MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E_3 UZAYINDA HAREKETLERİN BİRİM KÜRE ÜZERİNDE DUAL DÖNMELER YOLUYLA İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yöneten
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Bahadtin RÜZGAR

İstanbul, 1986

T E Ş E K K Ü R

Yüksek lisans öğrenciliğim sırasında ve daha sonra tez hazırlama çalışmalarımda yardım ve desteklerini esirgemeyen, tezin bu aşamaya gelmesini sağlayan Sayın Hocam Prof. Dr. Lutfi BİRAN'a şükranlarımı sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

GİRİŞ

Bu çalışmamızda, E_3 Euklid uzayında uzay elemanı olarak nokta yerine doğru almak sureti ile, bir katı cismin hareketini inceleyeceğiz.

Uzayda bir $\vec{x}$ birim vektörü ($\vec{x}^2=1$) ile yönlenmiş bir X yönlü doğruyu gözönüne alalım; X doğrusu tarafından taşınan $\vec{x}$ kayan birim vektörünün, uzayın sabit bir 0 noktasına göre momenti $\vec{x}_o$ olsun. X doğrusunu $\vec{X} = \vec{x}+\varepsilon\vec{x}_o$ dual vektörüyle göstereceğiz. $\vec{x}$ ve $\vec{x}_o$ vektörlerinin bir dik koordinat sistemindeki altı izdüşümü Plücker'in doğru koordinatlarıdır.

$$\vec{X}^2 = (\vec{x}+\varepsilon\vec{x}_o)^2 = \vec{x}^2 + 2\varepsilon\vec{x}\cdot\vec{x}_o = 1 \qquad (\varepsilon^2 = 0)$$

bağıntısı $\vec{X}$ dual vektörünün birim vektörü olduğunu gösterir ve E_3 uzayının doğrularına $\vec{X}^2 = 1$ birim küresinin dual noktaları tekabül ettirilir, bu ise Study'nin tekabül prensibidir. Şu halde $\vec{X}^2 = 1$ birim küresinin dönme hareketlerine E_3 uzayının hareketleri tekabül eder.

Önce bir katı cismin âni hızı tanımlanmıştır. Bu, birim olmayan bir $\vec{\Gamma} = \vec{\omega} + \varepsilon\vec{\omega}_o$ dual vektörüdür ve bu vektörün reel ve dual kısımlarının kinematik yorumları yapılmıştır.

Daha sonra, hareketli uzayın bir X doğrusunun $\vec{X}(t)$ dual vektörünün $\vec{\Gamma}$ ve bunun t zamanına göre türevlerinin fonksiyonları olarak seriye açılabileceği gösterilmiştir.

Nihayet Darboux'nun bir probleminin genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu problem şudur: Kendi üzerinde kayan bir kürenin âni dönme vektörünün hareketli küreye bağlı eksenler üzerindeki p, q, r izdüşümleri zamanın fonksiyonları olarak verilmesi halinde integrasyon probleminin bir Riccati diferensiyel denklemin integrasyonuna getirilebilmesidir.

I BÖLÜM

HAREKETLİ BİR ÜÇYÜZLÜNÜN ÂNİ HIZI

Sabit bir E_o katı cismine göre hareket eden E_1 katı cismini gözönüne alalım. E_1'e bağlı dik koordinat üçyüzlüsü $Ox_1x_2x_3$ olsun. Ox hareketli eksene ait birim dual vektörü

$$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}_o \qquad (\varepsilon^2 = 0)$$

ile gösterelim. Burada $\vec{x}$, Ox eksenine paralel ve onunla aynı yönde bir birim serbest vektör; $\vec{x}_o$ ise E_o'ın sabit bir O_1 noktasına göre, Ox ekseni tarafından taşınan $\vec{x}$ kayan vektörünün momentidir. $\vec{X}_h$ dual vektörlerinin birim vektörleri ve birbirlerine diklikleri gözönüne alınarak

$$\begin{matrix} \vec{X}_g \cdot \vec{X}_h = 0 & g \neq h \\ \vec{X}_g \cdot \vec{X}_h = 1 & g = h \end{matrix} \qquad (g=1,\ 2,\ 3\ \ h=1,\ 2,\ 3) \qquad (1)$$

dır. t zamanının fonksiyonu olan u nun t'ye göre türevini u' ile gösterelim.

