MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

YÜZEYLER TEORİSİNDE BAZI FORMÜLLERİN DOĞRU KONGRÜANSLARINDAKİ BENZERLERİ VE BUNLARIN GEOMETRİK ÖZELLİKERİ

Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN

Hazırlayan
Orhan Melih SERMUTLU
Öğretim Görevlisi

1984

Bu çalışmanın hazırlanmasında, her türlü yardımlarını esirgemiyen sayın hocamız danışman Prof. Dr Lutfi Biran a minnet ve şükran duygularımı arzederim.

K O N G R Ü A N S L A R

1. - Bu çalışmamızda düal uzaydan ($a + \varepsilon a_o$, $\varepsilon^2 = 0$) faydalanarak, yüzeyler teorisine ait bazı formüllerin, doğru kongrüanslarında benzerlerini inceliyeceğiz. Bu ilk paragrafta, bazı tanımlar ve formüllere kısaca işaret etmek istiyoruz.

Bir X doğrusu tarafından oluşturulan bir $[X]$ regle yüzeyi gözönüne alalım. $[X]$ yüzeyini belirlemek için, X doğrusunun düal birim vektörü, bir reel t parametresine bağlı olarak verilebilir.

$$\vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}_o(t) \qquad (\varepsilon^2 = 0) \tag{1,1}$$

Burada $\vec{x}$, X doğrusuna paralel bir serbest birim vektör, $\vec{x}_o$ ise, X doğrusu tarafından taşınan $\vec{x}$ kayan vektörünün sabit bir O noktasına göre momentidir.

$$P = p + \varepsilon p_o = \sqrt{\vec{X}'^2} \tag{1,2}$$

$$Q = q + \varepsilon q_o = \frac{(\vec{X} \wedge \vec{X}') \cdot \vec{X}''}{\vec{X}'^2} = \frac{(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'')}{\vec{X}'^2}$$

eşitlikleri ile tanımlanan P ve Q düal büyüklüklerinin ilkine, düal eğrilik, ikincisine düal burulma denir. $\vec{X}^2(t) = 1$ olmasından, $[X]$ regle yüzeyi, birim düal kürenin bir eğrisi olarak, düşünülebilir ve (1,2) nin ilk formülünden, düal yay elemanı için,

$$dS = \sqrt{\vec{X}'^2(t)}\; dt = P\, dt \tag{1,3}$$

ve düal yay uzunluğu için,

$$S = \int \sqrt{\vec{X}'^2(t)}\; dt = \int P\, dt$$

yazılır.

$$dS = ds + \varepsilon ds_o$$

koyarak, (1,2) nin ilk bağıntısı da gözönüne alınarak, $[X]$ in dağılma parametresi

$$\delta = \frac{ds_o}{ds} = \frac{p_o}{p} \tag{1,4}$$

ile verilmiştir.

$$\sigma = \frac{Q}{P} \tag{1,5}$$

düal büyüklüğüne $[X]$ regle yüzeyinin düal küresel eğriliği denir.

(1,2) ve (1,3) bağıntılarından (1,5) formülü

$$\sigma = \frac{(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'')}{(\vec{X}'^2)^{3/2}} = \left(\vec{X}, \frac{d\vec{X}}{dS}, \frac{d^2\vec{X}}{dS^2}\right) \tag{1,6}$$

yazılır.

2.- Bir $\{X\}$ doğrular kongrüansını belirlemek için $\{X\}$ in herhangi bir X doğrusunun birim düal vektörü μ ve ν gibi iki reel parametreye bağlı olarak verilebilir.

$$\vec{X} = \vec{X}(\mu,\nu) = \vec{x}(\mu,\nu) + \varepsilon\,\vec{x}_o(\mu,\nu) \tag{2,1}$$

ve arasındaki her bağıntı kongrüansın bir regle yüzeyini tanımlar. Özel olarak $\mu =$ st. $\nu =$ st. yüzeylerine koordinat yüzeyleri denir.

