MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

REGLE YÜZEYLERİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Mebsut ve Basıt Kavramlarının) Genelleştirilmesi

Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Ahmet Yılmaz
Öğretim Görevlisi

1984

Yüksek Lisans öğrenciliğim sırasında ve daha sonra tez hazırlama çalışmalarımda yardım ve desteklerini esirgemeyen , tezin bu aşamaya gelmesini sağlayan Sayın hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN 'a ayrıca yardımlarını gördüğüm değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

REGLE YÜZEYLERİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Mebsut ve Basıt Kavramlarının) Genelleştirilmesi

1 - Bir (x) düzlem eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yerinin, (x) in mebsutu olan bir (x^*) eğrisi olduğu ve (x) eğrisinin, (x^*) eğrisinin bir basıtı olduğu bilinmektedir. Bir düzlem eğrisinin sonsuz sayıda basıtı vardır ve aynı bir eğrinin iki farklı basıtı iki paralel eğridir. Bir ucu bir (x^*) eğrisinin bir noktasına saptanmış ve uzunluğu değişmeyen ve (x) eğrisine sıkıca sarılmış bir ip gergin olarak ve (x) eğrisine teğet kalmak üzere eğriden ayrılırsa, ipin serbest ucu (x) in bir basıtını çizer.

Düzlem eğrilerinin bu özelliği ve diğer bazı özellikler küresel eğrilere teşmil edilebilir. Bu genelleştirmede doğruların yerini büyük çemberler alır.

Bu çalışmada, yukardaki düşüncelere benzer olarak, Bir $[A]$ regle yüzeyinin mebsutunu, bu regle yüzeyin Blaschke üçyüzlüsünün A^* eğrilik eksenlerinin (Ani vidalama ekseninin) oluşturduğu $[A^*]$ regle yüzeyini; karşıt olarak bir $[A^*]$ regle yüzeyinin basıtları olarak da $[A^*]$ yüzeyini mebsut olarak kabul eden tüm $[A]$ regle yüzeylerini tanımlayacağız.

Bir regle yüzeyin basıtlarının bir konormal yüzey ailesi oluşturduğunu gösterdikten sonra, karşıt olarak bir konormal regle yüzey ailesinin regle yüzeylerinin, aynı bir mebsuta sahip olduklarını göstereceğiz.

Bir reel parametrenin fonksiyonu olarak alınan ve bir $[A]$ regle yüzeyinin A anadoğrusunu gösteren $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0$ dual birim vektörü ($\varepsilon^2 = 0$) gözönüne alınırsa $\vec{A}^2 = 1$ dir. Bunun sonucu olarak yarıçapı 1 olan dual küre düşünülürek bir $[A]$ regle yüzeyine, dual kürenin bir ($\mathcal{A}$) eğrisi karşılık gelir. ($\mathcal{A}$) ya $[A]$ yüzeyinin dual imajı diyeceğiz. Aynı biçimde $[A]$ regle yüzeyinin bir $[A^*]$ basıtının ($\mathcal{A}^*$) dual imajını gözönüne alarak, yukardaki düşüncelerle küre geometri arasındaki benzerliği göstereceğiz.

Şimdi ileride kullanacağımız bazı formülleri kısaca gösterelim. Bir A yönlü doğrusu alalım. A ile aynı yönde olan birim vektör $\vec{a}$ olsun. Sabit bir O noktasına göre $\vec{a}$ nün momenti $\vec{a}_0$ ise $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0$ dual birim vektörü A doğrusunu tek biçimde belirler. t bir reel parametre olmak üzere, A doğrusu tarafından oluşturulan $[A]$ regle yüzeyi, A nın birim dual vektörü t ye bağlı olarak verilmesi ile belirlenir :

$$\vec{A}(t) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_0 .$$

A doğrusunun x boğaz noktasındaki normali (merkez normal) A_2 olsun. $A = A_1$, A_2 ve bu yönlü doğruları, doğru yönlü bir dik üçyüzlüye tamamlayan x deki yüzey teğeti A_3 olduğuna göre (A_1 , A_2 , A_3) üçyüzlüsüne Blaschke üçyüzlüsü denir. (A_1 , A_2 , A_3) üçyüzlüsünün ayrıtlarına ilişkin birim dual vektörler sırayla $\vec{A}_1(t)$, $\vec{A}_2(t)$, $\vec{A}_3(t)$ vektörlerinin t parametresine göre $\vec{A}_i'$ türevlerinin $\vec{A}_i$ ler cinsinden ifade eden,

