KURT GÖDEL'İN EKSİKLİK TEOREMLERİ VE PLATONCULUĞU ÜZERİNE FELSEFİ BİR İNCELEME

Pamukkale Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Felsefe Anabilim Dalı
Sistematik Felsefe ve Mantık Bilim Dalı

Ali Bilge ÖZTÜRK

Danışman: Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet ÖZTÜRK

Haziran 2011
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Felsefe Anabilim Dalı, Sistematik Felsefe ve Mantık Bilim Dalı öğrencisi Ali Bilge Öztürk tarafından Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet Öztürk yönetiminde hazırlanan **" Kurt Gödel'in Eksiklik Teoremleri ve Platonculuğu Üzerine Felsefi Bir İnceleme"** başlıklı tez aşağıdaki jüri üyeleri tarafından 27. 06. 2011 tarihinde yapılan tez savunma sınavında başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet ELGİN

Jüri Başkanı

Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet ÖZTÜRK

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Sarı

Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/08/2011 tarih ve ..12/15.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Bilal SÖĞÜT
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırılmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

Öğrenci Adı Soyadı : Ali Bilge ÖZTÜRK
İmza :

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde çalışmanın konusuna ilişkin hiç bir epistemolojik konuda yardımını esirgemeyen ve ihtiyaç duyduğum akademik destek ve ilgiyi sağlayarak bu çalışmanın oluşmasını sağlayan değerli hocam Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmanın genel yapısını oluşturmama fikirleriyle yardım eden Prof. Dr. Mehmet AKGÜN başta olmak üzere yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım bütün hocalarıma teşekkür ederim.

Bu çalışmanın bir de görünmeyen emektarları vardır. Beni Gödel konusu ile tanıştıran ve aradığım bilgiye nasıl ulaşacağımı öğreten, küçüklüğümü kitaplığında uyuyarak geçirdiğim babam Prof. Dr. Nurettin ÖZTÜRK'e teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmayı hazırlamam için gerekli çalışma ortamını sağlayan, dil ve üslup konularında yardımda bulunan annem Öğr. Gör. Elif Emine ÖZER'e teşekkür ederim. Son olarak yabancı dilden yaptığım çevirileri denetleyen İngilizce öğretmeni Dilek KARABOĞA'ya teşekkür ederim.

ÖZET

KURT GÖDEL'İN EKSİKLİK TEOREMLERİ VE PLATONCULUĞU ÜZERİNE FELSEFİ BİR İNCELEME

Öztürk, Ali Bilge
Yüksek Lisans Tezi, Felsefe ABD
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet ÖZTÜRK
Mayıs 2011, 125 Sayfa

Bu çalışmada Kurt Gödel'in eksiklik teoremleri, bu teoremlerin ortaya çıkmasını sağlayan önemli olaylarla ve bu olayların felsefi arka planıyla birlikte incelenmiştir. Ayrıca Gödel'in Platonculuğu ve onun XX. yüzyılın başındaki matematiğin temelleri tartışmaları hakkındaki görüşleri de incelenmiştir. Bu inceleme şu sorular etrafında yapılmıştır:

1. **Gödel'in eksiklik teoremleri matematiksel bilginin kesinliği açısından neyi ifade eder?**
2. **Gödel'in eksiklik teoremleri ve onun matematik felsefesine ilişkin Platoncu görüşleri akılcı felsefe açısından neyi ifade eder?**

Çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde Gödel'in eksiklik teoremlerinin ortaya çıkmasını sağlayan süreç incelenmiştir. İkinci bölümde ise Gödel'in eksiklik teoremleri, Platonculuğu ve matematiğin temellerine ilişkin görüşleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ele alınan sorular cevaplanmaya çalışılmıştır. İncelemenin sonunda şu sonuçlara ulaşılmıştır:

1. **Eksiklik teoremleri matematiğin mutlak kesinliğe sahip bir bilim olmadığını gösterir. Belirli bir matematiksel teorinin hiçbir zaman yanlış bir matematiksel önermeyi kanıtlamayacağı önceden görülemez. Şu halde belirli bir matematik teorisinin başarısı ancak tümevarımsal olarak görülebilir.**
2. **Ne eksiklik teoremlerinin sonuçları ne de Gödel'in Platonculuğu, akılcı felsefe için olumsuz sonuçlardır.**

Anahtar Sözcükler: Gödel, Hilbert, eksiklik, tutarlılık.

ABSTRACT

A PHILOSOPHICAL STUDY ON KURT GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREMS AND HIS PLATONISM

Öztürk, Ali Bilge
M. Sc. Thesis in Philosophy
Thesis Advisor: Doç. Dr. Fatih Sultan Mehmet ÖZTÜRK
May 2011, 125 Pages

In this work, Kurt Gödel's incompleteness theorems were studied with the important events leading these theorems and the philosophical background of these events. Also, Gödel's views about the debates of the foundations of mathematics that were occurred in the beginning of 20th century and his Platonism were studied, too. This study was made around these questions:

1. **What do Gödel's incompleteness theorems mean within the frame of the certainty of mathematical knowledge?**
2. **What do Gödel's incompleteness theorems and his Platonist views mean within the frame of the rationalist philosophy?**

The work consists of three parts. In the first part, the process leading Gödel's incompleteness theorems was studied. In the second part, Gödel's incompleteness theorems, his Platonism and his views on the foundations of mathematics were studied. In the third part, the questions that were concerned were tried to be answered. At the end of the study, these conclusions were made:

1. **Incompleteness theorems imply that mathematics is not a science which has absolute certainty. It may not be precedingly noticed that a certain mathematical theory will never prove a false mathematical proposition. So, the success of a certain mathematical theory may only be seen inductively.**
2. **Neither the results of incompleteness theorems nor Gödel's Platonism are negative results for the rationalist philosophy.**

Key Words: Gödel, Hilbert, incompleteness, consistency.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

GİRİŞ

Kurt Schilling, düşünce tarihinde toplum olarak yaşamaya ilişkin ortaya konulmuş felsefi ve sosyolojik görüşlerin bir özetini sunduğu yapıtının başında ilginç bir soruyu ele alır. Tarih öncesi devirlerde insanların mağara duvarlarına yabanıl hayvanların resimlerini çizmekteki amaçları nedir? Schilling'e göre bunun cevabı, bu yabanıl hayvanlara olan korkularını yenmek içindir. Yabanıl hayvan duvarda bir defa resim olarak biçimselleşince, artık korkulacak bir şey olmaktan çıkar.[1]

Kolayca fark edilebileceği gibi bu yorum psikoanalitiktir. Psikoanalizde rahatsızlığı olan kişinin gerekirse çocukluğuna kadar inilir ve mümkünse kendi sorununu kendisinin keşfetmesi sağlanır. Rahatsızlığı olan kişi bir defa kendi sorununu kendisi fark edince rahatlar. Artık bu sıkıntı ne olduğu belirsiz büyük bir sorun değil, ne olduğu görülebilen belli bir sıkıntıdır ve artık bunu aşmanın yolları aranabilir. Schilling'in yorumu akla uygun görünüyor. Bu yabanıl hayvanlar da bir defa biçimselleşince artık ne olduğu belirsiz canavarlar olmaktan çıkar ve bu durum insanları rahatlatır.

Fakat bu tür olgular farklı biçimlerde de yorumlanabilir. Belki de bu insanlar bu hayvanları avlamak için stratejiler geliştirme amacıyla resimlerini mağara duvarlarına çizmiştir. Böylece bu hayvanlara nasıl saldıracaklarını daha rahat görebilirler: Hayvanın dişleriyle karşılaşma olasılıkları azalır. Bu durum bir komutanın savaş stratejisini savaş alanının bir haritası üzerinde tasarlamasına benzetilebilir.

Daha iyi stratejiler geliştirebilmek için nesnenin daha iyi ve gerçeğine daha yakın çizimlerin yapılması gerekir. Çizim nesne hakkında ne kadar eksiksiz bilgi verirse o kadar iyi stratejiler geliştirilebilir. Bu durumda elbette çizim ile nesne arasında uygunluk sorunu çıkar: Bu hayvanlar üç boyutlu cisimlerdir, fakat çizimin yapıldığı yer mağara duvarlarında zar zor bulunmuş bir düzlemdir; dünya eliptik biçimlidir fakat belli bir bölümünü resmeden harita bir düzlem üzerine çizilmiştir. Şu halde çizilen nesneyle ilgili bir doğru olan fakat nesnenin çiziminden doğrudan çıkmayan bilgiler bulunabilir.

[1] Kurt Schilling (1971), *Toplumsal Düşünce Tarihi,* Varlık Yayınevi, İstanbul, s. 19.

Bir komutanın savaş alanında, elindeki haritada olmayan ve planlarını bozan bir şeyle karşılaşması kendisi açısından hiç istendik bir şey olmaz.

Aslında günümüzde pek çok sorun aşılmış görünüyor. Uydular dünya hakkında çok başarılı fotoğraflar sunabilmekte ve bu fotoğraflar bilgisayarlarda matematiksel modelleme işlemleriyle gerçeğine çok yakın biçimde birleştirilebilmektedir. Başka ilginç bir nokta ise, günümüz biyologlarının tarih öncesi devirlere ait bulduğu yabanıl hayvan fosillerin çeneleri üzerinde aritmetiksel işlemler yaparak, bu fosilin ait olduğu hayvanın dişlerinin kaç yüz kilo ya da kaç ton basınç uygulayabileceğini kestirebilmesidir. Peki, bütün bunların Gödel ve onun eksiklik teoremleri ile ilişkisi nedir?

On dokuzuncu yüzyılın sonlarında ve yirminci yüzyılın başındaki matematikçiler, tıpkı avlamaya çalıştıkları hayvanları duvara çizen insanlara benzetilebilir. Fakat onların avlamak için resmini çizmeye çalıştıkları şey, somut dünyanın bir cismi değil matematiksel nesneler dünyasının gözümüzle doğrudan görmediğimiz öğeleridir. Ayrıca çizimlerini sağlayan şey kan veya farklı bitkilerden elde edilen renkli sular değil, bu amaç için geliştirdikleri model teorileri, indirgeme teorileri, algoritmalar, aksiyomatizasyonlar, biçimsel sistemler, matematiksel mantık vb. gibi araçlardır.

Matematikçilerin bu çizimlerinin farklı amaçları bulunmaktadır. Bütün matematiğin mantığa indirgenebileceğini göstermek, çözülmemiş matematik sorusu bırakmamak, bütün doğru matematiksel hipotezlerin kanıtlanabileceğini göstermek gibi amaçlar bunlardan bazılardır. Bütün bu amaçların ortak yönü matematiğin daha fazla kesinliğe ulaşmasıdır. Fakat matematik gibi geniş bir alana ilişkin bu çizim denemeleri, bu çizimlerin iç tutarlılığa sahip olup olmadığı tartışmalarının gölgesinde geçmektedir. Bu tartışmaların fitilini özellikle, doğal sayıların sonsuzluğundan da büyük sayıların olduğunu ortaya koyan Georg Cantor'un kümeler teorisinde Bertrand Russell tarafından bulunan paradokslar ateşlemiştir. Ayrıca bu olay matematiğin temelinde çelişkiler olup olmadığı tartışmalarını beraberinde getirmiştir.

Bunlar anmış olduğumuz dönemin matematik dünyasının görünen yönleridir. Fakat arka planda farklı matematikçilerin matematiğin temellerine ilişkin ontolojik ve epistemolojik görüşleri de çarpışmaktadır. Matematiksel nesneler saf mantıksal düşünme ilkelerimizden çıkan öğeler midir? Matematiksel nesneler fiziksel dünyaya ait nesnelerin niceliksel özelliklerinin soyutlaması mıdır? Matematiksel bilgi *a priori* mi *a posteriori* midir? Bu türden matematik felsefesine ilişkin sorunlar yeniden tartışılmaya açılmıştır. Kant'ın aritmetik bilgisinin *a priori sentetik* olduğu iddiası bu tartışmaların merkezini oluşturmuştur ve bu iddia matematiksel bilginin analitik olduğunu düşünen matematikçiler tarafından kabul görmemiştir.

Bu dönemde matematiğin temelleri, yani matematiği matematik yapan aksiyomlar ve kanıtlama yöntemleri her yönden tamamen tartışılmaya açılmıştır. Matematikte daha fazla kesinlik için atılan adımlarda şu iki kavram pek çok kavrama göre öne çıkmıştır: *Eksiksizlik* ve *tutarlılık*. Eksiksizlik (tamlık) sözcüğü matematikçinin matematiksel nesneler dünyasının resmini tam olarak çizmesini ifade eder. Daha özelde çözülmemiş matematiksel sorunun kalmaması anlamına gelir. Tutarlılık sorunu ise matematiksel soruların çözümünü sağlayan ve matematiğin ilkelerini oluşturan aksiyom ve kanıtlama yöntemlerinin çelişkili matematiksel hipotezleri aynı anda teorem yapıp yapmadığı hakkındadır. Bütün bu analitiklik, *a priori*, *a posteri*, *a priori sentetik*, eksiksizlik, tutarlılık, hipotez, teorem, doğruluk, kesinlik, çelişki, aksiyom, aksiyomatikleştirme, biçimselleştirme, biçimsel sistemler, aksiyomatik yöntem vb. gibi kavramların anlamlarına bu çalışmada geniş biçimde yer verilecektir. Fakat şimdilik sadece şunları belirteceğiz.

Anmış olduğumuz dönemde kümeler teorisinde çelişkilerin bulunması ve bu dönemde bulunan ama çalışmamızda konu etmediğimiz bazı başka çelişkilerin ortaya çıkması, matematiğin çelişkilere açık bir bilim olup olmadığı tartışmalarını beraberinde getirmiştir. Bu tartışmaları, anılan çelişkileri matematikten kovmak ve matematiğin temellerinin güvenilirliğini sağlama amacındaki iki büyük proje takip etmiştir. Bunlardan biri, kendi bulduğu çelişkileri kümeler teorisinden kovma ve matematiğin mantığa indirgenebileceğini gösterme amacını taşıyan Russell'ın *Principia Mathematica* projesidir. Diğeri ise, bulunan çelişkilerin temelini matematiksel kavramların bir anlama veya semantik içeriğe sahip olmasında gören, matematikte anlamı dışlamanın çelişkileri yok edeceğini varsayan büyük matematikçi David Hilbert'in, bütün matematiksel doğruların eksiksiz ve tutarlı bir biçimsel sistem yardımıyla ele geçirilebileceğini göstermek ve böylece matematiğin temellerine ilişkin bu tartışmaları “bir defada ve tamamen” sonlandırmak amacıyla ortaya koyduğu Hilbert Programı’dır.

Fakat 1931 yılında 25 yaşında genç bir matematikçi-mantıkçı olan Kurt Gödel “Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I” isimli küçük fakat çok yüksek tekniklikteki makalesiyle iki projenin de akıbetini belirler: Başarısızlık. Gödel’in bu makalede kanıtladığı teoremler şunlardır:

1. Bütün aritmetiksel doğruları ele geçirmek amacıyla ortaya konulmuş mevcut en geniş iki biçimsel sistemde (*Principia Mathematica* ve ZFC sistemleri) eğer bu sistemler iç tutarlılığa sahipse, bu sistemlerin aksiyomları ve çıkarım kuralları yardımıyla doğruluğuna veya yanlışlığına karar verilemeyen aritmetiksel önermeler vardır.
2. Bu sistemler kendi tutarlılıklarını kanıtlayamaz.

Fakat Gödel’in eksiklik teoremlerinden bahsedildiğinde akla gelen önermeler bunlar değildir. Bugün eksiklik teoremlerinden bahsedildiğinde yukarıdaki iki önermenin genişletilmiş hali olan şu iki önerme akla gelmektedir:

1. Doğal sayıların yapısını ve bu sayılar arasında toplama ve çarpma işlemiyle gösterilebilecek bütün bağıntıları karakterize edebilecek kadar güçlü her biçimsel sistemde kararlaştırılamayan önermeler vardır.
2. Bu özellikleri gösteren hiçbir biçimsel sistem kendi tutarlılığını kanıtlayamaz.

Fark edilebileceği gibi bu iki önerme yukarıdaki iki önermenin aritmetiği kapsayan bütün biçimsel sistemler için genişletilmiş halidir. Bu genişletilebilirliği görmek ise Gödel’in de kabul ettiği gibi Alan Turing’in analizleri ve onun Gödel’in kanıtlamasından esinlenerek yaptığı kağıt üzerinde bir bilgisayar olan Turing Makinesi sonrasında mümkün olmuştur.[2] *Hesap edilebilirlik* (computability) kavramının modern anlamını veren bu makine aslında bütün modern elektronik bilgisayarların, daha da özelde işlemcilerin (processor) “ide”sidir. Gödel’in bu ideye esin kaynağı olan çalışmaları üzerinden bilgisayarların tarihine yaptığı katkının büyüklüğü tartışılmaz.

---

[2] Solomon Feferman, “*Gödel, Nagel, Zihinler ve Makineler*” makalesinde, *Gödel Kanıtlaması* yapıtının yazıldığı sıralarda Gödel’den Nagel’e yazılmış ama gönderilmemiş bir mektuptan bahsetmektedir. Bu mektupta Gödel, Nagel’e şu uyarıda bulunmuştur: “1934’ten bu yana … dikkate değer çalışmalar yapılmıştır … kanıtlamamın, aritmetiği kapsayan bütün biçimsel sistemlere uygulanabilir olduğu ancak Turing’in çalışması ile tamamen açıklığa kavuşmuştur. Okuyucunun, meselenin mevcut durumu hakkında bilgilendirilmeye hakkı olduğunu düşünüyorum.” http://math.stanford.edu/~feferman/papers/godelnagel.pdf (erişim tarihi 22 Şubat 2011)

Fakat Turing Makinesi konusu bu çalışmada ele alınamayacak kadar geniş bir konudur. Bu noktada sadece Gödel'in eksiklik teoremlerinden bahsedince genelleştirilmiş olan son iki önermenin anlaşılması gerektiğini belirteceğiz.

Gödel'in makalesinin yüksek ölçüde tekniklik içerdiğini belirtmiştik. Açıkçası bu makale konunun uzmanları tarafından da hemen anlaşılmamış ve dönemin mantıkçı-matematikçileri tarafından aylarca incelemeye tutulmuştur. Teoremlerin, farklı alanlarda ne çeşit sonuçlara yol açtığı görülebilecek kadar açık hale gelmesi çok daha uzun bir süre almıştır. Örneğin Robert Nozick bu kanıtlamayı ve teoremleri, XX. yüzyılın büyük keşiflerinden olduğu halde yüksek ölçüde tekniklik içerdiği için iyi eğitilmiş nüfusa yeterince ulaşamamış sekiz büyük keşiften biri olarak değerlendirir.[3]

Fakat teoremler matematiğin dışında da entelektüel ilgi bulacak kadar açık hale geldiğinde bir anlamda patlama etkisi yapmıştır. Gödel'in teoremleri, matematikte doğruluk-kanıt ilişkileri konusu, mantıkta semantik doğruluğun sentaktik doğruluğa indirgenip indirgenemeyeceği konusu, bilişsel bilimlerde insan gibi düşünen yapay zekaların üretilip üretilemeyeceği konusu, felsefede insan aklının gücü konusu gibi pek çok konuda merkezi sonuçlara yol açmaktadır. Belki de hiçbir matematikçinin keşifleri, matematik dünyasının dışında bu kadar ilgi bulmamıştır.

Ülkemizde ise Kurt Gödel'e olan ilgi özellikle 2000'li yılların başından bu yana artmıştır. Bu hızlı ilgi artışının nedeni öyle görünüyor ki, *Time Dergisi* tarafından yapılan ve geçtiğimiz yüzyılın en büyük şahsiyetlerinin seçildiği ünlü ankette en büyük matematikçi olarak Gödel'in seçilmesidir. O tarihten günümüze Gödel'e ilişkin pek çok kitap Türkçe'ye kazandırılmıştır.[4] Bunlardan ilk ikisi Gödel'in eksiklik teoremlerinin kendisinden çok sonuçlarının gösterildiği ve tartışıldığı yapıtlardır. Özellikle Hofstadter'in yapıtı çok özgün ve okuyucusuna ilham veren bir yapıttır. Yayım sırasına göre üçüncü yapıt, Gödel'in kozmolojisinin ve zamanda yolculuğun olanağı ile ilgili

---

[3] Robert Nozick (1993), *The Nature of Rationality*, Princeton University Press, Princeton/New Jersey, ss. XIV-XVI.

[4] Douglas R. Hofstadter (2001), *Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik, Lewis Carrol'un İzinde Zihinlere ve Makinelere Dair Metaforik Bir Füg*, çev. Ergün Akça, Hamide Koyukan, 1. Baskı, Kabalcı Yayınevi, İstanbul; Gpalle Yourgrau (2003) *Gödel Einstein Buluşması – Gödel'in Evreninde Zamana Yolculuk,* çev. B. Akalın ve B. Şipal, Güncel Yayıncılık, İstanbul; John L. Casti ve Werner Depauli (2004), *Gödel*: *Mantığa Adanmış Bir Yaşam,* (çev. Ergün Akça), 1. Baskı, Kabalcı Yayınevi, İstanbul; Ernest Nagel ve James R. Newman, (2008), *Gödel Kanıtlaması,* çev. Bülent Gözkan, 2. Baskı, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul; Kurt Gödel (1931), *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I* çev. Özge Ekin, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2010, İstanbul.

görüşlerinin anlatıldığı yapıttır. Son yıllarda çevrilen iki yapıttan birincisi Nagel ve Newman'ın, Gödel'in kanıtlamasının anlaşılmasında ünlü bilim adamlarına dahi rehberlik eden önemli yapıtı, ikincisi ise Gödel'in eksiklik teoremlerini ortaya koyduğu ünlü yapıtının kendisidir. Bunlar Türk bilimine yapılmış çok önemli katkılardır.

Diğer taraftan Gödel'i anlamak, Gödel öncesini, yani eksiklik teoremlerine giden süreci de anlamak demektir. Fakat Gödel öncesi hakkında Türkçe olarak bulunabilecek ciddi bir çalışma, Nagel ve Newman'ın rehber niteliğindeki yapıtının çevirisi dışında, ortaya koyulmamıştır. Örneğin Gödel'in, Hilbert Programı'nın özgün amaçlarıyla başarıya ulaşamayacağını gösterdiği bilinmektedir. Fakat Türkçe'de Hilbert Programı'nın ne olduğu hakkında açıklayıcı örnekler yeterince bulunmamaktadır.

Aslında Hilbert Programı'nın temelde ne olduğu ile ilgili bilim dünyasında da ortak bir kabul yoktur. Ortada David Hilbert'in zihninde yirmi yıl kadar bir zaman içinde olgunlaşmış, beş yıl emekleme dönemi yaşamış, sonraki beş yılda ise ciddi adımlarla hayata geçirilmeye çalışılmış bir proje söz konusudur. Bu durum anılan programın sadece çok az bir bölümünün görülmesini sağlamaktadır.

Diğer taraftan eksiklik teoremleri ile Hilbert Programı arasındaki ilişkiler çok geniştir. Bu genişliği görmek için bu dönemde yapılan felsefi tartışmaları da anlamak gerekir. Örneğin bu ilişkilerin bir bölümü anlam sorununa, bir bölümü matematiksel nesnelerin varlığı konusu türünden ontolojik sorunlara, başka bir bölümü ise deneycilik-akılcılık karşıtlığı gibi epistemolojik sorunlara dayanır.

Bu çalışmada her şeyden önce Gödel'in eksiklik teoremleri, bu teoremlerin ortaya çıkışına giden süreçteki bazı önemli olaylarla ve ayrıca bu olayların felsefi arka planıyla birlikte açıklanmaya çalışılmaktadır. Ayrıca Gödel'in Platoncu felsefi görüşleri ve onun XX. yüzyılın başındaki *matematiğin temelleri* tartışmalarına bakışı incelenmektedir. Bu inceleme şu sorular etrafında yapılmıştır:

1. Gödel'in eksiklik teoremleri matematiksel bilginin kesinliği açısından neyi ifade eder?
2. Gödel'in eksiklik teoremleri ve onun matematik felsefesine ilişkin Platoncu görüşleri akılcı felsefe açısından neyi ifade eder?

Bu sorulara yanıt aradığımız çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır: Birinci bölüm olan "Gödel Öncesi" bölümü, Gödel'in eksiklik teoremlerine giden süreci konu etmektedir. Bu bölüm matematiksel kanıtlama sürecinin nasıl bir şey olduğu ile ilgili küçük ve basit bir tartışma ile başlamaktadır. Bu tartışma ile aksiyomların matematiksel kanıtlama açısından önemi ortaya koyulmaya çalışılacaktır. Ardından aksiyomatik yöntemin, bu yöntemin kurucusu olan Öklid'in geometrisinden, David Hilbert'in programına kadar geçirdiği süreç, eksiklik teoremleri ile bağıntılı olduğu kadarıyla açıklanmaya çalışılacaktır.

İkinci bölüm olan "Gödel, Eksiklik Teoremleri ve Platonculuk" bölümü, Gödel'in kendisinin, eksiklik teoremlerinin ve matematiksel Platonculuğunun incelendiği bölümdür. Bu bölümde aynı zamanda eksiklik teoremlerinin sonuçları konusunda Gödel'in kendi değerlendirmelerini ve matematiğin temellerine ilişkin görüşlerini açıklamaya çalışacağız.

Üçüncü bölüm olan "Yorumlar" bölümü ise belirtmiş olduğumuz temel iki sorunun cevabını vermeye çalıştığımız bölümdür. Çalışmamızın ayrıca, matematik felsefesine ilişkin bazı özel konuların anlaşılmasına da katkıda bulunacağını umuyoruz.

1. GÖDEL ÖNCESİ

Kurt Gödel, ünlü teoremlerini ortaya koyduğu makalesine, matematikte daha fazla kesinlik sağlama amacıyla geniş alanlarının biçimselleştirildiği gözlemini belirterek başlar. Ardından bu biçimselleştirme amacıyla iki büyük biçimsel sistemin ortaya koyulduğunu, öyle ki matematikte bilinen neredeyse bütün kanıtlama yöntemlerinin bu biçimsel sistemler içinde biçimselleştirildiğini, yani birkaç aksiyom ve çıkarım kuralına indirgendiğini belirtir. Böylece Gödel makalesinin arka planına işaret etmektedir. Bu arka plan, XIX yüzyıl sonlarında başlayıp XX. yüzyıl başlarında devam eden ve matematik dünyasında pek çok önemli olayın meydana geldiği dönemdir.

Gödel'in bu sözlerinde pek çok anahtar sözcük vardır. Bunlar kesinlik, kanıtlama, aksiyom ve çıkarım kuralları, biçimselleştirme, biçimsel sistemler, kanıtlama yöntemleri gibi kavramlardır.

Bu tür kavramların çoğu sadece anmış olduğumuz dönemin kavramları olsa da, kökleri çok eskiye Öklid'in geometrisine dayanmaktadır. Örneğin biçimselleştirme, matematiksel sorulara *aksiyomatik biçimsel sistemler* üzerinden yaklaşmak ve matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine bu türden sistemler üzerinden karar vermeye çalışmak demektir. Bu sistemlerin temelinde yatan *aksiyomatik yöntemi* bulan kişi ise Öklid'dir ve Öklid geometrisi, aksiyomatik yöntemin uygulandığı ilk örnektir. Birinci bölümde Öklid geometrisine geniş bir yer verilecektir. Bu hem aksiyomatik yöntemi hem de aksiyomatik sistemlerle ilgili bazı özel konuları anlamak için önemlidir. Bu özel konular, Gödel'in makalesinde de temel kavramlar olan eksiksizlik ve tutarlılık konularıdır.

Bunun yanında biçimselleştirmenin ne olduğu, aksiyomatik sistemlerden aksiyomatik biçimsel sistemlere geçiş süreci, bu geçişin nedenleri ve ayrıca bu sürecin arkasındaki felsefi düşünceler de bu bölümün konularını oluşturmaktadır. Ayrıca matematikçiler neden "daha fazla kesinlik" aramaktadır sorusunun cevabı da bu bölümde verilmeye çalışılacaktır. Özetle birinci bölümün konusu, Gödel'in aktarmış olduğumuz bu ifadelerinin anlamıdır. Fakat öncelikle matematiksel nesnelerin varlığı sorunu ve matematiksel kanıtlama konusuna odaklanacağız.

1.1 Matematiksel Nesnelerin Varlığı

Matematiksel nesneler çok farklı türlerde olabilir. Bunlar “1” gibi bir sayı veya nokta ve doğru gibi bir geometrik nesne veya kümeler olabilir. Peki, bu matematiksel nesnelerin kaynağı nedir? Yani matematiksel nesneler hakkında konuşurken aslında nasıl bir şey hakkında konuşmaktayız? Örneğin Platoncuların düşündüğü gibi matematiksel kavramlar zihnimizden bağımsız nesnel birer varlığa mı işaret eder? Yine örneğin matematiksel nesneler mantıkçı geleneğin iddia ettiği gibi saf mantıksal düşünme ilkelerimizden mi çıkar? Ayrıca biçimselci gelenekten gelen matematikçilerin iddia ettiği gibi matematiksel nesnelerin kağıt üzerindeki simgeler olmaktan başka bir anlamı yok mudur?

En azından şu açık ki örneğin aritmetiksel nesneler fiziksel dış dünyada nesnel bir varlık olarak bulunmaz. Yoksa onları duyu algılarımızla gözlemleyebilirdik. 1 sayısının çarpma işleminde etkisiz öğe olduğu bilgisine doğada kendi başına bulunan 1’i gözlemleyerek ulaşırdık.

Peki, geometrinin nesneleri? Nokta, doğru çizgi, düzlem gibi nesneler fiziksel dünyada nesnel birer varlık olarak bulunur ve biz onlar üzerine bilgimizi gözlemden mi çıkarırız? Eğer bu görüşü kabul edersek, geometrik nesneler, örneğin noktalar ve doğrular üzerine bir şey iddia ettiğimizde de bu iddiamızın temelde evrende bulunan noktalar ve doğrular üzerine olması gerekirdi. Aslında geometrinin kurucusu Öklid tam da bunu yapmıştı. Onun geometrisi fiziksel evrende bulunan nesneler üzerine söz söylüyordu. Bu yüzden Öklid geometrisinde doğru olan şeyin evrende de doğru olduğu düşünülüyordu. Fakat Öklid’in geometri sisteminin XIX. yüzyıldaki ani gerilemesine neden olan eksikliği de bu olmuştu. Sonraki bölümde bu konuyu geniş biçimde inceleyeceğiz.

Matematiksel nesnelerin aslında uzaydaki cisimlerin niceliksel ve biçimsel özelliklerinin bir soyutlaması olduğunu da düşünebiliriz. Örneğin 7 sayısı, bir sepetteki bir kaç elmanın niceliksel özelliğinin bir soyutlaması olabilir. Fakat şu halde 3141592 sayısının nasıl bir soyutlamanın ürünü olduğu sorgulanabilir. Bu sayının bir soyutlama sonucu ortaya çıktığını düşünmek, örneğin bu sayının bir ovadaki çimlerin niceliksel özelliğinden soyutlanarak ortaya çıktığını iddia etmek gibidir. Öyle görünüyor ki her sayıya soyutlama ile ulaşmıyoruz.

Diğer taraftan bir ovadaki çimleri tek tek sayabiliriz: 1, 2, 3, … Fakat bu sayı saymayı belirli bir dizi halinde yapmamızı sağlayan şey nedir? Öyle görünüyor ki sayılara ilişkin bir ardışıklık ve süreklilik anlayışımız var. Yani sayıları tek sıra haline dizilmiş öğeler olarak anlarız. Her saydığımız sayıdan sonra bir sayının daha gelebileceğini düşünebiliriz ve 3141592 sayısına da bu şekilde ulaşabiliriz. Bu durum, sayıları yeni öğrenen bir çocuğun "7+5" gibi aritmetiksel hesapları yaparken parmaklarını tek tek saymasına benzer.

Fakat XIX. yüzyılda yeni bir sayı türü bulundu ve öyle görünüyor ki bu sayılar ne zamanın sezgisinden, ne de fiziksel dünyanın soyut nesnelerinden bir soyutlamayla çıkıyor. Bu sayılar $\aleph_1$, $\aleph_2$ gibi sayılardır ve büyüklükte doğal sayılar kümesinin öğe sayısının büyüklüğünü aşarlar. Normalde sayılar sayı saymaya yarar. Bu sayılara ise sonsuza dek parmak hesabı yapılarak ulaşılmaz. Bu sayıların işaret ettiği niceliğe doğal sayılar kümesinin sayıları da yetişemez. Evrendeki galaksiler, insanlar, hücreler, bitki ve hayvanlar, canlı ve cansız varlıklar vb. ne kadar cisim varsa sayıldığında bu sayılara ulaşılmaz. Bu sayıların fiziksel dünyayla hiçbir ilişkisinin olmaması bu olgudan çıkar: Bu sayılar sonsuzluğu aşan sonsuzluklardır. Gerçek şu ki bu tür sayılar matematikçiler arasında da hızla kabul görmemiş ve çok büyük tartışmalara yol açmıştır. Örneğin matematikçi Leopold Kronecker bu sayıların matematiğin konuları arasına girmesini reddederken şu sözleri sarf etmiştir: *"Bütün (doğal) sayıları Tanrı yaratmıştır – kalanı insanın işidir"*[5] Fakat artık onlar matematiksel araştırmaların konusudur ve Cantor'un kümeler teorisini ve Gödel'in Platonculuğunu incelediğimiz bölümlerde ele alacağız.

Bütün bunları belirtmenin gereği nedir? Öncelikle bu çalışmada ele alınan bazı felsefi konulara bir başlangıç olarak bunları belirttik. Fakat daha önemlisi ilginç ve üzerinde durulması gereken bir konudur. Belki de en bilindik matematiksel nesneler, sayılardır. Fakat XIX. yüzyıla kadar ilginç bir biçimde bu kavramın bile ne anlama geldiği ve neye işaret ettiği tanımlanmamıştır. Yani bu döneme kadar çağlar boyunca, matematikçiler üzerinde konuştukları nesnelerin ne olduğunu belirtmeden matematik

[5] Tucker McElroy (2005), "Kronecker, Leopold", *A to Z of Mathematicans*, 1. Baskı, Facts on File Inc. New York s. 155.

yapmıştır. Matematikçi-mantıkçı Gottlob Frege, bu durumu "utanç verici" olarak değerlendirir.[6]

Gerçek şu ki sayılar üzerinde yapılan işlemlerin bir tanımını verebilmek için bile sayıların bir tanımı verilmelidir ya da karakterize edilmelidir. Sonraki bölümde bunu göreceğiz. Fakat öyle görünüyor ki matematikçiler buna ihtiyaç duymamıştı. Çünkü sayılar ve işlemler tanımlanmasına gerek bile duyulmayan sezgiye apaçık kavramlardı. Fakat XIX. yüzyılda sezginin güvenilir matematiksel bilgiler verdiği görüşü bırakıldığında bütün kavramlar yeniden sorgulandı.

Bu konuyu ilerde geri dönmek üzere bırakıyoruz. Gödel'in teoremleri her matematiksel doğrunun kanıtlanamayacağını belirtmektedir. Şu halde bir matematiksel hipotezi kanıtlamanın ne olduğunu ve bunun kesinlik-doğruluk ilişkisi açısından ne anlama geldiğini inceleyeceğiz.

1.2 Aritmetik ve Kanıtlama

Aritmetik (sayılar teorisi) sayıların, daha özelde tam sayıların bilimidir. Tam sayılar ve bu sayıların birbirleri ile olan ilişkilerini anlamaya çalışmak ve onların üzerine söz söylemek, aritmetik yapmaktır. Fakat bu çalışma daha çok tam sayıların bir alt kümesi olan doğal sayılar üzerinedir.

Doğal sayılar, sıfır sayısından başlayıp birer birer artarak birbirini takip eden ve bir dizi biçiminde sonsuza kadar devam ettiğini kabul ettiğimiz sayılardır. Bu sayılar arasında hiçbir sayı iki veya daha fazla defa tekrar etmez. Ayrıca bu dizide yabancı öğeler de bulunmamaktadır. Şimdilik, doğal sayıların karakterini bu biçimde ortaya koyuyoruz.

Doğal sayılara ilişkin bir tanım vermek, bu sayılar üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemi gibi bazı işlemler konusunda net bir tanım verilebilmesini sağlar: Bir S_1 sayısını S_2 sayısı ile toplamak demek, bu dizide S_2 sayısından başlayarak S_1 kadar

[6] Gottlob Frege (2008), *Aritmetiğin Temelleri*, çev. H. Bülent Gözkan, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul, s. 78.

ilerlemek demektir. Bir S_1 sayısını S_2 sayısı ile çarpmak ise, sıfır sayısından başlayarak S_1 sayısını tekrar tekrar S_2 sayısı kadar toplamak demektir.

Ayrıca sayıların bu dizide belirli bir konuma göre durmasından gelen özellikleri vardır. Bunlar büyüklük ve küçüklük biçiminde tanımlanır:

$4 < 5, 2 > 1$

Ayrıca sayıların, bizim onlara atfettiğimiz bazı özellikleri vardır. Bu özellikler *çiftlik*, *teklik*, *asallık* gibi özelliklerdir:

"8, çift sayıdır", "2, bir asal sayıdır", "3, ikinci asal sayıdır" vb.

Aritmetikte sonlu nicelikte sayı üzerine yargılar ortaya konabilir:

7+5=12

Bazı aritmetiksel yargılar ise sonsuz adet sayı hakkındadır:

İki çift doğal sayının toplamı her zaman çift bir doğal sayıdır

Bu durum, bazı aritmetiksel yargıların doğruluğunun kolayca görülmesini, bazılarının kolayca görülmemesini sağlar. Örneğin 7 sayısından başlayarak sayı dizisinde 5 defa ileri gidince 12 sayısına ulaşıldığını görmek kolaydır. Kesin olarak bilinebilir. Fakat *"İki çift doğal sayının toplamı her zaman çift bir doğal sayıdır"* gibi bir yargının doğruluğu hemen görülmez. Gerçi bu yargının doğruluğu sezgisel biçimde görülebilir. Fakat sezgiler daha karmaşık yargılar ile karşılaştığımızda bizi yanıltabilir. Şu halde bu yargıya bir kanıt getirmek gerekiyor. Aslında bu kolaydır.

Bu hipotezi kanıtlamak için ilk önce *çift doğal sayı* ne demektir bunun tanımlanması gerekmektedir. Bu tanım zaten sabittir: "Eğer bir sayı ikiye bölünebiliyorsa çift sayıdır." Diğer taraftan bu tanım, söz konusu olan şey kanıtlama olduğunda bize yardım etmemektedir.

Yine de, bu tanım bize daha uygun, kanıtlamalarda kullanmaya daha müsait ve bu yargı ile eşdeğer olan başka bir tanım bulmamıza yardımcı olur. Çift olma özelliği şu biçimde de ifade edilebilir:

- *"2" ile çarpıldığında "x" sayısını veren en az bir "a" doğal sayısı varsa, "x" çift sayıdır.*

Görüldüğü gibi çift olma özelliği, çarpma işlemi ile ifade edilebilecek bir özelliktir. Ele aldığımız yargıda ise iki çift doğal sayından bahsetmektedir. Şu halde

"$ç_1$" ve "$ç_2$" sayılarının birer çift doğal sayı olduğunu düşünelim. Bu sayıları "a" ve "b"nin iki doğal sayı olduğunu varsaydığımızda şu biçimde gösterebiliriz:

- $ç_1 = 2a$
- $ç_2 = 2b$

Her çift sayı, 2a, 2b, 2c vb. biçiminde ifade edilebilir. Artık iki çift doğal sayının toplamını da bu biçimde görebiliyoruz:

$$ç_1 + ç_2 = 2a + 2b = 2(a+b)$$

Düşünülebilecek her $2(a+b)$ sayısı 2 sayısına kalansız bölünebildiği için kanıtlama tamamlanmıştır. Fakat yine de kanıt henüz açık değildir; aslında bu kanıtlamada gizli bir önsel kabul veya önsel doğru kullanıldı. Andığımız önsel doğru ise aşağıdaki biçimde gösterebileceğimiz bilindik *çarpma işleminin dağılabilme kuralı* olmaktadır:

$$(c \times a) + (c \times b) = c \times (a + b)$$

Eğer bu önsel kabul geçerliyse, hipotez de doğrudur.

