MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

E. CESARO'NUN BİR TEOREMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALARLA İLGİLİ İNCELEMELER

Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Ersin EROL
Öğretim Görevlisi

1984

Gerek yüksek lisans öğrenciliğim süresince, gerekse daha sonraki tez çalışmalarımda büyük yardım ve desteğini gördüğüm kıymetli hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN'a saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca birlikte zevkle çalıştığım ve kendilerinden çok yararlandığım sınıf arkadaşlarıma teşekkür ederim.

E. CESARONUN BİR TEOREMİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALARLA İLGİLİ İNCELEMELER

GİRİŞ: E. Cesaro, bir (x) düzlem eğrisinin bir x noktası, $x^{(1)}$ eğrilik merkezi ve ardışık mebsutlarının $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$ eğrilik merkezlerinin verilmesi ile (x) eğrisinin x noktası komşuluğunda belirlenebileceğini göstermiştir. [1] (*)

Bir uzay eğrisi için, R.Von Misés, (x) uzay eğrisinin $l^{(1)}, l^{(2)}$ $l^{(3)}, \ldots$ ardışık eğrilik eksenleri dizisinin, düzlem eğrisi halindeki $x^{(k)}$ eğrilik merkezleri dizisine karşılık gelebileceğini düşünmüş, ancak $l^{(k)}$ doğrular dizisinin verilmesinin problemin çözümüne yetmediğini göstererek, çözümü tamamlamak için, $l^{(k)}$ doğrular dizisi ile beraber, (x) uzay eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu açılabilir yüzeyin, eğrimizin x noktasındaki oskülatör düzlem üzerine serilmesiyle elde edilen düzlem eğrisinin ardışık eğrilik merkezleri dizisini gözönüne almıştır. [2]

Aynı problem için F.Gürsan, (x) uzay eğrisinin $l^{(k)}$ eğrilik eksenleri dizisine, (x) in mülhak eğrisinin ardışık eğrilik eksenleri dizisinin katılması ile bir çözüm oluşabileceğini göstermiştir. [3]

L.Biran [4] , düzlem eğrilerinde eğrilik merkezi kavramının uzay eğrilerinde doğal karşılığının Frenet üçyüzlüsünün $A^{(1)}$ ani vidalanma ekseni olduğunu düşünerek, $A^{(k)}$ ani eksenler dizisinin verilmesi ile (x) uzay eğrisinin diferensiyel elemanlarının belirlenebileceğini göstermiştir. L. Biran'ın çözümünde, hesapları kısaltmada büyük yarar sağlayan dual uzaydan yararlanılmıştır. [5]

Bu konuda yayınlanan iki çalışmaya da kısaca değinelim.

K.Erim [6], problemin çözümü olarak L.Biran'ın verdiği $A^{(k)}$ ardışık ani eksenler sistemini almış ve bu eksenlerin dual küre üzerindeki imajlarının ardışık dual küresel eğrilik merkezleri [7] olduğuna işaret ederek problemi küresel eğriler yönünden incelemiştir.

Nihayet C. Arf [8], yayınladığı bir makalede, söz konusu olan problemin doğal çözümünün $A^{(k)}$ ani eksenler dizisinin olduğuna işaret ederek aynı sonucu dual büyüklükler kullanmadan, reel uzayda elde etmiştir.

(*): Kroşe içindeki sayılar tezin sonundaki kaynakları gösterir.

Biz bu çalışmamızda, önce bir düzlem eğrisinin diferensiyel elemanlarının geometrik tasvirini veren Cesaro problemini inceleyeceğiz. İkinci bölümde bir (x) uzay eğrisini gözönüne alıp bunun $l^{(k)}$ ardışık eğrilik eksenlerini belirleyecek ve problemin çözümü için bu doğru dizisinin yetmediğini göstereceğiz. Üçüncü ve son bölümde, (x) uzay eğrisinin $A^{(k)}$ ardışık ani vidalanma eksenlerini tanımlayacağız ve $A^{(k)}$ doğru dizisinin (x) uzay eğrisinin diferensiyel elemanlarının bir geometrik tasvirini oluşturduğunu göstereceğiz.

I. BÖLÜM

CESARONUN PROBLEMİ

Yay uzunluğu s olan bir (x) düzlem eğrisini gözönüne alalım.

$$\vec{x}=\vec{x}(s)$$

dir. (x) in bir x noktasındaki teğet birim vektörünü $\vec{\xi}_1$, normal birim vektörünü $\vec{\xi}_2$, eğriliğini ρ ve eğrilik yarıçapını $\frac{1}{\rho}=R$ ile gösterelim. (x) eğrisinin mebsutu $(x^{(1)})$ olsun.

