MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLERİN BİLEŞİMİ VE GEOMETRİK UYGULAMALAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Yöneten
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Aziz KOÇ

İstanbul, 1986

T E Ş E K K Ü R

Yüksek lisans öğrenciliğim sırasında ve daha sonra tez hazırlama çalışmalarımda yardım ve desteklerini esirgemeyen, tezin bu aşamaya gelmesini sağlayan Sayın Hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN'a şükranlarımı sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

SAYFA

I. G İ R İ Ş 1

II. HAREKETLİ BİR ÜÇYÜZLÜNÜN ANİ HIZI 2

III. HAREKETLERİN BİLEŞİMİ 5

IV. EKSEN YÜZEYLERİ 6

V. GENELLEŞTİRİLMİŞ EULER-SAVARY FORMÜLÜ 10

VI. HAREKETLERİN BİLEŞİMİNE AİT BİR UYGULAMA 12

K A Y N A K L A R 16

I. GİRİŞ

Bu çalışmada dual büyüklükler kullanılarak, üç boyutlu EUCLID uzayında hareketlerin bileşimi incelenmiş ve bazı uygulamalar yapılmıştır.

II. bölümde, çalışmada faydalanılan bazı tanımlar ve formüller açıklandıktan sonra III. bölümde bir E_o sabit sistemine göre hareket halinde olan E_i sistemleri $(i = 1,2,3,...,n)$ gözönüne alınmış ve (E_{i+1}/E_i) hareketleri bilindiğine göre (E_n/E_0) hareketi belirlenmiştir.

IV. bölümde bir düzlemin sabit bir düzlem üzerindeki kayma hareketinde baz ve rulant eğrilerinin genelleştirmeleri olan eksen yüzeyleri ve dual yuvarlanma tanımlanmıştır.

Nihayet V. bölümde, bahis konusu olan düzlemsel harekette hareketli düzlemin bir noktasının yörüngesinin eğriliğini, baz ve rulant eğrilerinin eğrilikleri cinsinden veren Euler-Savary formülünün bir genelleştirilmesi yapılmış, sabit bir sisteme göre hareketli bir sistemin bir X doğrusu tarafından oluşturulan [X] regle yüzeyinin dual küresel eğriliği, hareketin baz ve rulant yüzeyleri olan eksen yüzeylerinin dual küresel eğrilikleri cinsinden belirlenmiştir.

VI. bölümde hareketlerin bileşimine ait bir uygulama verilmiştir.

II. HAREKETLİ BİR ÜÇYÜZLÜNÜN ÂNİ HIZI

Sabit bir sisteme göre hareket halinde olan bir $Ox_1x_2x_3$ dik üçyüzlüyü gözönüne alalım; Ox eksenine ait birim dual vektör $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}_o$ olsun ($\varepsilon^2 = 0$)

Ox_i eksenini gösteren dual vektörü $\vec{X}_i$ ile, t zamanına ait türevi de ' işareti ile göstererek

$$(1) \qquad \vec{X}_i' = -\Delta_j\vec{X}_k + \Delta_k\vec{X}_j$$

formülleri elde edilir; burada i,j,k ile (1,2,3) ün bir çift permütasyonu gösterilmiştir ve

$$(2) \qquad \Delta_i = \vec{X}_j'.\vec{X}_k$$

dir.

Birim olmayan

$$(3) \qquad \vec{\Gamma} = \vec{\omega} + \varepsilon\vec{\omega}_o = \sum_{i=1}^{3} \Delta_i\vec{X}_i$$

dual vektörü teğetsel hareketi karakterize eder.

$$(4) \qquad \vec{G} = \frac{\vec{\Gamma}}{\sqrt{\vec{\Gamma}^2}}$$

hareketin <u>âni ekseni</u>, $\vec{\omega}$ âni dönme vektörü, $\vec{\omega}_o$ ise O noktasının hızıdır;

$$(5) \qquad h = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}_o}{\vec{\omega}^2}$$

âni hareketin adımıdır; $\vec{\Gamma}$ ya $Ox_1x_2x_3$ üçyüzlüsünün <u>âni hızı</u> denir.

$Ox_1x_2x_3$ üçyüzlüsüne bağlı bir X doğrusunun birim dual vektörünün türevi,

(6) $$\vec{X}' = \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}$$

formülü ile verilmiştir.