$$\begin{aligned} \vec{A}_1' &= P \vec{A}_2 \\ \vec{A}_2' &= - P \vec{A}_1 + Q \vec{A}_3 \\ \vec{A}_3' &= - Q \vec{A}_2 \end{aligned}$$

bağıntıları Blaschke formülleridir. Burada

$$P = \sqrt{\vec{A}_1'^2} \quad , \quad Q = \frac{(\vec{A}_1 , \vec{A}_2' , \vec{A}_3'')}{\vec{A}_1'^2}$$

dual büyüklüklerine sırayla dual eğrilik ve dual burulma adı verilir.

Bir $\vec{A}^{(1)}$ birim dual vektörünü

$$\vec{A}^{(1)} = \sum \Delta_i \vec{A}_i$$

bağıntısı ile $\vec{A}_i$ ler cinsinde lineer olarak gösterelim; Burada Δ_i ler dual büyüklükler olup

$$\sum \Delta_i^2 = 1$$

dir. Şimdi bir an için $A^{(1)}$ doğrusunun hem (A_1 , A_2 , A_3) e bağlı uzaya, hem de sabit uzaya göre sabit kaldığını varsayarsak, Δ_i leri de sabit tutarak $\vec{A}^{(1)\prime}$ = 0 dan ve $\sum \Delta_i^2 = 1$ de gözönüne alınarak

$$\Delta_1 = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \; ; \quad \Delta_2 = 0 \, , \quad \Delta_3 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

bulunur, ve buradan, (A_1 , A_2 , A_3) ün ani vidalama ekseni denen doğrunun dual birim vektörü elde edilir:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \vec{A}_1 + \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \vec{A}_3 \quad .$$

2 - Dual eğilimi sabit olan regle yüzeyler.- Doğuranları sabit bir doğru ile bir sabit dual açı yapan her regle yüzeye sabit dual eğilimli regle yüzey denir.

Bir sabit D doğrusunu $\vec{D}$ dual birim vektörü ile gösterelim ve bir $[A]$ regle yüzeyinin bir A doğuranına ilişkin dual birim vektör $\vec{A}_1$ (s) olsun; burada s, $[A]$ nin boğaz çizgisinin yay uzunluğudur. Tanıma göre

(1) $$\vec{A}_1 . \vec{D} = \cos \emptyset = st.$$

olmalıdır; $\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi_0$, A_1 ve D doğrularının dual açısı olup φ bu iki doğrunun açısı, φ_0 ise ortak dikme uzunluğudur. (1) bağıntısının türevini alalım; Blaschke formüllerinin birincisine göre

$$P \vec{A}_2 . \vec{D} = 0$$

ya da

(2) $$\vec{A}_2 . \vec{D} = 0$$

bulunur; burada $\vec{A}_2$, $[A]$ regle yüzeyinin, A doğuranına ilişkin boğaz noktasındaki normalidir; bu normale merkez normal denir.

(2) bağıntısından türev alalım; Blaschke formüllerinin ikincisine göre

(3) $$- P \vec{A}_1 . \vec{D} + Q \vec{A}_3 . \vec{D} = 0$$

veya (1) formülü ve $\vec{D}$ nin (A_1, A_3) düzlemine parelel olduğu gözönüne alınarak

$$\vec{A}_1 . \vec{D} = \mathrm{Cos}\, \emptyset \quad , \vec{A}_3 . \vec{D} = \mathrm{Sin}\, \emptyset$$

ve buradan (3) bağıntısı

$$- P \,\mathrm{Cos}\, \emptyset + Q \,\mathrm{Sin}\, \emptyset = 0$$

nihayet

(4) $$\frac{P}{Q} = \mathrm{tg}\, \emptyset = \mathrm{St}.$$

bulunur. Özel olarak

$$P = \mathrm{st} \quad , \quad Q = \mathrm{st}$$

olması durumunda boğaz çizgisinin bir dairesel helis olduğu kolayca görülür ve gözönüne alınan regle yüzey bir regle helikoittir.