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}+R\vec{\xi}_2 \qquad (1.1)$$

dir. $(x^{(1)})$ eğrisinin yay uzunluğunu $s^{(1)}$, teğet birim vektörünü $\vec{\xi}_1^{(1)}$ normal birim vektörünü $\vec{\xi}_2^{(1)}$ ve eğrilik yarıçapını $R^{(1)}$ ile gösterelim. (1.1) den türev alarak

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{x}}{ds^{(1)}}=\frac{d\vec{x}}{ds}+\frac{dR}{ds}\vec{\xi}_2+R\frac{d\vec{\xi}_2}{ds}$$

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_1^{(1)}=\vec{\xi}_1+\frac{dR}{ds}\vec{\xi}_2+R\left(-\frac{1}{R}\vec{\xi}_1\right)$$

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_1^{(1)}=\frac{dR}{ds}\cdot\vec{\xi}_2 \qquad (1.2)$$

bulunur.Buradan uygun işaret seçimiyle

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds^{(1)}}{ds} &= \frac{dR}{ds} \\ \vec{\xi}_1^{(1)} &= \vec{\xi}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

yazılır.(1,3)'ün ikinci bağıntısından türev alalım;

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{\xi}_1^{(1)}}{ds^{(1)}} = \frac{d\vec{\xi}_2}{ds}$$

Frenet formüllerine göre

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{1}{R^{(1)}}\cdot\vec{\xi}_2^{(1)} = -\frac{1}{R}\vec{\xi}_1$$

dir.Buradan

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{1}{R^{(1)}} = -\frac{1}{R}$$

$$\vec{\xi}_2^{(1)} = \vec{\xi}_1$$

veya (1.3)ün ilk bağıntısından yararlanarak

$$\left.\begin{aligned} R^{(1)} &= -R\,\frac{dR}{ds} \\ \vec{\xi}_2^{(1)} &= \vec{\xi}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

bulunur.(1.3) ve (1.4) bağıntılarına göre (x) eğrisinin $(x^{(1)})$ mebsutunun $x^{(1)}$ noktasındaki ((x) in $x^{(1)}$ eğrilik merkezindeki) teğeti (x) in normaline, normali de (x) in teğetine paraleldir.

Bu şekilde devam ederek (x) eğrisinin ardışık eğrilik merkezlerini ve ardışık mebsutlarını gözönüne alalım.$(x^{(k-1)})$ eğrisinin $x^{(k)}$ eğrilik merkezinin çizdiği $(x^{(k)})$ eğrisi için

$$\frac{ds^{(k)}}{ds^{(k-1)}} = \frac{dR^{(k-1)}}{ds^{(k-1)}} \quad ; \quad \xi_1^{(k)} = \xi_2^{(k-1)}$$

$$R^{(k)} = -R^{(k-1)} \cdot \frac{dR^{(k-1)}}{ds^{(k-1)}} \quad ; \quad \xi_2^{(k)} = \xi_1^{(k-1)} \qquad (1.5)$$

bağıntıları yazılabilir.

(x) eğrisinin bir x noktası ile bu noktaya ait ardışık $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}$ eğrilik merkezleri, kenarları

$$xx^{(1)}, x^{(1)}x^{(2)}, \ldots\ldots, x^{(n-2)}x^{(n-1)}$$

olan (n-1) kenarlı bir çokgen oluştururlar. Bu çokgenin kenarları sırayla (x) eğrisinin x noktasındaki teğet ve normaline paraleldirler. $|xx^{(1)}| = R$, $|x^{(1)}x^{(2)}| = R^{(1)}, \ldots, |x^{(n-2)}x^{(n-1)}| = R^{(n-2)}$ olup (1.4) ve (1.5) bağıntılarına göre bu uzunluklar R ile R nin ilk (n-2) nci mertebeye kadar türevlerine bağlıdırlar. Bu çokgenin veya $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ nokta dizisinin verilmesi ile (x) düzlem eğrisinin diferensiyel elemanlarının bir geometrik tasviri elde edilmiş olur.

Bu sonuç şöyle de ifade edilebilir: $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}$ nokta dizisinin verilmesiyle (x) eğrisinin x(s) noktası komşuluğundaki

$$\vec{x}(s+h) = \vec{x}(s) + \frac{h}{1!}\cdot\frac{d\vec{x}(s)}{ds} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\cdot\frac{d^n\vec{x}(s)}{ds^n} + R_n$$

açılımı $\vec{\xi}_1$ ve $\vec{\xi}_2$ nin lineer bir kombinezonu olarak belirlenmiş olur. Çünkü bu açılımdaki $\frac{d\vec{x}(s)}{ds}, \frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2}, \ldots, \frac{d^n\vec{x}(s)}{ds^n}$ türevlerinin herbiri $\vec{\xi}_1$ ve $\vec{\xi}_2$ nin lineer kombinezonu olarak yazılabilir ve katsayıları da R ve R nin ilk (n-2) nci mertebeye kadar türevlerine bağlıdır.

O halde $x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}$ nokta dizisinin verilmesi, (x) düzlem eğrisinin n yinci mertebeden diferensiyel elemanlarının belirlenmesi veya başka bir deyimle n yinci mertebeden bir yaklaşımının belli olması için yeterlidir.

11. BÖLÜM

A. BİR UZAY EĞRİSİNİN ARDIŞIK EĞRİLİK EKSENLERİ

Bir (x) uzay eğrisinin yay uzunluğu s, x noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$, eğrilik yarıçapı $R = \frac{1}{\rho}$, burulma yarıçapı $T = \frac{1}{\tau}$ olsun. (x) eğrisinin x noktasındaki eğrilik merkezi y ise, y den $\vec{\xi}_3$ binormaline çizilen paralel, eğrinin x noktasındaki eğrilik eksenidir. Bunu $l^{(1)}$ ile gösterelim. x noktası (x) eğrisini çizerken $l^{(1)}$ doğrusu bir açılabilir yüzey oluşturur. Bu açılabilir yüzeyin dönüm ayrıtı $(x^{(1)})$, bunun $l^{(1)}$e değdiği nokta da $x^{(1)}$ olsun. $|xy| = R$ dir. $|yx^{(1)}| = \lambda$ koyalım.