$\{X\}$ in her regle yüzeyi için,

$$d\vec{X} = \vec{X}_\mu\, d\mu + \vec{X}_\nu\, d\nu$$

dır. Kongrüansın düal yay elemanı

$$dS^2 = d\vec{X}^2 = \vec{X}_\mu^2\, d\mu^2 + 2\vec{X}_\mu . \vec{X}_\nu\, d\mu\, d\nu + \vec{X}_\nu^2\, d\nu^2 \tag{2,2}$$

ifadesi ile verilmiştir. (2,2) bağıntısında

$$E = e + \varepsilon e_o = \vec{X}_\mu^2 , \quad F = f + \varepsilon f_o = \vec{X}_\mu . \vec{X}_\nu , \quad G = g + \varepsilon g_o = X_\nu^2 \tag{2,3}$$

koyalım. Burada reel ve düal kısımları ayırarak,

$$\begin{aligned} e &= \vec{x}_\mu^2 & f &= \vec{x}_\mu . \vec{x}_\nu & g &= \vec{x}_\nu^2 \\ e_o &= 2\vec{x}_\mu \vec{x}_{o\mu} & f_o &= \vec{x}_\mu . \vec{x}_{o\nu} + \vec{x}_{o\mu} . \vec{x}_\nu & g_o &= 2\vec{x}_\nu . \vec{x}_{o\nu} \end{aligned} \tag{2,4}$$

ve buradan (2,2) için

$$dS^2 = e\, d\mu^2 + 2f\, d\mu d\nu + g\, d\nu^2 + \varepsilon(e_o\, d\mu^2 + 2f_o\, d\mu d\nu + g_o d\nu^2) \tag{2,5}$$

yazılır. (2,5) de

(2,6) $\quad [1] = e\, d\mu^2 + 2f\, d\mu d\nu + g\, d\nu^2 \qquad [11] = e_o\, d\mu^2 + 2f_o\, d\mu d\nu + g_o d\nu^2$

$dS = ds + \xi\, ds_o$ koyarak, (2,5) bağıntısı

$$ds^2 + 2\,\xi\, ds\, ds_o = [1] + \xi\,[11]$$

yazılabilir. (1,4) eşitliği gözönüne alınırsa, $\{X\}$ kongrüansının bir Xdoğrusundan geçen ve doğuranları $\{X\}$ e ait olan bir regle yüzeyinin δ dağılma parametresi için,

(2,7)
$$\delta = \frac{1}{2}.\ \frac{e_o\, d\mu^2 + 2f_o\, d\mu d\nu + g_o\, d\nu^2}{e\, d\mu^2 + 2f\, d\mu d\nu + g\, d\nu^2}$$

bulunur. (2,6) bağıntıları ile kongrüansların birinci ve ikinci kuadratik formları tanımlanır. İncelemelerimizde silindirik kongrüanslara tekabül eden hali gözönüne almıyacağız. Daima

$$(\vec{x}\wedge\vec{x})^2 = eg - f^2 \neq 0$$

farzedeceğiz.

$\{X\}$ kongrüansının açılabilir yüzeyleri ($\delta = 0$)

(2,8)
$$e_o\, d\mu^2 + 2f_o\, d\mu\, d\nu + g_o\, d\nu^2 = 0$$

diferansiyel denklemi ile tanımlanmıştır. Şu halde bir kongrüansın açılabilir yüzeyleri, yüzeyler teorisinde asimptotik çizgilere tekabül eder.

Diğer taraftan, yüzeyler teorisinde normal kesitlerin eğriliklerinin maksimum ve minimum değerlerini veren bağıntı ile, (2,7) bağıntısının benzerliğine işaret edelim. Benzer düşünce ve hesaplarla $\frac{d\mu}{d\nu}$ nün fonksiyonu olan δ nın maksimum ve minimum değerlerini veren denklem için,

(2,9)
$$\begin{vmatrix} e\, d\mu + f\, d\nu & f\, d\mu + g\, d\nu \\ e_o d\mu + f_o d\nu & f_o d\mu + g\, d\nu \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Kongrüansımızın, (2,9) denklemi ile tanımlanan, regle yüzeylerine, asal yüzeyler denir. Daima reel olan bu yüzeyler, yüzeyler teorisinde eğrilik çizgisine tekabül eder.