Matematikte önsel doğrular önemli bir yer tutar. Çünkü matematikte yeni bilgilere çoğunlukla tümdengelimsel yöntemlerle ulaşılır ve kanıtlamalar tümdengelimsel yöntemlerle yapılır. Fakat matematikte tümevarım yöntemi de kullanılmaktadır. Sonraki bölümde bunun bir örneği incelenecektir.

1.2.1 Tümevarım

Bazı aritmetiksel yargılara bir kanıt getirmek, bu yargıyı oluşturan kavramların ifade biçimi üzerinden kolayca mümkün olmamaktadır. Aşağıdaki yargı bu durumla ilgili bir örnektir:

Herhangi bir s doğal sayısının bir fazlası ile çarpımının yarısı, 0'dan s sayısına kadar olan sayıların toplamını verir.

Bu bölümde bu yargının kanıtlanabilir olup olmadığını inceleyeceğiz. Fakat öncelikle bazı kavramlar tanımlanmalıdır. Henüz bir kanıt getirilememiş bilimsel yargılara *hipotez* adı verilir. Kanıtlandıklarında ise teorem adını alırlar. *Teoremler* kanıtlanmış doğrulardır. Ele aldığımız hipotezi kanıtlamak için ise iki farklı tümevarım biçimini deneyeceğiz:

1. **Naif tümevarım:** Hiçbir önsel kabul veya doğru ile başlanmadığı düşünülen, sınırlı sayıda gözlem üzerinden genellemeye gitme süreci.

2. **Matematiksel tümevarım:** Çoğu matematiksel hipotezin kanıtlanmasında asıl olarak kullanılan ve *matematiksel tümevarım ilkesini* temeline koyan bir tümevarım biçimi.

Matematikte tümevarım yönteminin kullanılması ilginç bir olgudur. Temelde doğa bilimlerinin işleyişi tümevarımsaldır. Fakat matematik tümdengelimle işleyen bir bilimdir. Diğer taraftan matematiksel nesneler üzerine söz söylemek de, ilkece fiziksel dünya hakkında söz söylemekten farksızdır. Çoğu zaman matematikte de sonsuz adet matematiksel nesne üzerine söylenmektedir. Ele aldığımız hipotez de bunlardan biridir.

Fakat öncelikle şunu belirtmek gerekir ki hipotez aritmetiğin dilinde ifade edilmemiştir. Gündelik veya olağan dilde ifade edilen bu hipotezin bu haliyle doğruluk değerine karar vermek kolay değil. Açıkçası zaten genel olarak bir matematiksel soruyu veya hipotezi olağan dilde ifade etmenin doğruluğu da tartışılır. Olağan dil her zaman yanlış anlaşılmalara izin verebilir. Şu halde bu hipotezi olağan dilden arındırarak biçimselleştirelim:

- $Y(s) = s(s+1)/2$

“Y(s)” burada “s” sayısına kadar olan sayıların toplamı anlamındadır.

Bu hipotez bütün doğal sayılar hakkındadır. Peki, sonsuz nicelikte sayı üzerine söz söyleyen bir hipotezin doğru olup olmadığına nasıl karar verilebilir? Çoğunlukla bir formül belli bir miktar sayı üzerinde denendiğinde doğru sonuçlar verirse bütün sayılara genellenerek doğrulanır. Biz de bunu yapacağız: Naif tümevarımı kullanacağız. Hipotezi hiçbir ön kabul olmadan birkaç doğal sayı üzerinde deneyerek doğrulamaya çalışacağız:

$Y(0) = 0(0+1)/2 = 0$

$Y(2) = 2(2+1)/2 = 3$

.

$Y(150) = 150(150+1)/2 = 11325$

.

$Y(1000) = 1000(1000+1)/2 = 500500$

“s” sayısı arttıkça bir formül biçiminde paylaşılan hipotezin verdiği sonuçlar da katlanarak artmaktadır. Bu ise hipotezin doğruluk değerini görmeyi zorlaştırır. Hipotez 150 sayısına kadar olan sayıların toplamı olarak 11325 sayısını gösteriyor. Peki, bunun doğruluğundan nasıl emin olabiliriz? Elbette 150 sayısına kadar olan sayıları tek toplayarak. Eğer hipotezin doğru sonuç verdiğini görürsek 1000 sayısına kadar olan doğal sayıları tek tek toplamaya başlayabiliriz. Eğer bu işlemlerde bir hata yapmazsak hipotezin 1000 sayısı için verdiği sonucu da deneme yoluyla görmüş oluruz. Peki deneme yoluyla yapılan bu kanıtlamalar hipotezin doğruluğu konusunda tam olarak emin olmamızı sağlar mı? Örneğin bu hipotezin 3141592 sayısı için doğru sonuç vereceğinden kesin olarak nasıl emin olabiliriz?

Kesinlik kavramı bilginin sağlamlığına işaret eder. Matematiksel bir bilginin kesinliğinden bahsedildiğinde ise bu sağlamlığın ölçütünün olması gerekir. Bu ölçüt ise geleneksel olarak reddedilemezlik olarak anlaşılmıştır. Matematiksel bilgi, bu bilginin reddedilememesini sağlayacak bir dayanağa sahip olan bilgidir. Öyle ki, bilgiye dayanak sağlayan şey ortadan kalkmadıkça, bu bilginin yanlış olmasının olasılığından söz edilemez.

O halde hipotezin kesinliğini sağlamak amacıyla sağlam bir dayanak bulmak gerekmektedir. Bu dayanak ise hipotezin birkaç denemede doğru sonuç vermiş olması değildir. Hipotezi bütün sayılar üzerinde de deneyemiyoruz.

Diğer taraftan *matematiksel tümevarım ilkesi* adını alan özel bir ilkeyi hipoteze bir dayanak olarak kullanabiliriz. Matematikte tümevarımla yapılan kanıtlamalar temeline bu ilkeyi koyar:

Matematiksel tümevarım ilkesi

1. Eğer hipotez 0 sayısı için geçerliyse (daha özelde başlangıç sayısı için geçerliyse[7])

ve

2. Eğer hipotezin s sayısı için geçerli olmasının, bu hipotezin s+1 sayısı için de geçerli olmasını gerektirdiği gösterilebiliyorsa

- Hipotez bütün sayılar için geçerlidir.

Burada birinci aşama ilkenin temel aşamasıdır. İkinci aşama ise tümevarım aşamasıdır. Şu halde öncelikle hipotezin temel aşamayı gerçekleştirdiğini görmek gerekmektedir. 0 sayısına kadar olan sayıların toplamı 0'dır. Hipotez de aynı sonucu vermektedir:

- $Y(0) = 0(0+1)/2 = 0$

Şu halde hipotezin, ilkenin tümevarım aşamasını gerçekleştirip gerçekleştirmediği sorgulanmalı. Yani bu hipotezin sabit bir s doğal sayısı için doğru

[7] Bazı matematikçiler doğal sayıların başlangıç noktası olarak "0" sayısını, bazıları ise "1" sayısını alır.

olmasının, hipotezin s+1 sayısı için de doğru sonuç vermesini garantilediği gösterilmeli. Bunun için hipotezin s+1 için ne söylediğini bulmak gerekiyor:

$Y(s) = s(s+1)/2$

s sayılarının yerine s+1 sayısı yerleştirildiğinde:

- $Y(s+1) = (s+1)((s+1)+1))/2$
- $Y(s+1) = \mathbf{(s+1)(s+2)/2}$

Hipotezin "s+1" sayısı için ne söylediğini bulundu. Aradığımız şey hipotezin s sayısı için söylediği sonuç ile (s+1) sayısı toplandığında "(s+1)(s+2)/2" sonucuna ulaşıp ulaşmadığımızı görmek. Bunun için hipotezin s sayısı için verdiği sonuçla (s+1) sayısını topluyoruz:

- $s(s+1)/2 + (s+1)$
- $(s(s+1) + 2(s+1))/2$
- $\mathbf{(s+1)(s+2)/2}$

Görüldüğü gibi hipotezin s sayısı için doğru sonuç vermesi, hipotezin "s+1" sayısı için de doğru sonuç vermesini garantilemektedir. Hipotez, matematiksel tümevarım ilkesinin iki şartını da sağlamaktadır. Şu halde hipotez kanıtlanmıştır.

Bu noktada ilkenin neden bir tümevarım olduğu sorgulanabilir: Tümevarım, hipotezin önceden kabul edilmiş bir şartı sağlayıp sağlanmadığını sorgulamanın neresindedir?

Burada doğal sayılar bir domino taşı dizisine benzetilebilir. Soruşturulan şey ise bu dizideki herhangi bir domino taşının devrilmesinin, ardılı olan domino taşının da devrilmesini sağlayıp sağlamadığıdır. Eğer domino taşı (doğal sayı olan s) devrildiğinde ardılı olan taşın da (s+1) devrilmesini sağlıyorsa, sürecin böyle devam edeceği ve kalan bütün ardıl taşların sırayla devrileceği umulmaktadır. Fakat bunun için öncelikle ilk domino taşını (başlangıç sayısı olan 0 veya 1) devirmek gerekmektedir.

Görüldüğü gibi matematiksel tümevarım ilkesi ile yapılan bir kanıtlama, doğa bilimlerinde yapılan tümevarımdan farklıdır. Burada bilimsel ilgiye konu olan nesnelerden ilkelere doğru bir gidiş değil, yine ilkelerden nesnelere doğru bir gidiş vardır. Aslında matematikte tümevarımla yapılan kanıtlamalar da tümdengelimseldir.

Matematiksel tümevarım ilkesi görüldüğü gibi bir önsel doğrudur ve hipotezin kanıtlanarak teorem haline gelmesini sağlamıştır. İşte bu tür ön kabullere *aksiyom* adı verilir. Bunlar matematiğin temellerini, ilk ilkelerini oluşturur. Bütün matematiksel hipotezler, aksiyomlar yardımıyla kanıtlanır.

Aksiyomlar tek başlarına bulunmazlar. Genellikle belirli bir matematiksel alan üzerine söz söyleyen başka aksiyomlarla ve ayrıca kanıtlama ilkeleriyle birlikte bulunurlar. Bunlar bir arada *aksiyomatik sistemleri* oluşturur.

Gödel'in eksiklik teoremlerinin ilişkili olduğu konu ise aksiyomatik sistemlerdir. Temel sorun, bu sistemler yardımıyla ne kadar matematiksel hipotezin kanıtlanabileceği ve bu sistemlerin güvenilirliğidir.

Bu bölümü tümevarımla kanıtlama yöntemi de dahil aritmetikte kullanılan bütün kanıtlama yöntemlerinin ve aksiyomların gücünü sınayan bir örnekle bitireceğiz. *Goldbach Hipotezi* adı verilen bu hipotez, henüz çözülememiş matematik sorularından biridir. Bu hipotez şunu iddia eder:

2'nin üzerindeki bütün çift sayılar, iki asal sayının toplamı olarak gösterilebilir.

Bu hipotezi bir takım sayılarla deneyelim:

4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
.
20 = 17+ 3
.
2844 = 2837 + 7
.
3918 = 3911 + 7
.

Hipotez birkaç deneme için doğrulanmıştır. Bu durum hipotezin doğruluğuna olan inancımızı artırabilir. Yine de bu durum hipotezin kesin doğru olduğu anlamına gelmez. Çok uzun uğraşlar sonucunda bulunabilecek bir çift doğal sayının hipotezi yanlışlamayacağının bir garantisi yoktur.

Eğer hipotezin kesinliğini sağlayacak bir kanıt bulunabilseydi, matematiksel nesneler olarak çift doğal sayılar hakkında "2" sayısına kalansız bölünebilme özelliğine sahip olmaları dışında yeni bir bilgimiz daha olurdu. Elde ettiğimiz bu yeni kesin bilgi de başka matematiksel sorunların çözümünde kullanılabilirdi.

1.3 Aksiyomatik Yöntem

Bu çalışmada matematiksel sorulara aksiyomatik yöntemle yaklaşma eğilimini aksiyomatik düşünme kavramıyla ifade edeceğiz. Sonraki bölümde ise bu yöntemin ortaya çıkışını inceliyoruz.

1.3.1 Öklid Geometrisi ve aksiyomatik yöntem

Öklid (M.Ö 325-265) aksiyomatik yöntemin ve aynı zamanda geometrinin kurucusudur. Genç dönemlerinde Platon'un akademisinde eğitim görmüş, ardından İskenderiye'ye yerleşip orada bir okul kurmuş ve yaşamını burada devam ettirmiştir. Bu dönemde Öklid, kendi dönemine kadar keşfedilen dağınık durumdaki (düzlem ve cisimlerle ilgili) empirik nitelikteki geometri bilgilerini, *Öğeler* isimli 13 ciltlik yapıtında düzenli, apaçık, birbiriyle tutarlı görünen aksiyomlara dayandırarak, hem bu bilgilere kesinlik kazandırmış hem de ilk aksiyomatik sistemi oluşturmuştur.[8] Bugün Öklid geometrisi olarak bilinen aksiyomatik sistem, etkisini iki bin yıl boyunca devam ettirmiş, XIX. yüzyıla kadar rakipsiz olarak işlenmiştir.

Bu sistem beş aksiyomdan (genel doğru), bazı postülalardan (önsel kabul) ve geometrik nesnelerin tanımından oluşmaktadır. Örneğin Öklid, *doğru* kavramını şöyle tanımlar:

Bir doğru, genişliğe sahip olmayan uzunluktur.

Düzlem kavramını ise şu biçimde tanımlar:

Bir düzlem sadece genişliğe ve uzunluğa sahip olan şeydir.[9]

Sistemdeki aksiyomlar şöyle sıralanır:

- Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir.
- Eşit şeylere eşit şeyler eklenirse, sonuçlar da eşit olur.
- Eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar da eşit olur.
- Birbiriyle (bire bir) çakışan şeyler eşittir.
- Bütün, herhangi bir parçasından büyüktür.

---

[8] Tucker McElroy, (2005), "Euclid of Alexandria", ss. 82-84.

[9] Thomas A. Garrity (2002), *All the Mathematics You Missed, But Need to Know for Graduate School*, Cambridge University Press, Cambridge s. 162.

Bu aksiyomlar kanıta gereği olmayan apaçık doğrulardır ve doğrulukları sezgisel olarak görülebilir. Bu apaçık doğrular sadece her hangi bir bilim dalının doğruları değil, genel doğrulardır. Diğer taraftan belirtmiş olduğumuz gibi bu genel doğruların yanında postülalar da vardır. Postülalar genel doğrular değildir fakat geometrinin temellerini oluşturur. Bunlar sayıca daha fazla olmakla birlikte ilk beşi şu biçimde sıralanır:

- İki nokta arasını birleştiren en kısa uzaklık, bir doğrudur.
- Doğru, sonsuza kadar uzatılabilir.
- Verili bir düz çizgi parçasından, parçayı yarıçap ve bu parçanın bir uç noktasını merkez alan bir çember çizilebilir.
- Bütün dik açılar birbirine eşittir.
- İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, bu doğrular, iç kısımlarında oluşan açılardan, toplamı 180 dereceden az olan tarafta kesişir. (Paralel postülası)[10]

Geometri hipotezleri, çağlar boyunca bu aksiyom, postüla ve tanımlardan türetilmiş ve bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. Örneğin *bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açının toplamına eşittir* hipotezini kanıtlamak için birinci aksiyoma, dördüncü postülaya ve dik üçgenin tanımına bakmak yeterlidir:

- Dik açı, 90 derecelik açıdır.
- Bütün dik açılar birbirine eşittir.
- İki dik açının toplamı 180 dereceye eşittir.
- Bir üçgenin iç açılar toplamı 180 dereceye eşittir.
- Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir.
- ➢ O halde bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açının toplamına eşittir.

Öklid geometrisi kusursuz bir geometri teorisi olarak düşünülse de, yine de tartışmalı tarafları bulunmaktaydı. En büyük tartışma konusu ise "paralel postülası" olarak bilinen beşinci postüladır. İlginç biçimde bu postüla, Öklid geometrisinde eğreti durmaktadır: Bu postüla, diğer postülalar gibi yalın ve basit değil, aksine karmaşıktır.[11]

---

[10] John Stillwell (2010), *Mathematics and Its History*, Third Edition, Springer, New York, ss. 18-19.

[11] Morris Kline (1985) *Mathematics and the Search for Knowledge*, Oxford University Press, New York, Oxford, s.149

Öklid geometrisinin ilk yirmi sekiz teoremi *mutlak geometri* olarak tanımlanır. Burada ilginç olan şey, her ne kadar Öklid tarafından bir postüla olarak varsayılmışsa da, beşinci postüla olan paralel postülası, mutlak geometri de denilen yirmi sekiz önermenin türetilmesinde veya kanıtlanmasında kullanılmamıştır.[12] Bu totolojik yirmi sekiz teorem, sadece ilk dört postüladan türetilmiştir. Öklid bu postülayı kullanmaktan mümkün olduğunca kaçınmıştır. O halde şu sorulabilir: Paralel postülası, kanıt amacıyla ortaya konulmamışsa neden postüla olarak varsayılır?

Paralel postülası çağlar boyunca matematikçileri rahatsız etmiştir. Öklid'in ardılları onu bir postüla olarak değerlendirmek istememiş ve onun ilk dört postüladan türetilebileceğini göstermek istemiştir. Bu, yüzyıllar boyunca denenmiştir. Aslında konu ciddidir. Öncelikle Öklid geometrisi eldeki tek geometri sistemidir. İkinci olarak bu geometrinin kesinliği bütün matematiğe genelleniyordu. Fakat paralel postülasının doğruluk değerine diğer postüla ve aksiyomlar üzerinden karar verilemedikçe, bu postüla ortada kesin doğru veya kesin yanlış denilemeyecek bir önerme olarak duruyordu. Paralel önermesini diğer postülalardan türetmek veya çürütmek, hem Öklid geometrisinin yeniden eksiksiz bir sistem haline gelmesini sağlayacak, hem de kesinlik anlayışını tehdit eden bu durumun ortadan kalmasını sağlayacaktı. Konuyla ilgilenenler[13] ise Öklid geometrisinde kusur olarak görülen bu sorunu aşarak geometriyi insanlığa bir kez daha eksiksiz bir sistem olarak hediye etmeye çalışmaktadır.

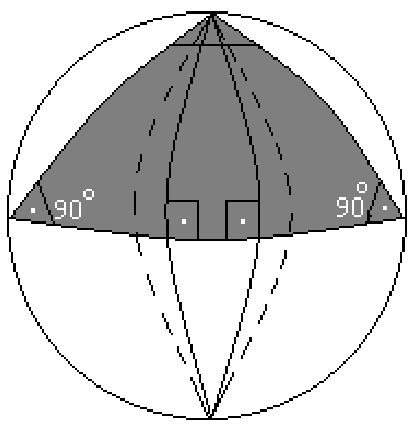
En sonunda XIX. yüzyılda, geometri alanında büyük bir değişiklik gözlenmektedir. İnsanoğlu Orta Çağ'ın son dönemleri ve Yeni Çağ ile birlikte denizcilik tekniklerini iyice geliştirmiş, farklı kıtaları keşfetmeye başlamış, evrenin dünya çevresinde dönmediğini anlamış, dünyanın genel olarak düz değil, eliptik biçiminde olduğu keşfetmişti. En sonunda andığımız yüzyılda, János Bolyai (1802–1860), Nicolai Lobachevsky (1792–1856), Friedrich Gauss (1777–1855), Bernhard Riemann (1826-1866) gibi matematikçiler, birbirinden bağımsız olarak, bugün Öklid-dışı geometriler olarak bilinen geometri sistemlerini ortaya koymuştur.

[12] Hofstadter, 2001: 117-118; Catherine A. Gorini (2003), "Absolute Geometry", *The Facts On File Geometry Handbook*, Facts On File, Inc., New York, s. 2.

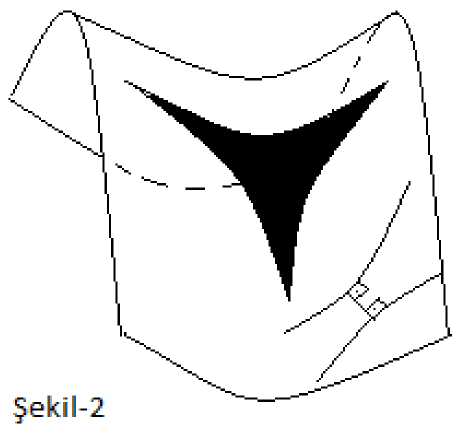
[13] John Stillwell, Öklid geometrisinin çağlar boyunca sadece matematiğin merkezinde olmadığını, aynı zamanda batı kültürünün merkezinde olduğunu belirtir. Bu nedenden dolayı Öklid geometrisine yapılan en büyük katkılar matematikçilerden çok filozoflardan, siyasetçilerden vb. gelmiştir: Stillwell, 2010: 36.

Bu matematikçiler, geometri sistemlerini Öklid geometrisinde doğruluk değerine karar verilemeyen beşinci postülayı, daha doğrusu bu postülaya eşdeğer olan bir önermeyi kabul etmeyerek yapmıştır. Bu önerme ise John Playfair (1748-1819) tarafından ortaya koyulan "bir doğrunun dışındaki her hangi bir noktadan geçebilecek bütün doğrular ne kadar uzatılırsa olsun, baştaki doğru ile kesişmeyecek bir, sadece bir doğru vardır" önermesidir.[14] Bu geometriler bugün daha da geliştirilmiş haliyle, eliptik geometri, hiperbolik geometri gibi kavramlarla tanınmaktadır. Örneğin eliptik geometride andığımız önermenin sonu "hiçbir doğru yoktur" biçiminde değiştirilmiştir. Hiperbolik geometride ise "en az iki doğru çizilebilir" biçimindedir.[15]

Paralel postülasındaki değişiklik, bu geometrilerin uzay anlayışını da değiştirir. Aşağıdaki resimlerde, iki farklı geometride paralellerin davranışları, uzayın biçimi ve üçgenlerin durumu temsil edilmektedir:



Şekil-1



Şekil-2

Şekil-1 eliptik geometride, Şekil-2 ise hiperbolik geometride paralellerin davranışını ve üçgenlerin durumunu temsil etmektedir. Görüldüğü bu iki geometrinin uzayında çizilen üçgenler (eliptik ve hiperbolik üçgenler), düzlem üzerine çizilen bilindik üçgenden hem şekil olarak hem de iç açılarının toplamı olarak farklıdır. Bu örnekler bir önsel kabulü değiştirmenin ne kadar çok şeyi değiştirebileceğini göstermektedir.

Ortaya konulduğu sıralarda yarayışsız, anlamsız çabalar olarak küçümsenen, bu geometriler, sonraki dönemlerde en az Öklid geometrisi kadar saygın bir yer işgal

---

[14] Kline, 1985: 150.
[15] Garrity, 2002: 163-167; Hofstadter, 2001: 140.

etmiştir. Çünkü bu geometriler evren ve cisimlerin şeklini anlamak açısından çok daha uygun sistemlerdir. Örneğin Einstein, uzay anlayışını bir Öklid-dışı geometri olan Riemann geometrisini kullanarak açıklamıştır.

Fakat konumuz açısından Öklid-dışı geometrilerin ortaya çıkışının önemi, artık geometrinin bazı sorulara vereceği tek ve kesin bir cevabın olmamasıdır: Geometri tutarlı değildir.

1.3.2 Aksiyomatik sistemlere ilişkin kavramlar

Öklid'in geometri sistemi, aksiyomatik bir sistemin nasıl bir şey olduğu hakkında pek çok noktayı aydınlatmaktadır. Yine de bu sistemlerin özellikleri ile ilgili bazı noktaların daha ayrıntılı biçimde incelenmesi gerekmektedir.

Bu tartışmadan önce bir süreliğine matematikten uzaklaşacağız. Nasıl biri olduğunu merak ettiğimiz, üzerine hiçbir genel kanımızın olmadığı bir kişi hakkında onu iyi tanıyan bir dostumuzdan yardım istediğimizi düşünelim. Yani dostumuzdan bu kişiyi karakterize etmesini talep etmekteyiz. Böyle bir durumda bu kişinin pek çok özelliğini dostumuzun bu kişi hakkında söylediği birkaç söz veya yargı üzerinden çıkarmaya çalışırız.

Elbette, bir insanın karakteri birkaç yargı üzerinden ortaya konulamaz. İnsan, davranışlarında her zaman tutarlı olmayan, farklı durumlarda farklı tutumlara sahip bir varlık. Yalnız biz, iyi bir gözlem sonucu ortaya konulabilecek birkaç yargı sayesinde o kişinin pek çok farklı durumda nasıl bir tutum takınacağını isabetli olarak tahmin edebileceğimizi umuyoruz. Peki, bir kişinin karakterini nasıl yargılar ortaya koyabilir? Örneğin bu kişinin 26 Ağustos 1972 tarihinde İzmir'de doğmuş olması karakterini pek de ortaya koymaz: Bu tarihte ve yerde doğmuş olan başka kişiler de bulunabilir. O halde öyle yargılar ortaya konmalıdır ki, ancak ve ancak bu kişide bulunabilsin. Böyle yargılar hem bu kişinin tutumlarını mümkün olduğunca tahmin edebilmemizi sağlar hem de başka kişilerden ayrıldığı noktaları da açığa çıkarır. Eğer nesnenin karakterini ortaya koyan yargılar iyi seçilirse, bu nesne ilgili doğruları bu yargılardan çıkarabiliriz. İşte aksiyomatik yöntem budur.

Aksiyomatik bir teori, her teori için de söz konusu olduğu gibi, üzerine söz söylediği olgu alanını açıklayabilmelidir. Bu açıklamanın en temel özellikleri ise eksiksizlik, tutarlılıktır. Yani bir teori olarak aksiyomatik sistem, tutarlılık ve eksiksizlik özelliğine sahip olursa, açıklamak istediği nesneler kümesini iyi karakterize eder. Bu bölümde aksiyomatik sistemin bu özelliklere sahip olması ne demektir incelenecektir. Bölümün sonunda ise aksiyomatik sistemler olarak ortaya konulan teoriler üzerine bazı önemli noktalara odaklanılacaktır.

1.3.2.1 Eksiksizlik

Eğer bir aksiyomatik sistemin aksiyomları, üzerine söz söylediği şey hakkında ileri sürülebilecek bütün hipotezlerin doğruluk değerine karar verebilmemize olanak sağlarsa, sistem eksiksizlik özelliğine sahiptir. Karar verebilme ise hipotezin veya bu hipotezin olumsuzunun, sistemin aksiyomlarından çıkarılabilmesi yani türetilebilmesi ile mümkündür. Eğer hipotez aksiyomlardan türetilebilirse, teoremdir. Eğer hipotezin olumsuzu aksiyomlardan türetiliyorsa, hipotezin olumsuzu teoremdir. Eğer sistemin aksiyomlarından bir hipotezin ne kendisi ne de olumsuzu türetilebiliyorsa, sistem eksiktir.

Bu konuda bir örnek sunacağız. Bir okulda ders işlenen herhangi bir sınıfı hayal edelim. Yalnız bu sınıftaki öğrencilerin sıralara oturma biçimi ilginç bazı özellikler göstermektedir. Elimizde ise, bir aksiyomatik sistem biçiminde teori bulunmaktadır ve bu teori andığımız sınıftaki öğrencilerin oturuş sırasını, öğrenci sıralarının dizilişini, öğrenci numaralarını ve öğrenci sıralarının numaralarını karakterize etmektedir. Bu teoriye T teorisi adını verelim ve aksiyomlarını ortaya koyalım:

1.Bu sınıfta sıralar sadece arka arkaya gelecek biçimde yerleştirilmiştir.
2.Her sırada bir kız ve bir erkek olmak üzere ikişer öğrenci oturmaktadır.
3.Kız öğrenciler sıraların sağ tarafında oturmaktadır.
4.Erkek öğrenciler sıraların sol tarafında oturmaktadır.
5.Bu sınıfta sıralar numaralandırılmıştır.
6.Bir numaralı sıra, en öndedir.
7.Sıra numaraları en öndeki sıradan en arkadaki sıraya doğru teker teker artmaktadır.
8.Bu sınıfta her öğrenci numaralandırılmıştır.
9.Bir numaralı öğrenci, en ön sıranın solunda oturmaktadır.

10.Öğrenciler, önce sıranın solundaki sonra sağındaki öğrenci olarak sırayla numaralandırılmıştır.
11.Bir sıradaki öğrencilerin numaralarını bir arka sırdaki öğrencilerin numaraları takip eder.
12.Son sıranın solundaki öğrencinin numarası on birdir.

Aslında böyle küçük bir sınıf için Öklid geometrisindeki aksiyomlardan daha fazlasını kullandık. Yalnız toplamda on iki adet olan aksiyomlarımızdan onlarca bilgi türetilebilir: Sınıfta altı tane sıra vardır, on iki tane öğrenci vardır, yedi numaralı öğrenci erkektir, ikinci sıranın iki sıra arkasındaki sıranın sağında oturan öğrencinin numarası sekizdir, on numaralı öğrenci beşinci sırada oturmaktadır… Aynı zamanda bu aksiyomlar, üzerine söz söylediği nesneler hakkındaki hipotezlerin doğruluk değerine de karar verir. Örneğin:

- 8 numaralı öğrenci kızdır.
- ➢ Doğru.

Kanıtı sağlayan deliller: Birinci, ikinci, üçüncü, dokuzuncu, onuncu ve on birinci aksiyomlar. Diğer aksiyomlara eklendiğinde bu aksiyomlar, hipoteze teorem değeri kazandırmak için yeterlidir.

Aslında teori, üzerine söz söylediği bütün nesneler hakkında eksiksiz karar vermektedir. Çünkü aksiyomlar, sabit nesnelerden oluşan bir kümenin birkaç aksiyom tarafından eksiksiz biçimde nasıl karakterize edilebileceğini göstermek amacıyla, temel özellikleri önceden belirlenmiş özel maksatlı bir sınıf üzerine konuşmaktadır. Yalnız teorinin doğru veya yanlış olduğuna karar veremeyeceği hipotezler de vardır. Örneğin "beş numaralı öğrenci, öğretmenden karne alma sırasında beşinci sıradadır" hipotezine aksiyomlar karar veremez. Çünkü bu aksiyomlardan ne bu hipotezin kendisi ne de olumsuzu çıkarılabilir. Fakat bu durum aksiyomların eksik olduğu anlamına gelmez. Çünkü teori öğrencilerin karne alma sırası üzerine zaten konuşmamaktadır.

Şimdi gerçekten de bir teorinin bu amacı da gerçekleştirmek için ortaya konduğunu düşünelim. Bir önceki T teorisi ile aynı aksiyomları ve aynı amaçları paylaşan bir T^1 teorisi olduğunu varsayıyoruz. Yalnız T^1 teorisi sınıftaki öğrencilerin oturuş sırası, öğrenci sıralarının dizilişi, öğrenci numaraları ve öğrenci sıralarının numaraları dışında öğrencilerin karne alma sırasını da karakterize etmek amacıyla ortaya konmuştur. O halde T^1 teorisi bir önceki paragrafta vermiş olduğumuz hipotez ve benzeri hipotezlere karar veremeyeceği için eksiksiz bir teori değildir. Yalnız bu durum bir sorun oluşturmamaktadır. Teori sabitlerin üzerine olduğu sürece, ona eklenecek birkaç aksiyom ile eksiksizlik özelliği kazanabilir. Örneğin önceki aksiyomlar arasına eklenebilecek bir "öğrenci numarası ile öğrencilerin karne alma sırası aynı sayıdır" biçimindeki bir aksiyom, teoriyi yeniden eksiksiz yapacak ve teori "beş numaralı öğrenci, öğretmenden karne alma sırasında beşinci sıradadır" biçimindeki hipoteze de karar verebilecektir.

Eksiksizlik üzerine durulması gereken son bir önemli nokta ise, bir hipoteze karar vermenin sadece aksiyomlardan türetilebilirlik ile ilgili olmadığıdır. Eksiksizlik için bu gereklidir ama yeterli değildir. Aksiyomatik sistem, bir hipotezin teorem olup olmadığına sonlu işlem basamağından sonra karar verebilmelidir. Öklid geometrisindeki paralel postülası bu konuda çok iyi bir örnektir. Bu postüla bir hipotez olarak ele alındığında Öklid geometrisinin aksiyom ve postülalarından kesin olarak türetilebilip türetilemeyeceğini bulmak asırlarca matematikçileri ve konuyla ilgilenenleri uğraştırmıştı. Çok iyi bildiğimiz bir konu üzerine söylenebilecek her hangi bir sözün doğru olup olmadığı sorulduğunda buna hızla doğru veya yanlış cevabını veremezsek bilgimizin eksiksizliğinden nasıl emin olabiliriz ki?

1.3.2.2 Tutarlılık

Bir aksiyomatik sistem için tutarlılık, sistemin çelişkili aksiyomlara sahip olmamasıdır. Sadece tutarlı bir aksiyomatik sistem doğruları ancak ve ancak doğruları türetebilir. Eğer sistemin aksiyomları çelişkili ise, sistem birbiriyle çelişen hipotezleri teorem yapar. Yani üzerine söz söylenen alanla ilgili hem doğru hem de yanlış hipotezler teoreme dönüşür. O halde tutarlı olmayan bir aksiyomatik sistem, üzerine söz söylediği alanla ilgili sadece doğruları değil aynı zamanda yanlışları da türetir.

Önceki bölümde paylaşmış olduğumuz T teorisinin aksiyomlarını hatırlıyor ve toplamda on iki tane olan bu aksiyomlara bir tane daha ekliyoruz:

- 13.Beşinci öğrenci sırasının yanında bir öğrenci sırası daha vardır.

Bu yeni teoriye T^3 teorisi ismini veriyoruz. Ardından sınıftaki sıraların yerleşimi ile ilgili şu hipotezin doğruluk değerine T^3 teorisinin aksiyomları üzerinden karar vermeye çalışıyoruz: "üçüncü öğrenci sırasının iki sıra arkasında yan yana iki öğrenci sırası bulunmaktadır."

Bu süreci bütün hipotezleri birlikte analiz ederek yapmanın gereği yoktur. Eğer 1 numaralı aksiyomu temel alırsak hipotez yanlıştır. Çünkü bu aksiyom sınıftaki sıraların sadece arka arkaya sıralandığını söyler. Eğer 13 numaralı aksiyomu temel alırsak hipotez doğrudur. Çünkü üçüncü öğrenci sırasının iki sıra arkasındaki sıranın numarası 5'tir. O halde 1. ve 13. aksiyom çelişmektedir. T^3 teorisinin aksiyomlarından bu hipotezin hem kendisi hem de olumsuzu çıkarılabiliyorsa, teori açıklamak amacıyla oluşturulduğu sabitleri karakterize edebiliyor denilemez.

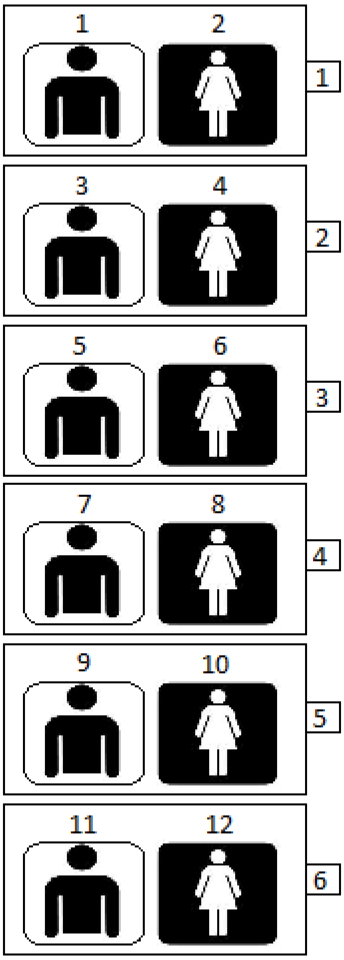
O halde kendi içinde çelişkili aksiyomlara sahip T^3 teorisinin de gerçeği ne kadar doğru karakterize ettiği de sorgulanmaz - teorinin üzerine söz söylediği olgu hakkında ne söylediği belirsizdir. Peki, ek aksiyoma sahip olmayan T teorisinin tutarlılığından nasıl emin olabiliriz? Aşağıdaki örnek "A" önermesini inceleyelim:

A. "10 numaralı öğrencinin 3 sıra önünde oturan erkek öğrencinin, öğrenci numarası sırasına göre 9 öğrenci gerisindeki öğrenci ile aynı sırayı paylaşan öğrencinin 1 önündeki öğrenci 9 numaralı öğrencidir."

Bu önerme, T teorisinin üzerine söz söylediği sınıf hakkında ileri sürülebilecek hipotezlerin ne kadar fazla olabileceğinin yanında ne kadar karmaşık olabileceğini de göstermektedir. Bu türden sayıca çok fazla karmaşık önerme kurulabilir. Bu önermelerden herhangi birinin bu 12 aksiyomda çelişki çıkarmayacağından nasıl emin olabiliriz?

Bu soruya verilebilecek en temel cevaplardan biri, "aksiyomlar doğruysa o halde tutarlıdır yargısı" olacaktır. Eğer T'nin aksiyomlarının hepsi bu sınıfla ilgili bir doğruya işaret ediyorsa, T tutarlıdır.

Aksiyomatik bir sistem olarak teorinin iç tutarlılığa sahip olup olmadığına karar vermek amacıyla kullanılabilecek başka yol ise bu aksiyomları *modellemek* olabilir. Modelleme aksiyomatik bir teorinin tutarlılığını kanıtlamanın kolay bir yolunu sağlar. Çünkü modelleme yöntemi, teoriyi somutlaştırır**.** Çoğu zaman yüzlerce cümlenin söyleyemediği şeyi bir resim hızla söyleyebilir. O halde T teorisinin aksiyomlarını bir resim biçiminde modellemeyi deneyebiliriz: Şekil-3 böyle bir modelleme örneğidir.



Şekil-3

Büyük dikdörtgenler sıraları ve içlerine çizilen erkek ile kız figürleri ise öğrencilerin sıralara oturma yönünü resmetmektedir. Her öğrenci figürünün üst kısmında bulunan sayı öğrenci numarasını, sıraların yanındaki küçük kareler içinde verilen ve 6'da biten sayılar ise öğrenci sıralarının numarasını vermektedir. İşte bu model, T'nin aksiyomlarının tutarlı olduğunu gösteren bir modeldir.

Ayrıca modelleme, aksiyomlardan türetilebilecek her teoremin de model üzerinde somut biçimde görülebilmesini sağlar. Örneğin "A" hipotezinin bir teorem olduğu bu model üzerinde daha kolay ve somut biçimde görülebilir.

İşte XIX. yüzyılda geliştirilen bu zekice yöntem, Öklid-dışı geometrilerin tutarlılığını kanıtlamak için kullanılmıştır. İlk ortaya çıktıklarında anlamsız ve soyut olduğu düşünülen Öklid-dışı geometriler, somut ve tutarlı olduğu düşünülen Öklidçi modeller ile gösterilmiştir.[16] Burada dolayısıyla bu geometrilerin tutarlı olmasının, Öklid geometrilerinin tutarlı olmasına bağlı olduğunu bir not olarak ekleyelim.