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x} + R\,\vec{\xi}_2 + \lambda\,\vec{\xi}_3 \qquad (2.1)$$

yazılabilir. $(x^{(1)})$ eğrisinin yay uzunluğu $s^{(1)}$, eğrilik yarıçapı $R^{(1)}$, burulma yarıçapı $T^{(1)}$ ve Frenet üçyüzlüsü $(\vec{\xi}_1^{(1)}, \vec{\xi}_2^{(1)}, \vec{\xi}_3^{(1)})$ olsun. (2.1) den s ye göre türev alarak ve Frenet formülleri ile

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} = \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\vec{\xi}_2 + R\cdot\frac{d\vec{\xi}_2}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\cdot\vec{\xi}_3 + \lambda\frac{d\vec{\xi}_3}{ds}$$

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\,\vec{\xi}_1^{(1)} = \left(\frac{dR}{ds} - \frac{\lambda}{T}\right)\vec{\xi}_2 + \left(\frac{R}{T} + \frac{d\lambda}{ds}\right)\vec{\xi}_3$$

yazılır. Buradan da

$$\vec{\xi}_1^{(1)} = \vec{\xi}_3 \qquad (2.2)$$

olduğu dikkate alınarak

$$\frac{ds^{(1)}}{ds} = \frac{R}{T} + \frac{d\lambda}{ds} \quad ; \quad \lambda = T\cdot\frac{dR}{ds} \qquad (2.3)$$

bulunur. (2.2)den s ye göre türev alarak

$$\frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{1}{R^{(1)}}\cdot\vec{\xi}_2^{(1)} = -\frac{1}{T}\vec{\xi}_2$$

ve buradan uygün yön seçimiyle

$$\vec{\xi}_2^{(1)} = \vec{\xi}_2 \qquad (2.4)$$

ve

$$R^{(1)} = -T\frac{ds^{(1)}}{ds} = -T\left(\frac{R}{T}+\frac{d\lambda}{ds}\right)$$

$$R^{(1)} = -R - T.\frac{d\lambda}{ds} \qquad (2.5)$$

elde edilir.

(2.2) ve(2.4) bağıntıları gözönünü alınarak

$$\vec{\xi}_1^{(1)} = \vec{\xi}_3$$
$$\vec{\xi}_2^{(1)} = \vec{\xi}_2 \qquad (2.6)$$
$$\vec{\xi}_3^{(1)} = \vec{\xi}_1$$

yazılabilir.

$x^{(1)}$ eğrisinin eğrilik ekseni $l^{(2)}$ olsun.Bu $(x^{(1)})$ in $y^{(1)}$ eğrilik merkezinden geçer ve $\vec{\xi}_3^{(1)}$ vektörüne veya (2.6) nın 3. eşitliğine göre $\vec{\xi}_1$ vektörüne paraleldir. $l^{(2)}$ nin $(x^{(2)})$ eğrisine değdiği nokta $x^{(2)}$ olduğuna göre

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} + R^{(1)}\cdot\vec{\xi}_2^{(1)} + \lambda^{(1)}\vec{\xi}_3^{(1)}$$

veya $\vec{\xi}_2^{(1)} = \vec{\xi}_2$, $\vec{\xi}_3^{(1)} = \vec{\xi}_1$ olduğundan

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} + R^{(1)}\vec{\xi}_2 + \lambda^{(1)}\vec{\xi}_1 \qquad (2.7)$$

yazılır.

Buradan s ye göre türev alalım.

$$\frac{ds^{(2)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} + \frac{dR^{(1)}}{ds}\vec{\xi}_2 + R^{(1)}\frac{d\vec{\xi}_2}{ds} + \frac{d\lambda^{(1)}}{ds}\vec{\xi}_1 + \lambda^{(1)}\frac{d\vec{\xi}_1}{ds}$$

yahut

$$\frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \vec{\xi}_1^{(2)} = \vec{\xi}_3^{(1)} = \vec{\xi}_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} = \vec{\xi}_1^{(1)} = \vec{\xi}_3$$

olduğundan

$$\frac{ds^{(2)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_1 = \frac{ds^{(1)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_3 + \frac{dR^{(1)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_2 + R^{(1)}\cdot\left(-\frac{1}{R}\vec{\xi}_1 + \frac{1}{T}\vec{\xi}_3\right) + \frac{d\lambda^{(1)}}{ds}\vec{\xi}_1 + \lambda.\frac{1}{R}\vec{\xi}_2$$

$$\frac{ds^{(2)}}{ds}\cdot\vec{\xi}_1 = \left(-\frac{R^{(1)}}{R} + \frac{d\lambda^{(1)}}{ds}\right)\vec{\xi}_1 + \left(\frac{dR^{(1)}}{ds} + \frac{\lambda^{(1)}}{R}\right)\vec{\xi}_2 + \left(\frac{ds^{(1)}}{ds} + \frac{R^{(1)}}{T}\right)\vec{\xi}_3$$

buradanda

$$\frac{ds^{(2)}}{ds} = -\frac{R^{(1)}}{R} + \frac{d\lambda^{(1)}}{ds}$$

$$\frac{dR^{(1)}}{ds} + \frac{\lambda^{(1)}}{R} = 0$$

$$\frac{ds^{(1)}}{ds} + \frac{R^{(1)}}{T} = 0$$

ve son olarak

$$\begin{aligned} \frac{ds^{(2)}}{ds} &= -\frac{R^{(1)}}{R} + \frac{d\lambda^{(1)}}{ds} \\ \lambda &= -R\,\frac{dR^{(1)}}{ds} \end{aligned} \tag{2.8}$$

bulunur.(3. eşitlik (2.3) ün 1. formülü ile (2.5) dolayısıyla zaten gerçekleşir.) Diğer taraftan (2.6$_1$) ya göre