Bundan böyle $\{X\}$ kongrüansının izotrop olmadığını, yani $\{X\}$ in bir X doğrusundan geçen ve kongrüansa ait olan tüm regle yüzeylerin X doğrusunda aynı dağılma parametresine malik olmıyacaklarını farzediyoruz.

$$e : f : g \neq e_o : f_o : g_o$$

Diğer taraftan $\mu =$ st. ve $\nu =$ st. koordinat yüzeyleri kongrüansın asal yüzeyleri olsunlar. Bu halde (2,9) denklemi

$$(2,10) \qquad f = 0 \quad , \quad f_o = 0 \qquad (F = 0)$$

verir.

3.- Bu paragrafta, hesaplarımızda asal yüzeylerin düal yay uzunluklarını kullanacağız. Kongrüanslar teorisinde Mannheim ve Hamilton formülleri adı ile bilinen, iki formülü elde edeceğiz.

Bir $\{X\}$ kongrüansını gözönüne alalım. Koordinat yüzeylerinin asal yüzeyler olduğunu farzedelim. Kongrüansımız

$$\vec{X} = \vec{X}(\mu, \nu)$$

olsun. Hipoteze göre (2,10) ve (2,3) formüllerinden

$$(3,1) \qquad F = \vec{X}_\mu \cdot \vec{X}_\nu = 0$$

olacaktır. Kongrüansın her $[X]$ regle yüzeyi için ,

$$(3,2) \qquad d\vec{X} = \vec{X}_\mu \, d\mu + \vec{X}_\nu \, d\nu$$

dır. X den geçen iki asal yüzey $[X]_\mu$ ve $[X]_\nu$ olsun. Bu regle yüzeylerin düal yay elemanlarını sıra ile

$$(3,3) \qquad dU = du + \varepsilon du_o \qquad dV = dv + \varepsilon dv_o$$

ile gösterirsek, (2,3) ifadeleri gözönüne alınarak

$$(3,4) \qquad dU = \sqrt{E} \, d\mu \qquad dV = \sqrt{G} \, d\nu$$

dır.

$$(3,5) \qquad \vec{X}_1 = \frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}} \quad , \qquad \vec{X}_2 = \frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}}$$

koyarak, (3,2) bağıntısı

$$(3,6) \qquad d\vec{X} = \vec{X}_1 \, dU + \vec{X}_2 \, dV$$

yazılır. Önce şu hususlara işaret edelim. $\vec{X}_1$ ve $\vec{X}_2$ düal birim vektörlerdir. Sırayla $[X]_\mu$ ve $[X]_\nu$ asal yüzeylerinin merkez normallerini gösterirler. Bu yüzeyler (3,1) dolayısıyla X doğuranı üzerinde aynı x boğaz noktasına maliktirler. Bu x noktası X doğrusunun merkez noktası, başka deyimle, odak noktalarının orta noktasıdır. X , X_1 , X_2 doğruları ayni x merkez noktasında dik olarak kesişirler ve bu doğruların yönlerini ($\vec{X}$, $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$) bir doğru yönlü üçyüzlü olacak şekilde seçildiğini varsayıyoruz.

