k} \qquad (5.4)$$

bulunur, yani

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{k} = \cos\varphi$$

dir ki bu ise [A] regle yüzeyinin A_1 doğuranının $\vec{k}$ sabit doğrultusu ile φ sabit açısını yaptığını gösterir.

Diğer taraftan (5 . 3) ün ikinci bağıntısı A_1 doğuranının x boğaz noktasındaki (x) boğaz çizgisinin teğetinin A_1 ile sabit açı yaptığını gösterir. Bu teğet (A_1, A_3) düzlemi içindedir. Aynı zamanda A_1 in sabit açı yaptığı $\vec{k}$ sabit doğrultusuda (5 . 4) e göre (A_1, A_3) düzlemine pareleldir. Şu halde [A] regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisinin teğetleri $\vec{k}$ sabit doğrultusu ile sabit açı yaparlar. Bu özellik (x) boğaz çizgisinin bir sabit eğilimli eğri (Genel Helis) olduğunu gösterir.

(x) boğaz eğrisinin x boğaz noktasındaki $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ FRENET üçyüzlüsünü gözönüne alalım. $\vec{a}_2$ merkez normali

(A_1, A_3) düzlemine dik olduğundan $\vec{\xi}_1$ teğetine ve $\vec{k}$ sabit doğrultusuna diktir. (x) eğrisi bir helis olduğundan ξ_2 asal normali $\vec{k}$ doğrultusuna diktir ve ξ_1'ede dik olduğundan

$$\vec{\xi}_2 = \vec{a}_2$$

dir.

Şu halde bir helis olan (x) boğaz çizgisinin (ξ_1, ξ_2, ξ_3) Frenet üçyüzlüsü aynı x boğaz noktasındaki (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsüne katı olarak bağlıdır ve bunun sonucu (ξ_1, ξ_2, ξ_3) Frenet üçyüzlüsünün hareketi sırasında tepesi (x) üzerinde bulunan ve doğuranları açılabilir yüzeyler oluşturan ve (ξ_1, ξ_2, ξ_3) üçyüzlüsüne katı olarak bağlı kalan bir koni vardır ve bu özellik genel helisler için karekteristiktir.

Şimdi , önceki paragrafta [E] regle yüzeyinin λ^* dağılma parametresi için elde ettiğimiz (4 . 8) ifadesini gözönüne alalım ve [A] regle yüzeyinin

$$(5 . 5) \qquad \alpha_3 p_0 + \alpha_1 q_0 = 0$$

koşulunu gerçeklediğini farzedelim; bu takdirde (4 . 8) bağıntısı

$$(5 . 6) \qquad \lambda^* = - \varphi_0 \operatorname{Cotg} \varphi$$

yazılır. (5 . 5) bağıntısı, α_1 ve α_3 ün sabitler olduğu göz önünde bulundurulursa , (x) boğaz çizgisinin x boğaz noktasındaki teğetinin bu noktadaki A doğuranı ile sabit açı yapan [A] regle yüzeylerini karakterize eder.

İncelediğimiz bu özel halde ,(5 . 5) bağıntısını gerçekleyen regle yüzeylerin dağılma parametresi için genel haldekine benzer (Chasles teoremi) bir geometrik açıklamasını yapacağız.(5 . 6) bağıntısından

$$(5.7) \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\varphi_0}{\lambda^*}$$

yazılır. x boğaz noktasından E doğuranına indirilen dikmeyi D ve bu dikmenin E üzerindeki ayağını y ile göstermiştik.(3. paragraf).

E doğuranının merkez normali E_2 nin D doğrusu ile yaptığı açının tangenti , y noktasının E nin x^* boğaz noktasına uzaklığının [E] nin dağılma parametresine oranının ters işaretlisine eşittir.

6 - Şimdi E doğrusunun (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsüne göre durumunun bazı özel hallerini inceleyeceğiz.