$$\vec{X}'_1\ ,\ \vec{X}'_2\ ,\ \vec{X}'_3$$

türevlerini $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$ cinsinden bulalım.

$$\Delta_{gh} = \vec{X}'_g \cdot \vec{X}_h \qquad (\Delta_{gh} = \delta_{gh} + \varepsilon \delta_{gho}) \qquad (2)$$

koyarak

$$\vec{X}'_g = \Sigma \Delta_{gh} \vec{X}_h$$

yazılır.

$$\Delta_{11} = \vec{X}_1' \cdot \vec{X}_1 = 0$$

olduğundan,

$$\vec{X}_1' = \Delta_{12}\vec{X}_2 + \Delta_{13}\vec{X}_3 \qquad (3)$$

dir. Diğer taraftan (1) den türev alarak

$$\vec{X}_g' \cdot \vec{X}_h + \vec{X}_g \cdot \vec{X}_h' = 0$$

yahut (2) ye göre

$$\Delta_{gh} + \Delta_{hg} = 0$$

$$\Delta_{gh} = -\Delta_{hg}$$

dir. Buradan (3) bağıntısı (2) de gözönüne alınarak,

$$\vec{X}_1' = (\vec{X}_1' \cdot \vec{X}_2)\vec{X}_2 - (\vec{X}_3' \cdot \vec{X}_1)\vec{X}_3$$

yazılır. Bu son formülde

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_3 \wedge \vec{X}_1 \quad , \quad \vec{X}_3 = -\vec{X}_2 \wedge \vec{X}_1$$

koyalım ve formüle daha da bir simetri vermek için

$$\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_1 = 0$$

olduğunu gözönünde bulundurarak,

$$\vec{X}_1' = (\vec{X}_2' \cdot \vec{X}_3)\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_1 + (\vec{X}_1' \cdot \vec{X}_2)\vec{X}_3 \wedge \vec{X}_1 + (\vec{X}_3' \cdot \vec{X}_1)\vec{X}_2 \wedge \vec{X}_1$$

veya

$$\vec{X}_1' = [(\vec{X}_2'.\vec{X}_3)\vec{X}_1 + (\vec{X}_3'.\vec{X}_1)\vec{X}_2 + (\vec{X}_1'.\vec{X}_2)\vec{X}_3] \wedge \vec{X}_1$$

bulunur. $\vec{X}_2'$ ve $\vec{X}_3'$ ün ifadeleri benzer bir hesapla elde edilir:

$$\vec{X}_2' = [(\vec{X}_2'.\vec{X}_3)\vec{X}_1 + (\vec{X}_3'.\vec{X}_1)\vec{X}_2 + (\vec{X}_1'.\vec{X}_2)\vec{X}_3] \wedge \vec{X}_2$$

$$\vec{X}_3 = [(\vec{X}_2'.\vec{X}_3)\vec{X}_1 + (\vec{X}_3'.\vec{X}_1)\vec{X}_2 + (\vec{X}_1'.\vec{X}_2)\vec{X}_3] \wedge \vec{X}_3$$

yukarıda üç türev vektörünün ifadelerinde ortak olan köşeli parantez içindeki birinci çarpanı birim olmayan

$$\vec{\Gamma} = \vec{\omega} + \varepsilon\vec{\omega}_o$$

dual vektörü ile gösterelim.

$$\vec{\Gamma} = (\vec{X}_2'.\vec{X}_3)\vec{X}_1 + (\vec{X}_3'.\vec{X}_1)\vec{X}_2 + (\vec{X}_1'.\vec{X}_2)\vec{X}_3 \qquad (4)$$

Buradan,

$$\Delta_1 = \vec{X}_2'.\vec{X}_3$$

$$\Delta_2 = \vec{X}_3'.\vec{X}_1 \qquad (5)$$

$$\Delta_3 = \vec{X}_1'.\vec{X}_2$$

koyarak

$$\vec{\Gamma} = \Sigma\Delta_g\vec{X}_g \qquad (g=1,\ 2,\ 3) \qquad (6)$$

ve

ve

$$\vec{X}_1' = \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_1 = \quad * \quad + \Delta_3 \vec{X}_2 - \Delta_2 \vec{X}_3$$

$$\vec{X}_2' = \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_2 = -\Delta_3 \vec{X}_1 + \quad * \quad + \Delta_1 \vec{X}_3 \tag{7}$$

$$\vec{X}_3' = \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_3 = \Delta_2 \vec{X}_1 - \Delta_1 \vec{X}_2 + \quad *$$

elde edilir.