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1^{(2)} &= \vec{\xi}_3^{(1)} = \vec{\xi}_1 \\ \vec{\xi}_2^{(2)} &= \vec{\xi}_2^{(1)} = \vec{\xi}_2 \\ \vec{\xi}_3^{(2)} &= \vec{\xi}_1^{(1)} = \vec{\xi}_3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dir. $\xi_1^{(2)} = \xi_1$ eşitliğinden türev alarak

$$\frac{ds^{(2)}}{ds}\cdot\frac{d\vec{\xi}_1^{(2)}}{ds^{(2)}}=\frac{d\vec{\xi}_1}{ds}$$

$$\frac{ds^{(2)}}{ds}\cdot\frac{1}{R^{(2)}}\cdot\vec{\xi}_2^{(2)}=\frac{1}{R}\,\vec{\xi}_2$$

ve buradan

$$R^{(2)}=R\,\frac{ds^{(2)}}{ds}=R\left(-\frac{R^{(1)}}{R}+\frac{d\lambda^{(1)}}{ds}\right)=-R^{(1)}+R\,\frac{d\lambda^{(1)}}{ds} \qquad (2.10)$$

yazılır.Bu sonuçlardan rekürans yolu ile

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\xi}_1^{(2k)}&=\vec{\xi}_1\ , & \vec{\xi}_1^{(2k+1)}&=\vec{\xi}_3\\
\vec{\xi}_2^{(2k)}&=\vec{\xi}_2\ , & \vec{\xi}_2^{(2k+1)}&=\vec{\xi}_2\\
\vec{\xi}_3^{(2k)}&=\vec{\xi}_3\ , & \vec{\xi}_3^{(2k+1)}&=\vec{\xi}_1
\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
R^{(2k)}&=-R^{(2k-1)}+R.\frac{d\lambda^{(2k-1)}}{ds}\\
R^{(2k+1)}&=-R^{(2k)}-T.\frac{d\lambda^{(2k)}}{ds}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^{(2k)}&=T.\frac{dR^{(2k)}}{ds}\\
\lambda^{(2k+1)}&=-R.\frac{dR^{(2k+1)}}{ds}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

bulunur. $1^{(k)}$(k=1,2,3,......,n) ardışık eğrilik eksenleri gözönüne alınırsa bunların dönüm ayrıtlarına değdiği $x^{(k)}$noktaları ile $y^{(k)}$eğrilik merkezleri (2n-1) kenarlı bir $xyx^{(1)}y^{(1)}\ldots x^{(n-1)}y^{(n-1)}$ çokgenini oluştururlar. Öyleki,bu çokgenin $x^{(k)}y^{(k)}$kenarları $\vec{\xi}_2$ doğrultusuna, $y^{(2k)}x^{(2k+1)}$kerarları $\vec{\xi}_3$ doğrultusuna, $y^{(2k-1)}x^{(2k)}$kenerları $\vec{\xi}_1$ doğrultusuna paraleldir ve

$$\begin{aligned}
|x^{(k)}y^{(k)}|&=R^{(k)}\\
|y^{(k)}x^{(k+1)}|&=\lambda^{(k)}
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

dır.(2.12) ve (2.13) formüllerine göre $xyx^{(1)}y^{(1)}\ldots x^{(n-1)}y^{(n-1)}$ çokgeninin (2n-1) sayıdaki kenarları R ve R nin ilk (2n-2)nci mertebeye kadar türevleri ile T ve T nin (2n-3) üncü mertebeye kadar türevlerine bağlıdır ve bilinmeyen doğal eleman sayısı (4n-3) dür.(2n-1) sayıdaki çokgen kenarlarının verilmesi (4n-3) elemanın bulunması için yetmez. Ohalde x noktası ve $l^{(1)}, l^{(2)} \ldots$ $l^{(n)}$ ardışık eğrilik eksenleri ile belirlenebilen $x y x^{(1)} y^{(1)} \ldots\ldots$ $x^{(n-1)} y^{(n-1)}$ çokgeninin bilinmesiyle, uzay eğrisinin bir yaklaşımı elde edilemez.Bunun için R ve T ile bunların ardışık türevlerine bağlı 2n-2 elemanın daha bilinmesine gerek vardır.