Özel olarak $Ox_1x_2x_3$ üçyüzlüsü bir [X]regle yüzeyinin asal üçyüzlüsü olması halinde yüzeyin (x) boğaz çizgisinin bir x noktasındaki X ana doğrusuna ait birim dual vektörü $\vec{X}_1$, x deki yüzey normalinin ki $\vec{X}_2$ ve X_1, X_2 ile bir doğru yönlü üçyüzlü oluşturan x noktasındaki teğet $\vec{X}_3$ dür. Bu özel halde (2) dual büyüklükleri

$$\begin{cases} \Delta_1 = Q \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = P \end{cases}$$

dir ve (3) formülü

(8) $$\vec{\Gamma} = Q\vec{X}_1 + P\vec{X}_3$$

(4) ise

(9) $$\vec{G} = \frac{Q\vec{X}_1 + P\vec{X}_3}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

şeklini alır. P ve Q dual büyüklükleri [X] regle yüzeyinin sırayla <u>dual eğriliği</u> ve <u>dual burulması</u>dır:

(10) $$\begin{cases} P = p + \varepsilon p_o = \sqrt{\vec{X}_1'^2} \\ Q = q + \varepsilon q_o = \dfrac{(\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_1').\vec{X}_1''}{\vec{X}_1'^2} \\ dS = P\, dt \end{cases}$$

dir. dS, <u>dual yay elemanı</u>dır ve gözönüne alınan halde (1) formülleri

$$(11) \qquad \begin{cases} \vec{X}_1' = * + P\vec{X}_2 + * \\ \vec{X}_2' = -P\vec{X}_1 + * + Q\vec{X}_3 \\ \vec{X}_3' = * - Q\vec{X}_2 + * \end{cases}$$

olur. [X] 'in λ dağılma parametresi

$$(12) \qquad \lambda = \frac{P_o}{P}$$

dir. (9) formülü ile tanımlanan G doğrusu [X] yüzeyinin x boğaz noktasındaki X_2 normalini dik olarak keser; G nin X_1 anadoğrusu ile yaptığı dual açıyı $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi_o$ ile gösterelim;

$$(13) \qquad \sigma = \frac{Q}{P} = \operatorname{cotg} \phi$$

dual büyüklüğüne [X] yüzeyinin <u>dual küresel eğriliği</u> **denir.** (10) ifadesinin ilk ikisine göre

$$(14) \qquad \sigma = \frac{(\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_1').\vec{X}_1''}{(\vec{X}_1'^2)^{3/2}}$$

dir.

III. HAREKETLERİN BİLEŞİMİ

E_o sabit bir sistem olsun; hareket halinde n tane E_i sistemlerini $(i=1,2,3,\ldots,n)$ gözönüne alalım.

$$(15) \qquad \left(\frac{E_{i+1}}{E_i}\right) \qquad (i=0,1,\ldots,n)$$

hareketleri bilindiğine göre (E_n/E_0) bileşke hareketini arayalım.

E_n nin bir doğrusu X ve bu doğruyu gösteren birim dual vektörü $\vec{X}$ olsun. E_g nin E_h ye göre hareketinde $\vec{X}$ in türevini $(\vec{X}')_{g/h}$ ile gösterelim;

$$(16) \qquad (\vec{X}')_{n/0} = (\vec{X}')_{1/0} + (\vec{X}')_{2/1} + \ldots + (\vec{X}')_{n/n-1}$$

yazılır; E_g nin E_h ye göre hareketinde âni hız $\vec{\Gamma}_{g/h}$ olsun; (6) ifadesi gözönüne alınarak (16) bağıntısı

$$\vec{\Gamma}_{n/0} \wedge \vec{X} = \vec{\Gamma}_{1/0} \wedge \vec{X} + \vec{\Gamma}_{2/1} \wedge \vec{X} + \ldots + \vec{\Gamma}_{n/n-1} \wedge \vec{X}$$

yazılır; X, E_n nin herhangi bir doğrusu olduğu gözönüne alınırsa

$$(17) \qquad \vec{\Gamma}_{n/0} = \vec{\Gamma}_{1/0} + \vec{\Gamma}_{2/1} + \ldots + \vec{\Gamma}_{n/n-1}$$

olmalıdır; (17) formülü hızların bileşimini verir.