Önce E doğrusunun (A_1, A_3) düzleminde bulunduğunu farzedelim. (2 . 2) denklemi $\varsigma_{10} = \varsigma_{30} = \varsigma_2 = 0$ olacağından

$$(6.1) \qquad \vec{E}_1 = \varsigma_1 \vec{A}_1 + \varepsilon \varsigma_{20} \vec{A}_2 + \varsigma_3 \vec{A}_3$$

yazılır. Buradan türev alarak

$$(6.2) \qquad \frac{ds^*}{ds} P^* \vec{E}_2 = -\varepsilon \varsigma_{20} P \vec{A}_1 + (\varsigma_1 P - \varsigma_3 Q)\vec{A}_2 + \varepsilon \varsigma_{20} Q \vec{A}_3$$

veya daha önce yaptığımız gibi $m = \dfrac{ds^*}{ds}$ koyarak

$$(6.3) \qquad \vec{E}_2 = \frac{1}{mP^*}\left[-\varepsilon \varsigma_{20} P \vec{A}_1 + (\varsigma_1 P - \varsigma_3 Q)\vec{A}_2 + \varepsilon \varsigma_{20} Q \vec{A}_3\right]$$

yazılır. E_2 merkez normalinin yukarıdaki ifadesinde $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_3$ vektörlerinin katsayılarının reel kısımları sıfıra eşittir, şu halde E_2 merkez normali A_1 ve A_3 doğrularına ve dolayısıile (A_1, A_3) düzlemine dik olacak ve E_2 doğrusu A_2 ye paralel olacaktır. Bunun sonucu (6 . 3) bağıntısında $\vec{A}_2$ nin katsayısının dual kısmı sıfıra eşittir.

$$(6.4) \qquad D\left[\frac{\delta_1 P - \delta_3 Q}{m P^*}\right] = 0$$

buradan

$$\delta_1 p_0 - \delta_3 q_0 - \frac{p_0^*}{p^*}\left(\delta_1 p - \delta_3 q\right) = 0$$

veya (2 . 7) bağıntısı gözönüne alınarak [E] regle yüzeyinin bu özel halde dağılma parametresi için,

$$(6.5) \qquad \lambda^* = \frac{\delta_1 p_0 - \delta_3 q_0}{\delta_1 p - \delta_3 q}$$

elde edilir. λ^* ın bu ifadesi (2 . 11) bağıntısında $\delta_{10} = \delta_{30} = \delta_2 = 0$ yapılarakta elde edilir.

E_2 merkez normalinin (6 . 3) ifadesi (6 . 4) bağıntısıda gözönüne alınarak (6 . 2) den

$$m p^* = \delta_1 p - \delta_3 q$$

alınır ise:

$$(6.6) \qquad \vec{E}_2 = -\frac{\varepsilon \delta_{20} p}{\delta_1 p - \delta_3 q}\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \frac{\varepsilon \delta_{20} q}{\delta_1 p - \delta_3 q}\vec{A}_3$$

yazılır. (6 . 6) ifadesi [E] regle yüzeyinin E_2 merkez normalinin [A] regle yüzeyinin A_2 merkez normaline parelel olduğunu gösterir. [E] nin E_1 ait x^* boğaz noktasının (A_1 , A_3) eksen sistemine göre koordinatlarının da aynı bağıntıdan

$$
(6.7) \qquad \mu_1 = -\frac{\delta_{20}\, p}{\delta_1 p - \delta_3 q} \qquad \mu_3 = \frac{\delta_{20}\, q}{\delta_1 p - \delta_3 q}
$$

olduğu kolayca görülür. x^* noktasının μ_1, μ_3 koordinatları sadece $^p/q$ ye bağlıdır ve (6 . 7) bağıntıları arasında $^p/q$ yok edilerek E_1 doğrusunun (A_1, A_3) düzlemindeki denklemi elde edilir.

$$
(6.8) \qquad \delta_1 \mu_1 + \delta_3 \mu_3 + \delta_{20} = 0
$$

şuhalde, A doğrusu [A] regle yüzeyini oluştururken [E] regle yüzeyinin E_1 e ait x^* boğaz noktası $^p/q$ ya bağlı olarak E_1 doğrusunu çizer.