Fakat modelleme yönteminin de bazı sınırları bulunmaktadır. Birkaç öğrenci ve öğrenci sırasından oluşan bir öğrenci sınıfındaki öğrencilerin durumu ile ilgili önermelerin modellenmesi şekil-3 örneğinde görülebileceği gibi pratik açıdan kolaydır ve mümkündür. Sonlu sayıda öğe ile yani birkaç dikdörtgen, öğrenci figürü ve sayı ile bu mümkün olmuştur. Yalnız sonlu öğeler ile modelleme yapmanın mümkün olmadığı durumlar da vardır. Temel aritmetikte "her tam sayının önceki sayılardan farklı bir ardılı vardır" ifadesi buna verilebilecek bir örnektir.[17] Bu önerme sonlu sayıda öğeden oluşan bir model ile apaçık gösterilemez. Başka bir örnek ise sonraki bölümlerde incelenecek olan *Cantor'un kümeler teorisi* ve bu teorinin farklı boyutlarda sonsuzluklara ilişkin varsayımlarıdır.

---

[16] Tutarlılığı sağlamak amacıyla aksiyomların yorumlanması için modelleme yönteminin kullanımının ortaya çıkışı, amacı, yöntemin temel mantığı ve sorunları ile ilgili daha geniş bir inceleme için bkz. Nagel ve Newman, 2008: 5-18.

[17] Nagel ve Newman, 2008: 16.

1.3.2.3 Bir teori olarak aksiyomatik sistem

Her teori gibi aksiyomatik sistemler de belli bir alana ilişkin bilgi durumlarını açıklamak amacıyla ortaya koyulur. Fakat bu açıklama kavramının neye işaret ettiği bir sorundur. Bu noktada tümeller sorununu hatırlayalım: Tümel kavramlar gerçek birer varlığa işaret eder mi? Bu eski soru, felsefe tarihinde *gerçekçilik* (realizm) ve *adcılık* (nominalizm) gibi felsefi akımlar içerisinde tartışılmıştır. Bu sorunun bilim felsefesindeki örneği ise evreni açıklama iddasındaki teorilerin evreni ne kadar "olduğu gibi" açıkladığını sorar. Bu noktayı anlamak için bir örneği ele alacağız.

Psikolojide insani fenomenleri açıklama iddiasındaki pek çok teoriden biri olan *Bilgiyi İşleme Teorisi*, bir özne olarak insanın belleğini temel olarak *uzun süreli bellek* ve *kısa süreli bellek* olarak iki ayrı bölümde inceler. Yani belleğin kısa ve uzun süreli belleklerden oluştuğu *varsayılır*. Burada uzun ve kısa sözcüklerinin anlamının, bu belleklerde bilgiyi tutma süresine göre belirlendiğini bir not olarak belirtelim. Belleğin bu biçimde incelenmesi örneğin doğal sayıları araştırmak için ilk önce doğal sayıların tanımının yapılmasına benzetilebilir. Öğrenme, unutma ve hatırlama gibi kavramlar da belleğe ilişkin bu tür kavramlar kullanılarak açıklanır. Örneğin bir şey öğrenmek, bilgiyi kısa süreli bellekten uzun süreli belleğe alabilmektir. Hatırlamak, uzun süreli bellekte bulunan bilgiyi kullanmak amacıyla geri çağırabilmek; unutmak ise uzun süreli bellekte bulunan bilgiyi geri çağıramamaktır.[18] Bu durum ise toplama ve çarpma gibi işlemlerin tanımının, bu işlemlerin yapıldığı sayıların tanımına bağlı olmasına benzetilebilir. Anmış olduğumuz teori ile ilgili temel sorunumuz, insanda bir uzun süreli ve bir kısa süreli belleğin gerçekten var olup olmadığı veya onda olduğunu düşündüğümüz bu öğelerin gerçek ile uyuşup uyuşmadığıdır. İnsanda gerçekten bu türden belleklerin olup olmadığını bilmiyoruz. Fakat bu teorinin insani fenomenleri açıklamada çok kullanışlı bir araç olduğunu biliyoruz.

Bu konu Öklid geometrisi ile doğrudan bağıntılı bir konudur. Öklid geometrisinin önemli özelliklerinden biri, bu teorinin aksiyomlarını oluşturan kavramların soyut bir uzayı değil, bilindik fiziksel uzayı açıklıyormuş gibi tanımlanmasıydı. Yani bu

[18] Bilgiyi İşleme Teorisi'nin genel yapısı, ele aldığı genel konular, bu konulara getirdiği açıklamalar ve onlara getirdiği yeni açılımları anlamaya yönelik analitik ve Türkçe bir kaynak için bkz. Nuray Senemoğlu (2007), *Gelişim Öğrenme ve Öğretim*, Gönül Yayıncılık, Ankara, ss. 263-343.

geometride *nokta,* uzaydaki gerçek bir noktayı, *doğru* ise, uzaydaki gerçek bir doğruyu gösteriyor gibi tanımlanmıştı. Bu durumda, Öklid geometrisinde teorem olan önermelerin, evrene ilişkin gerçek bir bilgiye işaret ettiği düşünülüyordu. Aksiyomların ve postülaların doğruluğu ise apaçıktı. Bu doğruluk sezgisel olarak görülebilirdi. Çünkü Öklid geometrisinin açıklamaları o zamanki fiziksel deneyimlerimizle çok uyumluydu.[19] Öklid'in ardıllarının paralel postülasının doğruluk değeri ile bu kadar uğraşmasının nedenlerinden biri belki de budur. Paralel postülasının doğruluk değerine karar verilemedikçe, evrene ilişkin bilgilerimiz hep eksik kalacaktı. Diğer taraftan Öklid geometri sistemini, evreni doğrudan olduğu gibi açıklamaya çalışan bir aksiyomatik sistem olarak değil, onu anlamaya ve onunla ilgili yeni keşifler yapmaya yarayacak kullanışlı bir model olarak da ortaya koyabilirdi. Fakat Öklid bunu yapmamıştı.

Bu noktada şunu soracağız: Bir teorinin işlevi veya amacı, bir olgu durumunu veya evreni doğrudan açıklamak mıdır, yoksa onu anlamak ve onunla ilgili yeni keşifler yapmak için dayanak sağlayan bir model mi olmaktır? Birinci seçenek, teorilerin işlevi ve amacı konusunda *gerçekçi* (realist), ikinci seçenek ise aynı konuda *araçsalcı* (instrumentalist) tutuma işaret eder. Örneğin Öklid geometrisi gerçekçi tutumla ortaya koyulmuş bir sistemdir.

Bilim felsefesinin konularından olan bu iki düşünce biçimi esas olarak, tümel kavramların varlık sorunuyla ilgili gerçekçi ve adcı (nominalist) fikirler üzerinden bilimsel teorilerin işlev ve amacının yorumlanmasıdır diyebiliriz. Bir felsefi tutum olarak araçsalcılık, gerçekçi tutuma tepki olarak ortaya çıkmıştır. Bu tutumun temel iddiasına göre teoriler gerçeği olduğu gibi doğrudan yansıtamaz. O yüzden teorilerin temel işlevi ve başarısı, gerçeği anlamak ve onunla ilgili yeni keşifler yapabilmek için kullanışlı bir model olabilmektir. Kısaca teoriler, gerçeğin tam olarak nasıl bir durumda olduğunu gösterme iddiasından önce, gerçeği anlamak için kullanışlı bir model olma iddiasıyla ortaya konmalıdır.[20]

Genel hatlarını bu biçimde verebileceğimiz araçsalcı tutumun temel dayanağı, bir nesnenin gerçekten bulunduğu durum ile bu nesneye yönelen öznenin nesneyi bilme

---

[19] Stillwell, (2010), s.360. Nagel ve Newman, 2008: 10.

[20] C. F. Delaney (1999), "Instrumentalism", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, s. 438; araçsalcılık ve gerçekçilik karşıtlığı konusunda analitik ve Türkçe bir kaynak için bkz: Alan Chalmers (1997), *Bilim Dedikleri,* çev. Hüsamettin Arslan, 3. Basım, Vadi Yayınları, Ankara, ss. 199-223.

biçimi arasında daha baştan bir denkliğin olmadığı fikridir.[21] Başka bir deyişle, gerçeklik kendini insan aklına olduğu gibi sunmaz. O halde öznenin nesne üzerine bilgisinin doğruluğu apaçık olamaz. Yani *apaçık doğrular* diye bir şey yoktur.

Böylece genel olarak iki teori anlayışını görüyoruz. Bunlardan biri matematiksel doğruluğun temeline sezgiyi koyan, apaçık doğruluklar anlayışına sahip olan gerçekçi tutum, diğeri ise sezgiye güvenmeyen, apaçık doğruluklar anlayışını büyük ölçüde reddeden araçsalcı tutumdur. Birinci tutum daha çok akılcılığa, ikinci tutum ise daha çok deneyciliğe yakındır. Bu çalışmada bu iki tutuma verilebilecek en temel örnekler, Hilbert'in biçimselciliği ve Gödel'in Platonculuğudur. Örneğin Hilbert'in biçimselciliğini incelediğimiz bölümde, sonraki bölümlerde ele alacağımız sonsuz kümeler teorisinin varsayımlarının araçsalcı bir tutumla değerlendirildiğini göreceğiz. Gödel'in Platonculuğunu incelediğimiz bölümde ise Gödel'in, bu teorinin varsayımlarının apaçık doğruluklara işaret ettiğini düşündüğünü göreceğiz.

Çalışmamızda bu noktaya kadar matematiksel teoriler olarak aksiyomatik sistemlere ilişkin bazı özel konuları anlamaya çalıştık. Artık, eksiklik teoremlerine doğru giden sürece daha fazla odaklanabiliriz.

1.3.3 XIX. yüzyıldan Hilbert Programı'na

Bu bölümde, XIX. yüzyıldan eksiklik teoremlerine giden süreçte, Gödel'in eksiklik teoremlerine yol açan bazı ürünler ve özel konular incelenecektir. Fakat bu çalışmada XIX. yüzyıldan bahsedildiğinde, belirtilmek istenen zaman aralığının XIX. yüzyılın ikinci yarısı olduğunu bir not olarak belirtmeliyiz. Gerçekten de günümüze kadar uzanan pek çok matematiksel konu ve tartışma, kökenini XIX. yüzyılın ikinci yarısında başlamış olan süreç içinde bulur. Bu süreç karakterize edildiğinde, onun neden yeni bir döneme işaret ettiği konusu daha fazla anlam kazanacaktır.

Bu dönem matematiğin ve geniş alanlarının temellerinin ve kökeninin araştırıldığı dönem olmuştur. Bu noktada Frege'nin ilk 1884 yılında yayınlanan *Aritmetiğin Temelleri* (Die Grundlagen der Arithmetik) adlı yapıtı, David Hilbert'in klasik Öklid geometrisini yeniden aksiyomatikleştirdiği ve ilk 1899 yılında yayınlanan

[21] Michael Byrd (1999), *Gödels Theorems,* yayınlanmamış ders notları, s. 35.

Geometrinin Temelleri (Grundlagen der Geometrie) adlı yapıtı, Bertrand Russell'ın 1903 yılında yayınlanan *Matematiğin İlkeleri* (The Principles of Mathematics) adlı yapıtı ve yine Russell'ın, Alfred North Whitehead ile 1910, 1912 ve 1913 yıllarında üç cilt olarak ortaya koyduğu *Principia Mathematica* adlı yapıtı, matematiğin temellerinin araştırıldığı bu dönemin karakterini örnekleyen önemli yapıtlar olarak karşımıza çıkmaktadır.

Modern matematik felsefesinin temelleri yine bu dönemde atılır ve sayıların doğası, matematiksel bilginin niteliği gibi pek çok konu bu dönemden itibaren gittikçe artan bir ivme ile tartışılır. Öyle ki, bu tartışmalar sonucunda bugün *biçimselcilik* (formalizm), *mantıkçılık*, *matematiksel sezgicilik* gibi adlarla anılan bazı matematik felsefesi teorileri ortaya çıkar. Yine bu dönemde bazen matematiksel mantık olarak da anılan biçimsel mantığın temelleri atılır, matematiksel teoriler simgesel olarak ifade edilir. Ayrıca doğal sayılar aritmetiği de ilk olarak bu dönemde aksiyomatikleştirilir.

Andığımız dönem aynı zamanda matematiğin kurumsallaşmış bir bilim haline gelme sürecinin önemli bir basamağı olması bakımından da önemlidir. Bu konuda ele alabileceğimiz en önemli örnek, *Uluslararası Matematikçiler Kongreleri* (International Congress of Mathematicians) olup, ilki XIX. yüzyılın sonunda, 1897 yılında İsviçre'nin Zurich şehrinde yapılmıştır. Bu kongreler, 1. ve 2. Dünya Savaşı dönemleri hariç, başlangıcından bu yana her dört yılda bir düzenli olarak yapılmış ve matematik dünyasının ana gündemini belirlemiştir. İlk yapılışından bir süre sonra, 1919'da kurulmuş olan Uluslararası Matematik Birliği'nin (International Mathematical Union) denetimi altına giren bu kongrelere, ilerde konumuz açısından önemli olan bazı noktalarda değinilecektir.[22]

Bu tür gelişmeler, bu dönemin sadece bir yönünü ortaya koymaktadır. Yalnız bu dönemin çok ilginç başka bir yönü daha bulunmaktadır. Aynı zamanda kümeler teorisinin kurucusu olan matematikçi Georg Cantor'un teorisinin bazı çelişkilere yol açtığı Bertrand Russell tarafından iddia edilmiş ve bu olay matematik dünyasında ciddi tartışmalara yol açmıştır. Matematiğin doğasında çelişkilerin olabileceği iddiasını çürütmek için büyük araştırma programları hazırlanmıştır.

[22] Birliğin resmi web sayfası ve kongreler hakkında daha fazla bilgi için: http://www.mathunion.org/

Görüldüğü gibi bu dönem, gelecekteki matematik dünyasının gittiği yönü etkilemiş önemli bir dönemdir. Yalnız bu dönem içinde meydana gelen gelişmelerin pek çoğu konumuz dışındadır. Bu bölümde ağırlıklı olarak doğal sayıların aksiyomatikleştirilmesi, Cantor'un kümeler teorisi ve Russell'ın çelişkileri, bu dönemde tartışılmış olan matematik felsefesinin özel konuları ve Hilbert Programı incelenecektir.

1.3.3.1 Doğal sayıların aksiyomatikleştirilmesi ve Peano aksiyomları

Çoğumuz aritmetikle, ilköğretim dönemlerimizde tanışırız. Aritmetik sanki bir oyun gibidir. Bu oyunda adına doğal sayılar denilen öğeler, bu sayılar üzerinden tanımlanan dört işlem ve belli kurallar bulunur. Aritmetiksel bilgi ise, olabildiğine zorunlu ve evrensel bir bilgidir. Kim "$5 + 7 = 12$" yargısının zorunlu ve evrensel bir bilgi olmasından şüphelenebilir ki?

Felsefe tarihinde yargılar, özne hakkında yeni bir şey söyleyen yargılar ile yeni bir şey söylemeyen yargılar olarak iki farklı açıdan incelenmiştir. Analitik yargılar, özne hakkında yeni bir şey söylemeyen ve bu yüzden yapısı gereği zorunlu ve evrensel olarak doğru olan yargılardır. Örneğin "Bekar, evlenmemiş olandır" yargısı böyle bir yargıdır. Evlenmemiş olmak, bekar sözcüğünde zaten içerilmektedir. Yine "cisim yer kaplar" yargısı da analitik bir yargıdır. Çünkü cisim sözcüğü uzayda yer kaplayan şey anlamındadır ve anmış olduğumuz cümlenin yüklemi, cümlenin öznesi olan "cisim" kavramı hakkında yeni bir bilgi sunmaz. Yalnız "cisim ağırdır" yargısı analitik bir yargı değil sentetik bir yargıdır. Sentetik yargılar yüklemin özne hakkında yeni bir şey söylediği yargılardır. Yani sentetik yargılarda yapısal olarak şu durum bulunmaktadır: Yüklem, öznenin tanımında olmayan yeni bir şey söyler. Cisim sözcüğünün tanımında ağır olmak yoktur. Şu halde bu yargı, yeni bir bilgiye işaret etmektedir.

Aynı nedenden dolayı "cisim ağırdır" bilgisi *a priori* bir bilgi değil, *a posteriori* bir bilgidir. Bu türdeki bir bilgi, yapısı gereği zorunlu ve evrensel bir bilgi değildir. *A priori* bilgiler ya da başka bir değişle analitik yargılar ise, yapısı gereği zorunlu ve evrensel doğruluklardır. Peki, yargılar üzerine belirtmiş olduğumuz bu bilgilerin aritmetikle ilişkisi nedir?

Çağlar boyunca "5 + 7 = 12" yargısının analitik bir yargı olduğu düşünülmüştür. Yani "5 + 7"nin "12"yi zorunlu olarak içerdiği düşünülmüştür. O halde "12", "5 + 7" üzerine yeni bir şey söylememektedir. Yalnız Immanuel Kant'ın bu konudaki görüşleri farklıdır. Kant ünlü yapıtı *Salt Aklın Eleştirisi*'nde, 5 ve 7'nin toplamı kavramı ne kadar analiz edilirse edilsin, 12 kavramına mantıksal olarak ulaşılamayacağını savunur. O halde "5 + 7 = 12" analitik değil sentetik bir yargıdır.[23] Aslında geometri yargıları da Kant'a göre analitik değil sentetik yargılardır. Kant'ın bu konuda verdiği örnek, "iki nokta arasındaki doğru çizgi en kısa çizgidir" yargısıdır. Doğru sözcüğü ne kadar analiz edilirse edilsin, en kısa çizgi olduğu doğru kavramının içinde kendinden bulunmaz.[24]

Temel sorun bu noktada başlamaktadır. "5 + 7 = 12" yargısı da "iki nokta arasındaki doğru çizgi en kısa çizgidir" yargısı da analitik bir yargı değilse aynı zamanda yapısı gereği zorunlu ve evrensel bir bilgi de değildir. Çünkü yargının analitik olma özelliğini kaybetmesi, bilginin de *a priori* olma özelliğini kaybetmesi demektir ve *a priori* olmayan bir bilgi zorunlu ve evrensel bir bilgi değildir. Bu durumda örneğin 5 ve 7'nin toplamının her zaman 12'ye eşit olmasının, yani bu yargının zorunlu ve evrensel olmasının nedeni açıklanmalıdır. Kant'a göre bunu sağlayan şey her insanda ortak olarak bulunan, duyu algısının zaman ve mekan formlarının *a priori* bilgisi, başka bir deyişle zaman ve mekan sezgisidir. Yani aritmetik ve geometri bilgisi, algının zaman ve mekan formlarının *a priori* bilgisine dayanır ve bu formlar sayesinde oluşur. Aritmetiğin bilgisi zaman formuna, geometrinin bilgisi ise mekan formuna dayanır. Şu halde matematiksel bilgi *a priori sentetiktir*. Matematiksel bilgi sentetiktir, çünkü yeni bir bilgi verir. Matematiksel bilgi aynı zamanda *a prioridir*, çünkü bilginin dayandığı şey her insanda ortak olarak bulunan algının zaman ve mekan formunun *a priori* bilgisidir. O halde matematiksel bilgi yine zorunlu ve evrensel bir bilgidir. Kant sadece bu zorunluluğun ve evrenselliğin temelini değiştirir.

Fakat Kant'ın bu görüşü, XIX. yüzyılın sonlarında, iki büyük matematikçi Gottlob Frege ve Richard Dedekind tarafından tamamen kabul görmemiştir. Onlar, en azından geometri bilgisinin mekan formunun *a priori* bilgisine dayandığını kabul eder. Fakat aritmetiksel bilgi için aynı şey söz konusu değildir. Aritmetiksel bilgi mekan

[23] Immanuel Kant (1984), "Katkısız Aklın Eleştirisi", *Seçilmiş Yazılar*, İst. Remzi Kitabevi, s. 81.
[24] Kant, 1984: 82.

formunun *a priori* bilgisine dayanmaz. İşte bu yüzden Kant'ın iddiasının aksine aritmetik analitiktir.

Frege'nin bu konudaki görüşüne dayanak sağlayan önerme şu biçimde ortaya konulur: Aritmetik mantığa indirgenebilir. Matematik felsefesinin ana okullarından biri olan *mantıkçı* okulunun bu temel önermesinin anlamı basitçe şudur: Aritmetiği oluşturan bütün öğeler ve bütün aritmetiksel doğruluklar ve kanıtlama kuralları[25] mantıktan türetilebilir. Eğer aritmetiğin tamamen mantıktan türetilebildiği gösterilebilirse, mantığın yani saf düşünme ilkelerinin kendisi de algının zaman ve mekan formlarının *a priori* bilgisine dayanmadığı için, aritmetiksel bilginin ortaya konması için algının zaman ve mekan formunun *a priori* bilgisine ihtiyaç yoktur.[26] Richard Dedekind da Frege'nin mantıkçı görüşüne çoğunlukla katılmaktadır.[27]

Şu halde yapılması gereken şey, aritmetiksel doğrulukların tümünün mantıktan, yalnızca mantıktan türetilebileceğini gösterebilmektir. Bu konuda başarının sağlanması için ise öncelikle aritmetiği tamamen karakterize eden bir aksiyomlar kümesi ortaya koymak gerekmektedir. Eğer aksiyomlar eksiksiz ise bütün aritmetiksel doğrular bu aksiyomlardan türetilebilir. İkinci aşama ise, aritmetiği karakterize eden bu aksiyomların, zaman ve mekan formlarının *a priori* bilgisine ihtiyaç duymadan sadece mantıktan türetilebileceğini göstermektir.

XIX. yüzyıl, matematikte aksiyomatik düşünmenin yeniden ve daha etkin biçimde ortaya çıktığı bir dönemdir ve Frege ile Dedekind gibi matematikçiler bu dönemin öncülleridir. Yalnız bu matematikçilerin aritmetiği tamamen aksiyomatikleştirme çabasının tek amacı, Kant'ın aritmetiğe ilişkin fikirlerini çürütmek değildir. Bu sadece anılan çabanın teorik nedenlerinin bir kısmını oluşturmaktadır ve daha başka teorik nedenler de bulunmaktadır. Öncelikle Öklid-dışı geometrilerin ortaya

---

[25] Buna çalışmanın başında ele aldığımız matematiksel tümevarım ilkesi de dahildir. Frege'ye göre bu kanıtlama yöntemi de her ne kadar matematiğe özgü gibi görünse de saf mantıksal ilkelerden çıkar: Frege, 2008: 80.

[26]Guillermo E. Rosado Haddock (2006), *A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege*, Hampshire, Ashgate Publishing, ss. 62-66; Kevin C. Klement (2002), *Frege and the Logic of Sense and Reference*, New York & London, Routledge Publishing, ss. 4-8. Belirtmiş olduğumuz genel yoruma karşı olarak bazı akademisyenlerin, Kant ve Frege'nin aritmetik üzerine görüşleri arasında kökten bir karşıtlığın olmadığını iddia ettiğini bir not olarak belirtelim. Örneğin John MacFarlane bu görüşü, Kant ve Frege'nin *mantık* anlayışlarının farklı olduğu noktasında temellendirerek savunmaktadır: John MacFarlane (2002). "Frege, Kant, and the Logic in Logicism". *Philosophical Review* 111 (1): ss. 25-65.

[27] Byrd, 1999: 10-11; Michael Potter (2004), *Set Theory and Its Philosophy*, Oxford University Press, New York, ss. 86-87; Martin Godwyn ve Andrew D. Irwine (2003), "Bertrand Russell's Logisicm", *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge University Press, Cambridge, ss. 178-179.

çıkışı sonucunda, sadece geometriyi değil aynı zamanda aritmetiği de ilgilendiren apaçık doğruluklar anlayışında, önceki bölümlerde konu ettiğimiz bazı paradigmatik değişimler olmuştur. Öyle ki aritmetiğe ilişkin, doğruluğu apaçık gibi görünen teoremlerin bile kesin kanıtlara ihtiyacı olduğu düşünülmüştür. Bahsetmiş olduğumuz bu değişim aynı zamanda, matematiğe ilişkin pek çok önemli kavramın, örneğin fonksiyon, süreklilik, limit ve sonsuzluk gibi kavramların, daha da keskin tanımlara ihtiyacı olduğu düşüncesini de beraberinde getirmiştir. Bu konuda son olarak aritmetiğe ilişkin geleneksel kavram ve yöntemlerin, geometriye ilişkin geleneksel kavram ve yöntemler kadar kesin olmadığı düşüncesini de belirtmeliyiz. Yani tarihsel olarak aritmetiğin, Öklid'in geometriye kazandırdığı türden bir aksiyomatik temelinin olmadığı düşünülmüştür.[28]

Aslında bu noktada Frege ve Dedekind için, Öklid'in tıpkı çağlar önce geometride yapmış olduğu gibi, aritmetiğe aksiyomatik bir temel oluşturmak amacında oldukları yorumunu yapabiliriz. Bunun için Frege ve Dedekind, 1880'li yıllarda birbirlerinden bağımsız olarak doğal sayılar üzerine derin analizler yapmış ve aritmetiğin tüm doğrularının türetilebilmesi için *kümeler teorisinden* faydalanarak, uygun aksiyomlar belirlemeye çalışmıştır. Bu bölümde üzerinde duracağımız aksiyomlar ise, ünlü Peano aksiyomlarına temel olan ve Dedekind tarafından doğal sayıları karakterize etmek amacıyla ortaya konan önermelerdir. Bu önermeler aşağıdaki gibi sıralanabilir:[29]

- Doğal sayılar, bir sistem veya adına **N** diyebileceğimiz bir kümedir ve bu kümedeki öğeler, birbirini takip eden bir sıra veya dizi biçiminde bulunur.
- Bu dizideki her öğeden sonra, bu öğenin ardılı diyebileceğimiz başka bir öğe bulunmaktadır. (Bu çalışmada ardıllık bağı "A" simgesi ifade edilecektir.)
- Bu dizide hiçbir öğe iki farklı öğeye ardıllık yapmaz. (Bu dizinin hiçbir basamağında aynı anda iki öğe bir arada bulunmamaktadır.)
- Bu dizide hiçbir öğenin ardılı olmayan bir öğe vardır.

Doğal sayılar Dedekind tarafından bu şekilde karakterize edilmektedir. Görüldüğü gibi bu aksiyomlarda, bir sıra halinde bir araya gelmiş öğelerden oluşan bir kümeden bahsedilmektedir. Bu küme sonsuz sayıda öğeden oluşmaktadır. Çünkü bu kümede her öğe bir ardıla sahiptir. Aynı zamanda bu öğelerin oluşturduğu sıra, tekli düzgün bir sıradır. Çünkü kümedeki her öğenin yalnızca ve yalnızca bir ardılı

[28] Frege, 2008: 87; Byrd, 1999: 6.
[29] Byrd, 1999: 12; Potter, 2004: 89-90.

bulunmaktadır. Son olarak bu sıranın bir başlangıç noktası vardır. Çünkü bu kümeyi oluşturan öğelerden biri başka hiçbir öğenin ardılı değildir ama onun ardılları vardır. Böylece bu aksiyomlarda doğal sayılar kümesi, iyi sıralanmışlık, bir başlangıç noktasına sahip olma ve sonsuz sayıda öğeye sahip olma özellikleriyle birlikte karakterize ediliyor görünmektedir. Yalnız burada önemli bir soru ortaya çıkmaktadır: Bu aksiyomlar yalnızca ve yalnızca doğal sayıları mı karakterize ediyor?

Belli bir olgu alanını aksiyomatikleştirerek karakterize eden bir teorinin yalnızca ve yalnızca üzerine söz söylediği alanı karakterize etmesi beklenir. Bu durum 26 Ağustos 1972 tarihinde İzmir'de doğmanın belli bir kişiyi karakterize etmemesine benzetilebilir. Bu tarihte ve yerde doğmuş olan başka kişiler de bulunabilir. Dedekind'ın yukarda sıralanan aksiyomları da, doğal sayılar kümesi dışındaki başka hiçbir kümeyi karakterize etmemeli veya ediyorsa bu diğer kümeler, doğal sayılar kümesi ile aynı yapıda olmalıdır. Bu noktada aksiyomların bu özelliğe sahip olup olmadığı önemlidir ve yukarıdaki soru cümlesinin ifade ettiği sorun budur.

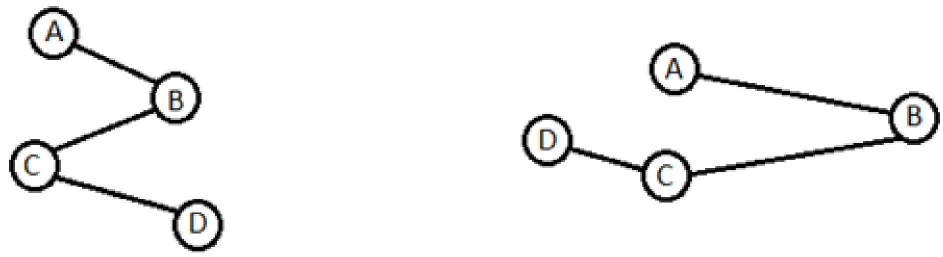
Dedekind'ın bu soruya verdiği cevap olumsuzdur. Ona göre bu dört aksiyom doğal sayılar dışında başka kümeleri de karakterize edebilmektedir. Yani, doğal sayılar kümesi dışında en az bir küme –veya model- bulunabilir ki, bu aksiyomlarda ifade edilen özelliklerin tümü, bu yeni kümede de bulunur. Bu noktada Dedekind'ın akıl yürütmesi şu biçimdedir:

N doğal sayılar kümesini olduğu gibi kapsayan ve ayrıca hem **N** kümesinin ardılı olup, hem de kendi ardılı yine kendisi olan bir "♣" öğesinin bulunduğu yeni bir kümenin olduğunu varsayalım. Bu genişletilmiş kümenin yapısı temel olarak şu biçimde modellenebilir:

$$0 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow A \rightarrow 2 \rightarrow A \rightarrow 3 \rightarrow A \rightarrow \ldots\ldots\ \clubsuit \rightarrow A \rightarrow \clubsuit$$

Dedekind'ın bu dört aksiyomunun hepsi bu genişletilmiş yeni kümede de özellik olarak bulunur. Bu durumun ciddi bir sonucu vardır. Dedekind'ın dört aksiyomu, doğal sayılar kümesinin dışında, yapısal ve biçimsel olarak doğal sayılar kümesinden farklı (örneğin "♣" gibi temelde doğal sayı olmayan *yabancı öğeleri* içeren) en az bir kümeyi daha karakterize edebilmektedir. Bu yüzden, bu dört aksiyomun karakterize ettiği farklı iki kümenin doğruları arasında da farklar vardır. Örneğin, doğal sayılar kümesinde teorem olan "hiçbir doğal sayı, kendi kendisinin ardılı değildir" önermesi bu yeni genişletilmiş kümede teorem değildir. Çünkü bu genişletilmiş kümede "♣" kendi kendisinin ardılı olmuştur.[30]

O halde Dedekind'ın bu dört aksiyomu *kategorik* değildir. Aksiyomların kategorik olması, bu aksiyomlarda ortaya konan özelliklerin tümünü taşıyan her kümenin –veya modelin- yapısının aynı olması, yani bu kümelerin *izomorfik* olması anlamına gelmektedir. İzomorfik alanlar, yapısı aynı olan alanlardır.[31] Örneğin düşünülebilecek herhangi bir A, B, C ve D öğesinin birbirine bağlanma biçimini gösteren aşağıdaki iki model izomorfiktir ve bu iki modelden birinde öğelerin birbirine bağlanmasına ilişkin teorem olan önerme, diğer modelde de teoremdir:



Şekil - 4

Yalnız hem **N** doğal sayılar kümesi, hem de "♣" öğesi ile birlikte genişletilmiş küme, her ne kadar bu dört aksiyomdan çıksa da izomorfik değildir. Öyle ki bu iki kümenin doğruları arasında farklar vardır. Bu iki küme izomorfik olmadığı için ise bu dört aksiyom kategorik değildir. Amaçlanan şey ise, doğal sayıları karakterize etmek amacıyla ortaya konan bu aksiyomlardan hangi kümeler oluşturulursa oluşturulsun, bu kümelerin doğal sayılar kümesi ile aynı yapıda olmasıdır. Bu koşul sağlanabilirse, doğal sayılar kümesinde teorem olan her önerme, aksiyomlardan oluşturulabilecek her kümede de teorem olacaktır. Başka bir ifadeyle, doğal sayılara ilişkin her teorem, onları karakterize etmek amacıyla ortaya konulan bu aksiyomlardan türetilebilecektir. Dedekind'ın bu sorunu aşmak amacıyla bulduğu çözüm, *matematiksel tümevarım ilkesi* olarak bilinen ve zaten bir süredir matematiksel teoremlerin kanıtlanmasında kullanılmakta olan ilkeyi, bu defa doğal sayılar kümesini tanımlamak amacıyla beşinci bir aksiyom olarak önceki aksiyomlara eklemek oldu. Dedekind önceki bölümlerde incelenmiş olan bu ilkenin bir aksiyom olarak önceki dört aksiyoma eklenmesiyle, anılan aksiyomların doğal sayıları karakterize ederken karşılaştığı yabancı öğelerin

---

[30] Byrd, 1999: 13-14.

[31] Zeno G. Swijtink (1999), "Categorical Theory", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, s.120; Roy T. Cook (2009), "Categorical", *A Dictionary of Philosophical Logic,* Edinburgh University Press, Edinburgh, ss.41-42.

girişi sorununun çözüleceğini düşünmüştür. Böylece bu aksiyomlardan oluşturulabilecek her küme, ancak ve ancak doğal sayılar kümesi ile aynı yapıda olup aynı doğruları taşıyabilecektir.[32]

Dedekind'ın bu beş aksiyomu ortaya koymasından bir süre sonra, 1889 yılında, ünlü matematikçi Guiseppe Peano, Dedekind'ın beş aksiyomunu temel alan ve bugün bazı kaynaklarda Peano Aksiyomları, bazı kaynaklarda ise Dedekind-Peano postülaları olarak bilinen ünlü aksiyomları ortaya koymuştur. Peano aksiyomları özünde Dedekind aksiyomlarının mantıksal bir düzen içinde ifade edilmiş halidir ve şu biçimde sıralanabilir:

1. Sıfır bir sayıdır.
2. Bir sayının ilk ardılı da bir sayıdır.
3. Sıfır hiçbir sayının ardılı değildir.
4. Aynı ilk ardıla sahip iki sayı yoktur.
5. Sıfıra ait bir özellik ve bu özelliğe sahip her sayının ilk ardılına ait bir özellik, tüm sayılara da aittir.

Görüldüğü gibi Peano aksiyomları, anlamı bilindik ve açık varsayılan "sayı", "sıfır" ve "ardılı olma" terimlerinin arasındaki mantıksal ilişkiler bütünü olarak ortaya konmuştur.[33] Bu aksiyomlar kısa bir süre sonra sembolik mantığın biçimsel dili kullanılarak inşa edilen *Peano Aritmetiği*, *Robinson Aritmetiği* gibi aritmetiksel teorilerin temelini oluşturacak ve bu aritmetik teorileri, biçimselci matematikçilerin üst-matematiksel (metamatematik) araştırmalarında kullanılacaktır. Gödel ise bu aksiyomların, bütün aritmetik doğruların kanıtı için yetersiz, yani eksik olduğunu gösterecektir. Başka bir ifade ile Dedekind-Peano aksiyomları sanıldığının aksine, kategorik değildir. Fakat biz bu noktada kümeler teorisine odaklanacağız.

1.3.3.2 Cantor'un kümeler teorisi ve Russell paradoksu

Kümeler konusu aslında sınıflar, kategoriler, türler gibi farklı adlar altında Antik Greklerden bu yana bilinse de, XIX. yüzyılın sonlarına doğru matematiksel araştırmaların merkezine yerleşmiştir. Bu dönemde özellikle doğal sayılar ve real sayıların araştırılmasında, kümeler ve kümeler konusu ile ilişkili olan fonksiyon, dizi

---

[32] Byrd, 1999: 14-17.
[33] Nagel ve Newman, 2008: 92.

gibi kavramlar kilit rol oynamıştır. Bu alanda XIX. yüzyılın sonlarında yapılan öncü nitelikteki çalışmaların ise bir mantıkçı ve matematikçi olan Georg Cantor'dan (1845–1918) geldiği görünmektedir. Cantor'un, dönemin matematikçilerini oldukça etkileyen çalışmalarının konumuzla ilişkisi ise, matematiğin temelleri ve doğası ile ilgilidir.

Cantor'un bu dönemde kümeler üzerine yaptığı ve ortaya koyduğu çalışmaların, dönemin matematikçilerini etkilediği açıkça görülmektedir. Bu çalışmaların özellikle "sayılabilirlik" ile ilgili olanları, dönemin matematikçilerine kullanışlı gelmiştir. Yalnız bir süre sonra Bertrand Russell, Cantor'un ortaya koyduğu düşüncelerin, bazı çelişkili matematiksel önermelere yol açtığını iddia etmiştir. Bu ise matematiğin çelişkili bir doğası olabileceği endişesini ortaya çıkarmıştır. Matematiğin çağlar boyunca kesin ve tutarlı bir bilim olarak değerlendirildiğini hesaba katarsak, bunun ne kadar önemli bir endişe olduğu açıktır. Öyle ki bu endişe, XX. yüzyılın başlarında biri Russell tarafından diğeri David Hilbert (1862–1943) tarafından başlatılan iki büyük projeye neden olmuştur. Yalnız biz bu noktada Cantor'a geri döneceğiz.

Cantor'un 1875'ten sonraki dönemdeki çalışmaları genel olarak doğal sayılar kümesi, tam sayılar kümesi, real sayılar kümesi gibi sonsuz öğeli kümelerle ilgiliydi. Yalnız bu kümelerin öğe sayısı her ne kadar sonsuz olsa da, bunlardan biri veya bir kaçı diğerlerinden daha fazla öğeye sahip olabilir mi? Örneğin, doğal sayılar kümesi her ne kadar çift doğal sayılar kümesini kapsasa da, bu iki küme aynı sayıda öğeye sahiptir:

Doğal Sayılar		Çift Doğal Sayılar
1	⇔	2
2	⇔	4
3	⇔	6
.	⇔	.
.	⇔	.
S	⇔	2S
.		

Yukarıdaki tabloda, iki taraftaki sayılar da sonsuza kadar uzatılabilir. Yalnız doğal sayılar kümesindeki her S sayısına karşılık, çift doğal sayılar kümesinde bir 2S sayısı bulunacaktır. Bu yüzden her iki küme sonsuz ve aynı sayıda öğeye sahiptir. Bu noktada "bütün herhangi bir parçasından büyüktür" biçimindeki çok eski tez çürümüş görünüyor.[34] Aynı ilişki, doğal sayılar ile tam sayılar kümesi arasında da vardır. Tam sayılar kümesi, her ne kadar doğal sayılar kümesini kapsıyor görünse de, iki kümenin de eleman sayısı aynıdır:

Doğal Sayılar		Tam Sayılar
1	⇔	-1
2	⇔	1
3	⇔	-2
4	⇔	2
5	⇔	-3
6	⇔	3
.	⇔	.
.	⇔	.
2S-1	⇔	-S
2S	⇔	S
.	⇔	.

Görüldüğü gibi, tam sayılar kümesindeki her S sayısı için doğal sayılar kümesinde 2S karşılığı, her –S sayısı için ise 2S-1 karşılığı bulunmaktadır. Yani bu iki kümenin öğe sayılarının eşitliğini sağlayan bağıntılar, daha teknik bir dille belirtirsek bu iki kümenin birebir denkliğini sağlayan fonksiyonlar bulunmaktadır. Şu halde doğal sayılar kümesi ile tam sayılar kümesi aynı öğe sayısına sahip sonsuz öğeli kümelerdir.