Şimdi (x) eğrisinin teğetleri tarafından oluşturulan açılabilir yüzeyin ,eğrimizin x noktasındaki oskülatör düzlem üzerine serilmesiyle elde edilen (x^*) eğrisini gözönüne alalım. (x) ve(x^*) eğrilerinin R eğrilik yarıçapları,yay uzunlukları ve dolayısıyla R nin ardışık türevleri eşittir.(x^*) , düzlem eğrisi olduğundan bu eğriye Cesara problemi uygulanabilir. Yani bu eğrinin $x=x^*$ noktasıyla bu noktaya ait ardışık $x=x^*, x_1^*$ $x_2^*, \ldots\ldots, x_{2n-2}^*$ eğrilik merkezleri dizisi verildiğinde bu noktaların oluşturduğu çokgenin kenar uzunluklarından yararlanarak R ve R nin ilk (2n-3) üncü mertebeye kadar türevleri bulunabilir. Böylece (x) uzay eğrisinin yukarıda anlattığımız (4n-3) doğal bilinmeyeninden (2n-2) tanesi bu yolla bulunmuş olur. Geriye kalan (2n-1) tanesi de (x)eğrisine ait $x, y, x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x^{(n-1)}, y^{(n-1)}$ nokta dizisinin oluşturduğu (2n-1) kenarlı çokgen yardımıyla bulunabilir.O halde (x) eğrisinin x noktası ve $l^{(1)}, l^{(2)}$ $\ldots\ldots\ldots, l^{(n)}$ ardışık eğrilik eksenleri dizisiyle (x^*) eğrisinin $x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_{2n-2}^*$ ardışık eğrilik merkezleri dizisinin verilmesi halinde bunlarla (x)eğrisinin (2n) inci mertebeden yaklaşımı elde edilebilir.Bu, R.Von Mises in çözümüdür.[2]

B. Bir (x) uzay eğrisinin x noktası ve buna ait ilk n tane ardışık eğrilik ekseniyle (x) in (z) mülhak eğrisinin (*) x e karşı gelen Z noktası ve buna ait ilk n tane ardışak eğrilik ekseninin birlikte verilmesi halinde de (x) eğrisinin (2n) inci mertebeden bir yaklaşımının belirlenebileceğini F.Gürsan[3] göstermiştir. Gerçekten bu takdirde biri (x), diğeri (z)eğrilerine ait, bunların ardışık eğrilik merkezleri ve oskülatör küre merkezlerinin oluşturduğu (2n-1) kenarlı iki çokgen belirlenmiş olur.(x) e ait çokgenin kenar uzunlukları R ve R nin (2n-2) nci mertebeye kadar türevleri ile T ve T nin (2n-3) üncü mertebeye kadar türevlerine bağlı idi. (z) mülhak eğrisinin eğrilik yarıçapı R_1 ,burulma yarıçapı T_1 ise R_1=T ve T_1= R olduğundan (z) eğrisine ait çokgenen kenarları T ve T nin (2n-2) nci mertebeye kadar türevleri ile R ve R nin (2n-3) üncü mertebeye kadar türevlerine bağlıdır. İki çokgen birlikte gözönüne alındığında bunların toplam (4n-2) sayıdaki kenarları, R ve Tile bunların ilk (2n-2)nci mertebeye kadar türevlerine bağlı olur.Bunlar beraberce (4n-2) bilinmeyenli (4n-2) denklemden oluşan bir denklem sistemi teşkil ederler. Bu sistemle R, T ve bunların ilk (2n-2) nci mertebeye kadar türevleri belirlenebileceğinden bu elemanlarla (x) eğrisinin (2n) inci mertebeden yaklaşımı elde edilebilir.

(*): (x) eğrisinin (z) mülhak eğrisi $\vec{Z}(s)=\vec{X}(0)+\int_0^s \vec{\xi}_3\,ds$ denklemiyle tanımlanır.

111. BÖLÜM

A. REGLE YÜZEYLER, BLASCHKE FORMÜLLERİ:

Bu bölümde "Giriş"kısmında da belirttiğimiz gibi, bir (x) uzay eğrisinin diferensiyel elemanlarının geometrik tasvirinin ardışık ani vidalanma eksenleri dizisinin verilmesi ile mümkün olduğunu göstereceğiz.Bu amaçla bazı tanımlar yapacağız.

Problemimizi dual uzayda ($a+\varepsilon b$, $\varepsilon^2=0$) inceleyeceğiz ve bir A yönlü doğrusunu $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}_0$ dual birim vektörü ile göstereceğiz.[5] Burada $\vec{a}$, Ayönlü doğrusuna paralal ve aynı yönde bir birim vektör, $\vec{a}_0$ ise taşıyıcısı A doğrusu olan $\vec{a}$ kayan vektörünün uzayın sabit bir O noktasına göre momentidir.

A ve A^* iki doğru, bunların açısı φ , ve ortak dikme uzunluğu da φ_0 olsun.A ve A^* doğrularının dual açısı $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi_0$ dır.

Dual trigonametrik oranlar için

$$\left.\begin{aligned}
\cos\phi &= \cos(\varphi+\varepsilon\varphi_0) = \cos\varphi - \varepsilon\varphi_0 \sin\varphi \\
\sin\phi &= \sin(\varphi+\varepsilon\varphi_0) = \sin\varphi + \varepsilon\varphi_0 \cos\varphi \\
\tan\phi &= \tan(\varphi+\varepsilon\varphi_0) = \tan\varphi + \varepsilon\varphi_0 (1+\tan^2\varphi) \\
\cot\phi &= \cot(\varphi+\varepsilon\varphi_0) = \cot\varphi - \varepsilon\varphi_0 (1+\cot^2\varphi)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

eşitlikleri yazılır.