Özel olarak $^p/q$ = st eşitliğini gerçekleyen, yani sabit bir doğru ile doğuranları sabit bir açı yapan bir [A] regle yüzeyi için x^* boğaz noktası E_1 doğrusu üzerinde sabit kalır. Bunun sonucu [E] yüzeyinin (E_1, E_2, E_3) Blaschke üçyüzlüsü (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsü içinde hareketsizdir.

Bu özel hal için şu hususa da işaret edelim.

$$
\frac{p}{q} = c = st
$$

koyalım, x^* boğaz noktasının (6 .7) bağıntıları ile verilen koordinatlarından

$$(6.9) \qquad \mu_1 = c\,\mu_3$$

bulunur. Buradan şu sonuç çıkarılır:

Ana doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan ($p/q = c = st$) bir $[A]$ regle yüzeyinin (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsüne bağlı ve (A_1, A_3) düzleminde bulunan E doğrularının oluşturdukları regle yüzeylerin (A_1, A_3) içindeki boğaz noktaları (6 . 9) doğrusunu oluştururlar.

Bu özelliğin bahis konusu olan yüzeyler için karekteristik olduğu kolayca görülür. Ancak (6 . 9) doğrusuna paralel olan E doğrularını dikkate almamak gerekir. Çünkü bu durumda x^* boğaz noktası sonsuzda ve dolayısıyla $[E]$ bir silindirdir.

İkinci özel hal olarak E doğrusunun x boğaz noktasından geçtiğini farzedelim. Bu halde (2 . 2) ifadesinde A_i lerin katsayılarının dual kısımlarını sıfıra eşit yaparak δ_i ler sabit ve $\sum \delta_i^2 = 1$ olmak üzere

$$(6.10) \qquad \vec{E}_1 = \delta_1 \vec{A}_1 + \delta_2 \vec{A}_2 + \delta_3 \vec{A}_3$$

yazılır.

Şimdi $[A]$ ve $[E]$ yüzeylerininkarşılıklı x ve x^* boğaz noktalarının xx^* uzaklığını hesaplıyalım. Burada yapılacak hesaplar 2. paragraftakilerin özel bir halidir ($\delta_{i_0} = 0$) ve orada yapıldağı gibi $m = \frac{ds^*}{ds}$ koyarak

$$\vec{E}_2 = \frac{-\delta_2 P \vec{A}_1 + (\delta_1 P - \delta_3 Q)\vec{A}_2 + \delta_2 Q \vec{A}_3}{mP^*}$$

yahut

$$(6\,.\,11)\quad \vec{E}_2=\frac{-(\delta_2 p+\varepsilon\,\delta_2\,p_0)\vec{A}_1+[\delta_1 p-\delta_3 q+\varepsilon(\delta_1 p_0-\delta_3 q)]\vec{A}_2}{m\,p^{*2}}$$

$$\frac{+(\delta_2 q+\varepsilon\,\delta_2 q_0)\,\vec{A}_3}{}\,(p^*-\varepsilon p_0^*)$$

yazılır. x boğaz noktasından E_2 doğrusuna paralel olarak çizilen E_{22} doğrusunun birim dual vektörü (6 . 11) formülünde $\vec{A}_i$ lerin katsayılarının reel kısımlarını gözönüne alarak

$$(6\,.\,12)\quad E_{22}=\frac{-\delta_2 p\,\vec{A}_1+(\delta_1 p-\delta_3 q)\vec{A}_2+\delta_2 q\,\vec{A}_3}{m\,p^*}$$

yazılır. E_2 ve E_{22} doğrularının uzaklığı aradığımız $x\,x^*$ uzaklığıdır. Şu halde

$$\vec{E}_{22}\wedge\vec{E}_2=\vec{E}_1\sin\phi=\vec{E}_1(\sin\varphi+\varepsilon\varphi_0\cos\varphi)$$

ve $\varphi=0$ olduğundan $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=1$ koyarak