Burada bir de şu hususa işaret edelim. (3,3) ve (3,4) eşitlikleri gözönüne alınarak

$$(3,7) \qquad du = \sqrt{e}\, d\mu \qquad du_o = \frac{e_o}{2\sqrt{e}}\, d\mu$$

$$dv = \sqrt{g}\, d\nu \qquad dv_o = \frac{g_o}{2\sqrt{g}}\, d\nu$$

ve asal yüzeylerin dağılma parametreleri δ_1 ve δ_2 ile gösterilerek ve (1,4) e göre

$$(3,8) \qquad \delta_1 = \frac{du_o}{du} \quad , \quad \delta_2 = \frac{dv_o}{dv}$$

olacağından, (3,7) den

$$(3,9) \qquad \delta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{e_o}{e} \quad , \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\,\frac{g_o}{g}$$

elde edilir.

Şimdi $\{X\}$ kongrüansının bir X doğrusundan geçen ve doğuranları kongrüansa ait olan bir $[X]$ regle yüzeyi gözönüne alalım.

$$d\vec{X} = \vec{X}_\mu\, d\mu + \vec{X}_\nu\, d\nu$$

ve

$$\sqrt{d\vec{X}^2} = dS$$

koyarak ve $[X]$ in merkez normalinin düal birim vektörünü $\vec{Y}$ ile gösterirsek,

$$\vec{Y} = \frac{d\vec{X}}{dS} = \vec{X}_\mu \frac{d\mu}{dS} + \vec{X}_\nu \frac{d\nu}{dS}$$

yahut, (3,4) ve (3,5) ifadelerini gözönüne alarak,

(3,10) $$\vec{Y} = \vec{X}_1 \frac{dU}{dS} + \vec{X}_2 \frac{dV}{dS}$$

yazılır. Burada

(3,11) $$dS^2 = dU^2 + dV^2$$

dir. $[X]$ yüzeyinin Y merkez normali Xdoğrusunu bir y noktasında keser. y noktası $[X]$in X e ait boğaz noktasıdır. Y doğrusunun, asal yüzeylerden birinin merkez normali ile, örneğin X_1 ile yaptığı düal açıyı $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi_o$ ile gösterelim. Burada φ, Y ve X_1 doğrularının reel açısı, φ_o ise x merkez noktasının $[X]$ in y boğaz noktasına olan uzaklığıdır.

$$\varphi_o = xy$$

$\vec{Y}$ vektörü $(\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2)$ üçyüzlüsüne göre yazılırsa,

(3,12) $$\vec{Y} = \vec{X}_1 \operatorname{Cos}\phi + \vec{X}_2 \operatorname{Sin}\phi$$

yazılır. (3,10) bağıntısı gözönüne alınarak,

$$\frac{dU}{dS} = \operatorname{Cos}\phi \quad , \quad \frac{dV}{dS} = \operatorname{Sin}\phi$$

ve son olarak

$$\frac{dV}{dU} = \operatorname{Tg}\phi$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte reel ve düal kısmları ayıralım.

(3,13) $$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{dv}{du}$$

(3,14) $$\varphi_o = \frac{du\, dv_o - dv\, du_o}{du^2 + dv^2}$$

(3,11) bağıntısında da reel ve düal kısımları ayaralım.

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad , \quad ds\, ds_o = du\, du_o + dv\, dv_o$$

bulunur. (1,4) gözönüne alınarak, $[X]$ yüzeyinin δ parametresi için

$$\delta = \frac{du\, du_o + dv\, dv_o}{du^2 + dv^2}$$

ve (3,8) , (3,13) bağıntıları gözönüne alınarak, (3,15) $$\delta = \delta_1 \operatorname{Cos}^2\varphi + \delta_2 \operatorname{Sin}^2\varphi$$

bulunur. Mannheim formülü denilen bu formül, yüzeyler teorisindeki Euler formülünün benzeri olup, bir $\{X\}$ kongrüansının bir X doğrusundan geçen bir regle yüzeyin, bu X doğrusundaki dağılma parametrelerini verir.

Son olarak (3,14) ifadesinden (3,8) ve (3,15) eşitliklerini gözönüne alarak

(3,16) $$\varphi_0 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \operatorname{Sin} 2\varphi$$

elde edilir. Kongrüansın bir X doğrusundan geçen bir regle yüzeyin X deki boğaz noktasının, merkez noktasına uzaklığını veren bu bağıntı, Hamilton formülüdür.