3.- Bir regle yüzeyin mebsutu .- Bir $[A]$ regle yüzeyinin A_1 doğuranına ilişkin (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsünün ani vidalama ekseni

(5) $$\vec{A}_1^{(1)} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \vec{A}_1 + \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \vec{A}_3$$

bağıntısı ile verilmiştir. A_1 doğrusu $[A]$ yüzeyini oluştururken $A_1^{(1)}$ doğrusunun oluşturduğu regle yüzeye $[A]$ in mebsutu denir. $[A]$ nin mebsutu $[A^{(1)}]$ olsun. $A_1^{(1)}$ in $x^{(1)}$ boğaz noktasının $[A]$ nin $\vec{A}_2$ merkez normali üzerinde olduğu ve $[A^{(1)}]$ in Blaschke üçyüzlüsünün üçüncü ayrıtı $A_3^{(1)}$ ün A_2 ile çakıştığı bilinmektedir.

(6) $$\vec{A}_3^{(1)} = \vec{A}_2$$

4 - Bir regle yüzeyin basıtları.- Bir $[A]$ regle yüzeyi verilmiş olsun. Öyle bir $[A^*]$ regle yüzeyi belirlemek istiyoruz şöyle ki, $[A]$ regle yüzeyi $[A^*]$ in mebsutu olsun; $[A^*]$ ne $[A]$ nin bir basıtı denir.

$[A]$ ve $[A^*]$ regle yüzeylerinin Blaschke üçyüzlüleri sırayla (A_1 , A_2 , A_3) ve (A_1^* , A_2^*, A_3^*) olsun; A_1 ve A_1^* doğuranlarının dual açısını $\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi_0$ ile gösterelim;

$$\vec{A}_1^* = \vec{A}_1 \operatorname{Cos} \emptyset + \vec{A}_2 \operatorname{Sin} \emptyset$$

olacaktır; diğer taraftan $[A^*]$ in boğaz çizgisinin yay uzunluğunu s^* ile göstererek ve yukardaki eşitlikten türev alarak, Blaschke formüllerinden

$$\frac{ds^*}{ds} P^* \vec{A}_2^* = -(\emptyset' + P)\vec{A}_1 \operatorname{Sin} \emptyset + (\emptyset' + P)\vec{A}_2 \operatorname{Cos} \emptyset + Q\vec{A}_3 \operatorname{Sin} \emptyset$$

yazılır; öte yandan (6) eşitliğine göre

$$\vec{A}_2^* = \vec{A}_3$$

olmalıdır; Buradan

$$\emptyset' + P = 0$$

ya da

(7) $$\emptyset + \int P \, ds = C$$

elde edilir. Burada C bir dual sabittir. Her regle yüzeyin ancak bir mebsutu olmasına karşın $C = c + \varepsilon c_0$ dual sabiti iki keyfi reel sabiti içine aldığından, bir regle yüzeyin ∞^2 sayıda basıtı vardır.

Şimdi bir $[A]$ regle yüzeyinin $[\overset{*}{A}]$ ve $[\overset{**}{A}]$ gibi iki basıtını gözönüne alalım; $[\overset{*}{A}]$ in her doğuranına $[\overset{**}{A}]$ in yalnız bir doğuranı ve karşıt olarak $[\overset{**}{A}]$ in her doğuranına $[\overset{*}{A}]$ in yalnız bir doğuranı karşılık gelir; ve bu karşılıklı $\overset{*}{A}_1$, $\overset{**}{A}_1$ doğuranlar $[A]$ regle yüzeyinin (A_1, A_2, A_3) blaschke üçyüzlüsünün A_3 ayrıtını dik olarak keserler. Bu A_3 ayrıtı, gözönüne alınan $[\overset{*}{A}]$ ve $[\overset{**}{A}]$ yüzeylerinin karşılıklı $\overset{*}{x}$ ve $\overset{**}{x}$ boğaz noktalarındaki normalidir. $\overset{*}{A}_1$ ve $\overset{**}{A}_1$ doğuranları (7) bağıntısındaki C dual sabitinin farklı iki değerine karşılık gelir; şu halde $\overset{*}{A}_1$ ve $\overset{**}{A}_1$ doğuranlarının dual açısı sabittir.