Şimdi $\vec{\Gamma}$ dual vektörünün kinematik yorumunu yapalım. Bu amaçla önce $\vec{G}$ ile

$$\vec{G} = \frac{\vec{\Gamma}}{\sqrt{\vec{\Gamma}^2}} \quad \frac{\Sigma \Delta_g \vec{X}_g}{\sqrt{\Sigma \Delta_g^2}} \tag{8}$$

birim dual vektörünü gözönüne alalım. Bu $\vec{G}$ birim dual vektörü bir G doğrusu gösterir.

Bir t anında G doğrusunun $0x_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlüsüne göre sabit kaldığını farz edelim. (8) den $\vec{G}$ 'nin türevini alalım, $\vec{X}_g$ lerin katsayıları sabit kalacağından

$$\vec{G}' = \frac{\Sigma \Delta_g \vec{X}_g'}{\sqrt{\Sigma \Delta_g^2}} \tag{9}$$

yazılır. (6) ve (7) formüllerinden

$$\Sigma \Delta_g \vec{X}_g' = 0$$

ve bunun neticesi

$$\vec{G}' = 0$$

olduğu görülür. Şu halde gözönüne alınan anda G doğrusu E_o sabit uzayı içinde de sabittir. G doğrusunun hareketin âni vidalanma ekseni olduğu sonucu çıkarılır.

Şimdi $\vec{\Gamma}=\vec{\omega}+\varepsilon\vec{\omega}_o$ 'ın $0x_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlünün eksenleri üzerindeki

$$\Delta_g=\delta_g+\varepsilon\delta_{g0}$$

izdüşümlerini gözönüne alalım.

$$\vec{\Gamma} \quad \begin{array}{l} \Delta_1=\delta_1+\varepsilon\delta_{10} \\ \Delta_2=\delta_2+\varepsilon\delta_{20} \\ \Delta_3=\delta_3+\varepsilon\delta_{30} \end{array} \qquad (10)$$

burada

$$\vec{\omega} \quad \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \qquad \vec{\omega}_o \quad \begin{array}{l} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{array} \qquad (11)$$

dır. (5) eşitliklerinin ilkine göre

$$\Delta_1=\delta_1+\varepsilon\delta_{10} = \vec{X}_2'.\vec{X}_3$$

ve buradan

$$\delta_1+\varepsilon\delta_{10}=(\vec{x}_2'+\varepsilon\vec{x}_{20}').(\vec{x}_3+\varepsilon\vec{x}_{30})$$

yazılır. Burada reel ve dual kısımları eşitlersek

$$\delta_1=\vec{x}_2'.\vec{x}_3 \quad , \quad \delta_{10}=\vec{x}_2'.\vec{x}_{30}+\vec{x}_3.\vec{x}_{20}' \qquad (12)$$

ve aynı tarzda

$$\delta_2=\vec{x}_3'.\vec{x}_1 \quad , \quad \delta_{20}=\vec{x}_3'.\vec{x}_{10}+\vec{x}_1.\vec{x}_{30}'$$

$$\delta_3=\vec{x}_1'.\vec{x}_2 \quad , \quad \delta_{30}=\vec{x}_1'.\vec{x}_{20}+\vec{x}_2.\vec{x}_{10}'$$

elde edilir. $\vec{\Gamma}$ nın Δ_g izdüşümlerinin reel kısımları

$$\delta_1=\vec{x}_2'.\vec{x}_3 \quad , \quad \delta_2=\vec{x}_3'.\vec{x}_1 \quad , \quad \delta_3=\vec{x}_1'.\vec{x}_2 \qquad (12)_1$$

dir ve bunların hareketli üçyüzlünün âni dönme hızının izdüşümleri ve bunun sonucu, $\vec{\Gamma}$ *nın* $\vec{\omega}$ *reel kısmının hareketin âni dönme hızı* olduğu görülür.