(3,16) formülünde $2\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ olması halinde y boğaz noktası x merkez noktasından en uzak konumda bulunur. y nin bu konumlarını y_1 ve y_2 ile gösterelim. y_1 ve y_2 ye limit noktaları denir. Limit noktalarının x boğaz noktasına uzaklığı

$$d = \pm \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$$

dır. Kongrüansın X doğrusundan geçen ve doğuranları kongrüansa ait olan tüm regle yüzeylerin X doğuranına ait boğaz noktaları, y_1y_2 doğru parçası içinde olacaklardır..

(3,15) ve (3,16) formülleri arasında φ yok edilirse,

(3,17) $$\varphi_0 = \sqrt{-(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}$$

bulunur. X üzerindeki odak noktaları F_1 ve F_2 olsun. $xF_1 = xF_2 = 1$ koyarak, (3,17) de $\delta = 0$ yapılırsa,

$$1 = \sqrt{-\delta_1\delta_2}$$

bulunur.

4.- Şimdi invariant türevler kullanarak kongrüanslar için Frenet formüllerine formüller tesis edeceğiz. Şimdiye kadar olduğu gibi, burada da koordinat yüzeyleri olarak asal yüzeyleri alıyoruz. ($F = 0$)

Önce $\vec{X}(\mu,\nu)$ nün ikinci mertebeden türevlerini, $\vec{X}$, $\vec{X}_\mu$, $\vec{X}_\nu$ vektörlerinin lineer kombinezonu olarak ifade edelim.

(4,1)
$$\vec{X}_{\mu\mu} = \frac{E_\mu}{2E}\vec{X}_\mu - \frac{E_\nu}{2G}\vec{X}_\nu - E\vec{X}$$
$$\vec{X}_{\mu\nu} = \frac{E_\nu}{2E}\vec{X}_\mu + \frac{G_\mu}{2G}\vec{X}_\nu$$
$$\vec{X}_{\nu\nu} = -\frac{G_\mu}{2E}\vec{X}_\mu + \frac{G_\nu}{2G}\vec{X}_\nu - G\vec{X}$$

Diğer taraftan, asal yüzeylerin σ_1 ve σ_2 düal küresel eğrilikleri (1,6) ya göre

(4,2)
$$\sigma_1 = \frac{(\vec{X}, \vec{X}_\mu, \vec{X}_{\mu\mu})}{(\vec{X}_\mu^2)^{3/2}} \qquad \sigma_2 = \frac{(\vec{X}, \vec{X}_\nu, \vec{X}_{\nu\nu})}{(\vec{X}_\nu^2)^{3/2}}$$

yahut, (2,3) ve (4,1) formülleri gözönüne alınarak,

(4,3)
$$\sigma_1 = -\frac{E_\nu}{2E\sqrt{G}} \qquad \sigma_2 = \frac{G_\mu}{2G\sqrt{E}}$$

yazılır. Son olarak şu eşitlikleri yazalım.

(4,4)
$$\vec{X}_{11} = \frac{1}{\sqrt{E}}(\vec{X}_1)_\mu = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}}\right)_\mu$$
$$\vec{X}_{12} = \frac{1}{\sqrt{G}}(\vec{X}_1)_\nu = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}}\right)_\nu$$
$$\vec{X}_{21} = \frac{1}{\sqrt{E}}(\vec{X}_2)_\mu = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}}\right)_\mu$$
$$\vec{X}_{22} = \frac{1}{\sqrt{G}}(\vec{X}_2)_\nu = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}}\right)_\nu$$

(4,1) , (4,3) , (4,4) bağıntıları gözönüne alınarak,

(4,5)
$$\vec{X}_{11} = -\vec{X} + \sigma_1\vec{X}_2$$
$$\vec{X}_{12} = \sigma_2\vec{X}_2$$
$$\vec{X}_{21} = -\sigma_1\vec{X}_1$$
$$\vec{X}_{22} = -\vec{X} - \sigma_2\vec{X}_1$$

bulunur. Paragraf başında da söylediğimiz gibi, doğru kongrüansları için, eğriler teorisinin Frenet formüllerine benzer, bir formüller sistemi elde ettik. Bu formüllerden

(4,6) $\qquad \widetilde{G}_1 = (X , X_1 , X_{11}) \quad , \qquad \widetilde{G}_2 = (X , X_2 , X_{22})$

yazılır.