Bu kümelerin öğe sayısı (teknik adıyla kardinal sayısı veya sayal sayı) $\aleph_0$ (alef sıfır)[35] ile gösterilir. $\aleph_0$ en küçük sonsuz kardinal sayısı olarak kabul edilir. Kesirli sayılar, doğal sayılar ve tam sayıların öğe sayısı budur. Bu konu, kümelerin öğelerinin sayılabilirliği konusuyla da ilişkilidir. Matematikte bir küme eğer sonlu sayıda öğeden oluşuyorsa veya sonsuz sayıda öğeden oluşup bu öğelerin sayısı doğal sayılar kümesinin öğe sayısı olan $\aleph_0$ sayısına eşitse, bu kümenin öğeleri sayılabilir; başka bir deyişle, numaralandırılabilir olarak kabul edilir.[36]

Peki, bu neden önemlidir? Doğal sayılar kümesi ile tam sayılar kümelerinin öğe sayıları aynı görünüyor. Yalnız durum real sayılar kümesi hesaba katıldığında

[34] Cemal Yıldırım (2004) *Bilim Felsefesi,* 9. Basım, Remzi Kitabevi, İstanbul, ss. 39-40.

[35] "א" İbrani alfabesinin ilk harfidir. Matematikte sonlu öğe sayısına sahip kümelerin öğe sayıları, 1, 2, 3 vb. gibi olağan sayılarla gösterilirken, sonsuz öğeye sahip kümelerin öğe sayısı alef harfi kullanılarak belirtilir. "$\aleph_0$" ilk sonsuz öğe sayısıdır (daha teknik bir dilde, *kardinal sayısı*). $\aleph_0$ sayısını $\aleph_1$, $\aleph_2$ gibi sayılar takip etmektedir: Roy T. Cook (2009), "א", s.4 ve "Cardinal Number", ss.40-41.

[36] Roy T. Cook (2009), "Countable", s.4.

değişmektedir. Çünkü Cantor, real sayılar kümesinin doğal sayılar kümesinden daha fazla öğeye sahip olduğunu da kanıtlamıştır. Bunun için Cantor, *köşegenleştirme yöntemi* (diagonalization) olarak bilinen ünlü yöntemini geliştirmiştir. Yöntem basitçe aşağıdaki gibi işlemektedir.

Doğal Sayılar		Real Sayılar
1	⇔	0.**2**3423423….
2	⇔	0.3**4**234234….
3	⇔	0.43**2**43243….
4	⇔	0.242**2**4224….
5	⇔	0.4234**2**342….
6	⇔	0.22222**2**22….
7	⇔	0.333333**3**3….
8	⇔	0.4444444**4**….
.	⇔	…
.	⇔	…

Eğer real sayılar ile doğal sayılar kümesinin öğe sayısı aynı olsaydı, real sayılar kümesinin bütün öğeleri sayılabilir durumda olurdu. Bu durumda örneğin 0 ile 1 sayısı arasındaki real sayılar da sayılabilirlik özelliğine sahip olur ve yukarıdaki tabloda olduğu gibi bire-bir eşleme yapabilirdik. Yalnız köşegenleştirme yöntemi, bunun yanlış olduğunu göstermektedir. Tablodaki real sayıların bazı rakamları koyu harflerle vurgulanmıştır. Bu vurgulama, birinci sayının 0'dan sonraki birinci basamağı, ikinci sayının 0'dan sonraki ikinci basamağı vb. kısaca S'inci sayının 0'dan sonraki S'inci basamağı kuralıyla yapılmıştır. Böylece elimize şu rakamlar geçmiştir:

2 4 2 2 2 2 3 4 ….

Şimdi bu sayılardan 2 olanları 4'sayısı ile, 2 olmayanları ise 2 sayısı ile değiştirdiğimizi düşünelim. Böylece elimize, listede olmayan yeni bir real sayı geçer:

0.42444422….

Bu sayı, tablodaki bütün real sayılardan farklıdır. Çünkü bu sayının 0'dan sonraki ilk basamağındaki rakam (4) tablodaki birinci real sayının 0'dan sonraki ilk basamağından (2), ikinci basamağındaki sayı (2) tablodaki ikinci real sayının 0'dan sonraki ikinci basamağındaki sayıdan (4) vb. bu sayının 0'dan sonraki S'inci sayısı, tablodaki S'inci real sayıdan farklıdır. Şu halde bu listedeki öğelerle aynı nitelikte olan (real sayı olmak) yalnız bu öğelerin hepsinden farklı olan ve listenin hiçbir yerinde gösterilemeyecek yeni bir real sayı elde edilmiştir. Ayrıca tablo ne kadar uzun olursa olsun, herhangi bir doğal sayı ile birebir eşlenemeyecek en az bir real sayı bulunabilir. İşte bu sayının varlığı yüzünden doğal sayılar ve real sayılar bire-bir eşlenemez. Sonuç olarak, real sayılar kümesinin öğe sayısı doğal sayılar kümesinin öğe sayısı olan $\aleph_0$'dan her zaman en az bir fazladır - real sayılar kümesinin sonsuzun ötesinde sayıda öğesi vardır ve bu öğeler sayılamaz.[37]

Peki, öğe sayısı doğal sayılar kümesinin öğe sayısından fazla olan başka kümeler bulunabilir mi? Bir kümenin alt kümelerinin kümesinden bahsedildiğinde, bu kümenin öğeleriyle oluşturulabilecek her öğeden oluşan küme akla gelir. Örneğin:

$K = \{1,2\}$

kümesinin alt kümelerinin kümesine A(K) diyelim. Bu kümenin görüntüsü şu biçimdedir:

$A(K) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, K \}$

Böylece iki öğeli K kümesinin alt kümelerinin kümesi olan A(K) kümesinin dört öğesi olduğu görülmektedir. Yani A(K) kümesinin öğe sayısı, K kümesinin öğe sayısından fazladır. Aslında bu durum, K kümesi gibi sonlu sayıda öğeden oluşan her küme için geçerlidir. Bir kümenin öğe sayısı x ise bu kümenin alt kümelerinin sayısının 2^x olduğu bilinir. Örneğin K kümesi 3 elemanlı bir küme olsaydı, A(K) kümesinin öğe sayısı 2^3, yani 8 olurdu.

Peki bu durum, doğal sayılar kümesi gibi sonsuz sayıda öğeden oluşan kümeler için de geçerli midir? Cantor, *Cantor'un Teoremi* (Cantor'un Köşegen Teoremi) olarak bilinen teorem ile bunu kanıtlamıştır. Yani, doğal sayılar kümesi **N**'in öğe sayısı olan $\aleph_0$, **A(N)** kümesinin öğe sayısı olan $2^{\aleph_0}$'dan küçüktür. Daha teknik bir deyişle, doğal sayılar kümesinin öğeleri ile doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin kümesinin öğeleri *birebir* eşlenemez. Bu eşlemede doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin kümesinde her zaman bazı öğeler açıkta kalacak ve bu öğelerin bir doğal sayı karşılığı olmayacaktır. Bunun da ötesinde, A(N) kümesinin öğe sayısından daha fazla öğeye sahip başka kümeler de bulunabilir. Örneğin **A(A(N))** kümesi vb. Kısaca hiçbir küme, öğe sayısı

[37] Roger Penrose (2000), *Kralın Yeni Usu - I / Bilgisayar ve Zekâ,* 2. Basım, Tubitak Popüler Bilim Kitapları 52, Ankara, ss. 98-99; W. D. Hart (2010), *The Evolution of Logic,* Cambridge University Press, Cambridge ,ss.14-15.

bakımından en büyük küme olamaz. İşte Cantor'un Teoremi olarak bilinen teorem, düşünülebilecek her kümede geçerli olacak şekilde genelleştirilmiş olan bu önermedir.[38]

Fakat Bertrand Russell'ın XX. yüzyılın başında derin tartışmalara yol açmış ünlü paradokslarından biri (*Russell paradoksu*) tam olarak bu önerme ile ilgilidir. Cantor'un Teoremi'ne göre düşünülebilecek her kümeden daha büyük kümeler bulunmaktadır. Peki, aynı teorem bütün kümelerin kümesi diyebileceğimiz evrensel **E** kümesi için de geçerli midir? **E** kümesi, düşünülebilecek her kümeyi kapsama özelliğine sahip olan, bir bakıma kümelerin kümesidir. Cantor'un Teoremi'ne göre, örneğin bu kümenin alt kümelerinin kümesi olan **A(E)** kümesinin öğe sayısı veya diğer değişle kardinalitesi, **E** kümesinin kardinalitesinden fazla olmalıdır. Yalnız **E** kümesi tanımı gereği, düşünülebilecek her kümeyi, bunun sonucu olarak **A(E)** kümesini de kapsamalıdır. Şu halde **A(E)** kümesinin kardinalitesi **E** kümesinin kardinalitesinden nasıl fazla olabilir ki?[39]

Bu noktada bir ara tartışma olarak Cantor'un, Russell'ın bahsettiği türden bir evrensel **E** kümesinin var olamayacağını, asıl böyle bir kümenin var olacağını düşünmenin çelişkiye götüreceğini iddia ettiğini bir not olarak belirtelim. Temelde bir küme, belli bir özelliğe sahip olan nesnelerin gruplandırılmasıdır. Örneğin filozoflar kümesi, filozofluk özelliğine sahip kişileri karakterize eder. Yalnız filozofluğun kendisi bir filozof değildir. Evrensel küme örneğinde ise durum farklıdır. Çünkü bu kümenin kendisi de bir kümedir. O halde bu kümenin bir öğesi de kendisi olmalıdır. Bu durum küme olmanın doğasına aykırıdır ve sonuç olarak evrensel bir küme var olamaz.[40]

Artık Russell paradoksuna geri dönelim ve kendi kendisinin öğesi olmayan kümeleri düşünelim. Örneğin filozoflar kümesi, kalemler kümesi, boş küme vb. kümeler bu türden kümelerdir. Şimdi bu kümelerin hepsini karakterize eden bir **R** kümesi (Russell kümesi) düşünelim. **R** kümesi, kendi kendisinin öğesi olmayan bütün kümelerin kümesidir. Yani bir kümenin **R** kümesinin elemanı olması için, bu kümenin bir öğesinin kendi kendisi olmaması lazım. Örneğin **E** kümesi bu nedenle **R** kümesinin

---

[38] Roy T. Cook (2009), "Cantor's Theorem", ss.39-40; Byrd, 1999: 27-28; Penelope Maddy (1999), "continuum problem", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, s.182; Potter, 2004: 158-159 ve 206; James R. Brown (2008), *Philosophy of Mathematics - A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Second Edition, Routledge, New York, ss. 179-182.
[39] Byrd, 1999: 28-29.
[40] Roy T. Cook (2009), "Cantor Paradox", s. 39; Byrd, 1999: 30.

bir elemanı olamaz; **E** kümesinin öğelerinden biri kendisidir. Artık şunu soruyoruz: **R** kümesi kendi kendisinin bir öğesi midir? Yani aşağıdaki hipotezin doğruluk değeri nedir?

R ∈ **R**

İşte doğruluk değeri karar bekleyen bir matematik hipotezi. Bir an hipotezin yanlış olduğunu, R kümesinin kendi kendisinin öğesi olmadığını düşünelim. Fakat böyle bir durumda R kümesi kendi kendisinin öğesi olmayan kümelerin kümesi olduğu için bu kümenin bir öğesi de kendisi olması gerekir. Şimdi hipotezin doğru olduğunu, R kümesinin kendi kendisinin bir öğesi olduğunu düşünelim. Fakat yine R kümesi kendi kendisinin öğesi olmayan kümelerin kümesi olduğu için bu kümenin bir öğesi kendisi olmaması gerekir. Yani:

- **R** kendi kendisinin bir öğesidir ancak ve ancak kendi kendisinin öğesi değilse.
- **R** kendi kendisinin bir öğesi değildir ancak ve ancak kendi kendisinin bir öğesiyse.

Bu durum, **R** kümesi diye bir küme gerçekten varsa, en azından klasik mantıkta bir çelişkidir. Çünkü hipotez doğru ise yanlış, yanlış ise doğrudur.

Bu sonuç ve dönemin matematikçilerini olduğunu kadar, mantıkçılarını da sarsar. Kümeler teorisinde çıkan bu çelişkili sonuç, mantığa da yansımıştır. Aritmetiğe kümeler teorisi yardımıyla sağlam bir temel kurmaya çalışan Frege'yi ele alalım. Frege bu çelişkiyi *Aritmetiğin Temel Yasaları* yapıtının birinci cildini yayınladıktan kısa bir süre sonra Russell'dan kendisine gelen bir mektupla öğrenmişti. Bu yapıt Frege'nin, tıpkı *Aritmetiğin Temelleri* yapıtı gibi, aritmetiğin temel ilkelerinin sadece ve sadece mantıktan türetilebileceğini gösterme projesini sürdürdüğü yapıttı. Fakat Russell paradoksu, yapıtta geçen *5. Temel Yasa*'nın da sorunlu bir yasa olduğunu gösteriyordu. Basitçe, her kavramın bir kaplamı (ki buna kümesi diyebiliriz), olduğunu ve aynı kaplama sahip olan kavramların aynı kavramlar olduğunu iddia eden bu yasa, temeline aldığı kümeler teorisinde çelişkiler olduğu için sorunlu bir yasa olmalıydı. Frege bu durumu düş kırıklığıyla birlikte kabul etmiştir.[41]

[41] H.Bülent Gözkan "Çevirenin Sunuşu: Frege ve Aritmetiğin Temelleri", Frege, Gottlob (2008), *Aritmetiğin Temelleri,* ss. 65-66; Roy T. Cook (2009), "Basic Law V", s.30.

1.3.3.3 Russell'ın projesi

Şimdiye kadar incelenen konular sonucunda, Russell'ın, Frege'nin görüşlerine tamamen karşı olduğu ve hatta matematiğin temelleri konusunda karşı cephelerde bulunduğu düşünülebilir. Fakat durum böyle değildir. Russell, tıpkı Frege gibi, aritmetiğin sağlam temellere ihtiyaç duyduğunu düşünüyordu. Ayrıca Frege'nin aritmetiğinin tamamen mantıktan türetilebileceğini gösterme projesini de sürdürecekti. Yalnız bu defa ana güdüleyici, Kant'ın sayıların neliği üzerine görüşlerini çürütmek için değil, kendi bulduğu Russell paradoksu türünden çelişkileri matematiğin dışına atmak ve onu çelişkisiz, yani tutarlı bir bilim olarak temellendirebilmekti. Russell'ın, Alfred North Whitehead ile birlikte kaleme aldığı *Principia Mathematica* bu tür kaygılarla ortaya çıkmıştır.[42]

Çalışmamız açısından bu yapıtın kısaca değineceğimiz iki önemi bulunmaktadır. Birincisi bu yapıtta sunulan ve *tipler teorisi*dir. Tipler teorisi, Cantor'un kümeler teorisi (diğer deyişle *naif kümeler teorisi*) içinde Russell paradoksu türünden çelişkilerin oluşturulmasını önlemek amacıyla geliştirilen bir sistemdir. Bu sistemde kümeler ve nesneler belirli tipler biçiminde bulunmaktadır. Yalnız Russell bu tipler arasında bir tür hiyerarşi kurmuştur. Hiyerarşinin en altında kümeler değil, nesneler bulunmaktadır. Onun da üzerinde ise birinci dereceden kümeler bulunur ve bu şekilde devam eder. Her nesne veya küme, belli bir tiptedir ve bir küme, yalnızca daha alt tipteki kümeleri veya nesneleri içerebilir. Ayrıca hiçbir küme kendi kendisini içeremez. Bir kümeyi içerecek tek şey daha üst tipteki bir kümedir. Cantor'un kümeler teorisinde çelişki çıkaran Russell kümesi gibi kümeler de bu sistemde düşünülemez. Çünkü bu küme sistemde belirtilen hiçbir tipe ait değildir. Böylece Russell, kümeler ve nesneler arasında yapay bir hiyerarşi kurarak, Russell paradoksu gibi çelişkilerin kümeler teorisinin dışına atılmasını sağlamıştır.[43]

Principia Mathematica'nın konumuz açısından ikinci önemi, matematik felsefesinde mantıkçı okulun en önemli yapıtlarından biri olmasıdır. Bu noktada, daha önceki bölümlerde küçük bir giriş yaptığımız mantıkçı yaklaşımı daha fazla tanımamız

---

[42] Hofstadter, 2001: 63-65.

[43] Alasdair Urquhart (2003), "The Theory of Types", *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge University Press, Cambridge, ss. 293-297; Hofstadter, 2001: 65; Roy T Cook (2009), "Type Theory", ss. 298-299.

gerekiyor. Aritmetiğin (ve hatta bütün matematiğin) mantıktan türetilebileceği veya başka bir deyişle matematiğin mantığa indirgenebileceği iddiası aslında nedir? Bu iddia, yani mantıkçılık, temelde şu iki iddiayı savunmaktır:

1. Bütün (veya bazı) matematiksel kavramlar, belli kurallara göre bir araya getirilmiş saf mantıksal kavramlar veya kavram serileri olarak gösterilebilir. Diğer bir değişle, matematiğin söz varlığı, mantığın söz varlığının sadece bir kısmından başka bir şey değildir.
2. Bütün (veya bazı) matematiksel teoremler, mantığın (tümdengelimli) çıkarım kuralları kullanılarak, saf mantıksal aksiyomlardan türetilebilir. Başka bir ifadeyle, matematiksel teoremler, mantıksal teoremlerin bir alt kümesidir.[44]

Russell, bu konuda daha da iddialıdır. Russell'a göre mantıkçılık yaklaşımının temel gayesi, *"bütün arı matematiğin tamamen mantıksal öncüllerden çıkarılabileceğini ve yalnızca mantıksal terimlerle tanımlanabilen kavramları kullandığını"* göstermektir.[45] Bu önermenin ne kadar iddialı olduğunu görmek için şu soruya odaklanılabilir: Matematiksel akıl yürütme nedir? Yani bir matematiksel iddia nasıl bulunur ve nasıl kanıtlanır? Çalışmanın ilk bölümlerinde, bir örnek olarak matematiksel tümevarım ilkesini kullanıp bir hipotezin nasıl doğrulanabileceği incelenmişti. Yalnız her hipotezin bu ilke kullanılarak kanıtlanamayacağı açıktır. Ayrıca çağlar boyunca çok çeşitli matematiksel kanıtlama yöntemleri ortaya çıkmıştır ve bu durum aslında matematikçilerin çok çeşitli akıl yürütme biçimlerini kullandığını gösterir. Yalnız genel olarak mantıkçı okulun ve Russell'ın iddiaları doğruysa, bu durum, matematiksel akıl yürütmenin tamamen mantıksal akıl yürütmeye indirgenebileceği anlamına da gelir. Daha açık bir ifadeyle bütün matematiksel çalışmalar, temelde (sembolik) mantığın bir alt dalıdır. İşte Russell'ın projesi bunu göstermektir ve *Principia Mathematica* bu projenin somutlaşmış halidir.

---

[44] Harold T. Hodes (1999), "Logicism", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, s.517.

[45] Godwyn ve Irwine, 2003: 171. Russell'ın bu görüşünün oluşmasında, Peano'nun da tıpkı Frege kadar etkili olduğunu belirtmeliyiz. Russell, Dedekind aksiyomlarını mantıksal olarak ifade etmiş olan Peano'nun bu çalışmalarından, 1900 yılında Paris'te yapılan kongrede haberdar olmuştur. Aslında Peano, matematiğe tamamen mantıksal bir temel bulma gayesinde olmamıştır. Fakat Russell'ı harekete geçiren olaylardan biri Peano'nun çalışmalarını haber almasıdır: Thomas Baldwin (2001) "Bertrand Russell", *Blackwell Companions to Philosophy: A Companion to Analytic Philosophy,* ed. A. P. Martinich ve David Sosas, Blackwell Publishers Ltd, Oxford, s.24; Tucker McElroy (2005), "Peano, Giuseppe", s.206.

Bütün matematiksel çalışmaların temelde mantığın bir alt dalı olduğu fikri, matematiksel kanıtlama konusunu da mantıksal kanıtlama konusuna dönüştürür. Fakat bununla kalmaz. Matematiksel teorilere ilişkin tutarlılık ve eksiksizlik sorunları da artık temelde mantığın sorunları haline gelir. Bu durumda örneğin aritmetiğin doğasında çelişkiler olduğunu iddia etmek, mantığın doğasında çelişkiler olduğunu iddia etmek anlamına gelir. Peki, matematiğin tamamen mantığa indirgenebileceğini göstermek, matematiğin tamamen çelişkisiz, yani tutarlı olduğunu mutlak olarak kanıtlar mı? Cevap olumsuzdur. Bu yaklaşım tutarlılık soruna nihai bir çözüm sağlamaz. Çünkü aslında sorun daha da genel bir biçimde ortaya çıkar: Bütün matematiği kapsadığı düşünülen mantıksal sistemin (*Principia Mathematica Sistemi)* kendi tutarlılığı.[46]

Russell'ın mantıkçı projesi ne kadar büyük ve iddialı olsa da geniş kabul görmez. Özellikle 1920'li yıllardan itibaren sönükleşir ve takipçileri azalır. Bu durumun farklı nedenleri vardır. *Principia Mathematica'*da ortaya konulan karmaşık sistemin, matematiksel kanıtlama konusunda matematikçilere yeterince kullanışlı gelmemesi bu nedenlerden biridir. Yalnız bundan daha da önemlisi, dönemin en saygın ve etkili birkaç matematikçisinden biri olan ve matematik felsefesinde formalist akımın en önemli temsilcisi olan David Hilbert'in ortaya koymuş olduğu yeni bir projenin ortaya çıkmasıdır. Özellikle Hilbert'in bireysel çabaları sonucunda matematikçilerin ilgisi yoğun bir biçimde bu projeye kaymıştır.

1.3.3.4 Hilbert Programı

Russell'ın öne sürdüğü türden bir evrensel kümenin varlığını kabul etmek, gerçekten de kümeler teorisinde çelişkiler çıkarmaktadır. Yalnız Cantor'un öne sürdüğü türden sonsuz ötesi sayıda öğelere sahip kümelerin varlığını öne sürmek de bir o kadar ilginç ve iddialıdır.

Matematiksel Platonculuk temel olarak, matematiksel nesnelerin onu düşünen insan zihninden, ayrıca zamandan ve mekandan bağımsız olarak var olduğunu iddia eden felsefi görüştür. Bu görüş matematiğe bir bakıma, klasik bir felsefi tartışma olan *tümeller sorunu* tartışmasında *kavram gerçekçisi* bir tutumla yaklaşmaktır. Bu bakımdan matematiksel nesneler, örneğin kümeler, sayılar vb. kendinde nesneler olarak

[46] Nagel ve Newman, 2008: 34.

vardır. Cantor ve Russell'ın kümelerine Platoncu bir gözle bakıldığında, bu kümelerin varlığı konusunda da bir sorun yoktur. Yalnız böyle bir görüş çerçevesinde evrensel küme **E**, kendi kendisinin öğesi olmayan kümelerin kümesi **R** gibi kümelerin varlığının kabul edilmesi elbette çelişki doğurur.

Diğer taraftan, konuya *biçimselci* (formalist) görüş çerçevesinde bakıldığında bambaşka bir tablo ile karşılaşılır. Biçimselcilik, matematiğe bir bakıma tümeller sorunu tartışmasında adcı (nominalist) çerçevede yaklaşmaktır. Sayılar, kümeler vb. soyut kavramlar kendinde nesneler olarak yoktur. Matematiğin temel nesneleri, rakamlar, işaretler, simgelerdir. Matematik ise bu nesneler üzerine kurulan bir oyundur. Bu biçimselci bakış açısının anlaşılması için bazı araştırmacılar satranç ile biçimselci matematik anlayışı arasında benzerlikler kurmuştur.[47] Satrançta şah, vezir, at, kale gibi öğeler olsa da bu öğeler, gerçek bir şahı, kaleyi vb. işaret etmezler. Ayrıca oyunun oynandığı zemin ise gerçek bir savaş alanına işaret etmez. Oyundaki bu öğeler, belli kurallara göre hareket eden birer parçacıktan başka bir şey değildir. Şah taşı gerçekten bir şah olduğu için mat olmaz, oyunun sabit kuralları gereği mat olur. Matematik de tıpkı satranç gibi bir oyundur. Yalnız satrançtan daha büyük ve kapsamlı bir oyundur. Cantor ve Russell'ın varsayımlarına bu çerçeveden bakıldığında, sonsuz ötesi sayıda öğeye sahip kümelerin veya diğer taraftan bir evrensel kümenin gerçekte var olmadığını ileri sürüp ikisini de rafa kaldırmak mümkündür.

David Hilbert bir biçimselcidir. Ondan, biçimselci görüşünün temel varsayımları gereği Cantor'un teorisini ve Russell'ın paradoksunu sözde varsayımlar ve sorunlar olarak değerlendirmesi beklenebilir. Bu en azından Russell paradoksu için geçerlidir. Fakat Hilbert, Cantor'un kümeler teorisi hakkındaki görüşünü şu biçimde ifade etmiştir: *"Kimse bizi Cantor'un bizim için yarattığı cennetten kovamaz."*[48]

Hilbert, ortaya konulduğu dönemde çok fazla tartışma çıkaran bu teoriyi dışlamamıştır. Çünkü o, Kantçı ve araçsalcı görüşleri kabul eden biri olarak geleneksel biçimselcilerden ayrılır ve biçimselci okulun geleceğine yeni bir yön verir. Bu noktada Hilbert Programı'nın ve bu programın nihai amaçlarının anlaşılması için, Hilbert'in kendisi ve matematiğin temellerine ilişkin görüşleri incelenecektir.

[47] Brown, 2008: 68; Nagel ve Newman, 2008: 34.
[48] Michael J. Bradley (2006), *Modern Mathematics: 1900-1950,* Chelsea House, New York, s.10; Brown, 2008: 70.

David Hilbert (1862–1943), XIX. yüzyılın sonu ve XX. yüzyılın başında, matematik dünyasının hakim, etkili ve gündemi belirleyen matematikçilerinden biri olmuştur. Aritmetik, geometri, matematiksel analiz, teorik fizik gibi alanlar dışında matematik felsefesi gibi pek çok alana katkı sağlamıştır. Ününü özellikle 1899'da yayınlanan ve geleneksel Öklid geometrisinin tutarlılığını kanıtlamak için, onu yeniden aksiyomatikleştirdiği *Geometrinin Temelleri* (Grundlagen der Geometrie) yapıtıyla elde eder. Yalnız bundan daha fazla tanınan çalışmaları da olmuştur. Örneğin XX. yüzyılın başında, 1900 yılındaki Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde, matematiğe ilişkin o dönemde henüz çözülmemiş 23 sorun derlemiş ve sunmuştur.[49] Sunulan bu sorunlar, Goldbach Hipotezi'nin kanıtlanması gibi daha dar kapsamlı sorunları içermekle birlikte, aritmetiğin tutarlılığının tamamen kanıtlanması (2. sorun) gibi daha geniş kapsamlı sorunları da içermektedir. Böylece Hilbert, matematiğin bir bütün olarak ilerlemesi amacıyla, matematikçilere uzun yıllar boyunca yürünecek bir yolu göstermiştir. Bugün bu sorunlardan bazıları çözülmüş, bazıları çözülememiş, bazılarının ise çözülemeyeceği kanıtlanmıştır.[50]

Hilbert'in matematik felsefesinde ve matematiğin temelleri konusunda biçimselci cephede durduğunu yalnız Cantor'un kümeler teorisine herhangi bir biçimselciden daha farklı biçimde yaklaştığı belirtilmişti. Kümeler teorisinde tartışmalı olan konunun sonsuz ve sonsuz ötesi kavramları olduğu açıktır. İlginç bir şekilde sonsuzun üzerine düşünmek, geçmişte de paradokslara yol açmıştır. Örneğin Elea'lı Zenon'un paradoksları (Achilles ve kablumbağa vb.) buna örnektir.

Bu noktada temel bir soru ortaya çıkar: Matematikte "sonsuz" düşüncesine nasıl yaklaşılmalıdır? Daha açık bir ifadeyle, matematiksel nesnelere ilişkin olan ve içeriğinde "sonsuz" düşüncesini barındıran önermelerin bir doğruluk değeri var mıdır? Ayrıca bu önermeler matematiksel çalışmaların konularına gerçekten dahil midir?

---

[49] Bu 23 sorunun tamamı, derlenişi, sunuluşu ve güncel durumu ile ilgili geniş bir inceleme için bkz: Umberto Bottazzini (2011), "Hilbert's Problems: A Research Program for Future Generations", *Mathematical Lives: Protagonists of the Twentieth Century From Hilbert to Wiles*, translated by Kim Williams, Springer, Heidelberg, ss.1-10.

[50] Tucker McElroy (2005), "Hilbert, David", s.135-137; Bradley, 2006: 1-13; Michael Defletsen (1999), "Hilbert, David", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, ss. 381-382.

Hilbert bu türden önermelerin doğruluk değeri konusuna -büyük olasılıkla 1880-84'te- Königsberg Üniversitesi'nde tahsil yapmış olduğu yıllarda tanışmış olduğu- Kantçı görüşler çerçevesiyle yaklaşır. Kant'ın aritmetik ve geometri bilgisi üzerine görüşleri Peano aksiyomlarının incelendiği bölümde kısaca anılmıştır - bu alanlar üzerine bilgimiz algının zaman ve mekan formlarına dayanır. Peki, sonsuzun tam bilgisi algılarımıza ve sezgilerimize açık mıdır? Ne kadar uzağa gitsek de bir adım ötesine gidebiliriz. Ne kadar sayı saysak da, bir fazlasını sayabileceğimizi düşünebiliriz. Kısaca evrene ilişkin ne kadar fazla deneyim sahibi olsak da, bir fazlasına sahip olabileceğimizi düşünebiliriz. Yalnız bunlar tam olarak sonsuzluk ideasını, yani bir bütün olarak *fiili* sonsuzluğun bilgisini elde edebileceğimizi göstermez. Gerçek veya fiili sonsuzluk, algı ve sezgilerimize kapalıdır. Diğer taraftan Kantçı anlamda, her deneyimimizden sonra bir fazla deneyim elde edebileceğimiz anlamında bir *olası* sonsuzluktan söz edilebilir.[51]

Bu Kantçı görüş, Hilbert'in matematiği, konusu ve doğruluk değeri bakımından iki kısma ayırmasında etkili olur. Bu alanlardan birincisi algılarımıza açık olan sonlu alandır. Bu alanın önermeleri somut ve anlamlıdır. Ayrıca kesin olarak bilinebilirler. Doğru veya yanlış diyebileceğimiz bir doğruluk değeri vardır. Şu biçimdeki bir diziyi ele alalım:

| | | | | | |

Bu dizinin örneğin | | | | dizisi ve | | | dizisinin bir birleşimi olması algıya açıktır. Bunu "4 + 3 = 7" önermesi biçiminde de gösterebiliriz. Bu önerme, ne dilsel bir doğruluk ne de Platoncu ideler dünyasına ait bir doğruluktur. Bu önerme algısal bir doğruluğu ifade eder ve kesinliği algının bir formu olan zamanın *a priori* bilgisine dayanır. Aynı zamanda somut ve anlamlıdır.[52] Bu bakımdan örneğin, "0 = 0", "12+13=25" gibi önermeler de sonlu alana aittir ve bir doğruluk değeri vardır. Bu tipte önermeler gerçek matematiği oluştururlar.[53]

Diğer taraftan, Cantor'un kümeler teorisinin varsayımları fark edilebileceği gibi bunlardan ayrılmaktadır. Bir örnek olarak doğal sayılar ele alınabilir. Doğal sayıların sonsuzluğundan bahsedildiğinde, çoğunlukla her saydığımız sayıdan sonra, bir fazlasını daha sayabileceğimiz anlamında olası bir sonsuzluktan söz edilir. Yalnız Cantor'un

---

[51]Brown, 2008: 69-70.
[52]Richard Zach (2007), "Hilbert's Program Then and Now", *Philosophy of Logic*, ed. Dale Jacquette, North Holland, ss. 419-421; Brown, 2008: 70.
[53]John P. Burgess (2008), *Mathematics, Models, and Modality - Selected Philosophical Essays*, Cambridge University Press, New York, s.11.

teorisinde dikkat edileceği gibi, bazı kümelerin fiili olarak sonsuz ve hatta fiili olarak sonsuz ötesi (transfinite) öğe sayısına sahip olduğundan bahsedilmektedir. Bu varsayımlar ise algıya kapalıdır ve sonlu alana dahil olamaz. Aynı nedenden dolayı bu türden varsayımların bir doğruluk değeri de yoktur. Şu halde bir örnek olarak, " $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ " önermesinin de –yanlış veya doğru diyebileceğimiz- bir doğruluk değeri yoktur.

Anlaşılabileceği gibi Hilbertçi çerçevede, fiili sonsuzluklardan bahseden matematiksel önermeleri doğru veya yanlış olarak değerlendiremiyoruz. Bu noktada temel sorunun ikinci kısmına geçilebilir: Bu önermeler (örneğin "$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$") matematiksel çalışmaların konusuna dahil olabilir mi? Hilbert için bu mümkündür. Cantor'un kümeler teorisi dışlanamaz. Bu teori, matematiğin sonsuzlar alanı veya başka bir deyişle kurgusal alanı altında incelenebilir.

Hilbert'in bu konuya bakışı araçsalcı çerçevededir. Araçsalcı fikir önceki bölümlerde kısaca incelenmiştir. Teorilerin asıl işlevi olgu durumlarını doğrudan açıklamaya çalışmak değil, onlar hakkında daha fazla bilgiye sahip olmak ve mevcut bilgileri daha anlaşılır kılmak için kullanışlı bir araç olmaktır.

Bir örnek olarak "sonsuzdaki nokta" kavramı incelenebilir. "Paralel doğrular hariç bütün doğrular bir noktada kesişir" önermesini ele alalım. Bu önerme bütün doğrulara ilişkin kategorik bir bilgi vermez, çünkü paralel doğruları dışta bırakır. Yalnız "sonsuzdaki nokta" kavramının devreye girmesiyle, "paralel doğrular sonsuzdaki noktalarda birleşir" önermesi kurulabilir. Böylece bu *kurgusal* öğenin kabulü, "bütün doğrular kesişir" biçiminde kategorik bir yargının oluşturulabilmesini sağlar. İşte bu örnekte olduğu gibi, matematiğin bu türden soyut nesneler üzerine söz söyleyen bir kurgusal alanı olup, bu alanın sonlu matematiğe ilişkin mevcut bilgilerin düzenlenmesi veya sonlu alan hakkında daha fazla bilgi edinilmesi amacıyla kullanılması kabul edilebilir. Cantor'un teorisinden de bu beklenmelidir. Cantor'un hipotezlerini kanıtlarken kullandığı yöntemler ve mantıksal yasalar[54] yararlı ve kullanışlı olup,

---

[54] Anılan yöntem ve yasalar özellikle "saçmaya indirgeme" (reductio ad absurdum) yöntemi ile bu yönteme temel olan ve "bir önermenin ya kendisi ya da olumsuzu doğrudur; bir önerme doğruysa olumsuzu yanlıştır" biçiminde açıklayabileceğimiz ve üçüncü halin olanaksızlığı yasası (law of excluded middle) adı verilen klasik mantık yasasıdır. Bunların Cantor'un kanıtlamalarında nasıl kullanıldığı, bu çalışmanın doğrudan konusu değildir. Yalnız bu yöntem ve yasanın matematikte kullanılmasının doğru olup olmadığı konusunun Hilbert ile matematik felsefesinde sezgici okulun önde gelen isimlerinden L. E. J. Brouwer arasında zaman zaman sertleşen akademik bir tartışmaya konu olduğunu not olarak belirtelim. Brouwer anılan yöntem ve yasayı tamamen reddederken, Hilbert, bunların kullanışlı olmaları nedeniyle terk edilemeyeceğini savunur: Byrd, 1999: 36-37; Michael Defletsen (1999), "Brouwer, Luitzgen

matematiğin sonlu kısmında kullanılabilir. Daha da önemlisi bu teori, mevcut bilgileri düzenlemek, anlamlı kılmak veya mevcut bilgilere yenilerini ekleyerek genişletmek amacıyla kullanılabilir.[55]

Burada fark edilebileceği gibi, her ne kadar soyut olsa da bir teoriden beklenen şey, matematiksel sorulara, özellikle sonlu matematiğe ilişkin sorulara cevap verebilmesidir. Eğer bir teori gerçekten kullanışlı bir teori ise, matematikçi bu teorinin penceresiyle matematiksel çalışmalarına devam ettiğinde, sonlu matematiğe ilişkin bütün sorularına *eksiksiz* biçimde cevap bulabilir. Yani teori, bütün matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine karar verebilir.

Peki, her teori kullanışlı mıdır? Bunun cevabı olumsuzdur. Bir teori ancak güvenilir ise kullanılabilir. Örneğin bir teoriden, “0≠0”, “1=2” vb. “saçma” matematiksel önermelerin türetilememesi gerekmektedir. Ama daha da ötede, bu matematiksel teorinin *tutarlı* olması, yani teorilerin aksiyomlarından çelişkili önermelerin türetilememesi gerekmektedir.[56] Çünkü tutarlı olmayan bir teori, doğru önermelerin yanında yanlış önermeleri de kanıtlar.

İşte Hilbert’in aradığı şey, tutarlılık ve eksiksizlik özelliğini bir arada gösteren, kısaca *sağlamlık* (soundness) özelliğine sahip olan ve *aksiyomatik sistemler* biçiminde ortaya konulan teorilerdir. Bu türden aksiyomatik sistemler bulunduğunda matematikçiler, matematiksel sorulara bu sistemlerin çerçevesiyle yaklaşabilecek, matematiğin sonlu alanına ilişkin mevcut bulguları daha rahat düzenleyebilecek, hangi hipotezin teorem olup olmadığına daha kolay karar verebilecek ve matematiksel bilgi bu sistemler yardımıyla genişletilebilecektir. Kısaca Hilbert, matematik çalışmaların, aksiyomatik sistemler olarak ortaya konulmuş teoriler öncelikli –veya temelli- olması gerektiğini savunmaktadır.

Peki, bu soyut matematiksel teorilerin, örneğin Cantor’un teorisinin tutarlılığı nasıl kanıtlanabilir? Bu sorunun cevabına ulaşmak için iki önemli nokta üzerinde durulacaktır. Birincisi, mevcut tutarlılık kanıtlama yöntemlerinin bazı teoriler karşısındaki güçsüzlüğü, yetersizliğidir. Tutarlılık konusunun incelendiği bölümde

---

Egbertus Jan”, *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, ss. 102-103; Zach, 2007: 416.

[55] Brown, 2008: 71.