Bir regle yüzeyin basıtlarının, konormal regle yüzeyler olduğuna işaret edelim. Karşıt olarak, bir konormal regle yüzey ailesi aynı bir mebsuta sahiptir. Gerçekten, $[A]$ ve $[\overset{*}{A}]$ konormal regle yüzeylerinin doğuranlarının dual birim vektörleri $\vec{A}_1$, $\vec{\overset{*}{A}}_1$ olsun; A_1 ve $\overset{*}{A}_1$ doğuranlarının dual açılarını da $\Omega = \omega + \varepsilon \omega_0$ ile gösterelim. Nihayet (A_1, A_2, A_3), $(\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2, \overset{*}{A}_3)$ sırayla $[A]$ ve $[\overset{*}{A}]$ yüzeylerinin Blaschke üçyüzlüleri olsun. $[A]$ ve $[\overset{*}{A}]$ iki konormal regle yüzey olduğundan; Ω açısı sabit olup (A_1, A_2, A_3) ve $(\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2, \overset{*}{A}_3)$ üçyüzlüleri A_2 ve $\overset{*}{A}_2$ ayrıtları çakışmak üzere birbirlerine katı olarak bağlıdırlar. Bundan şu sonuç çıkarılır : (A_1, A_2, A_3) ve $(\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2, \overset{*}{A}_3)$ üçyüzlüleri aynı ani vidalama eksenine ve şu halde $[A]$ ve $[\overset{*}{A}]$ regle yüzeyleri aynı mebsuta sahiptir.

5 - Dual Küre üzerinde imajlar.- Bir A doğrusunu gösteren $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_o$ birim dual vektörü için geçerli olan

$$\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = 1$$

bağıntısı, yarıçapı 1 e eşit olan Σ dual küresinin noktaları ile doğrular arasında bir eşleme yapılmasına yol açmıştır; şöyle ki bir $[A]$ regle yüzeyinin her A_1 doğuranına Σ üzerinde bir $\mathcal{A}_1$ noktası karşılık gelir; $\mathcal{A}_1$ e A_1 in dual imajı denir. $[A]$ yüzeyinin tüm doğuranlarının imajları Σ nin bir $(\mathcal{A})$ eğrisini oluşturur. $(\mathcal{A})$ e $[A]$ regle yüzeyinin dual imajı denir.

Eğer $[A]$ ve $[A^*]$ gibi iki regle yüzeyin bir A_1 ortak doğuranları varsa ve $[A]$, $[A^*]$ regle yüzeyleri A_1 ortak doğuranında aynı Blaschke üçyüzlüsüne sahip iseler, $[A]$ ve $[A^*]$ in $(\mathcal{A})$ ve $(\mathcal{A}^*)$ imajları, A_1 in imajı olan $\mathcal{A}_1$ noktasında teğettirler.

$[A]$ regle yüzeyinin A_1 doğuranına ilişkin Blaschke üçyüzlüsünün ani vidalama ekseni $A^{(1)}$ ve $A^{(1)}$ in imajı $\mathcal{A}^{(1)}$ olsun. $\mathcal{A}^{(1)}$ e $[A]$ yüzeyinin $(\mathcal{A})$ imajının $\mathcal{A}_1$ noktasındaki dual eğrilik merkezi denir. A_1 ve $A^{(1)}$ doğuranlarının $\emptyset$ dual açısı $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}^{(1)}$ noktalarının dual uzaklığıdır.