A ve A^* dual birim vektörlerinin skaler çarpımı ve vektörel çarpımı sırayla

$$\vec{A}.\vec{A}^* = \cos\phi \qquad \text{ve} \qquad \vec{A}\times\vec{A}^* = \vec{B}.\sin\phi \qquad (3.2)$$

eşitlikleriyle tanımlanır.Burada $\vec{B}$, A ve A^* doğrularının ortak dikmeleri doğrultusunda birim dual vektördür.

Bir $[A]$ regle yüzeyini tanımlamak için A anadoğrusunun dual vektörü, reel bir s parametresinin fonksiyonu olarak verilir.

$$\vec{A} = \vec{A}(s) = \vec{a}(s) + \varepsilon \vec{a}_0(s)$$

s parametresi, $[A]$ nın (x) boğaz çizgisinin yay uzunluğu olarak alınabilir. A_1, $[A]$ nın bir anadoğrusu, A_2, $[A]$ nın x boğaz noktasındaki normali (merkez normali) ve A_3, x boğaz noktasından A_1 ve A_2 ye çizilen dikme olsun. (A_1, A_2, A_3) dik üçyüzlüsüne, $[A]$ yüzeyinin A_1 e bağlı Blaschke üçyüzlüsü denir.

$\dfrac{du(s)}{ds} = u'$ koyalım. Blaschke foomülleri şunlardır:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_1' &= P\vec{A}_2 \\ \vec{A}_2' &= -P\vec{A}_1 + Q\vec{A}_3 \\ \vec{A}_3' &= -Q\vec{A}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

$$\left.\begin{aligned} P &= p + \varepsilon p_0 = \sqrt{\vec{A}_1'^{\,2}} \\ Q &= q + \varepsilon q_0 = \frac{(\vec{A}_1 \times \vec{A}_1') \cdot \vec{A}_1''}{A_1'^{\,2}} = \frac{(\vec{A}_1, \vec{A}_1', \vec{A}_1'')}{A_1'^{\,2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

P ve Q,$[A]$ regle yüzeyinin A_1 anadoğrusuna bağlı dual eğriliği ve dual burulmasıdır.

B. BLASCHKE ÜÇYÜZLÜSÜNÜN ANİ VİDALANMA EKSENİ

Bir $[A]$ regle yüzeyinin A_1 e bağlı (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsünü gözönüne alalım. Bir $A_1^{(1)}$ doğrusunun $\vec{A}_1^{(1)}$ birim dual vektörü, $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ birim dual vektörlerinin lineer kombinezonu olarak

$$\vec{A}_1^{(1)} = E_1 \vec{A}_1 + E_2 \vec{A}_2 + E_3 \vec{A}_3$$

veya

$$\vec{A}_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{3} E_i \vec{A}_i \qquad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada E_1, E_2, E_3, s nin dual fonksiyonları olup $E_i = e_i(s) + \varepsilon e_{io}(s)$ ve $\vec{A}_1^{(1)}$ birim dual vektör olduğundan

$$\sum_{i=1}^{3} E_i^2 = 1 \qquad (3.6)$$

dir. Bir an için $A_1^{(1)}$ doğrusunun , sabit uzaya ve (A_1, A_2, A_3) üçyüzlüsüne bağlı uzaya göre sabit kaldığını varsayalım. (3.5) bağıntısından s ye göre türev alırsak

$$\frac{d\vec{A}_1^{(1)}}{ds} = 0 = E_1 P \vec{A}_2 + E_2(-P\vec{A}_1 + Q\vec{A}_3) - E_3 Q \vec{A}_2$$

$$0 = -E_2 P \vec{A}_1 + (E_1 P - E_3 Q)\vec{A}_2 + E_2 Q \vec{A}_3$$

bulunur. Buradan

$$E_2 = 0 \quad \text{ve} \quad E_3 = \frac{P}{Q} E_1$$

yazılır. (3.6) ya göre

$$E_1^2 + \frac{P^2}{Q^2} E_1^2 = 1 \Longrightarrow E_1 = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

ve

$$E_3 = \frac{P}{Q} E_1 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

elde edilir. Buna göre

$$\vec{A}_1^{(1)} = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \vec{A}_1 + \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \vec{A}_3 = \frac{Q\vec{A}_1 + P\vec{A}_3}{\sqrt{P^2+Q^2}} \qquad (3.7)$$

bulunur. (3.7) ile belirlenen $A_1^{(1)}$ doğrusu (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsünün ani vidalanma eksenidir. Bu eşitlikten görüldüğü gibi $A_1^{(1)}$ doğrusu , A_2 merkez normalini dik olarak keser.

Şimdi $A_1^{(1)}$ in A_1 anadoğrusu ile yaptığı $\phi = \varphi^{(1)} + \varepsilon \varphi_o^{(1)}$ dual açısını gözönüne alalım.

$$\vec{A}_1^{(1)} = \vec{A}_1 \cos\phi^{(1)} + \vec{A}_3 \sin\phi^{(1)}$$

dir ve (3.7) ye göre

$$\cos\phi^{(1)} = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}} \quad \text{ve} \quad \sin\phi^{(1)} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

olup buradan da

$$\tan\phi^{(1)} = \frac{P}{Q} \tag{3.8}$$

bulunur. Reel ve dual kısımlarını ayırarak yazarsak

$$\tan\left(\varphi^{(1)} + \varepsilon\varphi_0^{(1)}\right) = \frac{p+\varepsilon p_0}{q+\varepsilon q_0}$$

$$\tan\varphi^{(1)} + \varepsilon\varphi_0^{(1)}\left(1+\tan^2\varphi^{(1)}\right) = \frac{p}{q} + \varepsilon\frac{p_0 q - q_0 p}{q^2}$$

buradan da

$$\left.\begin{aligned} \tan\varphi^{(1)} &= \frac{p}{q} \\ \varphi_0^{(1)} &= \frac{p_0 q - q_0 p}{p^2+q^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) bağıntısının birincisi A_1 ile $A_1^{(1)}$ doğrularının yaptığı açının tanjantını, ikincisi ise $A_1^{(1)}$ ile A_1 arasındaki en kısa uzaklığı verir.