Şimdi de (12) nin ikinci formülü ile verilen Δ_1 in dual kısmını gözönüne alalım.

$$\delta_{10}=\vec{x}_2'.\vec{x}_{30}+\vec{x}_3.\vec{x}_{20}'$$

Burada

$$\vec{x}_{30}=\vec{0}\wedge\vec{x}_3$$

$$\vec{x}_{20}'=(\vec{0}\wedge\vec{x}_2)'=\vec{0}'\wedge\vec{x}_2+\vec{0}\wedge\vec{x}_2'$$

olduğundan

$$\delta_{10}=\vec{x}_2'(\vec{0}\wedge\vec{x}_3)+\vec{x}_3(\vec{0}'\wedge\vec{x}_2)+\vec{x}_3(\vec{0}\wedge\vec{x}_2')$$

yazılır.

$$\vec{x}_2'.(\vec{0}\wedge\vec{x}_3)=-\vec{x}_3.(\vec{0}\wedge\vec{x}_2')$$

olduğundan

$$\delta_{10}=\vec{x}_3(\vec{0}'\wedge\vec{x}_2)$$

yahut

$$\vec{x}_3.(\vec{0}'\wedge\vec{x}_2)=\vec{0}'.(\vec{x}_2\wedge\vec{x}_3)$$

ve

$$\vec{x}_1=\vec{x}_2\wedge\vec{x}_3$$

koyarak

$$\delta_{10}=\vec{0}'.\vec{x}_1$$

bulunur. δ_{20}, δ_{30} in ifadelerini benzer hesaplarla bularak

$$\delta_{10}=\vec{0}'.\vec{x}_1$$
$$\delta_{20}=\vec{0}'.\vec{x}_2 \qquad (13)$$
$$\delta_{30}=\vec{0}'.\vec{x}_3$$

elde edilir.

Şu halde $\vec{\Gamma}$ 'nin $Ox_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlünün eksenleri üzerindeki Δ_g izdüşümlerinin δ_{g0} dual kısımları hareketli uzayın herhangi bir O noktasının aynı eksenler üzerindeki izdüşümleridir; bunun sonucu $\vec{\Gamma}$ *nın $\vec{\omega}_o$ dual kısmı O noktasının hızıdır.*

Buradan şu sonuç çıkarılır: Hareketli uzayın herhangi bir O noktasının âni dönme hızının doğrultusu üzerindeki izdüşümü V_A âni ötelenme hızına eşit olduğundan

$$V_A = \frac{\vec{\omega}.\vec{\omega}_o}{\sqrt{\vec{\omega}^2}} = \frac{\Sigma\delta_g.\delta_{g0}}{\sqrt{\Sigma\delta_g^2}} \tag{14}$$

ve teğetsel helisel hareketin indirgenmiş adımı ise

$$h = \frac{\vec{\omega}.\vec{\omega}_o}{\vec{\omega}^2} = \frac{\Sigma\delta_g.\delta_{g0}}{\Sigma\delta_g^2} \tag{15}$$

dir. (4) formülü ile tanımlanan (birim olmayan) $\vec{\Gamma}=\vec{\omega}+\varepsilon\vec{\omega}$ dual vektörü helisel teğet hareketi karakterize eder:

1° $\vec{G} = \dfrac{\vec{\Gamma}}{\sqrt{\vec{\Gamma}^2}}$ Birim dual vektörüyle tanımlanan G doğrusu helisel teğet hareketin eksenidir.

2° $\vec{\Gamma}$ nın $\vec{\omega}$ reel kısmı âni dönme vektörüdür.

3° $h = \dfrac{\vec{\omega}.\vec{\omega}_o}{\vec{\omega}^2}$

helisel teğet hareketin adımıdır.

4^0 $\qquad \vec{V}_A = \left(\dfrac{\vec{\omega}.\vec{\omega}_o}{\vec{\omega}^2}\right).\ \vec{\omega}$

vektörü âni ötelenme hızıdır.

Hareketli uzayın bir M noktasının hız vektörü

$$\vec{V}_M = \vec{\omega}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

bağıntısı ile verilmiştir; şu halde $\vec{\Gamma}$ dual vektörü şöyle de yorumlanabilir: $\vec{\Gamma}$ dual vektörü $\vec{\omega}$ reel kısmı genel bileşkesi, $\vec{\omega}_o$ dual kısmı 0 daki bileşke momenti, M deki bileşke momentide bu noktanın hız vektörü olan bir kayan vektör sistemini gösterir.

Hareketli uzayın âni hareketini karakterize eden ve yukarıda açıkladığımız özellikleri nedeniyle $\vec{\Gamma}$ dual vektörüne *âni hareketin hızı* denir.