IV. EKSEN YÜZEYLERİ

E_0 sabit uzaya göre hareketli $0x_1x_2x_3$ üçyüzlüsünün âni hızı $\vec{\Gamma}$, âni ekseni

$$\vec{G}_1 = \frac{\vec{\Gamma}}{\sqrt{\vec{\Gamma}^2}}$$

olsun. t zamanı değiştiği vakit G_1 doğrusu sabit uzayda bir $[G_1]_s$ eksen regle yüzeyi oluşturur; bu G_1 doğrusu $0x_1x_2x_3$ sisteminde de bir başka $[G_1]_h$ eksen regle yüzeyi oluşturur. Her t anında $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeylerinin bir G_1 ortak ana doğrusu vardır. $0x_1x_2x_3$ üçyüzlüye bağlı uzay E_1; $[G_1]_h$ yüzeyinin (G_1, G_2, G_3) asal üçyüzlüsüne bağlı uzay E_2 olsun;

$$(\vec{G}_1')_{2/0} = (\vec{G}_1')_{1/0} + (\vec{G}_1')_{2/1}$$

dir; G_1 doğrusu (E_1/E_0) hareketinde âni eksendir, şu halde

$$(\vec{G}_1')_{1/0} = 0$$

olduğundan

(18) $$(\vec{G}_1')_{2/0} = (\vec{G}_1')_{2/1}$$

bulunur. Bunun sonucu (10) formüllerinin birincisine göre, gözönüne alınan anda $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeylerinin asal normalleri çakışır ve şu halde iki yüzey aynı (G_1, G_2, G_3) asal üçyüzlüye maliktir. Bundan başka, (18)den

$$\sqrt{(\vec{G}_1')^2_{2/0}} = \sqrt{(\vec{G}_1')^2_{2/1}}$$

ve (10) formüllerinin ilki gözönüne alınarak

(19) $$V = P_s = P_h$$

yazılır: $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeylerinin dual eğrilikleri eşittir. Diğer taraftan (12) eşitliği gözönüne alınarak iki yüzeyin dağılma parametrelerinin de eşit olduğu görülür.

Bu özellik, $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeyleri arasında G_1 anadoğrusu boyunca "rakordeman" vardır deyimi ile de ifade olunur.

(18) eşitliğinden

$$P_s\, dt = P_h\, dt$$

ve (10) formüllerinin üçüncüsü gözönüne alınarak

$$dS_s = dS_h$$

yazılır: $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeylerinin her an dual yay elemanları eşittir; buradan, C bir dual sabiti göstermek üzere

$$S_s - S_h = C$$

elde edilir. Bu sonucu şöyle ifade edeceğiz: Dual yuvarlanma olup $[G_1]_h$ yüzeyi $[G_1]_s$ üzerinde dual anlamda yuvarlanır.

$[G_1]_s$ e hareketin baz'ı $[G_1]_h$ ye rulant'ı denir.

(17) bağıntısı gözönüne alınarak

$$\vec{\Gamma}_{2/0} = \vec{\Gamma}_{1/0} + \vec{\Gamma}_{2/1} \tag{20}$$

yazabiliriz; $\vec{\Gamma}_{1/0}$, $0x_1x_2x_3$ üçyüzlüsünün âni hızıdır ve bunu yukarıda $\vec{\Gamma}$ ile gösterdik; şu halde (20) bağıntısı

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_{2/0} - \vec{\Gamma}_{2/1} \tag{21}$$

yazılır; burada $\vec{\Gamma}_{2/0}$ ve $\vec{\Gamma}_{2/1}$ sırayla $[G_1]_s$ ve $[G_1]_h$ yüzeylerinin asal üçyüzlülerinin âni hızlarıdır; şu halde bu iki üçyüzlünün âni eksenleri $\vec{G}_s$ ve $\vec{G}_h$ olduğuna göre

$$(22) \qquad \begin{cases} \vec{\Gamma}_{2/0} = \Gamma_s \vec{G}_s \\ \vec{\Gamma}_{2/1} = \Gamma_h \vec{G}_h \end{cases}$$