C. ARDIŞIK ANİ VİDALANMA EKSENLERİ

A_1 doğrusu $[A]$ regle yüzeyini oluşturduğunda (3.7) dual vektörel denklemiyle verilen $A_1^{(1)}$ doğrusu da bir $[A^{(1)}]$ regle yüzeyini oluşturur. $[A^{(1)}]$ in dual eğriliği $P^{(1)}$, dual burulması $Q^{(1)}$ ve $[A^{(1)}]$ in boğaz çizgisinin yay uzunluğu $s^{(1)}$ olsun.
(3.7) den s yay uzunluğuna göre türev alınarak

$$\frac{ds^{(1)}}{ds} \cdot P^{(1)} \cdot \vec{A}_2^{(1)} = \frac{P\vec{A}_1 - Q\vec{A}_3}{(P^2+Q^2)^{3/2}} \cdot (PQ' - QP') \qquad (3.10)$$

bulunur. Bu bağıntı, $A_2^{(1)}$ doğrusunun da A_2 yi dik olarak kestiğini gösterir. (3.7) ve (3.10) bağıntıları $[A_1^{(1)}]$ yüzeyinin $A_1^{(1)}$ e ait $x^{(1)}$ boğaz noktasının A_2 üzerinde bulunduğunu ve $(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)})$ Blaschke üçyüzlüsünün üçncü ayrıtı olan $A_3^{(1)}$ ün, $[A]$ yüzeyinin A_2 merkez normali ile çakıştığını gösterir. Buna göre

$$\vec{A}_3^{(1)} = \vec{A}_2 \qquad (3.11)$$

yazılabilir. x ve $x^{(1)}$ noktaları A_1 ve $A_1^{(1)}$ doğrularının ortak dikmesinin ayaklarıdır. (3.9) formülünün ikincisine göre

$$|xx^{(1)}| = \varphi_0^{(1)} = \frac{p_0 q - q_0 p}{p^2 + q^2}$$

dir. (3.11) den s ye göre türev alınarak

$$-\frac{ds^{(1)}}{ds} \cdot Q^{(1)} \cdot \vec{A}_2^{(1)} = -P\vec{A}_1 + Q\vec{A}_3 \qquad (3.12)$$

bulunur. (3.10) ve (3.12) bağıntılarından

$$\frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{PQ' - QP'}{(P^2+Q^2)^{3/2}} \qquad (3.13)$$

elde edilir. $[A^{(1)}]$ yüzeyinin $A_1^{(1)}$ anadoğrusuna bağlı $(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)})$ Blaschke üçyüzlüsünün ani vidalanma ekseni $A_1^{(2)}$ olsun. $A_1^{(1)}$ ile $A_1^{(2)}$ arasındaki dual açı $\phi^{(2)}$ ise (3.8) ve (3.13) e göre

$$\tan \phi^{(2)} = \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{PQ' - QP'}{(P^2+Q^2)^{3/2}} \qquad (3.14)$$

dır. Buradan reel ve dual kısımlar ayrılarak

$$\tan \varphi^{(2)} = \frac{pq' - qp'}{(p^2+q^2)^{3/2}} \qquad (3.15)$$

ve

$$\varphi_0^{(2)}=\frac{(p^2+q^2)(p_0q'+q_0'p-q_0p'-p_0'q)-3(pp_0+qq_0)(pq'-qp')}{(p^2+q^2)^3+(pq'-qp')^2}(p^2+q^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

elde edilir. $A_1^{(2)}$ in boğaz noktası olan $x^{(2)}$ ile $x^{(1)}$ noktaları $A_1^{(2)}$ ile $A_1^{(1)}$ doğrularının ortak dikmesinin ayakları olup $|x^{(1)}x^{(2)}|=\varphi_0^{(2)}$ dır.

Ardışık $A_1^{(k)}$ $(k=1,2,3,\ldots,n)$ ani eksenlerinin oluşturduğu $[A^{(k)}]$ regle yüzeyler dizisini gözönüne alalım. $[A^{(k-1)}]$ yüzeyinin $(A_1^{(k-1)},A_2^{(k-1)},A_3^{(k-1)})$ Blaschke üçyüzlüsünün ani ekseni $A_1^{(k)}$ dir. $[A^{(k)}]$ yüzeyinin dual eğriliği $P^{(k)}$, dual burulması $Q^{(k)}$, ardışık $A_1^{(k-1)}$ ve $A_1^{(k)}$ ani eksenleri arasındaki dual açı $\phi^{(k)}=\varphi^{(k)}+\varepsilon\varphi_0^{(k)}$ olsun. (3.14) formülünden

$$\tan\phi^{(k)}=\tan\left(\varphi^{(k)}+\varepsilon\varphi_0^{(k)}\right)=\frac{P^{(k-2)}\dot{Q}^{\prime(k-2)}-Q^{(k-2)}\dot{P}^{\prime(k-2)}}{\left[\left(P^{(k-2)}\right)^2+\left(Q^{(k-2)}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3.17)$$

yazılır. Burada $\varphi^{(k)}$, $A_1^{(k-1)}$ ile $A_1^{(k)}$ ani eksenleri arasındaki reel açı, $\varphi_0^{(k)}$ ise bu eksenlerin boğaz noktaları arasındaki $|x^{(k-1)}x^{(k)}|$ uzunluğudur.