[56] Brown, 2008: 73.

aksiyomatik bir sistemin tutarlılığını kanıtlamanın geleneksel iki yönteminden bahsedilmiştir. Bunlardan ilki, teorinin aksiyomlarının veya bu aksiyomlardan çıkan her teoremin doğru olduğunu göstermektir. Yalnız Cantor'un teorisi söz konusu olduğunda bu yöntem işe yarayacak gibi görünmemektedir. Örneğin fiili anlamda sonsuz ve hatta sonsuz ötesi öğe sayısına sahip bir kümenin gerçekte var olduğu nasıl gösterilebilir ki? Diğer yöntem ise, bu soyut teoriyi modelleme yöntemi ile somutlaştırmaktır. Yalnız bu yöntem de ilk bakışta Cantor'un teorisinin tutarlılığını kanıtlamak için yetersiz görünmektedir. Fiili anlamda sonsuz sayıda öğe sayısından oluşan bir kümenin bütün öğeleri ile birlikte apaçık somutlaştığı sonlu bir modeli nasıl yapılabilir ki? Şu halde geleneksel tutarlılık kanıtlama yöntemleri Cantor'un teorisi gibi bir teoride işe yaramamaktadır. Bu durum örneğin, Dedekind-Peano aksiyomları için de geçerlidir. Bu aksiyomların sezgiye ihtiyaç bırakmayacak, apaçık bir modellemesini yapmak mümkün değildir. Yapılsa bile bu mutlak bir kanıtlama değil, göreceli bir kanıtlamadır. Çünkü teorinin tutarlılığı sorunu, modelin yapıldığı alanın tutarlılığı sorununa dönüşür. Sonuç olarak bu türden aksiyomların tutarlılığını kanıtlamak için daha güçlü ve kullanışlı yöntemler geliştirilmelidir.[57]

Üzerinde durulacak olan ikinci önemli nokta ise, Cantor'un teorisinde ortaya çıktığı iddia edilen Russell paradoksunun kaynağıdır. Eğer gerçekten Cantor'un teorisinde Russell paradoksu türünden çelişkiler türetilebiliyorsa bu, teorinin güvenilir olmadığı anlamına gelir. Bu durum ise Hilbert'in kayıtsız kalacağı bir durum değildi. Çünkü Hilbert, sağlam bir aksiyomatik sistemin gerek şartlarından birinin tutarlılık olduğunu akademik yaşamının başından beri dile getirmiştir.[58] Dahası, yine aynı dönemden beri bir bütün olarak "matematiğin tutarlılığı" sorunuyla uğraştığı bilinmektedir. Örneğin, Hilbert'in XX. yüzyılın başında gerçekleşen matematikçiler kongresinde sunduğu ünlü 23 sorunun ikincisi "aritmetiğin tutarlılığını kanıtlamak" sorunuydu.

Hilbert'in, Cantor'un teorisinde çelişkiler olduğunu, Russell paradoksu ortaya çıkmadan önce bildiği yalnız bu duruma başta kayıtsız kaldığı görünüyor. Fakat Russell paradoksunun Frege'nin sisteminde de çelişkiler çıkardığının ortaya çıkmasıyla birlikte, Hilbert durumun önemini anlamış ve bu türden çelişkilerin geleneksel matematiği de

[57] Brown, 2008: 73-74; Nagel ve Newman, 2008: 16-19.
[58] Zach, 2007: 412.

tehdit etme olasılığının olduğunu düşünmüştür.[59] Bu durum Hilbert'i, Russell tipi çelişkilerin kaynağını aramaya iter.

Hilbert'in bu çelişkilerin kaynağı olarak gördüğü şey ise teorilerin ifade edildiği dildir. Cantor'un teorisi de dahil, geleneksel matematiğin nerdeyse tamamı, doğal dil ile simgesel dilin bir karışımı durumundadır. Bu noktada her ne kadar mantıksal bir yapı ile oluşturulmuş olsa da, Dedekind-Peano aksiyomlarının da doğal dil ile ifade edilmiş olduğu bir örnek olarak anımsanabilir. Doğal dilin matematiksel teorilerde ve kanıtlamalarda kullanılması ise Russell tipi mantıksal çelişkilere kapı açmaktadır. Çünkü doğal dilde ifade edilen teorilerin kavramlarının anlamı başka bir deyişle semantik içeriği vardır ve bu içerik üzerinden çelişki türetilebilir.

Üzerinde durulan bu iki önemli noktanın sonucu olarak Hilbert, geleneksel matematik teorilerinin tutarlılığını kanıtlamak amacıyla iki aşamalı bir yol çizer. Birinci aşama, tutarlılığı kanıtlanacak olan matematiksel teorilerin aksiyomlarını, özü itibariyle anlamsız olan simgeler yoluyla ifade ederek doğal dilden arındırmak, yani *biçimselleştirmektir*. Yalnız teorilerin tamamen biçimselleştirilmesi için aksiyomların simgesel olarak ifade edilmesi yeter şart değildir. Çünkü matematiksel hipotezlerin teorem olup olmadığına, bu hipotezlerin simgesel dil ile ifade edilmiş aksiyomlardan türetilip türetilememesine göre karar verilecektir. Şu halde, bu yeni tür matematiksel çalışmaların bir yerde olası bir çelişki ile karşılaşmaması için, türetim veya başka bir deyişle çıkarım kuralları da biçimsel olmalıdır. Son olarak, bütün matematiksel hipotezler de, tıpkı matematiksel teorilerin aksiyomları gibi simgesel olarak ifade edilebilmelidir. Bütün bunların sonucu olarak, öyle bir simgesel dil ortaya konmalıdır ki, matematiksel teorilerin aksiyomları, bütün matematiksel hipotezler ve aksiyomlardan teorem türetmeye yarayacak olan çıkarım kuralları bu simgesel dil içinde biçimselleştirilebilsin.

Bu noktada, Whitehead ve Russell tarafından geliştirilen *Principia Mathematica* sisteminin ortaya çıkması Hilbert açısından önemli bir gelişme olmuştur. Çünkü son cildi 1913'te yayınlanmış olan bu yapıt, aslında bu türden büyük bir simgeselleştirme çalışmasını büyük ölçüde yapmış ve –teorileri ve kanıtlama yöntemleriyle birlikte-

[59] Casti ve Depauli, 2004: 31; Zach, 2007: 413.

geleneksel matematiğin biçimsel olarak çalışılmasının yolunu açmıştır.[60] Bu konuda Nagel ve Newman'ın şu ifadeleri oldukça aydınlatıcıdır:

> "Principia Mathematica, tüm arı matematiksel önermelerin (ve özelde de sayılar kuramının) kabul edilebilir bir biçimde bir araya toplanmasına olanak veren oldukça anlaşılır bir simgeleştirme (notasyon) sağladı. Ayrıca matematiksel kanıtlamada kullanılan birçok biçimsel çıkarım kuralını belirtik kıldı (sonunda bu kurallar daha kesin ve tamamlanmış oldular). Sonuç olarak Principia Mathematica, tüm sayılar kuramı dizgesini yorumlanmamış bir simgeler dizgesi olarak (yani tamdeyileri belirli kurallara göre bir araya gelen ve dönüşen içeriksiz imler dizgesi olarak) araştırabilmenin asıl aracını yaratmış oldu."[61]

Tutarlılığı kanıtlanacak olan teori tamamen biçimselleştirildiğinde, bir *aksiyomatik biçimsel sistem* veya mantıkçıların deyişiyle *kalkül* (calculus) haline gelecektir. Böyle bir sistemin en önemli özelliği tamamen sentaktik olmasıdır. Çünkü sistemdeki ayrık veya belirli kurallara göre birleştirilmiş simgelerin tamamı semantik içerikten yoksundur. Böyle bir sistemi oluşturan en temel öğeler simgelerdir. Ardından bu simgelerin hangi şartlarda birleştirilip, hangisi şartlarda ayrıştırılacağını belirten *birleştirme kuralları* gelir. Böylece birleştirme kuralları, sistem içinde hangi ifadelerin kurulup, hangi ifadelerin kurulamayacağını kurala bağlar. Ayrıca, sistem içinde oluşturulmuş bu simgesel ifadeleri, başka simgesel ifadelere dönüştürmek, diğer bir deyişle yeni ifadeler türetmek için gerekli olan *dönüştürme kuralları* da bulunur.[62] Bu dönüştürme kuralları, bir simgesel ifadeden başka bir simgesel ifadenin nasıl türetilebileceğini gösterdiği gibi nasıl türetilemeyeceğini de gösterir; böylece kullanılacak kanıtlama yöntemlerine bir sınır çizilmiş olur.

Bu sistemde simgesel ifadeler, belirli bir hiyerarşi içinde bulunur. Bu hiyerarşinin en tepesindeki simgesel ifadeler, sistemin aksiyomlarıdır. Aksiyomlardan, dönüştürme kuralları kullanılarak yeni simgesel ifadeler türetilir. Türetilen yeni simgesel ifadeler sistemin teoremleridir. Bu teorem aksiyomlardan türetilinceye kadar dönüşüm kuralları sonucu türemiş olan önceki teoremler dizisi, bu teoremin kanıtır. Bu sistem, matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine de böyle bir süreç ile karar verir.

---

[60] Brown, 2008: 75.
[61] Nagel ve Newman, 2008: 34.
[62] Elizabeth Ströker (2005), *Bilim Kuramına Giriş,* çev. Doğan Özlem, İnkılâp Yayınevi, İstanbul, ss. 57-63.

Matematiksel bir hipotez, sistemin birleştirme kurallarına tamamen uyan bir ifade veya teknik adıyla tamdeyim[63] halinde biçimsel sistemin diline kodlandığında, bu tamdeyimin, sistemin aksiyomlarından dönüştürme kuralları kullanılarak türetilip türetilemeyeceği incelenecektir. Eğer bu tamdeyim aksiyomlardan türetilebiliyorsa teoremdir. Eğer bu tamdeyimin mantıksal değillemesi, başka bir deyişle olumsuz türetiliyorsa, bu tamdeyimin olumsuzu teoremdir. Eğer tamdeyimin hem kendisi hem de olumsuzu aksiyomlardan türetilebiliyorsa, bu bir çelişki olduğu için biçimsel sistem tutarsızdır. Eğer bu tamdeyimin ne kendisi ne de olumsuzu aksiyomlardan türetilebiliyorsa, bu durum biçimsel sistemin bu matematiksel hipotezin doğruluk değerine karar veremediğini gösterir ve bu yüzden biçimsel sistem eksiktir.

Böyle bir sistemde tamdeyimlerin semantik içeriğe sahip olmamasının, Russell paradoksu türünden çelişkilerin ortaya çıkma olasılığını yok ettiği düşünülebilir. Fakat bu durum simgesel olarak ifade edilen aksiyomlardan çelişkili tamdeyimlerin türetilemeyeceğini garantilemez. Dahası böyle bir sistemde sonsuz nicelikte teorem türetilebileceği ve sistemin tutarlı olup olmadığını görmek için bütün bu teoremlerin gözlenemeyeceği açıktır. Ne kadar çok teorem incelenirse incelensin, incelenen bu teoremler hep sonlu sayıda olur ve bu sayı, sistemden türetilebilecek teoremlerin her zaman çok küçük bir bölümüne işaret eder. Bu noktada önemli bir soru ortaya çıkar: Bu sistem üzerinde yapılabilecek sonlu sayıda inceleme sonucunda, sistemden türetilebilecek teoremlerin tümünü görmeye gerek duymadan, bu sistemin aksiyomlarının hiçbir zaman çelişkili iki tamdeyimi teorem yapmayacağını, yani sistemin tutarlı olduğunu kanıtlamak mümkün müdür? Hilbert için bu mümkündür ve bu noktada Hilbert, matematiksel teorilerin tutarlılığını kanıtlama sürecinin ikinci aşamasını sunar. Birinci aşamada bir biçimsel sistem haline getirilmiş matematiksel teorinin kendisi, ikinci aşamada bir *üst matematiksel* (metamatematik) incelemeye tabi tutulacaktır.

Üst matematik kavramı, bir matematik teorisinin güvenilir, tutarlı bir teori olup olmadığını sorgulamak amacıyla yapılan ve teorinin doğrudan kendisini konu edinen bir üst incelemedir. Bir matematik teorisi, matematiksel nesneler ve bu nesnelerin birbirleri ile olan ilişkisini konu alır ve onlar üzerine söz söyler. Diğer taraftan, üst matematiksel

[63] Bir biçimsel sistemde, bu sistemin birleştirme kurallarıyla tamamen uyumlu biçimde oluşturulmuş simgesel ifadeye "iyi biçimlendirilmiş deyi" (well-formed formula) adı verilmektedir: Roy T. Cook (2009), "well-formed formula", s.312. Bu çalışmada, kısaca *tamdeyim* sözcüğü kullanılacaktır.

incelemenin konusu, -şu noktada birinci aşamadan geçerek tamamen biçimselleştirilmiş ve bir biçimsel sistem haline gelmiş olan- matematiksel teorinin doğrudan kendisidir. Böylece şu üç düzey arasındaki fark ayırt edilebilir: Matematiksel nesneler ve onların arasındaki bağıntıların bulunduğu temel matematik düzeyi, bu nesneler ile bağıntılar hakkında söz söyleyen biçimsel matematik teorileri düzeyi ve son olarak matematiksel teorilerin kendisinin üzerine söz söyleyen üst matematik düzeyi.

Peki, ne tür konular bir matematiksel teori hakkındadır veya başka bir deyişle üst matematiğe aittir? Örneğin bu sistemin simgesel dilinde ifade edilen herhangi bir tamdeyimin, bu sistemin bir teoremi olup olmadığını ifade etmek üst matematiğe ilişkindir. Yine örneğin bir “x” hipotezinin bu sistemin bir teoremi olduğunun, bu sistemdeki dönüştürme kuralarından sadece ikisini kullanarak kanıtlamanın mümkün olmadığını ifade etmek üst matematiğe aittir. Bunların yanında bu sistemin tutarlı/tutarsız veya eksik/eksiksiz olduğunu ifade etmek de üst matematiğe aittir. Bir matematik teorisinin doğrudan kendisi pek çok farklı yönden incelenebilir ve bu yüzden örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Hilbertçi anlamda yapılacak bir üst matematiksel inceleme, sistemin derin bir biçimde analiz edilmesidir. Bu türden bir inceleme, sistemin birleştirme kuralları kullanılarak oluşturulan tamdeyimlerin hangi biçimsel özelliklere sahip olduğu, simgesel aksiyomların biçimsel özellikleri, sistemin dönüştürme kurallarını kullanarak, aksiyomlardan hangi biçimsel özelliklere sahip teoremlerin türetilebileceği gibi konuları kapsar. Amaçlanan şey, aksiyomlar ile bu aksiyomlardan sistemin dönüştürme kuralları kullanılarak türetilen teoremler arasındaki bir anlamda kalıtımsal diyebileceğimiz özellikleri yakalamak ve bu özelliklerin çelişkili teoremlere izin verip vermediğini sorgulamaktır. Böylece Hilbert, bu sistemdeki tamdeyimlerin sonsuz nicelikte özelliklerine başvurmadan veya onlar üzerine sonsuz sayıda işlem yapmadan, böyle bir sonlu üst matematiksel süreç sonucunda, bu aksiyomlardan ancak hangi biçimsel özelliklere sahip teoremlerin türetilebileceğinin ve bunun da ötesinde aksiyomlardan çelişkili teoremler türetilip türetilemeyeceğinin gösterilebileceğini umuyordu. Bu sürece, *sonlayıcı* (finitistic) adı verilir. Hilbert Programı ise geleneksel matematiğe ait çeşitli teorilerin (sistemlerin) böyle bir süreç ile tutarlılığını mutlak olarak kanıtlamaya çalışmak ve onların ayrıca eksiksiz olup olmadığını sorgulamak amacıyla ortaya konulan geniş kapsamlı projedir.[64]

Hilbert Programı, 1900 yılındaki matematik kongresinin ardından geçen ilk yıllarda Hilbert'in düşünce sisteminde oluşmaya başlamış ve özellikle 1920'li yılların başında olgunlaşmıştır. Bu olgunlaşma sonucunda, geleneksel matematik teorilerinin biçimsel olarak incelenebileceği sistem/sistemler üretmek ve ardından anmış olduğumuz sonlayıcı süreçler ile bu sistemlerin tutarlılıklarının kanıtlanması fikriyle ortaya çıkan geniş kapsamlı program, Hilbert ve destekçileri tarafından hayata geçirilmiştir. Hilbert'in destekçileri, tıpkı programın kapsamı kadar geniştir. Bu dönemde Hilbert'in asistanlığını yapan ünlü matematikçi Paul Bernays (1888-1977), Wilhelm Ackermann (1896-1962) ve ilerde bilgisayar bilimine büyük katkılar sağlayacak olan genç John von Neumann (1903-1957) gibi matematikçiler Hilbert'in destekçilerinden sadece bir kaçıdır. Yalnız programın bundan sonraki sürecini incelemeden önce bu bölümde konu edilen bazı özel konular daha ayrıntılı biçimde incelenecektir. Bunlar simgesel olarak ifade etme, biçimselleştirme ve karar verme konularıdır.

1.3.3.4.1 Biçimselleştirme ve karar verme

Bir teorinin tamamen biçimselleştirilmesi için öncelikle bu teorinin aksiyomlarının ve bu teorinin konusuna dahil olan hipotezlerin simgesel olarak ifade edilmesi gerektiği önceki bölümde belirtilmiştir. Bütün matematiksel hipotezlerin simgesel olarak ifade edilebileceği bir sistem bulmak ise güçtür. Fakat örneğin simgesel mantığın dili bunu olanaklı kılmaktadır.

Diğer taraftan hipotezlerin bu sistem içine kodlanması bazı güçlükler barındırır ve belli bir uzmanlık gerektirir. Doğal sayılara ilişkin bir özellik olarak çift doğal sayı olma özelliğini ele alalım. Çift doğal sayılar, ikiye bölünebilen sayılardır. Yalnız bu tanımı biçimsel mantığın dilinde ifade etmek zordur. Bu zorluk ise verili tanımla

---

[64] Michael Defletsen (1999), "Metamathematics", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, s.561; Michael Defletsen (1999), "Hilbert's Program", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York, ss.382-383; Nagel ve Newman, 2008: 20-26; Brown, 2008: 74-75.

eşdeğer olan ve simgesel olarak daha kolay ifade edilebilecek başka bir tanım bulunduğunda aşılabilir. Şu tanımı ele alalım:

İki sayısı ile çarpıldığında x sayısını veren bir y sayısı varsa, x sayısı çift sayıdır. Simgesel olarak ifade edildiğinde:

Çift(x) = $\exists$y(2 • y = x)

Bu ifadede "•" simgesi çarpma işlemini simgelemektedir. Aynı yöntem, asal sayı olma özelliğini simgesel olarak ifade etmek için de kullanılabilir. Bilindik olarak asal sayı olma özelliği, bir sayısı ve kendisi hariç hiçbir sayıya kalansız olarak bölünememe özelliğidir. Diğer taraftan, aşağıdaki tanım verili tanımla eşdeğerdir:

Bir x sayısı 1'e eşit değilse ve birbiri ile çarpıldığında x sayısını veren bir y ve z sayısı olup bu sayılardan herhangi bir 1'e eşitse, x sayısı asaldır.

Simgesel olarak ifade edildiğinde:

$\text{Asal}(x) = ((x \neq 1) \wedge \forall y \forall z((y \bullet z = x) \rightarrow (y = 1 \vee z = 1)))$

Fakat tam bir simgeselleştirme, temel aritmetiğin dilinden tamamen kopmayı gerektirir. Bu yüzden temel aritmetiğin öğeleri olan "1", "2" gibi rakamların yerine başka bir simgeselleştirme kullanılmalıdır. Dedekind ve Peano'nun aksiyomlarında incelediğimiz ardıllık fonksiyonu böyle bir simgeselleştirme için uygundur. "1" sayısı sıfırın ardılını ifade edecek biçimde "$A0$" olarak, "2" sayısı ise "$AA0$" olarak gösterilebilir. Bu noktada, verili ifadelerde "0" simgesinin kullanılması, temel aritmetiğin dilinin tamamen dışlanmadığı sonucuna götürecektir. Fakat bu sorun, "0" simgesi biçimsel sistemin aksiyomları içinde örtük olarak tanımlandığında aşılır. Bu tanımlama simgeye sistem dışı semantik bir içerik yüklemek anlamında değildir. Çünkü bu, biçimselleştirme sürecinin amacına uygun olmaz. Amaçlanan şey ise simgeye aksiyomlar üzerinden görev yüklemek ve böylece bu simgeye ilişkin kuralları net olarak belirlemektir. Bir örnek olarak, Hilbert'in tutarlılığını kanıtlamak amacını güttüğü matematiksel teorilerden biri olan Peano Aksiyomları'nı ele alalım. Bu aksiyomlar aşağıdaki gibi simgesel olarak ifade edilebilir:[65]

1. $(\forall x)A(x) \neq 0$
2. $(\forall x)(\forall y)(A(x) = A(y) \rightarrow x = y)$
3. $(\forall x)(x + 0 = x)$
4. $(\forall x)(\forall y)(x + A(y) = A(x + y))$
5. $(\forall x)(x \bullet 0 = 0)$
6. $(\forall x)(\forall y)(x \bullet A(y) = (x \bullet y) + x)$

[65] Roy T. Cook (2009), "Peano Arithmetic", s.218.

7. $(\Phi(0) \land (\forall x)(\Phi(x) \to \Phi(A(x)))) \to (\forall x)\Phi(x)$

Bu aksiyomlardan sonuncusu, matematiksel tümevarım ilkesini simgesel olarak ifade etmenin olanaklı pek çok yolundan biridir.[66] Bu biçimsel Peano Aksiyomları, doğal sayılar ile ilişkilendirdiğimiz özelliklerin, aksiyomlar üzerinden örtük olarak nasıl tanımlanabileceğini göstermesi bakımından önemli bir örnektir. Örneğin "0" simgesi, temel aritmetikteki sıfır sayısı ile ilişkilendirdiğimiz özellikleri tam olarak gösterecek biçimde aksiyomlarda açıkça tanımlanmıştır. Bu durum, birinci, üçüncü ve beşinci aksiyomlardaki "0" simgesi yerine örneğin "♠" gibi bir simge yerleştirildiğinde daha fazla açıklığa kavuşur:

1. $(\forall x)A(x) \neq ♠$
3. $(\forall x)(x + ♠ = x)$
5. $(\forall x)(x \bullet ♠ = ♠)$

Bu aksiyomlar sırayla incelendiğinde "♠" öğesinin doğal sayılar kümesindeki sıfır sayısı gibi davrandığı görülür. Çünkü birinci aksiyomda "♠" sabit değişkeninin başka hiçbir değişkenin ardılı olmadığı okunduktan sonra ikinci ve üçüncü aksiyomların okunması, "♠" öğesinin doğal sayılar kümesindeki sıfır sayısı gibi hareket ettiği konusunda iyice emin olmamızı sağlayacaktır. Peano Aksiyomları'nın biçimsel ifadesinde "0" simgesinin kullanılmasının nedeni ise, bu simgenin görevini ve bu simgeyi içeren aksiyomları yorumlama sürecini kolaylaştırmaktır. "0" simgesi, sıfır sayısını karakterize ediyormuş gibi yorumlandığında ise artık "$A0$" ifadesinin "1" sayısını, "$AA0$" ifadesinin ise "2" sayısını karakterize ettiği yorumu yapılabilir. Bu noktada yapılan işin bir yorumlama olduğu unutulmamalıdır. Özünde bu biçimsel Peano Aksiyomları, doğal sayıları karakterize etmek amacıyla belli birleştirme kurallarıyla bir araya getirilmiş simgeler topluluğundan başka bir şey değildir ve aksiyomlarda geçen simgelerin kendi başına anlamları yoktur. Onlar ancak bu simgeler üzerine yapılan yorumlara göre anlam kazanır. Yorumlama sonucunda ortaya çıkan anlamlar ise sistemin özsel işleyişine etki etmez. Sistemin işleyişi, sistemin kendi kurallarına göre meydana gelir. Bu durum satranç oyununda belli bir sabit taşın, şah olarak yorumlandığı için değil, oyunun kuralları gereği mat olmasına benzetilebilir. İşte Hilbert'in matematiksel teorileri biçimselleştirerek bu teorilerdeki semantik içeriği dışlama ve

[66] Bu önerme aslında bir aksiyomdan öte, bir aksiyom şemasıdır. Basitçe ifade edersek, bu önerme çıkarım sürecinde doğrudan kullanılmaz. Fakat herhangi bir kanıtlamada, yani çıkarım sürecinde, bu önermenin ileri sürdüğü koşulun sağlanıp sağlanmadığı incelenir.

böylece örneğin Russell paradoksu türünden çelişkilerin matematiksel teorileri tehdit etmesini önleme girişimi bu türden bir süreçtir.

Burada bir not olarak belirtilmelidir ki, herhangi bir sayının bu sistem içinde “0” simgesi ve bu simgenin belli bir sıradaki ardılı olarak kodlanabilmesi, semantik içeriği dışlamanın yanında, bütün doğal sayıların tek tek sistem içinde kodlanması sorununu da ortadan kaldırır. Bu durumun önemi, eksiklik konusu ele alındığında ortaya çıkar. Sistem, matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine, aksiyom olarak verilen simgeler topluluğundan, sistemin dönüştürme kuralları kullanılarak başka simgeler topluluğu oluşturma yoluyla karar verir. Şu halde örneğin: “2+5=7” biçimindeki temel aritmetiğe ilişkin ifade bu aksiyomlardan dönüştürme kuralları kullanılarak türetilemez. Çünkü bu biçimsel sistemin dilinde, “2”, “5” ve “7” gibi simgeler yoktur ve dolayısıyla bunların özellikleri de, aksiyomlar üzerinden örtük olarak tanımlanmamıştır. Tanımlanmayan simgelerin ise biçimsel sistemin işleyişinde ve teorem kanıtlamalarında yeri yoktur.[67] Bu noktada bu simgelerin tıpkı “0” simgesi gibi sistemde örtük olarak tanımlanabileceği düşünülebilir. Yalnız doğal sayıların sonsuz niceliğini hesaba katıldığında her doğal sayı için bunu yapmak mümkün değildir. Böyle bir durumda sistemin bütün doğal sayıları karakterize etmediği ve sistemin eksik olduğu sonucu ortaya çıkar. Fakat bu durum biçimsel Peano aksiyomları için söz konusu değildir. Yukarda belirtilen ilkeler doğrultusunda, anmış olduğumuz aritmetiksel ifade aşağıdaki örnekte olduğu gibi sistemde kodlanabilir:

$$AA0 + AAAAA0 = AAAAAAA0$$

Peki, böyle bir sistem yardımıyla matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine nasıl karar verilebilir? Bunun için önceki bölümde de belirtildiği gibi -sonlu sayıda- dönüştürme kuralına ihtiyaç vardır. Bu sisteme her hangi bir örnek olarak bir mantıksal çıkarım kuralı olan *tümel örnekleme* kuralını ekleyelim. Basitçe ifade edildiğinde bu kural, örneğin:

“$(\forall x)(x + 0 = x)$” tamdeyimi doğruysa, x yerine örneğin 0 yerleştirildiğinde:

“$0 + 0 = 0$” tamdeyiminin de doğru olduğunu belirtir.

Dönüşüm kurallarının da eklenmesiyle, artık bir biçimsel sistemin oluşmasını sağlayan bütün öğeler tamamlanmış olur ve matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine bu sistem üzerinden biçimsel olarak karar verilebilir. Bir örnek olarak “$A0 +$

[67] Nagel ve Newman, 2008: 8-9.

$A0 = AA0$" tamdeyimini ve bu tamdeyimin sistemin aksiyomları ve dönüştürme kuralları kullanılarak nasıl türetilebileceğini inceleyelim:

$\vdash A0 + A0 = AA0$:

1. $(\forall x)(\forall y)\ (x + A(y) = A(x + y))$ // Dördüncü aksiyom
2. $(\forall y)(A0 + A(y) = A(A0 + y))$ // Tümel örnekleme (x için $A0$)
3. $A0 + A(0) = A(\boldsymbol{A0} + \mathbf{0})$ // Tümel örnekleme (y için 0)
4. $(\forall x)(x + 0 = x)$ // Üçüncü aksiyom
5. $\boldsymbol{A0} + \mathbf{0} = A0$ // Tümel örnekleme (x için $A0$)
6. $A0 + A(0) = A(A0)$ // 3. satır
7. $A0 + A0 = AA0$

"$A0 + A0 = AA0$" biçimsel ifadesi, biçimsel sistemin aksiyomları ve dönüştürme kuralları kullanılarak türetilebilmektedir. O halde bu ifade, sistemin bir teoremidir. Ayrıca, bu ifade türetilinceye kadar oluşan bütün tamdeyiler de (ikinci, üçüncü, beşinci ve altıncı satırlar) teoremdir. Birinci satırdan, yedinci satıra kadar gösterilen tamdeyimler dizisi ise, -biçimselci bakış açısıyla- ele aldığımız teoremin kanıtıdır.

Son olarak bu türden bir sistemin üst matematiksel olarak incelenmesinin nasıl bir süreç olduğu incelenecektir. Douglas R. Hofstadter tarafından, bu sürecin kolayca anlaşılması için ortaya konulmuş güncel bir örnek olan "MU Bulmacası", konuya ilişkin basit ve açıklayıcı bir örnektir.[68] Çok basit bazı dönüştürme kurallarına sahip olan örnek bir "MIU" biçimsel sistemi içinde oluşturulan bulmacayı anlamak için bu sistemi inceleyelim:

MIU sistemi:

- Simgeler: M, I, U
- Aksiyom: MI
- Dönüştürme Kuralları:

1. Eğer son simge I ise, bu simgeden sonra U simgesi eklenebilir.
2. Eğer Mx teoremse, Mxx de teoremdir. (Örn. MI → MII → MIIII)
3. Eğer teoremlerde üç adet III oluşursa, bunların yerine U simgesi yerleştirilebilir. (Örn: MIIII → MUI veya MIU)

[68] Hofstadter, 2001: 79-87, 308-309. Bulmacanın başka simgelerle ifade edilmiş bir biçimi için bkz: Casti ve Depauli, 2004: 37-38.

4. Eğer teoremlerde yan yana iki adet U simgesi oluştuysa, ikisi de silinebilir. (Örn. MIUU → MI)

Bu biçimsel sistemin tek aksiyomu olan MI'den, sistemin dönüşüm kuralları kullanılarak sonsuz nicelikte teorem türetilebilir. Aşağıdaki teoremler, bu sistemden türetilebilecek teoremlerden bazılarıdır:

- MIUIUIUIUIUIUIUIUIU
- MIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
- MIIIIIIIIIIIIUIIIIIIIIIIIIII
- MUIIIII

Soru:

"MU" tamdeyimi, bu sistemin bir teoremi midir?

Buna karar vermek için yıllarca uğraşılabilir. İşlem hatalarını önlemek için bu amaca uygun bir bilgisayar programı da üretilebilir. Bu program, dönüştürme kurallarını aksiyoma tekrar tekrar uygulayarak simgeler türetme ve en sonunda MU simgesi türetildiğinde durma işlevine sahiptir. Yalnız program yıllarca çalışsa da durmayacaktır. Çünkü "MU" tamdeyimi, bu sistemin bir teoremi değildir.

Sistemin yapısının, yani aksiyomlarının ve dönüştürme kurallarının bir üst incelemeye tabi tutulması bu durumun nedenini açığa kavuşturur. Bir örnek olarak "MU" tamdeyimini ilerde tekrar ele almak için bırakalım ve "IU" tamdeyiminin bu sistemin bir teoremi olup olmadığını soruşturalım. Bu tamdeyimin teorem olmadığı hızla görülebilir. Çünkü M simgesinin teoremlerde yok etmek için bir dönüştürme kuralı olmaması ve sistemin tek aksiyomunun "M" simgesiyle başlaması, sistemden türetilebilecek bütün teoremlerin M simgesiyle başlamasını zorunlu kılar. Bu durum, sistemin bir anlamda kalıtımsal bir özelliğidir. O halde "IU" tamdeyimi hiçbir zaman türetilemez ve bu sistemin bir teoremi olamaz. İşte bu bulgu ve bu bulguya götüren akıl yürütme, sistemin doğrudan kendisi hakkındadır ve üst-teoriye (metateori) aittir.

"MU" tamdeyiminin sistemden türetilip türetilemeyeceğine hızla karar verebilmek için de buna benzer bir üst inceleme yapılabilir. Temel olarak "MU" tamdeyimine ulaşmak için, "MI" aksiyomundaki "I" simgesinin yok edilmesi gerekmektedir. Bu ise ancak ikinci dönüştürme kuralı ile teoremlerdeki "I" simgesinin sayısını artırarak, ardından üçüncü dönüştürme kuralı ile "III" simgelerini "U" simgesi ile değiştirerek ve son olarak dördüncü dönüştürme kuralının kullanılmasıyla, yan yana iki “U” simgesi belirdiğinde bunları yok ederek mümkündür. Bu noktada sezgisel olarak şu görülebilir ki, teoremlerde “I” simgesi her zaman 2’nin üssü oranında artar (MI, MII, MIIII, MIIIIIIII, …) ve bu simgeler, simgelerinin sayısı ancak 6’ya kalansız bölünürse (IIIIII → UU) silinebilir. 6’ya kalansız bölünebilir olan her sayının 3’e de kalansız bölünebilir olduğu hesaba katıldığında ise, MU’yu türetme sorunu, 2’nin herhangi bir üssünün 3’e kalansız bölünebilir olup olmadığı sorununa indirgenebilir. Bunun cevabı ise olumsuzdur. O halde “MI” tamdeyiminden MU tamdeyimi türetilemez. Aritmetiksel olarak gösterildiğinde:

- d = İkinci dönüştürme kuralının kullanım sayısı için:
- $2^d \neq 0 \pmod 3$

Bütün bu üst incelemenin önemli bir sonucu, bu sistemin dilinde kurulabilecek bütün tamdeyimlerin teorem olup olmadığına karar verebilmemizi sağlayan bir üst-teorik kural elde edilmesidir. Bu kural şu biçimde ifade edilebilir:

- “MIU Sistemi” dilinde ifade edilen bir tamdeyi ancak ve ancak “M” simgesiyle başlarsa ve tamdeyimdeki “I” simgelerinin sayısı 3’e kalansız bölünebilirse sistemin teoremidir.[69]

Biçimsel sistemler haline getirilmiş matematiksel teorilerin üst-matematiksel olarak incelenmesi de buna benzer bir süreçtir. Biçimsel Peano Aksiyomları’na geri dönelim. Bu sistemin üst matematiksel olarak incelenmesi, sistemin aksiyomlarının, dönüştürme kurallarının, sistemden türetilen örnek teoremlerin, bu teoremlerin biçimsel yapılarının ve aksiyomlar ile teoremler arasındaki kalıtımsal özelliklerin incelenmesi anlamına gelir. Bu incelemeler, belki de MIU sistemi örneğinde olduğu gibi, hangi özelliklere sahip olan tamdeyimlerin teorem olduğunun hızla görülebilmesini sağlayabilir. Böylece sistemin dilinde yazılmış olan bir tamdeyim ne kadar karmaşık olursa olsun, teorem olup olmadığına hızla karar verilebilir. Daha da ötesinde, Hilbert’in ümit ettiği şey doğruysa, sistemin çelişkili tamdeyimleri teorem yapıp yapmadığı, yani sistemin tutarlı olup olmadığı da bu türden yapısal bir üst inceleme sonucunda görülebilir.[70]

Bütün bunlar Hilbert ve takipçilerinin 1920’li yıllar boyunca etkin olarak mücadele ettiği sorunların karmaşıklığı hakkında fikir vermektedir. Bu yıllarda Hilbert

[69] Hofstadter, 2001: 309; Casti ve Depauli, 2004: 43.
[70] Böyle bir sürecin açıklayıcı bir örneği için bkz: Nagel ve Newman, 2008: 35-42.

ve takipçileri, geleneksel matematik teorilerini ve matematiksel kanıtlama yöntemlerini biçimsel olarak içine yansıtmak amacıyla bir yandan *Principia Mathematica'*da ortaya konulan sistem üzerinde çalışırken, diğer taraftan bu sistem kadar güçlü başka biçimsel sistemler oluşturmaya çalışmıştır.[71] Ayrıca bu sistemlerin tutarlılığını kanıtlamak için çalışmalarda bulunmuşlardır.

1928 yılına yaklaşırken biçimsel sistemlerin tutarlılığı ile ilgili çalışmaların bazı olumlu sonuçlar vermesi, Hilbert'in, çalışmaların başarıyla sonuçlanacağı konusunda iyimserleşmesini ve eksiksizlik sorununa yeniden odaklanmasını sağlar. En sonunda Hilbert matematik dünyasının bu çalışmalara destek vermesi için, 1928 yılında yapılan uluslararası matematikçiler kongresinde, tıpkı 1900 yılında yaptığı gibi matematikçilerin önüne yeni sorunlar koyar. Bu sorunlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Matematiksel analizin temel bölümlerinin (örn. kalküller) tutarlılığı konusunda sonlu bir kanıt bulmak.
2. Bu kanıtı daha yüksek seviye mantıkları veya tipler teorisini kapsayacak şekilde genişletmek.
3. Sayılar teorisinin (aritmetiğin) ve matematiksel analizin eksiksizliğini kanıtlamak. (Başka bir ifadeyle, biçimsel sistemler yoluyla bütün aritmetiksel doğrulukların kanıtlanabileceğini kanıtlamak)
4. Mantıksal kurallar kümesinin eksiksizliğini, bu kurallar yardımıyla bütün geçerli mantıksal ifadelerin kanıtlanabilmesi anlamında kanıtlamak.[72]

Fakat Hilbert'in beklentisi boşunadır. Çünkü sadece üç yıl içinde genç mantıkçı-matematikçi Kurt Gödel, dördüncü sorunu tamamen çözmüş ve ilk üç sorunun ise çözülemeyeceğini kanıtlamıştır. Kısaca Hilbert Programı (en azından Hilbert'in öngördüğü özgün amaçlar doğrultusunda) asla tamamlanamayacaktır.

---

[71] Örn. *ε-kalkülü*: Zach, 2007: 417-418.
[72] Byrd, 1999: 39.

2. GÖDEL, EKSİKLİK TEOREMLERİ VE PLATONCULUK

Analitik değil ama sentetik bir yapı gösteren herhangi bir bilim dalına ilişkin, örneğin doğa bilimlerine ilişkin olan bir teorinin, bu bilim dalının konusuna giren bütün doğru gözlem verilerine bir açıklama getirebilmesi beklenmez. Örneğin fiziğe ilişkin olan ve fizikçiler tarafından çoğunlukla benimsenen herhangi bir güçlü T teorisi ele alındığında, bu teorinin evrende mümkün olan her fiziksel olaya bir açıklama getirebilmesi beklenmez.

Bir an bu teorinin temel savlarının, evrendeki fiziksel olaylara ilişkin mevcut gözlem verilerinin dikkate değer bir bölümüne açıklama getirebildiğini ve ayrıca uzun bir süre boyunca bu açıklayabilme geleneğini yeni deney/gözlem verileri için de sürdürdüğünü düşünelim. Yalnız bu durum, teorinin ebedi olarak yeni deney/gözlem verilerine bir açıklama getirebileceğini garanti etmez. Hiç beklenmedik bir anda ortaya çıkan yeni bir deney/gözlem verisi, teorinin temel savları tarafından açıklanamaz durumda olabilir.

Bu neden önemlidir? Temelde doğa bilimlerinin işleyiş süreci genel olarak teori önceliklidir. Bilimsel işleyişin teori öncelikli olması, bu bilimi devam ettiren bilim adamlarının deney öncesinde zihinsel olarak boş bir levha durumunda olmadığı, bilim adamlarının kabul ettiği/etmediği teorilerin olduğu ve deney sonuçlarını bu teorilerin çerçevesinden yorumlama/açıklama eğiliminde olacağı anlamına gelir. Yani bilim adamları olgulara teoriler çerçevesinden yaklaşır. Bu durumda bilim adamı, belli bir teorinin ana savlarına bağlı kaldığı sürece, bu bilim adamının bu teori ile açıklayamayacağı olgularla karşılaşma olasılığı her zaman olacaktır.

Diğer taraftan bu sorun, teoriye açıklanamayan bu olguyu açıklayabilecek yeni temel savların eklenmesiyle bir süreliğine çözülebilir. Gerçekten de bilimsel teoriler sayıca pek çok nedenden dolayı fiili olarak unutulmaya yüz tutmadıkça, durağan bir yapıda değil, destekçilerinin katkılarıyla sürekli genişleyen bir durumdadır. Yalnız bu durum, genişletilmiş olan bu yeni teorinin de açıklayamayacağı olgu durumlarının hiçbir zaman ortaya çıkmayacağını garanti etmez.