dir ve (21) formülü

$$(23) \qquad \Gamma \vec{G}_1 = \Gamma_s \vec{G}_s - \Gamma_h \vec{G}_h$$

şeklini alır. $\vec{G}_1 . \vec{G}_1 = 1$ dir ve (9) formülü gözönüne alınarak,

$$(24) \qquad \begin{cases} \vec{G}_1 . \vec{G}_s = \dfrac{Q_s}{\sqrt{P_s^2 + Q_s^2}} \\ \\ \vec{G}_1 . \vec{G}_h = \dfrac{Q_h}{\sqrt{P_h^2 + Q_h^2}} \end{cases}$$

yazılır; (8) ifadesine göre

$$(25) \qquad \begin{cases} \Gamma_s = \sqrt{P_s^2 + Q_s^2} \\ \Gamma_h = \sqrt{P_h^2 + Q_h^2} \end{cases}$$

dir. (24) ve (25) gözönüne alınarak (23) formülü

$$\Gamma = Q_s - Q_h$$

ve (19) bağıntısına göre

$$(26) \qquad \frac{\Gamma}{V} = \frac{Q_s}{P_s} - \frac{Q_h}{P_h}$$

yazılır.

Burada $\frac{Q_s}{P_s}$ ve $\frac{Q_h}{P_h}$ büyüklükleri sıra ile $[G_s]$ ve $[G_h]$ yüzeylerinin dual küresel eğrilikleridir ve (13) formülünden

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{Q_s}{P_s} = \text{cotg } \phi_s = \sigma_s \\ \\ \dfrac{Q_h}{P_h} = \text{cotg } \phi_h = \sigma_h \end{cases}$$

yazılır ve nihayet (26)dan

$$(28) \qquad \frac{\Gamma}{V} = \sigma_s - \sigma_h$$

elde edilir.

V. GENELLEŞTİRİLMİŞ EULER-SAVARY FORMÜLÜ

$0x_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlüsünün bir X doğrusu tarafından oluşturulan [X] regle yüzeyinin dual küresel eğriliği σ olsun; σ'yı veren bir bağıntı bulmak istiyoruz.

(G_1, G_2, G_3) üçyüzlüsünün G_1 ve G_3 ayrıtları ile X doğrusunun yaptığı dual açılar Ψ ve θ

$$(29) \qquad \begin{cases} \vec{X} \cdot \vec{G}_1 = \cos \Psi \\ \vec{X} \cdot \vec{G}_3 = \cos \theta \end{cases}$$

dır.

$0x_1x_2x_3$ üçyüzlüsünün âni hızı burada da $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{G}$ ile gösterelim (6) bağıntısını gözönüne alarak

$$(30) \qquad \vec{X}' = \Gamma\ (\vec{G}_1 \wedge \vec{X})$$

ve her iki tarafın $\vec{X}$ ile vektörel çarpımını yaparak

$$\vec{X} \wedge \vec{X}' = \Gamma[\vec{X} \wedge (\vec{G}_1 \wedge \vec{X})] = \Gamma[\vec{G}_1 - (\vec{X} . \vec{G}_1)\vec{X}]$$

yazılır; (29)'un ilk eşitliği gözönüne alınırsa

$$(31) \qquad \vec{X} \wedge \vec{X}' = \Gamma(\vec{G}_1 - \vec{X} \cdot \cos \Psi)$$

bulunur. Şimdi (30) dan türev alarak $\vec{X}''$ yü hesaplayalım;

$$\vec{X}'' = \Gamma'\ (\vec{G}_1 \wedge \vec{X}) + \Gamma(\vec{G}_1' \wedge \vec{X} + \vec{G}_1 \wedge \vec{X}')$$

yahut (11) in ilk formülü, (18) ve (30) bağıntıları gözönüne alınarak

$$\vec{X}'' = \Gamma'(\vec{G}_1 \wedge \vec{X}) + \Gamma V(\vec{G}_2 \wedge \vec{X}) + \Gamma^2[\vec{G}_1 \wedge (\vec{G}_1 \wedge \vec{X})]$$

ve nihayet

(32) $$\vec{X}'' = \Gamma'(\vec{G}_1 \wedge \vec{X}) + \Gamma V(\vec{G}_2 \wedge \vec{X}) + \Gamma^2(\vec{G}_1 . \cos\Psi - \vec{X})$$

elde edilir. Şimdi $(\vec{X} \wedge \vec{X}').\vec{X}''$ karma çarpımı hesaplayalım.