Sabit dual eğilimli bir $[A]$ regle yüzeyinin ani ekseninin sabit bir U doğrusu olduğu kolayca görülür. Gerçekten (4) bağıntısı gözönüne alınarak (5) den türev alınırsa

$$\frac{d\vec{A}^{(1)}}{ds} = 0$$

bulunur ve buradan

$$\vec{A}^{(1)} = \vec{U} = st$$

bulunur. $[A]$ nin A doğuranı U sabit doğrusu ile $\emptyset$ sabit dual açısı yapar. U doğrusu ile aynı $\emptyset$ dual açısı yapan tüm doğrular bir R kongrüansı oluştururlar ve U sabit doğrusunun imajı $\mathcal{M}$ ile gösterilirse R nin imajı; merkezi $\mathcal{M}$, dual yarıçapı $\emptyset$ olan bir ($\mathcal{R}$) küçük hiperçemberdir; sabit eğilimli $[A]$ regle yüzeyinin imajı ise ($\mathcal{R}$) hiperçemberin bir ($\mathcal{r}$) çemberi olacaktır. Özel olarak A doğuranı U doğrusuna dik ise (doğrultman düzlemli regle yüzey) böyle bir yüzeyin imajı bir büyük hiperçemberin bir ($\mathcal{r}$) büyük çemberi olacaktır. Bir dik konoidin ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$) imajı $\sum$ nin bir büyük hiperçemberinin bir büyük çemberidir.

Bir $[A]$ regle yüzeyi ve bu yüzeyin bir A_1 doğuranına ilişkin (A_1 , A_2, A Blaschke üçyüzlüsü gözönüne alınırsa (A_1 , A_2 , A_3) ün $A^{(1)}$ ani ekseni bu üçyüzlü içinde ekseni A_2 olan bir $[R^{(1)}]$ konoidini, sabit uzayda ise $[A]$ nin mebsutu olan $[A^{(1)}]$ regle yüzeyini oluşturur. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz: $[A^{(1)}]$ in dual imajı ($\mathcal{A}^{(1)}$) ile gösterilirse $[R^{(1)}]$ konoidinin imajı, $A^{(1)}$ ani ekseninin imajı olan $\mathcal{A}^{(1)}$ noktasında ($\mathcal{A}^{(1)}$) e teğet olan bir ($\mathcal{R}$) büyük çemberi olacaktır.

Karşıt olarak bir $[A]$ regle yüzeyinin bir $[A^{*}]$ basıtı gönönüne alınırsa ve karşılıklı iki doğuranı A_1 ve $\overset{*}{A}_1$ ile gösterilirse, $\overset{*}{A}_1$ doğrusu (A_1 , A_2 , A_3) üçyüzlüsü içinde ekseni A_3 olan bir $\left[\overset{*}{R}\right]$ konoidi oluşturur ve $\left[\overset{*}{R}\right]$ nin dual imajı, $\left[\overset{*}{A}\right]$ nin dual imajı olan $(\overset{*}{\mathcal{A}})$ a $\overset{*}{A}_1$ ın imajı olan $\overset{*}{\mathcal{A}}_1$ noktasında teğet olan bir büyük çemberdir.

Şimdi dual yay elemanı için

$$d S = \sqrt{d \vec{A}^2 (s)}$$

koyalım; burada s ile $[A]$ regle yüzeyinin boğaz çizgisinin yay uzunluğu gösterilmiştir; Blaschke formüllerinin ilkine göre, $[A]$ regle yüzeyinin $(\mathcal{A})$ dual imajı için

(9) $$S = \int P \, ds$$

yazılır. $[A]$ yüzeyi $\left[\overset{*}{A}\right]$ nin mebsutu olduğunda A_1 ve $\overset{*}{A}_1$ doğuranlarının $\emptyset$ dual açısı (7) ile verilmiştir; (9) bağıntısı gözönüne alınarak (7) eşitliği

(10) $$\emptyset + S = C$$

yazılır. Burada $\emptyset$ nin $\mathcal{A}_1$ ve $\overset{*}{\mathcal{A}}_1$ imajlarının uzaklığı, S nin $(\mathcal{A})$ dual eğrisinin yay uzunluğu ve C nin verilen bir dual uzunluk olduğu gözönünde bulundurularak (10) bağıntısı klasik geometri dili ile ifade olunabilir.

K A Y N A K L A R

1- E.STUDY
Geometri der Dynamen

2- W.BLASCHKE
Diferensiyel Geometri dersleri Cilt I (K.Erim)

3- L.BİRAN
İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt VI, seri A, sayı 3-4

4- L.BİRAN
İst. Üniv. Fen Fakültesi Mecmuası Cilt XI, seri A, sayı 1-2