Başka bir durum ise, bir teorinin açıklayamadığı herhangi bir olgu durumunu veya gözlem verisini, başka bir rakip teorinin açıklayabilmesidir. Yalnız anmış olduğumuz süreçler bu rakip teori için de geçerlidir ve bu teorinin de açıklayamayacağı olgu durumları ortaya çıkabilir. O halde doğa bilimlerine ilişkin bir teori her zaman eksik olacaktır. Açıkçası doğa bilimlerine ilişkin bir teorinin evrene ilişkin her olgu durumuna bir açıklama getirebilmesi anlamında eksiksiz olması zaten beklenmez. Dahası, doğa bilimleri kapsamındaki bir bilime ilişkin teorinin, örneğin bir fizik teorisinin, bu bilimin kapsamındaki mevcut bütün verilere açıklama getirebileceği anlamında eksiksiz olduğunu varsaymak bile çok iddialı olur.

Bu türden eksiksizlik tartışmaları sosyal bilimler alanında da yapılmaktadır. Genelde nesnellik kavramı merkezli yapılan bu tartışmalar ideolojik çerçevede yapılmanın yanında saf bilimsel kaygılarla da yapılabilmektedir.

Bütün bunların Hilbert Programı ve Gödel'in Eksiklik Teoremleri ile ilişkisi nedir? Bunun cevabı, her şeyden önce Hilbert'in bilimsel bir etkinlik olarak matematiğin işleyişini teori öncelikli hale getirmeye çalışmasındadır. Bu uğraş Hilbert'e göre matematiğin bilimsel bir işleyişe kavuşması için de önemlidir. Hilbert'in 1900'lü yıllarda ileri sürdüğü şu görüşte bu açıklanmıştır:

> "Her bilim başlangıç noktasını, yeterince uyumlu verili bir olgular topluluğundan alır. Fakat bu olgular, düzenlemeleri yoluyla biçim kazanır. Bu düzenleme aksiyomatik yöntem yoluyla meydana gelir; yani düzenlenecek olan olgular arasındaki ilişkilerin kavramlar arasındaki ilişkilere karşılık geldiği, kavramlar (arası) mantıksal bir yapı inşa edilir.
>
> Bu türden bir kavramlar yapısının inşasında, keyfilik vardır. Fakat biz şunları talep ederiz:
> 1) eksiksizlik 2) bağımsızlık 3) tutarlılık"[73]

Peki, hangi anlamda eksiksizlik? Hilbert'in 1899'da yayınlanan *Geometrinin Temelleri* yapıtını ele alalım. Kant'ın "*Bütün insan bilgisi görüyle başlar, oradan kavramlara geçer ve fikirlerle sonlanır.*" sözünü alıntılayarak başladığı yapıtının girişinde Hilbert, bu yapıtın, geometri için basit ve eksiksiz bir aksiyom kümesi seçmek ve bu aksiyomlardan en önemli geometri teoremlerini türetmek amacıyla ortaya

[73] David Hilbert, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*, Ulrich Majer and Michael Hallett, editors. Springer, New York, 2004, s.540'dan aktaran: Zach, 2007: 412. Hilbert'in bu görüşlerinde ele alınan "bağımsızlık" kavramı, sezgiden bağımsızlığa işaret eder. Yani, teorinin konu ettiği nesneler üzerine söylediği söz, teorinin aksiyomlarından sezgiye ihtiyaç duymadan, sadece mantıksal olarak çıkmalıdır.

koyulduğunu belirtmişti. Böylece geometrinin aksiyomatik olarak çalışılmasının önemini mümkün olduğunca açık biçimde ortaya çıkaracaktı.[74]

Diğer taraftan Russell paradoksu türünden çelişkilerin ortaya çıkması, önceki bölümlerde geniş biçimde incelendiği gibi Hilbert'in matematikte tutarlılık sorunu ile daha fazla ilgilenmesi sonucunu getirmişti. Bu süreç, matematiğin aksiyomatik *biçimsel* sistemler üzerinden çalışılması fikrini getirmişti. Fakat, Hilbert'in matematiksel soru ve sorunlara teori öncelikli yaklaşma fikri değişmemiştir. Değişen sadece matematiksel teorilerin yapısıdır.

Öyle görünüyor ki Hilbert'in nihai amacı, bütün matematiksel soru ve sorunların çözülebilmesidir. Matematiğe ilişkin açıklanmamış hiçbir şey kalmamalıdır. Örneğin onun 1900 yılında çözülmemiş 23 soru ortaya koyması, Cantor'un teorisini kabul etmenin sonlu matematiğe ilişkin soruların çözülmesine katkı sağlayıp sağlamadığını sorgulaması ve matematiksel teorileri araçsal yönden ele alması gibi örnekler bu düşüncenin bir ürünüdür.

Hilbert'in amacı, bilindik bütün matematiksel teoremlerin birkaç basit aksiyoma hapsedilebileceğini göstermeye çalışmak değildir. Onun amacı matematiğin bir bütün olarak ilerlemesidir. Bu ise çözülmemiş matematiksel soruların çözülmesiyle sağlanabilirdi. Matematiksel teoriler ise onların çözülmesini sağlayacak araçlardı. Bunu sağlayacak araçlar şu veya bu biçimde ortaya konabilir, aksiyomlar çok çeşitli biçimlerde seçilebilirdi. Yalnız önemli olan, en sonunda aksiyomatik biçimsel sistemler olarak ortaya konulmuş olan teorilerin, matematikçinin karşılaştığı her matematik sorusunun çözümüne katkı sağlayabilmesi ve ayrıca elbette bu teorinin iç tutarlılığa da sahip olmasıydı. İşte Hilbert'in eksiksizlik anlayışı budur ve 1920'li yıllar bu anlayış çerçevesinde büyük adımların atıldığı yıllardır.

Gödel'in Eksiklik Teoremleri ise tam olarak bu adımların etkisinin iyice hissedildiği bir dönemde (1930-31) gelmiştir. Gödel, 1931'de yayımlanan ünlü "Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I" adlı makalesinde bu dönemi şöyle anar:

[74]David Hilbert (1899), *The Foundations of Geometry,* translated by E. J. Townsend, The Open Court Publishing, 1950, Illinois, s. 1.

> "Matematiğin daha fazla kesinlik [Exaktheit] yönündeki gelişimi –iyi bilindiği gibi- geniş alanlarının biçimselleştirilmiş hale gelmesine yol açtı, öyle ki ispatlamalar birkaç mekanik kural izlenerek yapılabilir hale geldi. Şimdiye kadar kurulan en kapsamlı [unfassendsten] biçimsel dizgeler, bir yanda Principia Mathematica'nın (PM) dizgesi, diğer yanda ise kümeler kuramının Zermelo-Fraenkel aksiyom dizgesi (daha sonra John v. Neuman tarafından genişletildi) olmuştur. Bu iki dizge o kadar geniştir ki matematiğin bugün kullanılan tüm ispatlama metodları bu dizgelerin içinde biçimselleştirilmiştir; diğer bir deyişle birkaç aksiyom ve çıkarım kuralına indirgenmiştir. Böyle olunca, bu aksiyomların ve çıkarım kurallarının aynı zamanda söz konusu dizgelerde biçimsel olarak ifade edilebilen tüm matematiksel sorulara karar vermek için yeterli oldukları zannedilmektedir."[75]

Gödel, makalesinin sonraki bölümünde belirttiği gibi durumun böyle olmadığını kanıtlamıştı. Bu makalede ortaya konan *Birinci Eksiklik Teoremi*, doğal sayıların yapısını ve bu sayılar arasındaki toplama ve çarpma ile gösterilebilecek bütün özellikleri ve bağıntıları karakterize edebilecek kadar güçlü görünen her tutarlı T biçimsel sistemi için, bu sistemde teorem olup olmadığına biçimsel olarak karar verilemeyen en az bir "G" önermesinin bulunabileceğini göstermektedir. Üstelik bu önerme aynı zamanda doğal sayılara ilişkin doğru bir önermedir. O halde biçimsel sistem olarak ortaya konmuş tutarlı hiç bir matematiksel teori, doğal sayılara ilişkin bütün doğruları ele geçirebilecek kadar eksiksiz değildir.

Bu noktada Dedekind'ın doğal sayıları karakterize etmek için aksiyomlar seçme çabası hatırlanabilir. Dedekind, mevcut dört aksiyomunun doğal sayılar kümesini tam olarak karakterize etmediğini fark ettiğinde beşinci bir aksiyom olarak tümevarım aksiyomunu önceki aksiyomlara eklemişti. Benzer bir yol izlenip, bu tutarlı T biçimsel sisteminin aksiyomları üzerinde ekleme/çıkarma çıkarma yapılarak sistem, teorem olup olmadığına karar verilemeyen G önermesinin doğruluk değerine karar verebilecek kadar güçlendirilebilir. Başka bir seçenek ise, çağlar önce Öklid'in uyguladığı yolu takip etmektir. Öklid paralel doğrular ile ilgili hipotezin önceki postülalardan türetilemeyeceğini sezgisel olarak fark ettiğinde sisteminin eksiksiz olması için bu önermeyi bir postüla olarak önceki postülalara eklemişti. O halde doğruluk değerine karar verilemeyen G önermesi de T biçimsel sistemine bir aksiyom olarak eklenerek bir T^2 sistemi oluşturulabilir. Yalnız eksiklik sorunu bu genişletilmiş veya güçlendirilmiş T^2

[75]Gödel, 1931: 23-24.

sistemi için de geçerlidir: Bu sistemde de doğruluk değerine karar verilemeyen bir G^2 önermesi bulunabilir.[76] Bu kısır döngünün ebedi olmasının nedeni nedir? Gödel'in gösterdiği şey, karar verilemeyen önermenin, aksiyomların herhangi bir biçimde seçilmesi sonucu değil, biçimsel sistemin kendi işleyişi ve yapısı sonucu ortaya çıkmasıdır. O halde 1928 bildirisinde Hilbert'in ortaya koyduğu üçüncü hedef, tek bir biçimsel sistemin aritmetiksel bütün doğru hipotezlere bir kanıt getirebilmesi anlamında ulaşılamaz.

Tutarlılık sorunu ile ilgili olan *İkinci Eksiklik Teoremi* ise bu türden sistemlerin tutarlık kanıtının, sistemin sadece kendi aksiyomları ve kanıtlama kuralları dahilinde verilemeyeceğini göstermektedir. Başka bir ifadeyle, sistem kendi kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlayamaz. Bu durumun önemli sonuçları vardır ve bu sonuçlar Hilbert'in 1928 bildirisinde koyduğu hedeflerden ilk ikisi ile doğrudan ilgilidir.

Bu türden bir biçimsel T sisteminin (Peano aksiyomları vb.) tutarlılığının kanıtı sistemin kendi içinde değilse dışında, örneğin T sisteminin tutarlı olduğunu gösteren bir T^2 sistemindedir. Yalnız bu durumda T^2 biçimsel sisteminin tutarlılığı sorunu ortaya çıkar. Aynı süreç T^2 sistemi içinde geçerlidir ve bu sistemin tutarlı olduğunu gösteren örneğin bir T^3 sistemi bulunmalıdır. Şu halde, mantıkta sonsuz gerilme adı verilen istenmedik bir durum ortaya çıkmaktadır. Hilbert'in 1928 bildirisinde ortaya koyduğu birinci hedef ise aritmetiği karakterize eden biçimsel sistemlerin tutarlılığının sonlu bir kanıtının verilebilmesiydi ve kanıtın sonlu olması için bu kanıtın sistemin doğrudan kendi aksiyomları ve kanıtlama kuralları içinde kurulabilmesi önemliydi. İkinci Eksiklik Teoremi ise bunun mümkün olmadığını göstermektedir.

Bu teoremin başka bir önemi ise, Hilbert'in bildirisinde ortaya koyduğu ikinci hedef ile ilgilidir. Hilbert'in amacı, matematiğin bütün alanlarının (matematiksel kanıtlamalarda kullanılıp kullanılamayacağı tartışmalı olan "saçmaya indirgeme" yöntemiyle birlikte) genel bir biçimselleştirilmesine geçilmeden önce, en azından temel aritmetiğin tutarlı ve eksiksiz olarak biçimselleştirilebilmesiydi. Temel aritmetiği eksiksiz olarak biçimselleştiren bir biçimsel sistem bulunup bu sistemin sonlu bir kanıtı

[76] Burada bir not olarak belirtmeliyiz ki, T^2 sistemi içinde karar verilemeyen G^2 önermesinin doğruluk değerine, aynı zamanda baştaki T sisteminde de karar verilemez. Kararlaştırılamayan önermelerin sisteme eklenmesiyle yeni sistemler oluşturma ve bunun sonucunda da yeni kararlaştırılamayan doğru önermeler bulma süreci sonsuza dek devam ettirildiğinde, T biçimsel sisteminin her ne kadar güçlü olsa da, doğal sayılara ilişkin bütün doğru önermelerin sadece çok az bir kısmını ele geçirebildiği, sezgisel olarak görülür.

verilebildiğinde, bu kanıtın daha güçlü sistemlerin tutarlılığının kanıtlanmasında kullanılması amaçlanıyordu. Yalnız Gödel'in ikinci teoreminin bir sonucu olarak bu mümkün olamazdı. Çünkü daha kendi kendisinin tutarlı olduğunu gösteremeyen bir biçimsel sistem, onu bir alt sistem olarak tamamen kapsayan daha güçlü bir biçimsel sistemin de tutarlılığını göstermek için kullanılamaz.

Bütün bu kanıtlamaların ilk sonucu Hilbert Programı'nda aranılan ve matematiğin bütün doğrularını ele geçirecek kadar güçlü olan bir biçimsel sistemin mümkün olamayacağıdır. Bu durum, Hilbert Programı'nın özgün amaçları doğrultusunda sonlanamayacağını göstermektedir: Biçimselci okulun en önemli adımı olan Hilbert Programı ağır bir yara alır. Diğer taraftan Hilbertçi amaçları taşıyan programların pek çok hedef değişiklikleri ile birlikte sonraki yıllarda da sürdürüldüğü görülmektedir.[77]

Bu kanıtlamalar mantıkçı okul açısından da önemli sonuçlar vermektedir. Gödel'in Eksiklik Teoremleri, matematiksel doğruluk ile kanıt arasında kapanmayacak bir mesafe olduğunu göstermektedir. Her matematiksel doğru, sadece mantıksal kanıtlama yöntemleriyle kanıtlanamamaktadır. Böylece mantıkçı okulun temel savı olan matematiğin tamamen mantığa indirgenebileceği, başka bir deyişle matematiğin, mantığın tam bir alt kümesinden başka bir şey olmadığı fikri de ağır yara almıştır. Mantıkçı geleneğin en önemli yapıtı olan *Principia Mathematica* sisteminin bütün aritmetiksel doğruları ele geçiremeyeceğinin kanıtlanması bu açıdan önemlidir.

Bu durum aynı zamanda doğruluğuna veya yanlışlığına kesin olarak karar verilemeyecek matematiksel önermelerin, kanıtlanamayan hipotezlerin her zaman mevcut olacağını göstermektedir: Matematik hiçbir zaman bitmeyecektir.

Ayrıca bu sonuçlar 1900 yılında Hilbert'in ortaya koyduğu yirmi üç sorundan ikincisi olan aritmetiğin tutarlılığını, başka bir ifadeyle aritmetikte kullanılan aksiyomların tutarlığını kanıtlama hedefine ulaşılamayacağını göstermektedir: Aritmetik kadar geniş bir alanın tutarlılığını kanıtlamanın bir yolu yoktur.[78]

---

[77] Richard Zach'ın, Hilbert'in biçimselciliğini ve programını incelediği "Hilbert'in Programı: O Zaman ve Şimdi" adlı makalesinde, Gödel sonrası Hilbertçi programların genel bir incelemesine ulaşılabilir: Zach, 2007: 433-440.

[78] Bottazzini, 2011: 9.

Bütün bunlar, matematiğe ilişkin çok önemli sonuçlardır ve Gödel'in teoremleri matematiğe ilişkin temel teoremlerden kabul edilir. Bu önemli sonuçlara ulaştıran kanıtlamanın nasıl yapıldığı sonraki bölümlerde genel olarak incelenecektir. Yalnız öncelikle Gödel'in kendisini ve bu makale ortaya çıkıncaya kadarki yaşamını inceleyeceğiz.

2.1 Gödel

Bu bölümde amacımız Gödel'in genel bir biyografisini vermek değildir. Aslında Türkçe literatürde Gödel'in özel yaşamı ve onun ilginç özelliklerine varıncaya kadar pek çok bilgi derlenmiş olarak bulunmaktadır. Casti ve Depauli'nin yapıtı buna örnek olarak gösterilebilir.[79] Fakat aradığımız şey bu teoremlerin nasıl bir süreç sonucunda ortaya çıktığını görmektir.

Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) o dönemde Avusturya-Macaristan İmparatorluğu sınırları içinde bulunan yalnız günümüzde Çek Cumhuriyeti şehri olan Brno'da doğmuş olan bir Alman mantıkçı-matematikçidir. Üniversite öncesi eğitimini ise liseyi bitirinceye kadar burada tamamlamıştır. Kendisinin lisede iyi bir matematik eğitiminden geçtiği görülmektedir. Ayrıca Gödel, kendisini çok etkileyen Kant'ın bilgi felsefesiyle de lise döneminde tanışır.[80]

1924 yılında Viyana Üniversitesi'ne kaydolan Gödel'in bu erken döneminde daha çok teorik fizik üzerine çalışmak istediği görülmektedir. Yalnız bu mümkün olmamıştır. Çünkü bu dönemde Viyana Üniversitesi'nde matematiksel araştırmaların güçlü olduğu görünmektedir. Gödel bu duruma kayıtsız kalmamış ve matematik bölümüne geçmiştir.

Bu dönemde Gödel'in danışman hocası, temelde pozitivist bir düşünür, matematikçi ve analizci olan Hans Hahn'dır. Gödel ilerde onun en ünlü öğrencisi olacaktır. Hahn, fizikçi ve filozof Ernst Mach'ın positivist felsefi görüşlerini tartışan bir düşünce topluluğunun üyesidir. 1922'de yine Hahn'ın desteğiyle Moritz Schlick'in de gruba dahil olmasıyla Viyana Çevresi adını alan bu topluluğun toplantılarına Hahn,

---

[79] Casti ve Depauli, 2004: 63-101.
[80] Tucker McElroy (2005), "Gödel, Kurt Friedrich", s. 119.

Gödel'i de çağırmıştır. Böylece Gödel, üniversiteye girdiği ilk yıldan itibaren bu düşünce topluluğun toplantılarına katılmaya başlamıştır. Yalnız Gödel her hafta Cuma günü akşam saatlerinde yapılan bu toplantıların etkin bir katılımcısı olmamıştır. Katıldığı toplantılarda ise daha çok dinleyici bir durumda olduğu görünmektedir. Öyle ki, topluluğun başka bir üyesi olan Carl Menger, Gödel'in bu toplantılarda hiç söz aldığını görmediğini, sadece ilgisini çeken konularda başını salladığını belirtir.[81]

Topluluğun genel görüşleri bugün mantıkçı pozitivim olarak bilinmektedir. Temelde Wittgenstein'ın *Tractatus* yapıtından etkilenen bu topluluk, metafiziği ve metafiziksel sorunları anlamsız sorunlar olarak görür. Bu sorunlar temelde dilsel sorunlardır. Metafizik sorunların ve sorunların ifade edildiği dilin derin bir mantıksal analizi, bu sorunların anlamsız sorunlar olduğunu gösterecektir. Temel sorun ise bu anlamsız sorunların yok edilmesidir.

Viyana Çevresi toplantılarına katıldığı dönemde Gödel, bu dönemde etkisi altına girdiği Moritz Schlick tarafından matematiksel ve mantıksal konuları araştırması için yönlendirilmiştir. Örneğin Schlick, Gödel'e, Russell'ın *Matematiksel Felsefeye Giriş* yapıtını inceletmiştir.[82] İlk olarak 1919 yılında yayınlanmış olan bu yapıt, Russell'ın sayıların doğası konusundaki görüşlerini, çeşitli aksiyomları, matematiğe ilişkin temel kavramları ve sorunları tanıttığı yapıttır.[83] Gödel Schlick'in derslerine de doğrudan katılmıştır. Bunun yanında Gödel, Rudolf Carnap'tan da dersler almıştır. Bu derslerden biri 1928/29 güz döneminde aldığı ve Fregeci matematiksel mantığı öğrendiği "aritmetiğin felsefi temelleri" dersidir.[84]

1928 yılına geldiğinde Gödel, Hilbert'in 1928 kongresinde dile getirdiği ve önceki bölümde dört madde halinde aktarılan sorunları öğrenmiş ve bunlar üzerine yoğunlaşmaya başlamıştır. Bundan sadece bir yıl sonra, henüz 23 yaşındayken, Hilbert'in dördüncü sorusunda koyduğu hedefe ulaşmıştır. Bu hedef, biçimsel mantıkta (daha da özelde birinci derece mantıkta) kullanılan çıkarım kurallarının, bu mantığın

---

[81]Michael Fitzgerald ve loan James (2007), *The Mind of the Mathematician*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, s.160.
[82]Piergiorgio Odifreddi (2011), "Kurt Gödel: Completeness and Incompleteness", *Mathematical Lives: Protagonists of the Twentieth Century From Hilbert to Wiles*, translated by Kim Williams, Springer, Heidelberg, ss. 69.
[83]Bertrand Russell (1948), *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen & Unwin LTD, London.
[84]Stewe Awodey ve A. W. Carus (2010), "Gödel and Carnap", *Kurt Gödel: Essays for His Centennial*, ed. Solomon Feferman vd. Cambridge University Press, Cambridge, ss. 254.

dilinde ifade edilebilecek bütün geçerli ifadeleri türetebilecek kadar eksiksiz olduğunu kanıtlama hedefidir. Gödel, (temeli Frege'ye dayanan) bir aksiyom ve çıkarım kuralları kümesinin, birinci derece mantığın dilinde ifade edilebilecek bütün geçerli ifadeleri türetmeye yeteceğini kanıtlamıştır. Bu sonuç Gödel'in 1929 yazında biten doktora tezinde sunulur ve bugün Gödel'in *Eksiksizlik Teoremi* olarak bilinmektedir. Fakat bu teorem, bu çalışmanın konusu değildir.

Gödel, eksiksizlik teoremini tez olarak sunduktan sonra, bu defa yüzünü Hilbert'in 1928 bildirisindeki ilk üç soruya çevirir. Artık onun sorunu, temel aritmetikte doğru olan her önermenin Hilbert'in belirttiği türden biçimsel sistemler içinde teorem olduğunu göstermektir. Bu amaç için *Principia* Mathematica üzerinde çalışan Gödel aradığını bulamamıştır: Birinci Eksiklik Teoremi'ne ulaşır. Doğal sayılara ilişkin doğru olan ve *Principia'*nın biçimsel dilinde ifade edilebilen en az bir doğru önerme vardır ve ayrıca ne bu önerme ne de olumsuzu *Principia* sisteminin teoremidir. Dahası, bu türden önermelerin ortaya çıkması sorunu, sisteme ne kadar çok aksiyom eklenirse eklensin engellenemeyecektir. Ayrıca bu sorun *Principia* gibi her biçimsel sistem için geçerlidir. Bu yüzden Gödel ilerde makalesinin adına "Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine" adını verecekti.

Gödel ulaştığı sonucun ne kadar önemli olduğunun farkındadır ve bu sonucu bilim dünyasına sunmadan önce, 1930'un Ağustos ayında, aralarında Rudolf Carnap'ın da bulunduğu bir grup filozofla bulgularını tartışır.[85] En sonunda 7 Eylül 1930 gününde Königsberg'de yapılan bir konferansta buluşunu bilim dünyasına sunar. Bu noktada ilginç olan bir şey, Gödel'in bu buluşunu konferans sırasında Hilbert onuruna yapılan bir toplantıda sunmasıdır. Yalnız Hilbert, Gödel'in buluşunu pek önemsememiş görünüyor. Ertesi gün Hilbert şu yorumu yapacaktır: "Bilmek zorundayız ve bileceğiz."[86] Hilbert'in bu ifadesinde geçen "bileceğiz" sözcüğü, bir gün çözülmemiş hiçbir matematiksel sorunun kalmayacağına ilişkin kesin inancını yansıtır.

Açıkçası Gödel'in bu buluşu, konferansa katılan kişilerin çoğu tarafından anlaşılmamış veya önemsenmemişe benziyor. Diğer taraftan Gödel'in konuşmalarını dinleyen bir kişi, onun buluşunun önemini ve bu buluşun Hilbert Programı açısından ne

[85] Byrd, 1999: 43.
[86] Odifreddi, 2011: 71.

ifade ettiğini anlamıştı. Bu kişi Hilbert Programı'nın etkin destekçilerinden biri olan John von Neumann'dır. Neumann, toplantı çıkışında Gödel'i yakalar ve buluşu hakkında daha fazla bilgi ister. Kongreden sonraki bir ay boyunca bu buluşlar üzerine yoğunlaşan Neumann, iki aydan daha kısa bir süre sonra Gödel'e bir mektup göndererek, eksiklik teoreminin bir sonucu olarak aritmetiğin tutarlılığının kanıtlanamayacağını kanıtladığını belirtir. Gödel aynı sonuca kendisinin de ulaştığını belirterek mektuba karşılık verir ve ünlü makalesinin ilk kopyasını Neumann'a gönderir.[87] 1931 yılında ise, bu makale en sonunda tam olarak yayınlanır. Bu arada John von Neumann, 1957 yılındaki ölümüne kadar, tıpkı Albert Einstein gibi ilerde Gödel'in yakın dostlarından ve bilimsel konularda danıştığı başlıca kişilerden olacaktır.[88] Makalenin yayınlanmasından bir süre sonra ise, Hilbert'in en sadık asistanlarından Paul Bernays da makaleyi inceler ve Gödel'in sonuçlarını onaylar.[89]

Bütün bu verilerin ışığında, Gödel'in iyi bir eğitimden geçtiği görünüyor. Dahası, Gödel'in üniversitedeki çevresi ve üniversitenin bu yıllardaki başarılı durumu, Gödel'in teoremlerinin ortaya çıkmasında bir etken olmalıdır: Gödel bu dönemde fazlasıyla entelektüel etkileşime girmiştir. Dahası, özellikle Viyana Çevresi döneminde dil ve mantık ile ilişkili konulara fazlasıyla yaklaşma ve bu konuların farklı yönlerini görme olanağı bulmuştur. Örneğin Hilbert nasıl matematiğin biçimselleştirilmesiyle matematik teorilerinin çelişkili önermelerden arındırılabileceğini düşünüyorsa, mantıkçı pozitivistler de aynı yöntem ile bilimin ve felsefenin metafizikten arındırılabileceğini düşünüyordu ve bu yönde çalışma içindeydiler. Dilin, mantığın, matematiğin ve dünyaya ilişkin bilgimizin çok farklı yönlerden sorgulandığı bu çevre ve tartışmaları Gödel'e kanımızca hem çok iyi bir bilgi alt yapısı sağlamış hem de Gödel'in matematiğin ve matematik felsefesinin özel konularını çok iyi tanımasını sağlamıştı.

Bu saptamadan sonra Gödel'in teoremlerine geri dönüyoruz. Bu teoremler Gödel'in Aristoteles'ten bu yana gelmiş geçmiş en büyük mantıkçı olduğu yorumlarını getirmiştir. Konu yoruma açıktır. Diğer taraftan dönemin matematik dünyası, bu dünyadaki genel eğilimler ve matematiksel bilgiden tarihsel olarak beklenen nitelikler hesaba katıldığında Gödel'in keşfinin ne kadar önemli olduğu görülür. Gödel, mantığın

[87] Giorgio Israel ve Ana Millan Gasca, *The World as a Mathematical Game - John von Neumann and Twentieth Century Science*, Birkhauser, Berlin, s. 30.
[88] Richard J. Lipton (2010), *The P=NP Question and Gödel's Lost Letter*, Springer, New York, ss. 227-228.
[89] Zach, 2007: 418.

kendisini kullanarak, matematik felsefesinde mantıkçı ve biçimselci okulların en önemli tezlerine önemli bir darbe vurur. Şimdi bu teoremlerin nasıl kanıtlandığını inceleyelim.

2.2 Gödel Kanıtlaması

Douglas R. Hofstadter, Gödel'in teoremleri ve bu teoremlerin nasıl kanıtlandığı hakkında güzel bir benzetme yapmıştır. Ona göre, Gödel'in teoremleri bütün parlaklığı ve yalınlığıyla bir inciye, Gödel'in kanıtlaması ise iç organlarıyla bu parlak ve yalın varlığı oluşturan çok karmaşık bir yapı olarak istiridyeye benzetilebilir.[90] Gerçekten de bu kanıtlama, Gödel her ne kadar makalesinde mümkün olduğunca açıklayıcı olmaya çalışsa da, son derece karmaşık ve tekniktir. Bu yüksek ölçüde tekniklik, makalenin anlaşılmasını zorlaştırır. Diğer taraftan Gödel'in kanıtlamasında esas olarak ne yapıldığı, başka bir ifadeyle Gödel'in izlediği yol belirgindir. Bu bölümde en azından Gödel'in izlediği genel yolu mümkün olduğunca basit ve anlaşılır biçimde açıklamaya çalışacağız. Yalnız öncelikle şu soruya odaklanıyoruz:

Doğruluk değerine karar verilmeyen paradoksal veya çelişkili ifadelerin gündelik bir dilin sözcük ve cümle oluşturma kuralları içinde oluşturulabilmesi bu dilin kendisi açısından neyi ifade eder? Örneğin Yalancı Paradoksu'nu ele alalım:

- Bu cümle yanlıştır.

Yalancı Paradoksu, Türkçe içinde oluşturulabilen sayısız önermeden biridir. Fakat onun doğruluk değerine karar verilemez. Çünkü bu önermeyi doğru kabul ettiğimizde yanlış, yanlış kabul ettiğimizde ise doğrudur. Bu durum ise bir çelişkidir. Şu halde Türkçe dilbilgisi içinde doğruluk değerine karar verilemeyen önermeler kurulabilir. Dahası bu durum sadece Türkçe için geçerli değildir. Yalancı Paradoksu, "doğru", "yanlış", "bu", "cümle", "olmak" gibi sözcüklerin anlamlarını içeren her doğal dilde kurulabilir. Yani bir doğal dil, her hangi bir cümlenin doğruluk değerini ifade edebilecek kadar güçlüyse ve bu dilde "bu" gibi, ifade içinde kullanıldığında, ifadenin kendi kendisine işaret etmesini sağlayan sözcükler barındırıyorsa, bu dilde doğruluk değeri kararlaştırılamayan önermeler oluşturulabilir.

Diğer taraftan herhangi bir doğal dilin, bu dilde kurulabilecek bütün önermelerin doğruluk değerine karar verebilmesi anlamında eksik olduğu sonucu çıkarılmaz. Doğal

[90] Hofstadter, 2001: 61.

dillerden temel olarak, mümkün olduğunca çok olgu durumunu ifade edebilmeyi, başka bir ifadeyle dile getirebilmeyi sağlamaları beklenir. Özetle etkili bir iletişimin temeli olmaları beklenir. Fakat onlardan, kendi dilbilgisi kuralları dahilinde kurulabilen önermelerin doğruluk değerine karar vermeleri beklenmez. Bu yüzden, bu amaç için ortaya konulmuş önsel varsayımlara da sahip değildirler.

Hilbertçi anlamda biçimsel sistemler ise, doğrudan belirli bir alanın doğrularını ele geçirmek için ortaya konulur. Örneğin sistemde, alana ilişkin temel doğrular, yani aksiyomlar bulunacaktır. Şu halde böyle bir sistemin dilinde, Yalancı Paradoksu'na benzeyen bir önermenin kurulabileceğini göstermek, sistemin hem eksiksizliği hem de tutarlılığı açısından önemli bir sorun olurdu. Gödel'in yaptığı şey ise tam olarak budur.

Gödel, *Principia Mathematica* (PM) sisteminin sembolik dilini kullanarak, bu dilde, doğal dilde aşağıdaki anlama gelen ve üst matematiğe ait olan bir G önermesinin kurulabileceğini göstermiştir:

- G = "G önermesi PM'de kanıtlanamaz"

Kabaca ifade edersek:

- Bu önerme PM'de kanıtlanamaz.[91]

Bu önermenin PM'nin sembolik dilinde kurulabileceğini göstermek önemli bir başarıdır. Çünkü yapılan şey bir anlamda, sistemin kendi kendisi üzerine söz söylemesini sağlamaktır. Bu durum Türkçe dilbilgisi kurallarını ifade eden önermelerin yine Türkçe ile ifade edilmesine benzetilebilir. Türkçe gibi herhangi bir doğal dilde bunu yapmak kolaydır. Yalnız PM'nin dili gibi özü itibariyle anlamsız simgelerden oluşan bir dilde bunu yapabilmek zordur. Neumann gibi bilim adamlarının Gödel'i Aristoteles'ten bu yana en iyi mantıkçı olarak değerlendirmesinin arka planında belki de bu yatar.

Şimdi G önermesine geri dönüyor ve bu önermenin PM'nin bir teoremi olup olmadığını sorguluyoruz: Eğer G önermesi PM'de kanıtlanabilseydi, bu önermenin yanlış olduğunun kabul edilmesi gerekirdi. Çünkü G önermesi, kendi kendisinin PM'de kanıtlanamayacağını belirtmektedir. Yani G önermesi PM'de kanıtlanabilseydi, PM

---

[91] Bu önerme yalancı paradoksuna benzer bir yapıdadır. Yalnız Gödelci kararlaştırılamama kanıtlamalarında kullanılabilecek tek önerme biçimi bu değildir. Gödel makalesinin 14. dipnotunda her epistemolojik antinominin buna benzer bir kararlaştırılamama ispatı için kullanılabileceğini iddia eder: Gödel, 1931: 27.

yanlış bir önermeyi teorem yapmış olacaktı. Şu halde PM sistemi G önermesini de kanıtlayabilecek kadar eksiksiz ise, bu sistem güvenilir olmayan, tutarsız bir sistemdir.

Yalnız PM sisteminden beklenen en temel özelliklerden biri güvenilirlik yani tutarlılıktır. PM sisteminin yanlış hiçbir önermeyi kanıtlamaması gerekmektedir. O halde, PM sistemi güvenilir bir sistem ise, G önermesi yanlış olduğu için PM sisteminde kanıtlanamaz. Yalnız böyle bir durumda G önermesi doğrudur. Yani PM doğru bir önermeyi kanıtlayamamış olur. G önermesi doğru ise, bu önermenin olumsuzu olan ¬G önermesi de yanlıştır. Şu halde ¬G önermesi de PM'de (PM güvenilir olduğu için) kanıtlanamaz. Bütün bunların sonucu olarak PM sisteminin güvenilir bir sistem olduğunu varsayarsak, ne G önermesi ne de ¬G önermesi PM'de kanıtlanamaz. Kısaca ifade edildiğinde, *PM sistemi tutarlı (güvenilir) ise eksiktir*.

Bu noktada şuna dikkat edebiliriz: G önermesi aritmetiğe ilişkin bir önerme değildir. Dahası aritmetiğe ilişkin olmayan daha pek çok önerme bulunabilir. PM sisteminin üzerine söz söylediği alan ise aritmetiktir ve sadece aritmetiğe ilişkin doğruları ele geçirmek için ortaya konulmuştur. Gödel'in, PM'nin simgesel dilini kullanarak, bu önermenin kurulabileceğini göstermesi büyük bir başarı olabilir. Fakat aritmetiğe ilişkin olmayan bir önermeyi kanıtlayamadığı için PM sisteminin eksik olduğunu nasıl iddia edebiliriz?

Burada kanıtlamanın ikinci aşaması başlamaktadır. Bu aşama, üst matematiği *aritmetikleştirme* aşamasıdır. Yani daha da özelde, bir hipotezin bu sistemde teorem olup olmadığı, sistemin tutarlı olup olmadığı gibi üst matematiğe ilişkin önermeleri, aritmetiğin nesneleri ve bu nesnelerin birbirleri ile olan bağıntıları biçiminde gösterme aşamasıdır.[92] Peki, aritmetikleştirme neyi sağlar? Bu sorunun cevabı önemlidir, çünkü bu aşamanın sonucu olarak, başta aritmetiğe ilişkin bir önerme olmayan üst matematiğe ait G önermesi bir aritmetik önermesine ve bu önermenin PM'da *biçimsel* olarak kanıtlanabilir olup olmadığı sorusu da bir *aritmetik* sorusuna dönüşür. Böylece PM'de doğruluk değerine karar verilemeyen ama PM'nin konu alanına da girmeyen bu soru,

---

[92] Burada şunu belirtmeliyiz ki, okuyucu Gödel'in makalesini incelediğinde birbirinden keskin çizgilerle ayrılan farklı aşamalarla karşılaşmayacaktır. Örneğin aritmetikleştirme, Gödel'in PM sistemini tanıtmasının hemen ardından gelmektedir: Gödel, 1931: 32. Dahası Gödel'in, sistemin kendi kendisi üzerine söz söylemesini sağlaması, bu aritmetikleştirmenin yardımıyla mümkün olmuştur. Okuyucu bunun nasıl bir süreç olduğunu anlamak için, Nagel ve Newman'ın rehber niteliğindeki yapıtını ve Hofstadter'in bu yapıt üzerindeki düzenlemesini inceleyebilir: Nagel ve Newman, 2008: 64-67. Diğer taraftan bu şekilde farklı aşamaların olduğunu varsaymak sadece Gödel'in kanıtlamasının anlaşılmasını kolaylaştırmak içindir.

PM bütün aritmetiksel doğruları ele geçirme iddiasıyla ortaya konulduğu için, artık doğrudan PM'nin konu alanına girer. Bu aritmetik sorusunun cevabına PM içinde ulaşılamamasının sonucunda da PM'nin eksikliği ortaya çıkar. Gödel kanıtlamasının genel yapısı bu biçimdedir.

Kanıtlamanın daha geniş bir açıklamasına geçmeden önce basitleştirilmiş bir PM sistemini varsayacağız. Bu sistemin aksiyomları biçimselleştirme ve biçimsel kanıtın incelendiği bölümde verilen biçimsel Peano aksiyomlarından ilk altısıdır.[93] Tümevarım aksiyomu ise sistemde bir çıkarım kuralı olarak bulunacaktır. Ayrıca sistemde Hilbertçi amaçlara uygun olarak sonlu sayıda çıkarım kuralı vardır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi gösterilebilir:

- $(\forall x)\neg\neg(x) \rightarrow (x)$
- $(\forall x)(\forall y)((x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y$
- $(\forall x)(\forall y)(x \vee y) \rightarrow (\neg x \rightarrow y)$
- $(\forall x)(\forall y)\ \neg(x \vee y) \rightarrow (\neg x \ \wedge \neg y)$
- $(\forall x)(\forall y)\ (x \rightarrow y) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$
- $(\Phi(0) \wedge (\forall x)(\Phi(x) \rightarrow \Phi(A(x)))) \rightarrow (\forall x)\Phi(x)$

  vb.

Son olarak Gödel'in PM'nin sembolik dilinde kurabildiği ve kendi kendisinin kanıtlanamazlığı belirten G önermesine geri dönüyoruz. Bu önerme oldukça uzun bir önermedir; yalnız aşağıdaki yapıya benzer biçimde ifade edilebilir:

G = " (∀x)(∀y)........."