UYGULAMA:

BİR REGLE YÜZEYİN ASAL ÜÇYÜZLÜSÜNÜN HAREKETİ:

Bir X doğrusu bir t reel parametresine bağlı olarak hareketinde, bu X doğrusu bir [X] regle yüzeyi oluşturur. [X] yüzeyinin $X=X_1$ ana doğrusu X_1 'in x boğaz noktasındaki X_2 yüzey normali ve x noktasındaki X_1 ve X_2 'ye dik olan X_3 yüzey teğetinden oluşan (X_1, X_2, X_3) doğru yönlü dik üçyüzlüye [X] yüzeyinin X_1 ana doğrusuna ait asal üçyüzlü denir.

X_g doğrusuna ait dual birim vektör

$$\vec{X}_g = \vec{x}_g + \varepsilon \vec{x}_{g0}$$

olmak üzere

$$\vec{X}_1' = * + P\vec{X}_2 + *$$

$$\vec{X}_2' = -P\vec{X}_1 + \quad * \quad + Q\vec{X}_3 \qquad (16)$$

$$\vec{X}_3' = \quad * \; -Q\vec{X}_2 + *$$

formülleri caridir. Burada

$$P = p + \varepsilon p_o = \sqrt{\vec{X}_1'^2} \; ;$$

$$Q = q + \varepsilon q_o = \frac{(\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_1') \cdot \vec{X}_1''}{\vec{X}_1'^2} \qquad (17)$$

dir.

X_1, X_2, X_3 doğrularının oluşturduğu $[X_1]$, $[X_2]$, $[X_3]$ regle yüzeylerin dağılma parametrelerinin ifadeleri de

$$\lambda_1 = \frac{p_o}{p}$$

$$\lambda_2 = \frac{pp_o + qq_o}{p^2 + q^2} \qquad (18)$$

$$\lambda_3 = \frac{q_o}{q}$$

dir.

x boğaz noktası belli bir hareket kanununa göre (x) boğaz çizgisini çizerken (X_1, X_2, X_3) üçyüzlüsünün hareketini gözönüne alalım. (4) formülünde (16) formülleri gözönüne alınırsa

$$\vec{r} = Q\vec{X}_1 + P\vec{X}_3 \tag{19}$$

yazılır. Şu halde, gözönüne alınan hareketin âni hızı (19) formülü ile verilmiştir. (16) formüllerini (7) formülleri ile karşılaştırırsak

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= Q \\ \Delta_2 &= 0 \\ \Delta_3 &= P \end{aligned} \tag{20}$$

olduğu kolayca görülür.

$(12)_1$ ve (13) bağıntıları ile (5) formülleri gözönüne alınarak dönme hızının (X_1, X_2, X_3) üçyüzlüsünün eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin q,0,p ve x boğaz noktasının hızının izdüşümleri de q_o, 0, p_o olduğu görülür. (14) ve (15) formülleri gözönüne alınarak teğetsel helisel hareketin V_A âni ötelenme hızının ve h adımının ifadeleri için

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{pp_o + qq_o}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ h &= \frac{pp_o + qq_o}{p^2 + q^2} \end{aligned} \tag{21}$$

yazılır. Burada (18) formüllerinin ikincisi gözönüne alınırsa h nin $[X_2]$ regle yüzeyinin dağılma parametresine eşit olduğu görülür.

II B Ö L Ü M

TERS PROBLEM VE İNTEGRASYON PROBLEMİ

TERS PROBLEM:

Hareketli üçyüzlünün hareket kanunu verilmesi halinde âni hız $\vec{\Gamma}$, t zamanının fonksiyonu olarak verilmiştir.

Karşıt olarak şu problem düşünülebilir: Zamanın fonksiyonu olan $\vec{\Gamma}$ dual vektörü verildiğinde hareketin belirlenmesi.

Bu problemin tam ispatı differensiyel denklemler teorisine dayanır. Biz önce hareketli üçyüzlünün bir doğrusunu gösteren bir birim dual vektörün açınımının nasıl bulunabileceğini göstereceğiz. Bunu yaparken tabiatıyla bu açınımın mümkün olduğunu kabul ediyoruz.

$Ox_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlünün bir X doğrusunu gözönüne alalım; bu doğru

$$\vec{X} = \Sigma E_g \vec{X}_g \qquad (g = 1,2,3) \qquad (22)$$

dual birim vektörüyle gösterilebilir. Burada E_g büyüklükleri

$$\Sigma E_g^2 = 1$$

eşitliğini sağlayan ve genel olarak dual olan sabitlerdir.