5. - Bu son paragrafta J. Liouville e ait olan yüzeyler teorisinin bir formülünü doğru kongrüanslarına genelleştireceğiz. Önce J. Liouville nin bu formülünün ifadesini verelim.

Bir $[X]$ yüzeyi gözönüne alalım ve bu yüzey üzerinde u = st. , v = st. koordinat eğrilerinin, bir dik şebeke oluşturduklarını farze - delim. $[X]$ yüzeyinin bir X noktasında koordinat eğrilerinin jeodezik eğrilikleri ρ_1 ve ρ_2 olsun. Diğer taraftan yüzeyin, x noktasından geçen ve u (v= st.) koordinat eğrisi ile φ açısı yapan bir (x) eğrisi gözönüne alalım. (x) in x noktasındaki jeodezik eğriliğini ρ_g ile gösterelim. J. Liouville

(4,7) $$\rho_g = \frac{d\varphi}{ds} + \rho_1 \mathrm{Cos}\,\varphi + \rho_2 \mathrm{Sin}\,\varphi$$

olduğunu göstermiştir.

Şimdi bi $\{X\}$ kongrüansını gözönüne alalım. μ = st. , ν = st. koordinat yüzeyleri asal yüzeyler olsun (F = 0) . Kongrüansın bir X doğrusundan geçen ve doğuranları $\{X\}$ e ait olan bir $[X]$ regle yüzeyi için 3 üncü paragrafta olduğu gibi, (3,12) formülü yazılır.

(4,8) $$\frac{d\vec{X}}{dS} = \vec{Y} = \vec{X}_1 \mathrm{Cos}\,\Phi + \vec{X}_2 \mathrm{Sin}\,\Phi$$

yazılır. (4,8) in S düal yay uzunluğuna göre türevini alalım. (3,4) , (4,4) ve

$$\frac{dU}{dS} = \mathrm{Cos}\,\Phi \quad , \qquad \frac{dV}{dS} = \mathrm{Sin}\,\Phi$$

ifadeleri gözönüne alınarak ,

$$(4,9) \qquad \frac{d^2\vec{X}}{dS^2} = \vec{X}_{11} \operatorname{Cos}^2\phi + (\vec{X}_{12} + \vec{X}_{21}) \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi + \vec{X}_{22} \operatorname{Sin}^2\phi +$$

$$(-\vec{X}_1 \operatorname{Sin}\phi + \vec{X}_2 \operatorname{Cos}\phi) \frac{d\phi}{dS}$$

bulunur. Son olarak (1,6) , (4,6) , (4,8) ve (4,9) bağıntılarından,

$$\sigma = \frac{d\phi}{dS} + \sigma_1 \operatorname{Cos}\phi + \sigma_2 \operatorname{Sin}\phi$$

elde edilir. Bu formül, (4,7) formülünün doğru kongrüanslarındaki benzeridir.

Kaynaklar:

1) W. Blaschke : Diferensiyel Geometri Dersleri. 1 Cilt. (K. Erim)

2) L. Biran : İ.Ü. Fen Fakültesi mecmuası. Seri A. Cilt XVlll Sayı 1.

3) L. Biran : Sur quelques formules relatives aux congruences de droites. Avusturya matematikçiler kongresi Viyana.

4) K. Erim. : İ.Ü. Fen Fakültesi mecmuası. Seri A. Cilt X. Sayı 1 - 4 .