Artık aritmetikleştirme aşamasının nasıl bir süreç olduğunu inceleyebiliriz. Daha önce de belirttiğimiz gibi aritmetikleştirme, üst matematiğe ilişkin bazı tiplerdeki önermelerin, aritmetiğin nesneleri ve bu nesnelerin bağlantıları olarak gösterilmesiydi. Bu amaç için Gödel, bir kodlama yöntemi geliştirmiştir ve bu yöntem *Gödel Numaralandırması* olarak anılmaktadır. Bu numaralandırma, bir tür kodlamadır ve bu kodlama sayesinde PM sistemindeki her simge, her aksiyom, her teorem birer doğal

---

[93] Gödel de kanıtlamasını örnek bir sistem üzerinden yapar. Bu sistemi (P sistemi) Gödel, makalesinde basitçe şu biçimde tanımlar: "P, esasen Peano aksiyomları üzerine PM'nin mantığı giydirilerek elde edilmiş olan dizgedir." Gödel, 1931: 28. Gödel ayrıca PM sistemi üzerinde yapılan bu değişikliğin kanıtlama sürecini kolaylaştırmak için olduğunu ve bundan kolayca vazgeçilebileceğini, makalenin 16. dipnotunda belirtir.

sayıya karşılık gelir. Aşağıdaki örnek kodlama şeması basitleştirilmiş PM sistemine aittir:

PM Sistemi Sabit Simgeleri	Simgenin Gödel Numarası
¬	1
∨	2
→	3
≠	4
=	5
0	6
A	7
(	8
)	9
∀	10
+	11
•	12

Toplamda 12 adet simge ve simge numarasından oluşan bu tablo temelde Nagel ve Newman'ın tablosuna dayanmaktadır.[94] Gödel'in makalesinde ise bu sayı daha fazladır. Bunun yanında Gödel, tamdeyilerin kurulmasını sağlayan farklı değişkenleri de, bu değişkenlerin tiplerine göre numaralandırmıştır. Değişkenlerin tipleri, bu değişkenlerin yerine neyin getirilip getirilemeyeceğine göre değişmektedir.[95] Bu üç farklı tipteki değişkenin kodlamasında şu kuralları kabul edeceğiz:

1. tipte değişkenler için: sırayla 12'den büyük asal sayılar
2. tipte değişkenler için: sırayla 12'den büyük asal sayıların kareleri
3. tipte değişkenler için: sırayla 12'den büyük asal sayıların küpleri

Örneğin "(∀x)(∀y)(A(x) = A(y) → x = y) aksiyomundaki "x" ve "y" değişkenleri, sayısal değerlerle değiştirilebilir olan birinci tipteki değişkenlerdendir. Şu halde birinci kurala uygun olarak "x" değişkeni yerine 13, "y" değişkeni yerine 15 sayısını yerleştirilebilir. Artık bir tamdeyinin nasıl kodlanabileceğini inceleyebiliriz. Bir örnek olarak:

---

[94] Nagel ve Newman, 2008: 55-56.

[95] PM sistemi üç farklı değişken tipi barındırır. Birinci tipteki değişkenler sayısal değişkenlerdir ve bunların yerine sayılar yerleştirilebilir. İkinci tipteki değişkenler önermeler ile değiştirilebilen değişkenlerdir ve bunlar farklı tamdeyiler ile değiştirilebilir. Son olarak asal olma, çift olma gibi pek çok farklı yüklem biçimleriyle değiştirilebilen üçüncü tipteki değişkenler, yani yüklem değişkenleri gelmektedir: Casti ve Depauli, 2004: 52; Nagel ve Newman, 2008: 59.

- $(\forall x)(x + 0 = x)$

aksiyomunu ele alalım. Bu önermedeki simgeleri, tablodaki doğal sayı karşılıklarıyla değiştirdiğimizde şunu elde edeceğiz:

-	(	∀	x	)	(	x	+	0	=	x	)
➢	8	10	13	9	8	13	11	6	5	13	9

Fakat Gödel'in amacı her simge gibi her tamdeyinin yerine de tek ve benzersiz bir doğal sayı yerleştirmekti. Çünkü tamdeyi bir bütündür ve tektir. Bunun için izleyeceğimiz yol, en küçük asal sayıdan başlayarak, tamdeyide ne kadar sayı varsa o sayıda asal sayıyı sırayla almak, tamdeyinin simgelerinin doğal sayı karşılıklarını sırayla bu asal sayılara üs olarak eklemek ve bu asal sayıları çarpmaktır. Örnek tamdeyide 11 simge vardır. O halde bu tamdeyinin doğal sayı karşılığı aşağıdaki işlemin sonucu olan sayıdır:

- $2^{8} \bullet 3^{10} \bullet 5^{13} \bullet 7^{9} \bullet 11^{8} \bullet 13^{13} \bullet 17^{11} \bullet 19^{6} \bullet 23^{5} \bullet 29^{13} \bullet 31^{9}$

Bu işlemin sonucu hesaplaması güç bir büyük sayıdır. Bu sayıya "a" diyelim. Yalnız bu "a" sayısı, her ne kadar büyük olursa olsun sonlu bir sayıdır. Bu şekilde Gödel, PM sistemi dilinde yazılabilecek her aksiyom ve teoreme ve ayrıca G önermesine birer doğal sayı karşılığı iliştirebilmiştir.

Ayrıca Gödel, yukarda da belirtildiği gibi, her biçimsel kanıta da (kanıt şeması) tek ve benzersiz bir doğal sayı karşılığı bulabilmiştir. Örneğin "0 + 0 = 0" önermesinin kanıt şeması:

- ➢ $(\forall x)(x + 0 = x)$
- ➢ $0 + 0 = 0$

Birinci önermenin doğal sayı karşılığının "a" olduğunu biliyoruz. Aynı kuralları uygulayarak "0 + 0 = 0" teoreminin de doğal sayı karşılığını bulabiliriz:

- $2^{6} \bullet 3^{11} \bullet 5^{6} \bullet 7^{5} \bullet 11^{6}$

Bu sayıya "b" diyelim. Şu halde teoremin kanıtını şemasını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

- $2^{a} \bullet 3^{b}$

Bu işlemin sonucu olan sayıya "c" diyelim. "c" sayısı bu kanıt şemasının doğal sayı karşılığıdır. Bu yöntem yardımıyla PM sistemi içindeki her kanıt şemasına birer doğal sayı karşılığı bulunabilir. Burada dikkat edilmesi gereken şey, teoremler ve kanıt şemalarının doğal sayı karşılıklarının birbirleri ile olan aritmetiksel bağıdır.

Bu noktada basitleştirilmiş PM sisteminde izlenen yolun, önceki bölümlerde ele alınan MIU sisteminde de tekrarlanabileceğini not edelim. Toplamda 3 simgeden oluşan bu sistemin simgeleri aşağıdaki tablo yardımıyla doğal sayılara yansıtılabilir:

M = 3 I = 1 U = 0

Böylece örneğin, MI aksiyomu 31, MU önermesi ise 30 olarak gösterilebilir. Bu durum, çıkarım (dönüştürme) kurallarını da etkiler. Örneğin MIU sisteminin birinci çıkarım kuralı:

- “eğer son simge I ise, bu simgeden sonra U simgesi eklenebilir”
- “eğer son sayı 1 sayısı ise, bu sayıdan sonra 0 sayısı eklenebilir”

kuralı ile değiştirilebilir. Peki, bu neden önemlidir? Bu durumun önemi, çıkarım kurallarının da, tıpkı aksiyomlar, teoremler ve biçimsel kanıt şemaları gibi aritmetiksel olarak ifade edilebileceğini göstermesindedir. Örneğin anmış olduğumuz biçimsel dönüştürme kuralı:

- “Eğer sayı 10’a bölündüğünde 1 kalanını veriyorsa, bu sayı 10 ile çarpılabilir.”

biçiminde bir aritmetik kuralına dönüştürülebilir. Bu durum, MIU sisteminin kalan üç dönüştürme kuralı için de geçerlidir. Bazı kuralları bir aritmetiksel kural haline getirmek diğerlerine göre daha güçtür; yalnız bütün biçimsel kurallar, aritmetiksel kurallar haline getirilebilir. Böylece:

- “MI’den başlayarak, MIU sisteminin dört adet dönüştürme kuralının tekrar tekrar kullanılmasıyla, MU’ya ulaşılabilir mi?” biçimsel sorusu:
- “31 sayısından başlayıp, verili dört adet aritmetik kuralının tekrar tekrar kullanılmasıyla 30 sayısına ulaşılabilir mi?” biçimindeki aritmetik sorusuna dönüşür.

Aynı durum, PM sisteminin çıkarım kuralları için de geçerlidir. Bu çıkarım kuralları da tıpkı MIU sisteminin çıkarım kuralları gibi aritmetiksel kurallar haline getirilebilir. Bunu yapmak, MIU sisteminin çıkarım kurallarını dönüştürmekten daha da zordur ama mümkündür. PM sisteminin çıkarım kuralları da aşağıdakine benzer bir yapı kullanılarak aritmetiksel kurallara dönüştürülebilir:

- Eğer sayı ……… özelliğini gösteriyorsa, bu sayı …… sayısıyla çarpılıp/bölünebilir veya bu sayıdan/sayıya ……. sayısı çıkarılıp/toplanabilir.

Bütün bunların sonucu olarak artık şu soruyu soruyoruz:

- Aşağıdaki sayılardan (basitleştirilmiş PM sisteminin aksiyomları olan Peano aksiyomlarının Gödel numaralandırması kullanılarak sırayla dönüştürülmüş biçimi) başlayarak*:*

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{7}\bullet 13^{8}\bullet 17^{13}\bullet 19^{9}\bullet 23^{4}\bullet 29^{6}$

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{10}\bullet 17^{15}\bullet 19^{9}\bullet 23^{8}\bullet 29^{7}\bullet 31^{8}\bullet 37^{13}\bullet 41^{9}\bullet 43^{5}\bullet 47^{7}\bullet 53^{8}\bullet 59^{15}\bullet 61^{9}\bullet 71^{3}\bullet 73^{13}\bullet 79^{5}\bullet 83^{15}\bullet 89^{9}$

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{13}\bullet 17^{11}\bullet 19^{6}\bullet 23^{5}\bullet 29^{13}\bullet 31^{9}$

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{10}\bullet 17^{15}\bullet 19^{9}\bullet 23^{8}\bullet 29^{13}\bullet 31^{11}\bullet 37^{7}\bullet 41^{8}\bullet 43^{15}\bullet 47^{9}\bullet 53^{5}\bullet 59^{7}\bullet 61^{8}\bullet 67^{13}\bullet 71^{11}\bullet 73^{15}\bullet 79^{9}\bullet 83^{9}$

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{13}\bullet 17^{12}\bullet 19^{6}\bullet 23^{5}\bullet 29^{6}\bullet 31^{9}$

$2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{10}\bullet 17^{15}\bullet 19^{9}\bullet 23^{8}\bullet 29^{13}\bullet 31^{12}\bullet 37^{7}\bullet 41^{8}\bullet 43^{15}\bullet 47^{9}\bullet 53^{5}\bullet 59^{8}\bullet 61^{13}\bullet 67^{12}\bullet 71^{15}\bullet 73^{9}\bullet 79^{11}\bullet 83^{13}\bullet 89^{9}$

ve aşağıdaki kuralları gereken miktarda uygulayarak:

-Eğer sayı ……
-Eğer sayı ……
-Eğer sayı ……
-Eğer sayı ……
-Eğer sayı ……
-Eğer sayı ……

Aşağıdaki sayıya (G önermesinin Gödel numaralandırması kullanılarak dönüştürülmüş biçimi) ulaşılabilir mi?

- $2^{8}\bullet 3^{10}\bullet 5^{13}\bullet 7^{9}\bullet 11^{8}\bullet 13^{10}\bullet 17^{15}\bullet 19^{9}$...........

İşte bu soru bir aritmetik sorusudur ve bu haliyle PM sisteminin (PM sistemi bütün aritmetiksel doğruları ele geçirmek amacıyla ortaya konulduğu için) doğrudan konu alanına girer. Peki, bu soruya PM'nin cevabı nedir? Bu soruya PM'nin cevabı, kendi kendisinin kanıtlanamazlığını belirten G önermesinin PM'de kanıtlanabilir olup olmadığı sorusuyla eşdeğerdir: PM'de teorem olup olmadı kararlaştırılamayan bir önerme bulunmuştur. PM sistemi (PM'nin tutarlı bir sistem olduğunu varsayarsak) eksiktir.

Bu noktada G önermesinin PM'ye bir aksiyom olarak eklenebileceğini belirtelim. Böylece G önermesi PM'de kanıtlanabilir duruma gelir. Yalnız bu durumda bütün süreç tekrar başlatılır: G önermesinin eklenmesiyle oluşan yeni biçimsel T^2 teorisinin dilinde, "bu önerme T^2 sisteminde kanıtlanamaz" anlamına gelen G^2 önermesi kurulabilir, aritmetikleştirme aşaması yeniden uygulanır ve T^2 sisteminin de eksikliği kanıtlanır. Bu noktada T^2 sisteminde biçimsel olarak kararlaştırılamayan G^2 önermesinin PM sisteminde de kararlaştırılamayacağını belirtelim. Sonuç olarak, sürecin bu şekilde devam ettirildiği düşünüldüğünde, PM sisteminde kararlaştırılamayan sonsuz adet aritmetiksel önermenin bulunabileceği ortaya çıkar. Dahası, farklı aritmetikleştirme biçimlerinin kullanılması (örn. numaralandırmada farklı sayıların kullanılması) daha farklı aritmetik sorularının ve aritmetiksel önermelerin ortaya çıkmasını sağlar ve bu durum PM'de kararlaştırılamayan önermelerin niceliğine katkıda bulunur. Bütün bunların sonucu olarak PM'nin (tutarlıysa) *özsel olarak eksik* olduğu görülür. Birinci eksiklik teoreminin belirttiği yasa budur: Doğal sayıların genel yapısını ve bu sayılar arasındaki toplama ve çarpma ile gösterilebilecek bağıntıları karakterize edebilecek kadar güçlü her biçimsel sistemin özsel olarak eksik olduğu kanıtlanabilir.[96]

Gödel'in *İkinci Eksiklik Teoremi* de bu temel üzerine kurulmaktadır. Yani ikinci teorem, birinci teoremin bir sonucudur. Yalnız bu teorem de en az birinci teorem kadar önemlidir. Bu teorem eğer PM gerçekten tutarlıysa kendi kendisinin tutarlılığını kanıtlayamayacağını gösterir. Bu çalışmada kanıtlama, ayrıntılı olarak incelenmeyecek; yalnız kanıtın genel basamakları aktarılacaktır:

Gödel öncelikle, üst matematiksel olarak yorumlandığında "PM tutarlıdır" anlamına gelen ve PM sistemine ait bir önermenin nasıl kurulabileceğini gösterdi. Yani PM sisteminin dilinde kurduğu bu önerme, üst matematiksel olarak yorumlandığında PM'nin tutarlı olduğunu belirtir. Bu önermeye T diyelim.

Ardından Gödel, yine üst matematiksel olarak yorumlandığında "PM tutarlıysa, (PM) eksiktir" anlamına gelen bir önermenin PM sisteminde nasıl kurulabileceğini gösterdi. Bu önermenin birinci, yani başka bir ifadeyle koşul kısmı önceki adımda kurulmuştu. Şu halde bu bileşik önermeyi oluşturabilmek için "PM eksiktir" önermesinin kurulması gerekir. Bu önerme ise "doğru olan ama kanıtlanabilir olmayan herhangi bir X tamdeyimi hakkında söylenebilecek olan 'X, PM'nin bir teoremi değildir' önermesine eşdeğerdir."[97] Yani, böyle bir önerme bulunduğunda, bu önerme aynı zamanda PM'nin eksik olduğu anlamında gelecektir. Bu amaç için ise kendi

---

[96] PM sisteminin eksikliği *Önerme VI*'da kanıtlanmıştır: Gödel, 1931: 44-50. *Önerme VIII* ve *Önerme IX*'da bu sonuç PM benzeri bütün sistemler için genelleştirilmiştir: Gödel, 1931: 53. *Önerme X*'da bu genelleştirilebilirliğin kanıtı verilmektedir: Gödel, 1931: 54-57.

[97] Nagel ve Newman, 2008: 85.

kendisinin kanıtlanamazlığını ileri süren G önermesi kullanılabilir. Çünkü, PM'nin aksiyomlarından türetilemese de, üst matematiksel akıl yürütme süreciyle doğru olduğu görülebilmektedir. Dahası, bu önermenin PM'nin bir teoremi olduğunu belirtmek için başka bir önerme kurmanın gereği yoktur: G zaten kendi kendisinin PM'nin bir teoremi olmadığını belirtmektedir. Yani bu önerme, kendi başına PM'nin eksikliğine işaret edebilmektedir. Böylece temel bileşik önerme, anlamını yitirmeden: "PM tutarlıysa, G önermesi PM'de kanıtlanamaz" biçimine dönüşür. Bu önermeyi "T→G" olarak gösterelim.

Bir sonraki aşamada Gödel, "T→G" önermesinin, PM'de biçimsel olarak kanıtlanabileceğini göstermiştir. Yani bu önerme, PM'nin bir teoremidir. Artık şunu soruyoruz: T, PM'de kanıtlanabilir mi? T'nin PM'nin bir teoremi olduğunu varsayalım. Böyle bir durumda "T→G" önermesi de PM'nin bir teoremi olduğu için: "T ∧ (T→G)" bağıntısına ve buradan *modus ponens* kuralı yardımıyla "G" önermesinin PM'nin teoremi olduğu sonucuna ulaşılır. Fakat G önermesinin PM tutarlı ise PM'nin bir teoremi olmadığını biliyoruz. Şu halde T önermesi de, PM sistemi tutarlıysa, PM'nin bir teoremi değildir.

Böylece şu görülebilir: PM sisteminin tutarlı olduğunu gösteren fakat PM sisteminin kendi içine yansıtılabilen hiçbir üst matematiksel ve sonlu bir akıl yürütme yoktur.[98] Başka bir ifadeyle, PM'nin hiçbir teoremi veya teorem dizisi yoktur ki bu teorem veya teorem dizisi üst matematiksel olarak yorumlandığında, PM'nın tutarlı olduğunu gösterebilsin. Bu sonuç çok basit bir ifadeyle, PM'nın kendi kendisinin tutarlılığını kanıtlayamadığını gösterir.

Bunu kavramak için şu basit anlaşılır örneği ele alabiliriz: PM'nin tutarlı olup olmadığının sorgulandığı bir yargılamadayız ve PM'nin şu ve şu gerekçelerin bir sonucu olarak tutarlı olduğunu iddia ediyoruz. Ardından bu gerekçelerin güvenilirliğini göstermek için onları PM'nin kendisinde temellendirmek istiyoruz. İşte bu olanak Gödel'in ikinci teoremi tarafından dışlanmaktadır: PM hiçbir zaman bize bu gerekçelerin kendisinde bulunduğunu bildiremeyecektir. Bu, PM'nin tutarlı olduğunu gösteren bütün gerekçeler için geçerlidir ve bu gerekçelerin kendisinde olup olmadığı PM'ye sorulduğunda, PM sessiz kalacaktır. Bundan daha da kötüsü, PM, bizim için

[98] *Önerme XI:* Gödel, 1931: 58-60.

onun tutarlı olduğunu gösterecek herhangi bir gerekçeler bütününün kendisinde var olduğunu belirttiği an PM'nin tutarsız olduğu görülecektir. Artık Gödel'in, Hilbert biçimselciliğinin özgün amaçlarının önüne nasıl duvar ördüğü artık daha da kolay görülebilir durumdadır. Dahası bütün bu olumsuz sonuçlara yol açan G önermesi tek değildir: Gödel, her epistemolojik antinominin bu olumsuz durumun ortaya çıkması için kullanılabileceğini iddia etmektedir.

Bu bölümde Gödel'in kanıtlamasını mümkün olduğunca anlaşılır biçimde açıklamaya çalıştık. Fakat bu kanıtlamanın fark edilmesi gereken başka yönleri de vardır. Gödel bu kanıtlamayı mümkün olduğunca ikna edici biçimde oluşturmaya çalışmıştır. Bunun nedeni öyle görünüyor ki sadece teoremlerin önemli sonuçlarının olması değildir. Matematik felsefesinin belki de altın çağının yaşandığı bu dönemin en temel özelliklerinden biri, farklı matematik felsefesi geleneklerine mensup kişilerin birbirleriyle yaptığı akademik tartışmaların sıklığıdır. Özellikle mantıkçı, biçimci ve sezgici geleneklerin birbirleriyle yaptığı tartışmalarda uçlaşan bu durum, Gödel'in bütün geleneklerdeki matematikçileri ikna edecek şekilde bir kanıt ortaya koymasını gerektirmişti. Bu yüzden Gödel tamamen mantıksal araçları kullanmıştır. Ayrıca biçimci geleneğin özgün amaçları etrafında kanıtlamasını ortaya koymuştur. Bunun yanında kanıtlanamayan önermelerin varlığını, çelişkiyle kanıtlama yöntemi gibi sezgici geleneğin hoşnut olmadığı bir yöntemle göstermeye çalışmamış, bu önermeyi doğrudan kurmuştur.[99]

Açıkçası Gödel ikna edici de olmuştur. Temelde Gödel'in makalesini "Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I" olarak adlandırmasının nedeni, teoremlerinin doğruluğu konusunda matematikçileri tek bir makale ile ikna edemeyeceği endişesiydi. Bu yüzden Gödel makalesinin son sözlerinde yeni bir makalenin geleceğini haber veriyordu. Bu yeni makalede Gödel, sonuçlarını (örneğin Zermelo-Fraenkel Kümeler Teorisi vb.) diğer sistemleri de kapsayacak biçimde genelleştirerek kanıtlayacağını ve birinci makalede genel hatlarıyla kanıtını vermiş olduğu ikinci teoremini daha da açıklayıcı biçimde aktaracağını belirtmişti.[100] Fakat buna gerek kalmamıştı. Çünkü Gödel'in makalesi –bir

---

[99] Gödel de bu hassasiyetini özellikle Ö*nerme VI*'yı açıklarken belirtmiştir: Gödel, 1931: 47.
[100] Gödel, 1931: 60.

önceki bölümde de belirtildiği gibi- bizzat biçimciler tarafından da kabul edilmişti. Bu yüzden Gödel devam niteliğinde ikinci bir makale yazmak gerekliliği duymamıştır.

Onun bu sonuçları bugün matematikçiler arasında "eksiklik ilkesi" olarak bilinmektedir. Yalnız bu sonuçlar sadece matematik dünyasını ilgilendirmemiş, çok farklı alanlarda çok farklı argümanları desteklemek için kullanılmıştır. Bu noktadan eksiklik teoremlerinin sahibinin kendi felsefi düşüncelerini inceleyeceğiz. Çünkü onun felsefi görüşleri, teoremleri ile tutarlı bir bütün oluşturmaktadır ve bu görüşleri incelemek Gödel'in eksiklik teoremlerini daha geniş çerçevede görebilmemizi sağlayacaktır.

2.3 Gödel'in Platonculuğu ve Matematiksel Sezgi

Gödel her ne kadar teoremlerini çok farklı matematik felsefesi geleneklerinden gelen matematikçileri ikna edecek tarz da yazmış olsa da kendisi bu geleneklerin hiç birisinin doğrudan destekçisi değildir. Örneğin Gödel ne biçimselci gelenekten ne de XIX. yüzyılda Frege ile başlayan ve Whitehead ve Russell ile doruk noktasına ulaşan mantıkçı gelenektendir. Gödel matematiksel nesneleri biçimselci gelenek gibi simgeler topluluğu olarak görmez. Onların saf mantıksal ilkelerden de türetilebileceğini düşünmez. Diğer taraftan Gödel'in matematiksel nesnelere ve onların bilgisine bakışı matematik felsefesinde sezgici geleneğin bakışıyla benzerlikler gösterir. Sezgici gelenek, matematiksel bilginin oluşmasında sezginin önemini vurgular. Matematiksel nesneler ise ancak fiili olarak kurulabildiklerinde var olarak kabul edilebilir. Örneğin Cantor'un sonlu ötesi kümeleri ancak fiili olarak kurulduğunda matematiksel çalışmaların konularına dahil olabilir. Gödel'in düşünceleri, matematiksel nesnelerin bilgisine ulaşmada sezginin önemi konusunda sezgici geleneğe yakındır. Yalnız matematiksel nesnelerin varlığı konusunda sezgici gelenekten ayrılır. Gödel, bir Platoncudur: Matematiksel nesnelerin (örn. sayılar, kümeler vb.) onları düşünen zihinden bağımsız olarak var olduğunu düşünür. Açıkçası Gödel bu yönüyle Viyana Çevresi'nin çoğunluğunu oluşturan mantıkçı pozitivistlerden de ayrılır.

Fakat Gödel'in her yönüyle kapsamlı bir Platoncu matematik epistemolojisi ortaya koymadığını belirtmeliyiz. Gödel matematiğe ilişkin bazı özel konularda Platoncu çerçevede yorumlar getirmiştir ve onun Platoncu fikirleri bu yorumlar üzerinden ana hatlarıyla birlikte görünmektedir. Bu Platoncu yorumlarının en açık biçimde görülebileceği konuların başında ise, kümeler teorisi ve "süreklilik hipotezi" üzerine olanlar bulunmaktadır. Şu halde öncelikle bu hipotez tanınmalıdır.

Süreklilik hipotezi, Cantor'un en tartışmalı iddialarından biridir ve 1877 yılında ortaya koyulmuştur. Kümeler teorisinin incelendiği bölümden hatırlanabileceği gibi Cantor'un en temel iddialarından biri, doğal sayılar kümesinin öğe sayısının, doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin kümesinin öğe sayısından daha az olmasıdır. Bu önerme aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

" $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ "

Süreklilik hipotezi, öğe sayısı, bu iki kümenin öğe sayılarının arasında olan hiçbir kümenin bulunmadığını belirten hipotezidir. Yani, "x" sayıda öğeye sahip olup, bu öğe sayısının aşağıda belirtilen koşulu sağladığı hiçbir küme yoktur:

" $\aleph_0 < x < 2^{\aleph_0}$ "

Başka bir ifadeyle, eğer $\aleph_1$ sayısı, $\aleph_0$ sayısından büyük ilk sayı ise, süreklilik hipotezi şu biçimde gösterilebilir:

" $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ "[101]

Görüldüğü gibi bu hipotez, örneğin "1 < 2" veya "1=1" gibi sezgiye apaçık bir önerme değildir. Cantorcu anlamda "sayılamaz" iki niceliğin eşitliğini ileri sürmektedir. Bu durum, hipoteze apaçık bir kanıt verilmesi konusunda sıkıntı yaratmaktadır. Bu sorunun eksiksizlik sorunuyla ilişkili olması durumunun bir sonucu olarak David Hilbert de bu hipoteze büyük önem vermiştir: Onun 1900 yılında ortaya koyduğu ünlü 23 sorusundan birincisi Süreklilik Hipotezi'nin doğruluk değerine karar vermektir. 1920'li yıllara gelindiğinde ise bu sorun, hipotezin, kümeler teorisinin aksiyomatikleştirildiği Zermelo-Fraenkel Kümeler Teorisi'nin (ZFC) aksiyomlarından türetilebilir olup olmadığı sorununa, başka bir değişle bu hipotezin ZFC'nin aksiyomları ile tutarlı olup olmadığı sorununa dönüşür. Gödel, eksiklik teoremlerini ortaya koymasından birkaç yıl sonra (1940) hipotezin ZFC'nin aksiyomları ile tutarlı olduğunu kanıtlamıştır. Bu olay Gödel'in eksiklik teoremlerinden sonraki en büyük başarısıdır. Yalnız 1963 yılına gelindiğinde önemli başka bir kanıt daha ortaya çıkar: Matematikçi

[101] Roy T. Cook (2009), "Continuum Hypothesis", ss. 67.

Paul Cohen, hipotezin olumsuzunun da ZFC'nin aksiyomlarıyla tutarlı olduğunu kanıtlar. Şu halde Süreklilik Hipotezi, ZFC içinde kararlaştırılamazdır.[102]

Gödel 1940'daki kanıtlamasından sonra da, süreklilik hipoteziyle ilgilenmeye devam etmişti. Bu konudaki en iyi örnek, onun "Cantor'un Süreklilik Hipotezi Nedir?" adlı makalesidir.[103] İlk olarak 1947 yılında yayınlanan bu makale, Gödel'in Süreklilik probleminin neyi ifade ettiğini ve değerini açıkladığı makaledir. Ayrıca Gödel bu makalede, sezgici geleneğin (örn. Brouwer gibi matematikçilerin) süreklilik sorununu anlamsız bir sorun olarak görme tutumunu da eleştirmektedir.[104] Aynı makale, Cohen'in 1963 yılındaki kanıtlamasından bir yıl sonra "ikinci basıma ekleme" adlı yeni bir bölüm ile genişletilerek yeniden yayınlanmıştır. Gödel'in makalenin yayınlandığı ilk tarihten, yeniden yayınlandığı tarihe kadar geçen sürede Süreklilik Hipotezi'nin çözümü ile ilgili yapılan çalışmaları tek tek anarak başladığı bu ek bölüm,[105] Gödel'in Platoncu görüşlerini anlamak için temel başvuru kaynaklarından biridir. Yalnız bu görüşleri anlamak için mantıkçı pozitivizme geri döneceğiz.

Mantıkçı pozitivistler, temel olarak "fiziksel nesneler var mıdır?", "matematiksel nesneler var mıdır?" gibi örnekleri uzatılabilecek geleneksel felsefi ve metafiziksel soruları anlamsız sorular olarak görme eğilimindedir. Diğer taraftan Gödel için bu iki metafiziksel soru da anlamlı ve cevabı verilebilir sorulardır. Ayrıca bu iki soru bir anlamda aynı kategoride ele alınabilir. Basitçe Gödel, matematiksel nesnelerin nesnel (zihinden bağımsız) varlığı sorusunun, "dış dünyanın nesnel varlığını soran sorunun tam bir dengi" olduğunu düşünür.[106]

Ayrıca başka bir makalesinde belirttiği gibi, Gödel'e göre matematiksel nesnelerin nesnel varlığını kabul etmek de tıpkı "fiziksel varlıkları kabul etmek kadar

[102] Maddy, 1999: 182; Roy T. Cook (2009), "Continuum Hypothesis", ss. 66-67. 1900 yılında Hilbert tarafından ortaya konulan 23 sorundan birincisi olan süreklilik hipotezinin doğruluk değerine karar verme veya süreklilik sorununu çözme hedefi günümüzde de tam olarak ulaşılamamış bir hedeftir. Mevcut durumda gelinen nokta, Gödel ve Cohen'in çalışmalarının bir sonucu olarak, hipotezin doğruluk değerine ZFC'nin aksiyomları üzerinden karar verilemeyeceğidir. Bu sonuç paralel postülasının doğruluk değerine Öklid geometrisinin aksiyomları üzerinden karar verilememesi sonucuna benzer.

[103] Kurt Gödel (1964), "What is Cantor's Continuum Problem?", *Kurt Gödel – Collected Works*, *Vol. II*, ed. Solomon Feferman, Oxford University Press, 1995, New York.

[104] Gödel, 1964: 261-262.

[105] Gödel, 1964: 270. 1964'de eklenen bu yeni bölümde Cohen'in kanıtlaması henüz anılmamıştır. Gödel'in, Cohen'in kanıtlaması ile ilgili görüşleri, makaleye 1966'da eklenir: Gödel, 1964: 273-274.

[106] Gödel, 1964: 272.

akla uygundur."[107] Bu düşünce pek çok bakımdan ilginçtir. Örneğin dış dünyayı, fiziksel varlıkları doğrudan görebilir veya işitebiliriz. Onları bilmemizi sağlayan duyu algısına sahibiz. Diğer taraftan matematiksel nesneler duyu algısına uzaktır. Onları doğrudan görmeyiz, işitmeyiz. Şu halde matematiksel nesnelerin, örneğin kümelerin nesnel varlıklarının ve özelliklerinin bilgisine nasıl ulaşabiliriz? Gödel'e göre:

> "Ama, duyusal deneyimden uzaklıklarına rağmen, aksiyomlarının bize kendilerinin doğru olduğunu dayatması olgusunda görüldüğü gibi, kümeler teorisinin nesnelerinin de algısına benzeyen bir şeye sahibiz."[108]

Burada bahsedilen "duyusal deneyiminden uzaklık", kümeler teorisinin nesnelerinin duyu algısı yardımıyla doğrudan gözlenemeyeceğidir. Başka bir ifadeyle, kümeler teorisinin nesneleri fiziksel dış dünyaya ait değildir. Fakat nasıl fiziksel nesneleri algılayabilmemizi sağlayan duyu algısına sahipsek, -sonsuz- kümeler teorisinin nesnelerini de algılayabilmemizi sağlayan bir algı türüne veya yeteneğe sahibiz. Bu yetenek ise sezgidir: *Matematiksel sezgi*. Ayrıca Gödel matematiksel sezgiye sahip olduğumuzu gösteren bir dayanak sunar. Bu dayanak, kümeler teorisinin aksiyomlarının, bizi kendilerinin doğru olduğuna inandırmasıdır. Peki, kümeler teorisinin aksiyomları, kendilerinin doğru olduğunu bize nasıl dayatır ve buradan bir matematiksel sezgiye sahip olduğumuz sonucu nasıl çıkar? Bu soruların cevabını vermek için Gödel'in Platoncu görüşlerini daha ayrıntılı olarak ele alacağız. Gödel'in şu sözlerini inceleyelim:

> "Matematiksel nesnelerin (zihinsel) inşalarımızdan bağımsız olarak var olduğunu ve onlara ilişkin ayrı bir sezgimizin olduğunu düşünen, ve sadece, genel matematiksel kavramların bize, kendilerinin güvenilirliğini ve bu kavramlarla ilgili aksiyomların doğruluğunu görebilecek yeterlilikte açık olmasını isteyen biri olarak ben, (…) Cantor'un küme teorisinin tatmin edici bir temelinin olduğuna inanıyorum."[109]

Ayrıca:

> "(…) kümeler teorisine ilişkin kavramlar ve teoremler, içinde Cantor'un hipotezinin doğru veya yanlış olmasının zorunlu olduğu, iyi

---

[107]Kurt Gödel, (1964) "Russell's Mathematical Logic", *Philosophy of Mathematics: Selected Readings,* P. Benacerraf and H. Putnam, eds., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, s. 220'den aktaran: Charles S. Chihara (2007), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, New York, s.100.
[108] Gödel, 1964: 272.
[109] Gödel, 1964: 262.

> belirlenmiş (well-determined) bir gerçekliği betimler. Bu yüzden, hipotezin bugün varsayılıyor olan aksiyomlar üzerinden kararlaştırılamazlığı, sadece bu aksiyomların, bu gerçekliğin tam bir betimlemesini içermediği anlamına gelebilir."[110]

İşte, kümeler teorisinin aksiyomlarının bize kendilerinin doğru olduğunu dayatması bu görüşlerde açıklanmaktadır. Kümeler teorisinin kavramları, kendi güvenilirliklerini ve bu kavramlarla ilgili aksiyomların doğruluğunu bize gösterecek kadar açıktır. Bundan daha da önemlisi teorinin aksiyomları iyi belirlenmiş, bir anlamda fiziksel dış dünya kadar gerçek bir varlık alanını –her ne kadar eksik biçimde olsa da- betimlemektedir. Aksiyomların doğruluğu, bu gerçekliği betimleyebilmesindedir.

Fakat matematiksel sezgiye sahip olduğumuz gösteren tek dayanak, teorinin aksiyomlarının doğruluğu değildir. Bu noktada Gödel'in kavram gerçekçisi yönü de devreye girmektedir. Aşağıdaki ifadeyi ele alalım:

"Paralel doğrular sonsuzdaki noktalarda birleşir"

Bu ifadenin doğruluğunu kavram gerçekçisi tarzda kabul etmek, "doğru", "sonsuzdaki noktalar" gibi kavramların nesnel birer varlığa işaret ettiğini kabul etmek demektir. Matematiksel sezginin, kümeler teorisinin sonlu ötesi öğelerinin bilgisini ele geçirmemizi sağlayan bir algı biçimi olarak sunulması böyle bir düşünceye işaret eder.

Peki, matematiksel aksiyomların nihai doğrulama ilkesi, bu matematiksel nesneler dünyasının iyi bir betimlemesini mi sunmaktır? Bu sorunun cevabı olumsuzdur. Gödel başka bir doğrulama ilkesini daha ileri sürer.

Gödel'e göre kümeler teorisinin aksiyomları, betimledikleri matematiksel nesneler dünyasının eksiksiz bir betimlemesini sunmamaktadır. Süreklilik hipotezinin doğruluk değerine henüz karar verilememiş olmasının nedeni budur. Aynı durum, teorinin daha pek çok soruya bir yanıt verememesi sonucunu getirmektedir. Diğer taraftan teoriye yeni matematiksel sezgiler sonucunda bulunabilecek yeni aksiyomların eklenmesi, konuya ilişkin çözülememiş pek çok sorunun ve belki de en sonunda süreklilik sorunun da çözümünü sağlayacaktır. Peki, bu yeni aksiyomların doğruluğunu nasıl görebiliriz? Kümeler teorisinin, bu yeni eklenen aksiyomlarla birlikte, matematiksel nesneler dünyasının daha iyi bir betimlemesini sunduğunu nasıl anlayabiliriz? Özetle, bazı aksiyomları mevcut aksiyomlara eklenebilecek aksiyomlar

---

[110] Gödel, 1964: 263-264.

olarak kabul edip, bazı aksiyomları kabul etmememizi sağlayacak olan ilke nedir? İşte Gödel, ikinci doğrulama ilkesini de tam olarak bu noktada sunmaktadır. Bu ilke, yeni eklenen aksiyomların bir anlamda başarısını görmektir.[111] Bunu anlamak için Russell'ın, Gödel'in düşünceleriyle paralel olan şu görüşlerini inceleyelim:

> "öncüllerin doğru olduğunu bildiğimiz için (bu öncüllerin) sonuçlarına inanmak yerine, sonuçlarının doğru olduğunu görebildiğimiz için öncüllere inanma eğilimindeyiz. Fakat sonuçlardan öncüller çıkarmak tümevarımın özüdür; bu nedenle matematiğin ilkelerini araştırma yöntemi gerçekten tümevarımsaldır ve herhangi başka bir bilimin genel yasalarını keşfetme yöntemiyle özsel olarak aynıdır."[112]

Görüldüğü gibi Russell, matematikte öncüllerin (aksiyomların) doğru sonuç verirlerse kabul edilebileceğini belirtmektedir. Aksiyom olarak kabul edilecek önermelerin doğru sonuç verip vermediği denenmelidir. İşte Russell'ın bu görüşleri, Gödel tarafından da kabul edilmektedir; aksiyomlar, sonuçları üzerinden *a posteriori* olarak yargılamalıdır.[113] Yani bu aksiyomların matematiksel soruların çözümünü ve matematiksel hipotezlerin kanıtlamasını kolaylaştırıp kolaylaştırmadığı görülmelidir. Alanın sorunlarının aydınlatılmasına yönelik ne kadar ışık tuttuğu incelenmelidir. Gödelci bir tarzda ifade edersek, aksiyomların bu matematiksel nesneler dünyası ve bu dünyadaki nesneler arasındaki bağlantıların ortaya çıkarılması konusunda başarılı olup olmadığı görülmelidir.

Böylece Gödel bize iki adet doğrulama ilkesi sunmaktadır. Diğer taraftan bu iki doğrulama ilkesinin ortak yönleri olduğu açıktır. Öncelikle bu doğrulama ilkelerinin ikisi de, nesnenin gerçekte nasıl olduğu ve bizim nesneyi bilme biçimimiz arasına bir mesafe koymaktadır. Nesnenin eldeki bilgilerimizle göremediğimiz yönleri vardır. İşte bu iki doğrulama ilkesinin ortak başka bir yönü bu noktada ortaya çıkmaktadır. İki doğrulama ilkesi de mutlak bir doğrulama amacıyla sunulmamaktadır. Önemli olan teorinin (aksiyomların) kendisinin matematiksel sorular karşısındaki gücüdür. Daha spekülatif ifadelerle belirtirsek, matematiksel nesneler dünyasının bilgisini daha iyi

[111] Gödel, 1964: 265.
[112] Bertrand Russell (1907) "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics", reprinted in D. Lacky (ed.) *Essays in Analysis*, New York: George Braziller, ss. 273-274'ten aktaran: Brown, 2008: 32.
[113] Charles Parsons (2010), "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought," *Kurt Gödel: Essays for His Centennial*, ed. Solomon Feferman vd. Cambridge University Press, Cambridge, s.350; Brown, 2008: 33.

veren veya bu dünyayı daha iyi betimleyen teori en iyi teoridir ve bu iki doğrulama ilkesi de en iyi teoriye ulaşma amacıyla sunulmuştur.