$\vec{X}$ 'in türevini hesaplayalım.

$$\vec{X}' = \Sigma E_g \vec{X}_g'$$

yahut (7) formüllerinden

$$\vec{X}' = E_1 \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_1 + E_2 \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_2 + E_3 \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}_3$$

buradan

$$\vec{X}' = \vec{\Gamma}\wedge \Sigma E_g \vec{X}_g$$

ve nihayet (22) den

$$\vec{X}' = \vec{\Gamma}\wedge\vec{X} \qquad (23)$$

bulunur.

$\vec{X}(t)$ nin t zamanına göre ardışık türevleri (23) temel formülü

$$\vec{X}',\ \vec{X}'',\ \vec{X}''',\ \dots\dots\dots,\ \vec{X}^{(\mu)}$$

ardışık türevlerini hesaplamayı mümkün kılar. Gerçekten (23) den

$$\vec{X}'' = \vec{\Gamma}'\wedge\vec{X} + \vec{\Gamma}\wedge\vec{X}'$$

yahut

$$\vec{X}'' = \vec{\Gamma}'\wedge\vec{X} + \vec{\Gamma}\wedge(\vec{\Gamma}\wedge\vec{X})$$

yazılır; burada

$$\vec{\Gamma}\wedge(\vec{\Gamma}\wedge\vec{X}) = (\vec{\Gamma}.\vec{X})\vec{\Gamma} - (\vec{\Gamma}^2)\vec{X}$$

bulunur. Benzer hesaplarla $\vec{X}'''$, hesaplanır ve

$$\vec{X}' = \vec{\Gamma}\wedge\vec{X}$$

$$\vec{X}'' = \vec{\Gamma}'\wedge\vec{X} + (\vec{\Gamma}.\vec{X})\vec{\Gamma} - (\vec{\Gamma}^2)\,\vec{X}$$

$$\vec{X}''' = \vec{\Gamma}''\wedge\vec{X} + 2(\vec{\Gamma}'.\vec{X})\vec{\Gamma} - 3(\vec{\Gamma}.\vec{\Gamma}')\,\vec{X} - (\vec{\Gamma}^2)\vec{\Gamma}\wedge X$$

elde edilir. Genel olarak, $\vec{\Gamma}$ ve $\vec{\Gamma}$'nın ardışık türevleri cinsinden $\vec{X}^{(\mu)}$ biliniyorsa, türev alma ve (23) formülü yardımıyla $\vec{X}^{(\mu+1)}$ in ifadesi elde edilir.

Şu halde eğer $\vec{\Gamma}$ zamanın bilinen analitik bir fonksiyonu ise

$$\vec{X}(t)=\vec{X}(0)+\frac{t}{1!}\vec{X}'(0)+\frac{t^2}{2!}\vec{X}''(0)+\ldots\ldots\ldots$$

şeklinde bir açınım bulabiliriz; buradan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Zamanın fonksiyonu olan bir birim olmayan $\vec{\Gamma}$ fonksiyonunun verilmesi hareketli üçyüzlünün bir hareketini belirler.

INTEGRASYON PROBLEMİ:

Bir noktası sabit olan bir katı cismin hareketinin incelenmesi kendi üzerinde kayan bir kürenin hareketinin incelenmesine getirilir; Darboux bu halde kürenin bir parametrik gösterimini gözönüne alarak, problemin bir Riccati differansiyel denkleminin integrasyonu ile çözülebileceğini göstermiştir.

Bir katı cismin genel hareketinde, uzayın bir doğrusuna dual kürenin bir noktası tekabül ettiğinden; kendi üzerinde kayan bir dual kürenin hareketi düşünülebilir. Biz bu noktadan hareket ederek katı cismin en genel hareketinde de problemin bir Riccati differansiyel denkleminin çözümüne getirilebileceğini göstereceğiz.

(22) denklemi ile tanımlanan X doğrusunun $Ox_1x_2x_3$ hareketli üçyüzlüye göre hareket halinde olduğunu farzedelim; bu takdirde E_g büyüklükleri zamanın fonksiyonlarıdır ve (22) den türev alarak

$$\vec{X}' = \Sigma E_g \vec{X}_g' + \Sigma E_g' \vec{X}_g \qquad (24)$$

yahut (23) ve (24)'e göre

$$\vec{X}' = \vec{\Gamma}\wedge\vec{X}+\Sigma E_g'\vec{X}_g \tag{25}$$

yazılır.