$$(6\,.\,13)\qquad \vec{E}_{22}\wedge\vec{E}_2=\varepsilon\,\varphi_0\,\vec{E}_1$$

yazılır. Buradan

$$(6\,.\,14)\qquad |\varphi_0|=x\,x^*$$

dır. (6 . 10) , (6 . 12) ve (6 . 13) formüllerinden ve 4. paragrafta $y\,x^*$ uzaklığının hesabında yapılan işlemlerin benzerleri tekrarlanarak

$$(6\,.\,15)\qquad x\,x^*=\frac{\delta_2(p\,q_0-p_0 q)}{p^2+q^2-(\delta_3 p+\delta_1 q)^2}$$

elde edilir.

Gözönüne alınan halde [E] nin dağılma parametresi (2 . 11) bağıntısında δ_{i0} lar sıfıra eşit yapılarak elde edilir.

$$\lambda^* = \frac{p\,p_0 + q\,q_0 - (\delta_3 p + \delta_1 q)(\delta_3 p_0 + \delta_1 q_0)}{p^2 + q^2 - (\delta_3 p + \delta_1 q)^2} \qquad (6.16)$$

dır.

[A] ve [E] regle yüzeylerinin aynı boğaz çizgisine sahip olması koşulunu arıyalım. (6 . 15) bağıntısından $x\,x^* = 0$ yaparak

$$\delta_2 = 0, \qquad p\,q_0 - q\,p_0 = 0 \qquad (6.17)$$

bulunur. (6 . 17) nin birinci bağıntısı E_1 doğrusunun (A_1, A_3) bulunmasını ifade eder. Buradan şu sonucu çıkaracağız.

Bir [A] regle yüzeyinin x boğaz noktasından geçen ve (A_1, A_3) düzleminde bulunan ve A_1 doğuranı ile sabit açı yapan bir E doğrusu tarafından oluşturulan [E] regle yüzeyi [A] ile aynı (x) boğaz çizgisine sahiptir ve [A] , [E] regle yüzeyleri birbirlerine (x) ortak boğaz çizgisi boyunca teğettir.

Bu halde [E] nin dağılma parametresini bulmak için (6 . 16) da $\delta_2 = 0$ yapalım. Gerekli kısaltmalardan sonra

$$\lambda^* = \frac{\delta_1 p_0 - \delta_3 q_0}{\delta_1 p - \delta_3 q}$$

bulunur.

Şimdi (6 . 17) nin ikinci bağıntısının gerçeklenmesi halini gözönüne alalım. $p\,q_0 - q\,p_0 = 0$. Bu halde [A] nan (x) boğaz çizgisinin asal normali [A] nın A_2 merkez normaline diktir. Bunun sonucu (x) boğaz çizgisi [A] yüzeyinin bir asimptotik çizgisidir.Bu ikinci hal için şu sonuç çıkarılır.

Bir [A] regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisi [A]nın bir asimptotik çizgisi ise x boğaz noktasından geçen ve x deki (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsüne katı olarak bağlı bir E doğrusu tarafından oluşturulan [E] regle yüzeyi [A] ile aynı (x) boğaz çizgisine sahiptir.

[E] nin dağılma parametresine gelince :Önce şu hususa işaret edelim ki $p\,q_0 - q\,p_0 = 0$ bağıntısından

(6 . 18) $$\frac{p_0}{p} = \frac{q_0}{q}$$

yazılır.Bu [A_1] in dağılma parametresinin [A_3] ün dağılma parametresine eşit olduğunu gösterir.

$$\lambda_1 = \lambda_3$$

Diğer taraftan (6 . 18) gözönüne alınarak (6.16) dan

$$\lambda^* = \frac{p_0}{p}$$

ve nihayet

$$\lambda^* = \lambda_1 = \lambda_3$$

elde edilir.

K A Y N A K L A R

1- W.BLASCHKE

Diferensiyel Geometri dersleri Cilt I (K.Erim)

2- L.BİRAN

İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt VIII,seri A,sayı 1

3- K.K.GOROWARA

İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt XVIII,seri A,sayı 2