$$(\vec{G}_1 \wedge \vec{X}) \,.\, \vec{G}_1 = 0$$

$$(\vec{G}_2 \wedge \vec{X}).\vec{G}_1 = (\vec{G}_1 \wedge \vec{G}_2).\vec{X} = \vec{X}.\vec{G}_3$$

olduğu ve (29) bağıntıları ile (30) ve (32) den

(33) $$(\vec{X} \wedge \vec{X}').\vec{X}'' = \Gamma^2(V.\cos\theta + \Gamma.\cos\Psi.\ \sin^2\Psi)$$

bulunur. Diğer taraftan (30)dan

$$\vec{X}'^2 = \Gamma^2 \sin^2\Psi$$

yahut

(34) $$(\vec{X}'^2)^{3/2} = \Gamma^3 \,.\, \sin^3\Psi$$

dir. (14) formülünde (33) ve (34) gözönüne alınırsa

$$\sigma = \frac{V.\cos\theta + \Gamma.\cos\Psi.\ \sin^2\Psi}{\Gamma \,.\, \sin^3\Psi}$$

yahut

$$\sigma = \frac{V.\cos\theta}{\Gamma.\sin^3\Psi} + \operatorname{cotg}\Psi$$

yazılır; burada

$$\rho = \operatorname{cotg}\Psi$$

ve $\frac{V}{\Gamma}$ yerine (28) deki ifadesini koyalım,

(35) $$(\sigma - \rho)(\sigma_s - \sigma_h) = \frac{\cos\theta}{\sin^3\Psi}$$

elde edilir. Hareketli üçyüzlünün bir doğrusu tarafından oluşturulan regle yüzeyin dual küresel eğriliğini, baz ve rulant yüzeylerinin dual küresel eğriliklerine bağlı olarak veren (35) formülü genelleştirilmiş Euler-Savary formülüdür.

VI. HAREKETLERİN BİLEŞİMİNE AİT BİR UYGULAMA

Sabit bir E_o sistemine göre hareket halinde olan E_1 ve E_2 sistemlerini gözönüne alalım. (E_2/E_0), (E_2/E_1), (E_1/E_0) hareketlerinin âni hızları için (17) bağıntısı

$$(36) \qquad \vec{\Gamma}_{2/0} = \vec{\Gamma}_{2/1} + \vec{\Gamma}_{1/0}$$

yazılır. (E_2/E_0), (E_2/E_1) ve (E_1/E_0) hareketlerinin âni eksenleri olan $G_{2/0}$, $G_{2/1}$ ve $G_{1/0}$ doğruları aynı ortak dikmeye malik olduklarından aynı rektikongrüansın doğrularıdır.

Şimdi bir E_o sabit uzayının X_1, X_1^* gibi iki sabit doğrusu etrafında helisel hareketler halinde olan E_1 ve E_2 sistemlerini gözönüne alalım.

Konumuz, (E_2/E_1) hareketinin G âni eksenini belirlemektir. Biraz yukarıda işaret ettiğimiz gibi bu G doğrusu, ekseni (E_1/E_0) ve (E_2/E_0) hareketlerinin âni eksenlerinin ortak dikmesi olan rektikongrüansın bir doğrusudur. Burada (E_1/E_0) hareketinin âni ekseni X_1 doğrusu, (E_2/E_0) hareketininki X_1^* doğrusudur. Şu halde G âni ekseni X_1 ve X_1^* doğrularının A ortak dikmesini dik olarak keser.

G yi belirlemek için (36) bağıntısından

$$\vec{\Gamma}_{2/1} = \vec{\Gamma}_{2/0} - \vec{\Gamma}_{1/0}$$

dır ve $\vec{\Gamma}_{2/1}$, $\vec{\Gamma}_{2/0}$, $\vec{\Gamma}_{1/0}$ âni hızlarının dual skaler büyüklüklerini $\Gamma_{2/1}$, $\Gamma_{2/0}$, $\Gamma_{1/0}$ ile göstererek

$$\Gamma_{2/1}\vec{G} = \Gamma_{2/0}\vec{X}_1^* - \Gamma_{1/0}\vec{X}_1$$

yazılır. Bu bağıntının $\vec{G}$ ile vektörel çarpımı

$$\Gamma_{2/0}\vec{X}_1^*\wedge\vec{G} = \Gamma_{1/0}\vec{X}_1\wedge\vec{G} \tag{37}$$

verir.