Sabit uzayın bir X doğrusunun $0x_1x_2x_3$ hareketli uzaya göre hareketi düşünülürse, X doğrusunun $\vec{X}$ dual vektörünün zamana göre türevi (25) formülü ile verilmiştir ve bu doğru sabit olduğundan türev sıfıra eşittir:

$$\vec{\Gamma}\wedge\vec{X}+\Sigma E_g'\vec{X}_g = 0$$

yahut

$$\Sigma E_g'\vec{X}_g = \vec{X}\wedge\vec{\Gamma} \tag{26}$$

yazılır. (26) denklemini hareketli üçyüzlünün eksenleri üzerine izdüşürelim; (6) ve (22) bağıntıları gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} E_1' &= \Delta_3E_2-\Delta_2E_3 \\ E_2' &= \Delta_1E_3-\Delta_3E_1 \\ E_3' &= \Delta_2E_1-\Delta_1E_2 \end{aligned} \tag{27}$$

lineer differansiyel denklem sistemi bulunur.

Integrasyon problemi (27) sistemini integre etmekten ibarettir.

(27) nin ilk denklemini E_1 ; ikinciyi E_2 ; üçüncüyü E_3 ile çarparak toplayalım.

$$E_1E_1'+E_2E_2'+E_3E_3' = 0$$

ve integre ederek

$$E_1^2+E_2^2+E_3^2 = \text{Sabit}$$

buluruz; E_g leri uygun bir dual sabitle bölersek

$$E_1^2+E_2^2+E_3^2 = 1 \tag{28}$$

yazılır. Bu, O_1 başlangıç noktası merkezi olan Σ dual birim küresinin dual koordinatları E_1, E_2, E_3 olan X noktasını gözönüne almak demektir. Bu X noktası Σ üzerinde, (27) diferansiyel sistemini gerçekleyen bir ψ dual eğri çizer. Σ üzerinde bir nokta iki dual parametreye bağlı olduğundan, Darboux'nun reel küre için yaptığı parametrik gösterimin benzeri yapılarak, (27) sistemi iki dual bilinmeyenli bir denklem sistemine dönüştürülebilir.

Bu amaç için Σ'nın bir noktasının E_g dual koordinatlarının U ve V gibi iki dual parametrenin fonksiyonları olarak ifade olunabileceğine işaret edelim; gerçekten $i^2=-1$ olmak üzere

$$E_1= \frac{1-UV}{U-V}$$

$$E_2=i\,\frac{1+UV}{U-V} \tag{29}$$

$$E_3= \frac{U+V}{U-V}$$

yazılır ve karşıt olarak

$$U=\frac{E_1+iE_2}{1-E_3}$$
$$V=-\frac{E_1+iE_2}{1+E_3} \qquad (30)$$

dir; (29) eşitliklerinin dual küremiz Σ'nin (28) denklemini gerçekledikleri kolayca gösterilebilir.

Şimdi U ve V parametrelerinin cebirsel niteliklerini açıklayalım. U ve $-\frac{1}{V}$ iki eşlenik kompleks sayıdır; yani

$$U=R+iS$$

konursa

$$V=\frac{-1}{R-iS}$$

dir; diğer taraftan R ve S iki dual büyüklüktür.

$$R=r+\varepsilon r_o \quad , \quad S=s+\varepsilon s_o$$

Burada r, r_o, s, s_o zamanın fonksiyonları olan reel büyüklüklerdir.

(30) denklemlerinin ilkinin türevini alalım;

$$U'=\frac{E_1'+iE_2'}{1-E_3}+\frac{E_1+iE_2}{(1-E_3)^2}E_3'$$

yahut

$$U'=\frac{E_1'+iE_2'}{1-E_3}+\frac{E_1+iE_2}{1-E_3}\cdot\frac{E_3'}{1-E_3}$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafında (30) un ilk bağıntısı göz-önüne alınarak

$$U' = \frac{E_1' + iE_2'}{1-E_3} + U\,\frac{E_3'}{1-E_3} \qquad (31)$$

yazılır. (31) eşitliğinde E_g' türevlerinin yerine (27) deki ifadelerini koyalım:

$$U' = \frac{\Delta_3(E_2 - iE_1) + (i\Delta_1 - \Delta_2)E_3}{1-E_3} + U\,\frac{\Delta_2 E_1 - \Delta_1 E_2}{1-E_3}$$