Şimdi $[A]$ regle yüzeyinin açılabilir yüzey olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$p_0=0\ ,\quad q_0=1\ ,\quad p=\rho\ ,\quad q=\tau$$

olduğu bilinmektedir. Burada ρ ve τ açılabilir yüzeyin (x) dönüm ayrıtının eğriliği ve burulmasıdır. Bu durumda (A_1, A_2, A_3) Blaschke üçyüzlüsü, (x) eğrisinin $(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3)$ Frenet üçyüzlüsü ile çakışır ve $A_1^{(1)}$ doğrusu üçyüzlünün ani vidalanma ekseni olur.

Gözönüne aldığımız bu durumda (3.9), (3.15) ve (3.16) formülleri

$$\left.\begin{aligned}
\tan\varphi^{(1)} &= \frac{\rho}{\tau} \\
\varphi_0^{(1)} = |x x^{(1)}| &= -\frac{\rho}{\rho^2+\tau^2} \\
\tan\varphi^{(2)} &= \frac{\rho\tau'-\tau\rho'}{(\rho^2+\tau^2)^{3/2}} \\
\varphi_0^{(2)} = |x^{(1)}x^{(2)}| &= \frac{\left|-(\rho^2+\tau^2)\rho'-3\tau(\rho\tau'-\tau\rho')\right|(\rho^2+\tau^2)^{1/2}}{(\rho^2+\tau^2)^3+(\rho\tau'-\tau\rho')^2}
\end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

şeklini alırlar.

Buradan (3.17) formülü de dikkate alınarak $[A]$ regle yüzeyinin açılabilir yüzey olması halinde şu sonuç çıkarılır. İki ardışık $A_1^{(k-1)}$ ve $A_1^{(k)}$ ani ekseni arasındaki $\varphi^{(k)}$ açısı ile bu doğruların $\varphi_0^{(k)}=|x^{(k-1)}x^{(k)}|$ en kısa uzaklığı ρ, τ ve bunların (k-1) inci mertebeye kadar ardışık türevlerinin fonksiyonlarıdır.

Şimdi , A_1 doğrusuyla $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \ldots\ldots, A_1^{(n-1)}$ ardışık ani eksenler dizisinin verilmiş olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \varphi^{(n-1)}$$

açılar dizisi ile

$$\varphi_0^{(1)},\ \varphi_0^{(2)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \varphi_0^{(n-1)}$$

en kısa uzaklıklar dizisi belli olur. Her iki dizinin de terimleri ρ ve τ ile bunların ilk (n-2) nci mertebeye kadar türevlerine bağlıdır. Dolayısıyla $A_1, A_1^{(1)}, \ldots\ldots, A_1^{(n-1)}$ dizisinin verilmesi halinde (2n-2) bilinmiyenli (2n-2) tane denklem elde edileceğinden bu $A^{(k)}$ doğrular dizisi

$$\rho, \frac{d\rho}{ds}, \frac{d^2\rho}{ds^2}, \ldots\ldots, \frac{d^{n-2}\rho}{ds^{n-2}}, \tau, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}, \ldots\ldots, \frac{d^{n-2}\tau}{ds^{n-2}}$$

diferensiyel elemanlarının bir geometrik tasvirini verir.

Burada şunu da belirtelim ki; $A_1^{(k)}$ ani eksenleri $(k = 1,2,\ldots$ $\ldots,n-1)$, dolayısıyla $\varphi^{(k)}, \varphi_0^{(k)}$ denklemleri (x) uzay eğrisinin

$$\vec{x}(s+h) = \vec{x}(s) + \frac{h}{1!}\frac{d\vec{x}(s)}{ds} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n\vec{x}(s)}{ds^n} + R_n$$

açılımındaki $\frac{d^{(k)}\vec{x}(s)}{ds^k}$ türev vektörlerini, başka deyimle (x) eğrisinin n yinci mertebeden bir yaklaşımını belirlerler.

K A Y N A K L A R

1 : E. Cesaro, Geometrica Intrinseca, (Naples 1896), § 22

2 : C. R. de l'Acad. des Sc. Paris, t. 206 (1938), p. 1338

3 : F. Gürsan, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A; Cilt VI
sayı 1-2, 1941

4 : L. Biran, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, Cilt VIII
sayı 4, 1943

5 : W. Blaschke, Dif. Geometri Dersleri, Cilt I (K. Erim)

6 : K. Erim, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, Cilt X
sayı 1-4, 1945

7 : L. Biran, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, Cilt XI
sayı 1-2, 1946

8 : C. Arf, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A
(Fascicul dedié a la mémoire de K. Erim) 1954