Şimdi G ve X_1 doğrularının dual açısını $\phi = \Psi + \varepsilon\Psi_o$ ve G ve X_1^* doğrularının dual açısını $\phi^* = \Psi^* + \varepsilon\Psi_o^*$ ile gösterelim ve bu açıların G den itibaren ölçüldüklerini farz edelim. Bu iki dual açının farkı X_1 ve X_1^* sabit eksenlerinin dual açısıdır ve şu halde sabittir;

$$\phi - \phi^* = K = k + \varepsilon k_o = \text{Sabit} \tag{38}$$

X_1, X_1^* ve G doğrularının ait olduğu rektikongrüansın ekseninin dual birim vektörü $\vec{A}$ olsun; (37) eşitliği

$$\Gamma_{2/0}\,\vec{A}\,.\,\sin\phi^* = \Gamma_{1/0}\,\vec{A}\,.\,\sin\phi$$

yazılır ve buradan

$$\Gamma_{2/0}\,.\,\sin\phi^* = \Gamma_{1/0}\,.\,\sin\phi \tag{39}$$

bulunur.

$$\begin{cases} \Gamma_{1/0} = \omega + \varepsilon\omega_o \\ \Gamma_{2/0} = \omega^* + \varepsilon\omega_o^* \end{cases} \tag{40}$$

koyalım; (39) bağıntısı

$$(\omega^* + \varepsilon\omega_o^*)\sin\phi^* = (\omega + \varepsilon\omega_o)\sin\phi$$

yahut

$$\frac{\omega^* + \varepsilon\omega_o^*}{\omega + \varepsilon\omega_o} = \frac{\sin\phi}{\sin\phi^*} \tag{41}$$

yazılır. Eğer (41) 'in birinci tarafı sabit ise

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi^*} = \text{sabit}$$

ve (38) bağıntısı gözönüne alınırsa

$$\phi = \text{Sabit}$$

$$\phi^* = \text{Sabit}$$

bulunur. Şu halde G doğrusu E_1 ve E_2 uzaylarının her birinde <u>sabit dual eğimli</u> yüzey oluşturur.

Şimdi C bir dual sabit olmak üzere

(42) $$\frac{\omega^* + \varepsilon\omega_o^*}{\omega + \varepsilon\omega_o} = C = c + \varepsilon c_o$$

bağıntısını inceleyelim. (42) de reel ve dual kısımları ayıralım:

(43) $$\begin{cases} \dfrac{\omega^*}{\omega} = c \\ \dfrac{\omega.\omega_o^* - \omega^*.\,\omega_o}{\omega^2} = c_o \end{cases}$$

(43) ün ikinci bağıntısı

(44) $$\frac{\omega^*}{\omega}\left(\frac{\omega_o^*}{\omega^*} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = c_o$$

şeklinde yazılabilir. (E_1/E_0) ve (E_2/E_0) helisel hareketlerinin adımları h ve h* olsun.

$$h = \frac{\omega_o}{\omega}$$

$$h^* = \frac{\omega_o^*}{\omega^*}$$

dır. (43) ün ilk eşitliği gözönüne alınarak (44) bağıntısından

$$h^* - h = \frac{c_o}{c}$$

bulunur.

(E_1/E_0) ve (E_2/E_0) helisel hareketlerinde dönme hızlarının ω^*/ω ve adımlarının $h^* - h$ farkı sabit kalıyorsa, (E_2/E_1) hareketinin $[G]_s$ baz yüzeyi ve $[G]_h$ rulant yüzeyi sabit dual eğimli yüzeylerdir.

K A Y N A K L A R

1. W. BLASCHKE, Diferensiyel Geometri Dersleri, (K. ERİM), İstanbul, 1949.

2. L. BİRAN, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, Cilt XII, Sayı 3, 1947.

3. K. ERİM, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, Cilt X, Sayı 1-4, 1945.

4. C. CAILLER, Introduction Géométriqué a`la Mécanique Rationelle.

5. L. BİRAN, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Cilt XIX, 1954.

6. L. BİRAN, Sur le roulement des Surfaces Reglées, (Uluslararası Matematik Kongresi) Amsterdam, 1954.

7. B. DEMİRAY, Dual Vektör Hesabı ve Regle Yüzeylere Ait Bazı Uygulamalar, (Yüksek Lisans Tezi), Marmara Üniv. Fen Bil. Enst. 1984.