(29) eşitlikleri gözönüne alınarak

$$U' = \frac{\Delta_3\left(i\frac{1+UV}{U-V} - i\frac{1-UV}{U-V}\right) + (i\Delta_1 - \Delta_2)\frac{U+V}{U-V} + U\left(\Delta_2\frac{1-UV}{U-V} - i\Delta_1\frac{1+UV}{U-V}\right)}{1 - \frac{U+V}{U-V}}$$

ve gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$U' = -i\Delta_3 U + \frac{(i\Delta_1 - \Delta_3)(U+V)}{-2V} + U\,\frac{\Delta_2 - i\Delta_1 - (\Delta_2 + i\Delta_2)UV}{-2V}$$

ve nihayet

$$U' = \frac{\Delta_2 + i\Delta_1}{2}U^2 - i\Delta_3 U + \frac{\Delta_2 - i\Delta_1}{2} \qquad (32)$$

elde edilir.

Benzer hesaplarla

$$V' = \frac{\Delta_2 + i\Delta_1}{2}V^2 - i\Delta_3 V + \frac{\Delta_2 - i\Delta_1}{2} \qquad (33)$$

bulunur. (32) ve (33) iki idantik Riccati differansiyel denklemidir. Böylece *(27) sisteminin integrasyonu, bir Riccati denkleminin integrasyonuna* getirilmiştir.

Şimdi V değişkeninin neden U ile aynı differansiyel denklemi gerçeklediğini gösterelim. Bunun için bir X doğrusunu yani dual kürenin koordinatları (E_1, E_2, E_3) olan bir X noktası (27) differansiyel sisteminin bir çözümü ise X den geçen çapın diğer ucu olan ve koordinatları ($-E_1$, $-E_2$, $-E_3$) e eşit X* noktası da (27) sisteminin bir çözümüdür; halbuki bu X* noktası, X doğrusu ile çakışan fakat ters yönde olan doğrunun imajıdır; ve bir noktadan diğerine U ile V aralarında değiştirilerek geçilir; şu halde U ve V aynı differansiyel denklemi gerçekler.

UYGULAMA:

Integrasyon probleminin regle geometride bir uygulamasını yapmak istiyoruz.

Bir [X] regle yüzeyi ve (16) bağıntıları ile verilen P ve Q dual eğrilik ve burulmasını gözönüne alalım. P=P(t) ve Q=Q(t) büyüklükleri [X] regle yüzeyinin doğal denklemleridir ve P, Q'nun verilmesiyle [X] yüzeyi bir yerdeğiştirme farkıyla belirlenir.

Hareketli üçyüzlü olarak [X] in (X_1, X_2, X_3) asal üçyüzlüsünü alalım. (7) denklemleri, (20) bağıntıları gözönüne alınarak (16) formülleri yazılır:

$$\vec{X}_1' = * + P\vec{X}_2 + *$$

$$\vec{X}_2' = -P\vec{X}_1 + * + Q\vec{X}_3$$

$$\vec{X}_3' = * - Q\vec{X}_2 + *$$

Buradan (32) diferansiyel denklemi

$$U' = -iPU + \frac{1}{2} iQ (U^2-1)$$

şeklini alır. Bu, dual eğriliği P(t) dual burulması Q(t) olan regle yüzeyin diferansiyel denklemidir.

KAYNAKLAR

1. W. BLASCHKE, Diferensiyel Geometri Dersleri (K. ERİM, İstanbul 1949).

2. G. DARBOUX, Leçons sur la téorie des surfaces, Tome I (2^e ed.) Paris 1914.

3. L. BİRAN, Revue de la Faculté des Seiences de l'Université d'Istanbul, Serie A, Tome XII, fasc. 3, 1947.

4. N.H. KUIPER, Onderzoekingen Over lijnenmeetkunde, 1946, Amsterdam.

5. H.R. MÜLLER, Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1963.

6. R. GARNIER, Cours de Cinématique. Tomes I, II, Paris 1941, 1942.

7. F. AKBULUT, Bir Yüzey Üzerindeki Eğrilerin DARBOUX Vektörleri, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, 1983.