Bu bakımdan Gödel için bir matematik teorisinin verdiği bilginin mutlaklığı, neredeyse bir fizik teorisinin verdiği bilginin mutlaklığına indirgenmektedir. Açıkçası bu durum, Gödel'in ifadelerinde de görülmektedir. Başarılı sonuçlar veren, alanın sorunlarına ışık tutan ve matematiksel sorunların çözülmesi konusunda güçlü yöntemlerin ortaya çıkarılmasını sağlayan aksiyomlar bulunabilir ve bu aksiyomlar en az, iyi kurulmuş (well-established) bir fizik teorisi gibi kabul edilmelidir.[114]

Gödel'in matematik felsefesine ilişkin başka bir önemli nokta ise sezgi kavramını kullanmasıdır. Bu önemlidir çünkü sezgiler bizi yanıltabilir. Bu bakımdan bilimsel bir bilginin temeline sezgiyi koymanın ne kadar doğru bir tutum olduğu tartışmalıdır. Kaldı ki, bahsi geçen sezgi türünün görev aldığı bilimsel alan, çağlar boyunca sağlam, güvenilir bilginin merkezi olarak düşünülmektedir. Bu noktada şu sorulabilir: Matematiksel nesnelerin bilgisini edinme sürecinde sezginin rehberliğine ne kadar güvenebiliriz? Bu konu hakkında Gödel'in düşüncesini öğrenmek için, onun bütün mesleki hayatı boyunca belki de en fazla alıntılanmış olan şu düşüncelerini inceleyelim:

> "Bu türden bir algıya, yani matematiksel sezgiye, fizik teorileri kurmamızı sağlayan, gelecekteki duyusal deneyimlerimizin bu fizik teorilerine uyacağını ümit ettiren ve dahası, şu an için kararlaştırılamamış bir sorunun bir anlamı olduğuna ve ilerde kararlaştırılabileceğine inanmamızı sağlayan duyu algısına göre daha az güven duymak için bir neden görmüyorum. Kümeler teorisine ilişkin paradoksların matematikte ortaya çıkardığı sıkıntı, algı yanılgılarının fizikte ortaya çıkardığı sıkıntıdan daha fazla değildir."[115]

Gödel bu sorunun cevabını, diğer pek çok görüşü ile tutarlı biçimde, matematiksel sezgiyi duyu algısı ile karşılaştırarak vermektedir. Öyle görünüyor ki, nasıl duyu algısı fiziksel dış dünyaya ilişkin bilgimizin oluşmasını sağlıyorsa, matematiksel sezgi de, matematiksel nesnelerin (daha da özelde kümeler teorisinin sonsuza ilişkin nesnelerinin) bilgisine ulaşmayı sağlamaktadır. Ayrıca matematiksel sezgiye mutlak olarak güvenemeyiz. Elbette matematiksel sezgi de bizi yanıltabilir.

[114] Gödel, 1964: 265.
[115] Gödel, 1964: 271.

Diğer taraftan zaten algı yanılgıları sonucu duyu algısına da mutlak olarak güvenemeyiz. Matematiksel sezgiye en azından, duyu algısına güvenebildiğimiz kadar güvenebiliriz.

Bütün bu görüşler Gödel'in felsefi düşünceleri hakkında genel bir yapı sunmaktadır. Matematiksel nesnelerin nesnel varlıklarını kabul etmek, fiziksel nesnelerin nesnel varlığını kabul etmek kadar akla uygundur ve matematiksel nesnelerin bilgisine sahip olmak, fiziksel nesnelerin bilgisine sahip olmaktan ilkece farklı değildir. Nasıl duyu algısı fiziksel nesneleri algılamamızı sağlıyorsa, matematiksel sezgi de matematiksel nesneleri algılamayı sağlamaktadır. Fakat duyu algısı yardımıyla fiziksel nesneleri oldukları gibi algılayamadığımız gibi, matematiksel sezgi yoluyla da matematiksel nesneleri olduğu gibi algılayamıyoruz. Kümeler teorisinde çıkan paradoksların bir nedeni, mevcut matematiksel sezgilerin matematikçileri yanıltmış olmasıdır. Fakat bu paradokslar matematiğin bütünü ele alındığında büyük bir sorun değildir. En azından algı yanılgılarının fizikte ortaya çıkardığı teorik sorunlar kadar önemli değildir. Yine de matematiksel sezgilerin bizi her zaman yanıltabileceği açıktır. Bu yüzden nasıl fizik teorilerini daha baştan mutlak bilgi veren bir çerçeve olarak kabul etmiyorsak, kümeler teorisi gibi matematiksel teorileri de baştan mutlak bilgi veren bir çerçeve olarak kabul edemeyiz. Fakat bu durum matematiksel teorinin adım adım mutlaklığa ulaşmayacağı anlamına gelmez.

Diğer taraftan Gödel'in matematik felsefesine ilişkin görüşlerinde açık olmayan önemli bir nokta vardır. Matematiksel sezginin tam olarak ne olduğu, Gödel'in düşünce sistemde açık değildir. Örneğin bu kavramın, sezgi kavramının modern felsefede yaygın olarak kullanıldığı biçimiyle, doğrudan kavrayış anlamı taşımadığı açıktır. Bu yüzden Gödel'in düşünce sisteminde temel bir yer işgal eden bu kavram daha ayrıntılı biçimde incelenmelidir.

Öncelikle Gödel, süreklilik sorununu ele aldığı bu makalede Brouwer gibi matematikçilerin süreklilik sorununu boş ve anlamsız görmesini eleştirmektedir. Hipotezin bir doğruluk değeri vardır fakat bunu görebilmek için sonsuz kümeler teorisinin belirli bir nesnel gerçekliği betimlediğini görmek gerekir. Bu öyle bir nesnel gerçekliktir ki, bu nesnel gerçeklik içinde süreklilik hipotezi doğru veya yanlış olmak zorundadır. Süreklilik hipotezin doğruluk değerine henüz karar verilememiş olması, aksiyomların bu gerçekliğin tam bir betimlemesini vermemesidir. Bütün bunlar değerlendirildiğinde süreklilik hipotezinin anlamsız, süreklilik sorununu çözmeye çalışmanın ise boş bir uğraş olmadığı ortaya çıkar. Gödel'in bu makaledeki ana iddialarından biri budur ve matematiksel sezgi kavramının sonsuz kümeler teorisinin nesnelerinin bir algısı olarak sunulması böyle bir amacı barındırır.

Fakat Gödel için matematiksel sezginin sadece böyle bir işlevi yoktur. Gödel'in farklı görüşlerinde, matematiksel sezgiye ilişkin farklı ve temelli anlamlar bulmak mümkündür. Örneğin Gödel'in kendi eksiklik teoremleri üzerine yaptığı yorumlardan biri olan şu önermede matematiksel sezgi kavramının farklı bir boyutunu görülmektedir: "İnsan tini, bütün matematiksel sezgileri formüle etme (yani onları mekanikleştirme) yetisine sahip değildir."[116] Bu önermede matematiksel sezgi kavramı daha çok matematikçinin matematiksel sorularla mücadele ederken kazandığı deneyimler, bulgular ve özellikle matematikçilerin sahip olduğu sorun çözme yolları olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bakımdan matematiksel sezgi kavramını geleneksel olarak aklın bir erdemi olarak ele alınan düşünme kavramından ayırmak mümkün değildir. Açıkçası Gödel üzerine araştırma yapan araştırmacıların pek çoğu tarafından da bu durum dikkate alınmıştır. Örneğin Roger Penrose, Gödel'in matematiksel sezgi kavramını eksiklik teoremleri üzerinden açıklamaya çalışır ve bu açıklamada matematiksel sezgi kavramı ile *düşünce ilkesi* kavramı arasında benzerlik kurar. Penrose'a göre Gödel, sistemi karşısına alıp "düşünceye dalarak" ve bu sistemin aksiyomları ve kurallarıyla ulaşılamayacak bir doğru bildirime sezgiyle ulaşarak onu kodlayabilmiştir. Bu, düşünce ilkesi adı verilen genel bir yöntemin örneğidir.[117]

Benzer bir açıklama, bu konu üzerine geniş bir inceleme yapmış olan Charles Parsons tarafından da dile getirilmiştir. Charles Parsons'ın "Kurt Gödel'in Düşüncesinde Platonculuk ve Matematiksel Sezgi" adlı önemli makalesinde de modern anlamıyla sezgici bir Gödel ile karşılaşmıyoruz. Parsons, Gödel'in bütün yaşamı boyunca yaptığı çalışmalarda sezgi kavramını aradığı ve bu kavramın hangi anlamlarda kullanıldığını araştırdığı makalesinde, Gödel'in sezgi anlayışının, sezgi ve akıl kavramlarının birbirinden kesin çizgilerle ayrılmadığı Kant öncesi gelenekle bağlantısı olduğunu ve Gödel'in daha çok akıl temelli bir teoriyi amaçladığı görüşündedir.[118]

[116] Casti ve Depauli, 2004: 203.
[117] Penrose, 2000: 131.
[118] Parsons, 2010: 327.

Öyle görünüyor ki matematiksel sezgi, Gödel bu kavramı bize her ne kadar spekülatif konular ve kavramlar etrafında tanıtmış olsa da, matematiksel sorunların çözümünü sağlayan fakat henüz keşfedilmemiş olan yolları ve ilkeleri keşfedebilme becerisidir. Bu yorum Gödel'in süreklilik sorununu tartıştığı makalede matematiksel sezgiye vermiş olduğu işlev ile tutarsız değildir. Örneğin Gödel makalesinde şunu ifade etmiştir: "Cantor'un süreklilik hipotezi gibi sorunların kararlaştırılmasını sağlayacak yeni matematiksel sezgiler (…) tamamen mümkündür."[119] Bu yargı, Gödel'in makalesinde matematiksel sezgiye verilen işlevin en açık biçimde ifade edildiği yargıdır ve süreklilik hipotezi türünden sorunların çözümünü sağlayacak yeni keşiflere veya bu keşifleri sağlayacak beceriye işaret etmektedir. Kümeler teorisinin sonlu ötesi nesnelerinin daha iyi algılanması ile çözülmemiş matematiksel sorunların çözülmesi arasındaki ilişki apaçıktır. Ayrıca Gödel'in, insan tininin bütün matematiksel sezgilerin mekanikleştirilemeyeceği yorumunu yaparken geldiği nokta, insanın yeni keşifler yapabilmesini sağlayan zihinsel becerilerin mekanikleştirilemeyeceğidir.

Gödel, Platoncu yönüyle XX. yüzyılda pek karşılaşmadığımız türden bir matematik filozofudur. Matematiksel sezgi kavramı ise onun düşünce sisteminde temel bir yeri işgal etmektedir. Bizim için ise bu kavram, Gödel'in düşüncelerinin hangi felsefi konumda temellendirilebileceği açısından önemlidir. Bu yüzden bu kavramın anlamını aramaya devam edeceğiz. Bunu ise Gödel'in matematiğin temelleri ve çelişkiler konusundaki görüşleri inceleyerek yapacağız.

2.4 Gödel'in Matematiğin Temelleri ve Çelişkiler Konusundaki Görüşleri

Gödel'in eksiklik teoremlerinin matematiğin kesinliği ve güvenilirliği açısından neyi ifade ettiğinin ve onun felsefi görüşlerinin felsefe içinde hangi noktada konumlandırılabileceğinin sorgulandığı bu çalışmada son olarak, Gödel'in matematiğin temelleri ve XX. yüzyılın başında çıkan çelişkiler hakkındaki görüşleri incelenecektir. Çünkü Gödel sadece keşiflerini ortaya koymakla kalmamış, aynı zamanda kendi keşiflerini matematiğin temelleri ve çelişkiler konusu üzerinden yorumlamıştır.

[119] Gödel, 1964: 271.

Gödel'in matematiğin temelleri ve çelişkiler konusundaki görüşlerinin en açıkça görülebileceği yazısı, onun ölümünden sonra ortaya çıkan pek çok yazısından biri olan ve 1961'de kaleme aldığı düşünülen *Felsefenin Işığında Matematiğin Temellerinin Modern Gelişimi*[120] adını taşıyan bir müsveddedir. Bu müsvedde kendisine o sıralar yeni üyesi olduğu Amerikan Felsefe Topluğu tarafından gönderilen ve yakın zamanda yapılacak bir kongreye istediği bir konu ile katılmasının rica edildiği bir mektuba iliştirilmiş halde bulunmuştur ve bu yüzden metnin bir kongre metni olarak hazırlandığı düşünülmektedir.[121] Bu metin Gödel'in felsefi görüşlerinin belki de en açık biçimde görülebileceği metindir ve aynı zamanda Gödel'in nasıl bir matematiği arzuladığı hakkında da ipuçları vermektedir.

Bu metinde Gödel ele alacağı sorunları felsefi açıdan değerlendirmek için öncelikle farklı felsefi tutumları metafiziğe uzaklıkları veya metafiziği reddetmelerine göre kabaca iki ayrı gruba ayırmaktadır. Metafiziğe daha yakın olan *sağ* grup ruhçuluk, idealizm ve teolojiden oluşmaktayken, metafiziğe uzak olan *sol* grup şüphecilik, maddecilik ve olguculuktan oluşmaktadır. Diğer felsefi tutumlar bu sağ ve sol grubun arasındaki bölgeye yerleştirilebilir. Gödel bu konuda bazı örnekler vermiştir fakat bu örneklerden konumuzla ilişkili en önemlisi aprioricilik (deneyden bağımsızcılık) ve deneyciliğin konumlarıdır. Deneycilik sola, aprioricilik ise sağa ait felsefi tutumlardır.

Bu noktadan sonra Gödel bilindik bir genel yorum olarak, felsefi gelişimin yönünün Rönesans'tan bu yana sağ taraftan sol tarafa doğru yöneldiğini belirtmiştir. Özellikle bu yöneliş fizikte tepe noktasına ulaşmıştır. Bu genel anlamda teorik bilimin sonudur. Aynı zamanda bu yöneliş zamanın ruhunu oluşturmaktadır. Zamanımızın ruhu sola daha yakındır.

Matematik ise *a priori* doğası gereği kendinden sağa eğilimlidir ve bu yüzden zamanımızın sola yakın olan ruhuna uzun bir süre boyunca direnmiştir. Örneğin deneyci matematik teorileri yaygın bir destek görmemiştir. Aksine matematik eskisine göre çok daha fazla soyutlaşma eğilimi göstermiştir. Bu yüzden matematik, temellerindeki saflığı kaybetmiştir.

---

[120]Kurt Gödel (1961), "The Modern Development Of The Foundations Of Mathematics In The Light Of Philosophy", *Kurt Gödel: Collected Works, Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press, 1995, New York, ss. 374-387.

[121]Hao Wang (1996), *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, s.155.

En sonunda XX. yüzyılın başında, kümeler teorisinde antinomiler ve matematiğin merkezinde *sözde* paradokslar ortaya çıkmıştır ve bunlar, şüpheciler ve deneyselciler tarafından sol yönlü bir ayaklanma için *abartılmıştır*. Sözdedir ve abartılmıştır, çünkü öncelikle bunlar gerçekte matematiğin merkezinde değil, matematiğin felsefeye yakın olan sınırlarında ortaya çıkmıştır. İkinci olarak bu paradokslar en azından teoriyi anlayan kişiler için apaçık olacak şekilde zaten giderilmiştir. Fakat zamanın ruhu yüzünden matematikçilerin çoğu, matematiğin "doğruluklar sistemi" değerini reddetmiştir. Matematikçinin yapabileceği tek şeyin, aksiyomlardan (bu aksiyomların geçerliliğini doğrulama gereği duymadan) teorem türetmek olduğu düşünülmüştür ve bu durum gerçekte matematiği deneysel bir bilim haline getirmektedir.

Bu duruma tepki felsefeden ziyade yine matematikten gelmiştir ve Hilbert'in biçimselciliği ortaya çıkmıştır. Fakat onun biçimselciliği de zamanın sola yakın ruhunun etkisinde kalmıştır. Hilbert biçimselciliği bir yandan matematiğin *a priori* doğası, diğer taraftan zamanın ruhu arasında bir orta yol bulmaya çalışmıştır. Bir yandan zamanın ruhuna uyularak matematiğe temel olan aksiyomların hiçbir şekilde doğrulanamayacağı ve aksiyomlardan teorem türetmenin sadece hipotetik anlamda bir değeri olduğu savunulmuştur. Ayrıca aksiyomlardan teorem çıkarma işi, kesin kurallar ve simgeler ile oynanan bir oyun haline getirilmiştir. Diğer taraftan matematiğin sağa yakın doğasına uyularak matematiksel bilgiye güvenli (çelişkilerden temizlemiş) bir temel bulunması ve her matematiksel hipotezin doğruluk değerinin kararlaştırılabilir olması gerektiği savunulmuştur.

Bu noktada Gödel artık eksiklik teoremlerinin kendisi açısından neyi ifade ettiğini belirtir. Gödel'e göre eksiklik teoremleri, matematiğin sağa yönelimli eski yaklaşımlarının, zamanın sola yönelimli ruhuna uyacak biçimde kurtarılamayacağını göstermektedir. Şu halde seçilebilecek iki yol vardır. Birincisi zamanın ruhuyla çelişen bu sağa yönelimli eski matematik anlayışından vazgeçilmelidir. İkincisi ise her ne kadar zamanın ruhuyla çelişse de bu eski anlayış muhafaza edilmelidir. Gödel'e göre birinci yol zamanın ruhu ile uyuşmaktadır ve bu yüzden genel olarak izlenen yol budur. Fakat aslında bu yol tamamen olumsuzdur.

Aslında yapılması gereken şey, gerek felsefe ve gerek matematikte sağ ve sol arasında bir orta yol veya bireşim bulmaktır. Ayrıca açıkçası Hilbert de bunu yapmaya çalışmıştır fakat bu ara yolu bulmak konusunda Hilbert'in izlediği yolun eksiklikleri vardır. Açıkçası bu orta yol matematiğin kesinliğini, matematiği maddi sistemlere, yani fiziksel simgeler çıkarımına yansıtarak sağlama almaya çalışmak değildir. Bundan ziyade, bu türden mekanik sistemlerin kurulmasını sağlayan soyut kavramların bilgisi derinleştirilmeli ve bundan sonraki aşamada, bütün anlamlı matematiksel sorunların çözülebilmesini sağlayacak *seziler* ve fiili yöntemler aranmalıdır.

Peki, bu soyut kavramların bilgisi nasıl derinleştirilebilir? Bunun cevabı, bu kavramların anlamlarını daha da açık kılmaktır. Bu amaç için Gödel açıkça Husserl'ın fenomenolojisini önermektedir.[122] Fenomenoloji sayesinde hem mevcut soyut matematiksel kavramlar hakkında daha detaylı bilgi edinebiliriz hem de şimdiye kadar bilmediğimiz yeni temel kavramlara ulaşabiliriz. Ayrıca bu süreç daha üst bir aşamada, mevcut aksiyomlardan mantıksal olarak türetilemeyen yeni aksiyomlara ulaşmayı sağlayabilir. Bu ise bütün anlamlı matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine karar vermeyi sağlayacaktır.

Bu noktaya kadar metnin, Gödel'in bu metindeki temel kavramlarını es geçmeden, geniş bir özetini sunduk. Bu metindeki görüşler, eksiklik teoremlerinin matematiğin kesinliği açısından neyi ifade ettiği ve Gödel'in felsefi açıdan hangi tutumlara daha yakın olduğuna odaklanan bu çalışma için çok önemli veriler sunmaktadır. Biz bu noktada Gödel'in düşüncelerini Hilbert'in görüşleri ile karşılaştırarak çözümlemeye ve daha açık hale getirmeye çalışacağız. Bunun için Gödel'in görüşlerinin hangi noktalarda Hilbert'in görüşleriyle uzlaştığını ve hangi noktalarda uzlaşmadığını inceleyeceğiz. Bu hem Gödel'in görüşlerini daha iyi anlamayı hem de bu çalışmada incelenen temel konulara ilişkin daha geniş bir bakış açısını elde etmeyi sağlayacaktır. Öncelikle bu iki matematikçinin uzlaştıkları noktaları inceleyelim.

Nasıl Hilbert'te temel matematik ile matematiğin düşünsel veya soyut alanı ayrımı varsa, Gödel'de de kabaca matematiğin merkezi ile matematiğin felsefeye yakın bölümü ayrımı vardır.

---

[122] Husserl'ın fenomonolojisi yardımıyla matematiksel kavramların anlamlarının nasıl daha açık hale getirilebileceği ve Gödel'in fenomenolojiden beklediği yarar ile ilgili geniş bir açıklama çalışması için bkz. Richard Tieszen (1995), "Mathematics", *The Cambridge Companion to Husserl*, ed. Barry Smith ve David W. Smith, Cambridge University Press, New York, ss. 438-462.

İki matematikçi de, kümeler teorisindeki paradoksların matematiğin merkezinde çıkmadığı görüşündedir. Bunlar, Hilbert için matematiğin düşünsel alanında, Gödel'e göre ise matematiğin felsefeye yakın alanında çıkmıştır. Bu yüzden iki matematikçi için de bu paradokslar gerçek paradokslar değil, sözde paradokslardır ve ayrıca matematiğin kesinliğine hiçbir zarar getirmezler. Dahası Gödel'in bildirdiğine göre bu sorunlar zaten çözülmüştür.

Hilbert için bu paradoksların çıkış nedeni dildir. Matematikte olağan dilin kullanılması bu paradoksların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bunlar matematiksel kavramların anlamları üzerinden çıkarılmıştır. Gödel'e göre ise bu paradoksların ortaya çıkış nedeni, bir önceki bölümde de incelendiği gibi, o zamanki matematiksel sezgilerin matematikçileri kümeler teorisinin sonlu ötesi nesneleri konusunda yanıltmış olmasıdır. Bu noktada iki matematikçinin görüşleri birbirine uzak görünse de durum böyle değildir. Çünkü Gödel, bu nesneler ile ilgili sezgilerimizin güçlenmesi için, kavramların anlamlarının derinleştirilmesini ve daha açık bir hale getirilmesini önererek yine dilsel konulara yaklaşır.

Son olarak hem Hilbert hem de Gödel, bütün doğru-yanlış sorularının çözülebileceğini, yani bütün matematiksel hipotezlerin doğruluk değerine karar verilebileceğini düşünmektedir. Bu konu eksiklik teoremleri ve sonuçları üzerine yapılan genel yorumlar açısından önemli bir noktadır.

Gödel ve Hilbert'in uzlaşmadıkları noktaları incelediğimizde ise şunlarla karşılaşıyoruz: Hilbert bu paradoksları önlemek için matematiksel nesnelere ilişkin kavramların anlamlarını yok etme, en azından bu anlamları matematiksel çalışmalarda temel almamayı önermiştir. Anlamı yok etmek, anlam üzerinden çıkacak çelişkileri de önleyecekti. Gödel ise bunun mümkün olmadığını, matematiğin biçimsel olarak çalışılarak anlamı es geçmenin sorunları çözmeyeceğini gösterdiği eksiklik teoremlerini ortaya koymasından yıllar sonra bu metinde, yapılması gereken şeyin anlamları yok etmek değil, aksine anlamları derinleştirmek ve daha açık hale getirmek olduğunu ileri sürmektedir.

Gödel ve Hilbert'in uzlaşmadıkları başka bir konu aksiyomların doğruluğu konusudur. Hilbert en azından matematikteki kümeler teorisinin aksiyomları gibi soyut varsayımların ve sadece bu varsayımlardan çıkan teoremlerin bir doğruluk değerine sahip olmadığını düşünmektedir.[123] Yani bunlarla ilgili matematiksel sorular, doğrudur-yanlıştır soruları değildir. Bu tipte önermelerin en fazla kullanışlılığına bakılabilir. Fakat bunların kullanışlı olup olmadığı incelenmeden önce, matematiğin somut doğrularıyla çelişip çelişmediği görülmelidir. Gödel için ise matematikte ne kadar soyut olurlarsa olsun bütün aksiyomların anlamlı oldukları sürece bir doğruluk değeri vardır. Belirli bir anlama sahip olmayan aksiyomlar ise zaten aksiyom sayılamazlar. Şu halde Hilbert'in öncelikle deneysel fayda beklediği yerde, Gödel akıl temelli bir sezgiyi aramaktadır. Diğer taraftan Gödel'in bir önceki bölümde görüldüğü gibi deneysel faydayı dışlamadığını da belirtelim. Bazı aksiyomların alanın sorunlarının çözümü konusunda ışık tutması, yeni başarılı sorun çözme yollarının keşfedilmesini sağlaması gibi deneysel faydalar Gödel tarafından dışlanmamaktadır. Fakat öyle görünüyor ki, Gödel için matematiksel sezgi deneyden önce gelmektedir.

Bu karşılaştırmalı sonuçların dışında ele aldığımız temel sorunlar ile ilgili bazı başka önemli sonuçlar da vardır. Öncelikle bu metin, Gödel'in matematiksel sezgi kavramının anlamı açısından önemli bir metindir ve burada matematiksel sezgi kavramının tam olarak olmasa da bir tanımı verilmektedir. Bu tanım karşımıza matematiksel sorunların çözümünü sağlayacak seziler ve fiili yöntemler olarak çıkmaktadır. Ayrıca bu tanım, Gödel'in bir önceki bölümde aktarmış olduğumuz "Cantor'un süreklilik hipotezi gibi sorunların kararlaştırılmasını sağlayacak yeni matematiksel sezgiler (…) tamamen mümkündür" ifadesiyle birlikte ele alındığında Gödel'in matematiksel sezgi kavramının anlamı konusunu daha fazla açıklığa kavuşturmaktadır.

Gödel'in düşünce sisteminde daha güçlü matematiksel sezgiler ise, daha fazla aksiyoma ulaşma ve çelişkiler ile daha az karşılaşma olasılığı anlamına gelmektedir.

[123] Aslında Hilbert'in genel görüşleri incelendiğinde bu hususun bütün matematiksel aksiyomları kapsayacak biçimde genişletilebileceği iddia edilebilir. Zaten Gödel de Hilbert'in görüşlerini bu biçimde ele almaktadır. Açıkçası Hilbert'in düşünce sisteminde böyle bir iddiayı destekleyecek apaçık deliller de bulmak mümkündür. Örneğin matematiksel olgular arasındaki bağıntıların kavramlar arası ilişkilere karşılık geldiği kavramlar arası mantıksal bir yapı inşa etmenin keyfiliği fikri, her ne kadar bu inşada tutarlılık ve eksiksizlik özellikleri aransa da bir delil olarak değerlendirilebilir. Diğer taraftan anmış olduğumuz genişletilebilirlik iddiasının tam olarak kanıtlanması için Hilbert'in hiçbir matematiksel aksiyomun sezgisel veya başka bir tarzda doğrulanamayacağını ileri sürmesi gerekir. Biz en azından kendi araştırmalarımızda böyle bir iddia ile karşılaşmadık. Fakat Hilbert'in kümeler teorisinin aksiyomlarının doğrulanabilirliği konusundaki görüşleri açıktır ve Hilbert bu konuda deneyci bir tutum benimser.

Fenomenoloji ise matematikteki soyut kavramların anlamlarını (ve dolayısıyla bu kavramların işaret ettiği nesnelerin bilgisini) derinleştirmek ve daha açık kılmak, böylece matematiksel sezgileri güçlendirmek için bir araç olarak sunulmuştur. Şunu belirtebiliriz ki bu özellikle akılcı felsefelerde görülen bir tutumdur.

Son olarak matematiksel bilginin niteliği hakkında da bazı sonuçlara ulaşıyoruz. Gödel'in "matematiğin *a priori* doğası" sözünden de görülebileceği gibi matematiksel bilgi özünde *a priori* bir bilgidir. Yani bu bilgi türünün doğruluğu temelde deneye dayanmaz. Matematiksel bilginin, daha da özelde aksiyomların doğruluğunu görmenin ve yeni aksiyomlar bulmanın temelinde matematiksel sezgi vardır.

Fakat bu durum Gödel'in aritmetiksel bilgiyi Frege'nin düşündüğü anlamda analitik olarak değerlendirmediğini de göstermektedir. Frege'nin matematiğin mantığa indirgenebileceğini gösterme çabalarının amaçlarından birinin, aritmetiksel bilginin Kant'ın düşündüğünün aksine zaman ve mekanın sezgisine dayanmadığını göstermek olduğunu hatırlayalım. Gödel'e göre ise hem aritmetiğin, hem de kümeler teorisinin –mevcut ve gelecekte keşfedilecek olan- aksiyomlarına sezgi ile ulaşılabilir.[124]

Peki, Gödel açısından matematiksel bilginin Kant'ın da iddia ettiği gibi *a priori sentetik* olduğunu iddia edebilir miyiz? Bununla ilgili net bir veri yoktur ve bu konuda henüz bir yorum da yapılmamıştır. Bunun başlıca nedenlerinden biri Gödel'in eksiklik teoremlerinin, matematiğin temellerine ilişkin kendi görüşlerine göre daha fazla ilgi bulması ve daha çok araştırmaya konu olmasıdır. Bu araştırmalarda ikinci sırayı Gödel'in Platonculuğu ve matematiksel sezginin neliği almaktadır.

Gerçi eksiklik teoremlerinin hiçbir tartışmaya yer bırakmayacak biçimde aritmetiksel bilginin sentetik olduğunu gösterdiği yorumu yapılmıştır.[125] Fakat bu yorum öncelikle Gödel'in kendi düşüncesini sunmaz. İkinci olarak eksiklik teoremleri başka hiçbir veri olmadan tek başına ele alındığında bize göre sadece Frege ve Russell'ın mantıkçı projesinin amaçlarına ulaşamadığını gösterir. Zaten genel yorum da bu biçimdedir.

---

[124] Otávio Bueno (2010), "Philosophy of Mathematics", *Philosophies of the Sciences - A Guide*, ed. Fritz Allhoff, Blackwell Publishing, Oxford, s.74
[125] Odifreddi, 2011: 73.

Diğer taraftan Gödel'in "Cantor'un Süreklilik Hipotezi Nedir?" adlı makalesindeki görüşlerini ve bu metindeki görüşlerini bir arada ele aldığımızda, Gödel'e göre en azından aritmetiğin ve kümeler teorisinin bilgisinin sentetik olduğu sonucu çıkmaktadır. Çünkü bu alanların bilgisi daha önceden bilmediğimiz ve saf mantıksal ilkelerle ulaşamayacağımız yeni bir şey söyler ve bu bilgi zihnimizden bağımsız bir varlık alanı hakkındadır. Fakat matematiksel bilgi Kant'ın iddia ettiği gibi duyu algısının formlarına veya sadece duyu algısının formlarına dayanmaz.[126] Özellikle matematiğin temelini oluşturan soyut öğelerin bilgisine duyu algısı ile ulaşılamaz. Ayrıca bu öğeler fiziksel dünyanın dışında ama kendi başına bir nesnel varlık alanını betimler. Bu varlık alanı ile bizim aramızdaki bağa temel olan başka bir şey olması gerekmektedir. İşte bu matematiksel sezgidir. Matematiğin temelini oluşturan öğelerin bilgisini matematiksel sezgi verir.[127]

Öyle görünüyor ki Gödel, "7+5"in "12" etmesinin bilgisi ile matematiğin temellerini oluşturan bilgilerin, örneğin matematiğin ilkelerini oluşturan aksiyomların ve bu aksiyomları oluşturan soyut kavramların bilgisini birbirinden ayırmaktadır. "7+5=12" türünden bilgilerin temeline duyu algısı ve formları koyulabilir. Fakat matematiğin ilkelerini oluşturan bilgilerin temeline duyu algısı ve formları koyulamaz. Gödel bu türden bilginin temeline, yani matematiğin ilkelerinin bilgisinin temeline matematiksel sezgiyi koymaktadır. Böyle bir kabulden çıkacak sonuç ise, matematiksel bilginin yine –*a priori*- sentetik olmasıdır. Diğer taraftan bu *a priori* sentetikliğin Kant'ın özgün anlayışından farkları olduğu açıktır.

Bütün bu veriler çerçevesinde artık eksiklik teoremlerinin matematiksel kesinlik açısından neyi ifade ettiği ve Gödel'in matematik felsefesine ilişkin görüşlerinin felsefenin hangi konumunda temellendirilebileceği sorularının cevabı verilebilir.

[126] Gödel, 1964: 271.
[127] Gödel, 1964: 272.

3. YORUMLAR

Çalışmanın bu noktasına kadar, eksiklik teoremlerine giden süreç ve bu teoremlerin sahibinin felsefi görüşleri mümkün olduğunca açık ve basit biçimde ortaya konulmaya çalışılmıştır. Eksiklik teoremlerin elbette önemli ve kafa karıştırıcı sonuçları vardır. Gerçekten de bu teoremler çok farklı konularda çok farklı yorumlara temel olmuştur. Fakat biz bu çalışmada sadece şu dört sorunun cevabını verebilmeyi umuyoruz:

1. Doğruluk-kanıt ilişkisi bakımından eksiklik teoremlerinin önemi nedir?
2. Eksiklik teoremleri, Hilbert biçimselciliği açısından neyi ifade eder?
3. Matematiğin kesinliği açısından eksiklik teoremleri neyi ifade eder?
4. Gödel'in eksiklik teoremleri ve Platonculuğu hangi bilgi felsefelerini destekler?

Kolayca fark edilebileceği gibi bu sorular birbirlerinden tam olarak bağımsız sorular değildir. En azından bu soruların cevapları birbirinden bağımsız değildir. Çalışmanın bu noktasında bu soruların yanıtını vererek, Gödel'in teoremlerinin anlamının ne olduğunu ve dolayısıyla ne olmadığını da belirlemeye çalışacağız.

3.1 Doğruluk-Kanıt İlişkisi Bakımından Eksiklik Teoremlerinin Değeri Nedir?

Doğru her matematiksel önerme kanıtlanabilir mi? Bu soru, gerçekten doğru her matematik önermesine birer kanıt getirilebilip getirilemeyeceğini sorar ve bu çalışmada Gödel'in eksiklik teoremleri üzerinden cevabı aranan en temel sorulardan biridir. Kolayca ifade edilebilir fakat olabildiğine tümel sorudur. Bu öyle bir tümelliktir ki, bu tümellik soruyu matematiğin temelleri konusunun en temel sorularından biri haline getirir. Hilbertçi çerçevede ise bu soru matematiksel doğruluğun, bir biçimsel sistemin aksiyomlarında teorem olmaya indirgenip indirgenemeyeceği biçiminde anlaşılabilir.

Eğer Hilbert programı özgün amaçları ile hedefine ulaşabilseydi, matematiğin bir bütün olarak biçimselleştirilebilecek ve bu soruya olumlu cevap verilebilecekti. Başka bir ifadeyle, matematiksel her doğru bu sistemdeki bir teoreme, bu sistemdeki her teorem ise matematiksel bir doğruya karşılık gelecekti. Yani, kanıtlanabilir önermeler ile doğru önermeler arasında niceliksel bir fark olmayacaktı. Fakat bu mümkün olmamıştır.

Fakat Gödel bunun mümkün olmadığını göstermiştir. Bu sonuç Gödel'in eksiklik teoremlerinin en açık sonucudur. Gödel, sonlu sayıda aksiyom ve yine sonlu sayıda kanıtlama yöntemini temel alarak doğru her matematiksel önermeye bir kanıt getirilemeyeceğini göstermiştir. Şu halde doğru olduğu sezgisel veya başka bir tarzda reddedilemeyecek biçimde görülebilen fakat doğruluğu kanıtlanamayan matematik önermeleri her zaman olacaktır. Doğru önermeler kanıtlanmış önermelere göre her zaman daha fazla olacak, bu iki nicelik arasındaki fark kapanmayacaktır. Bir İtalyan matematikçinin esprili bir benzetmeyle belirttiği gibi, suçlu olduğu apaçık görülen ama bu suçluluğu kanıtlanamayan mafya üyeleri, matematikte her zaman olacaktır.[128]

Bu noktada şu doğru anlaşılmalıdır ki, Gödel'in eksiklik teoremleri, belirli bir matematiksel sorunun ebediyen çözülemeyeceğini göstermez. Goldbach hipotezini ele alalım. Her matematiksel hipotez gibi bu hipotez için de şu üç durum geçerlidir:

1. Hipotezin doğru olduğu kanıtlanabilir.
2. Hipotezin yanlış olduğu kanıtlanabilir.
3. Hipotezin doğruluk değerine (mevcut aksiyom ve kanıtlama yöntemleriyle) karar verilemeyeceği kanıtlanabilir.

Eksiklik teoremleri Goldbach hipotezi gibi belirli bir hipotez için, bu hipotezin birinci ve ikinci maddelerdeki sonuçlardan herhangi biriyle sonuçlanmayacağını söylemez. Yeni aksiyomlar ve kanıtlama yöntemlerinin yardımıyla bu mümkündür. Fakat eksiklik teoremlerinden çıkan sonuç, matematiksel bilgi bu yeni aksiyom ve kanıtlama yöntemleriyle genişletilse bile, doğruluk değerine karar verilemeyecek yeni hipotezlerin ortaya çıkmasının kesin olduğudur.

Şu halde her zaman çözüm bekleyen yeni sorular, yeni kanıtlama yöntemleri, yeni aksiyomlar keşfedilecektir ve matematik hiçbir zaman bitmeyecektir.

3.2 Eksiklik Teoremleri, Hilbert Biçimselciliği Açısından Neyi İfade Eder?

[128] Odifreddi, 2011: 71.

Günümüzde matematik felsefesinde biçimselci gelenekten bahsedildiğinde akla ilk gelen isimlerden biri David Hilbert'tir. Hatta Hilbert, XX. yüzyılın ilk yarısında matematiksel biçimcilik denilince akla gelen ilk isimdir.

Yalnız şu net olarak belirlenmelidir: Hilbert naif bir biçimselci değildir. En azından Hilbert'in düşünce sisteminin ana unsuru biçimselcilik değildir. Örneğin Hilbert'in ana amacı bütün matematiksel nesnelerin özü itibariyle anlamsız simgeler topluluğu olduğunu göstermek değildir. Aslında Hilbert, matematiksel nesnelerin varlığı ve bu varlığın ne çeşit bir varlık olduğu sorunuyla pek ilgilenmemiştir. Hilbert'in düşünce sisteminde bu çerçevede bir varlık felsefesi bulamayız.

Matematiksel araştırma sürecinin özü itibariyle anlamsız simgeler üzerinden yapılması fikri Hilbert'in düşünce sistemine, Russell paradoksunun ortaya çıkmasından sonra girmiştir. Onun Russell paradoksu ile ilgilenmediği dönemindeki yapıtı olan *Geometrinin Temelleri* yapıtı bu konuda en açık delildir. Geleneksel geometriye yeni bir aksiyomatik yapı sağlama amacıyla ortaya konulmuş bu yapıtta biçimselcilik yoktur.

Russell paradoksunun ortaya çıkmasından sonra biçimselcilik, Hilbert'in düşünce sistemine ağırlığını sürekli olarak artırarak girmiştir. Fakat onun düşünce sisteminde biçimselcilik bir amaç değil araçtır.

Bu aracın başlıca işlevi matematiksel çalışmalarda gündelik (olağan) dili yok etmek, matematiksel kavramların anlamlarını tamamen etkisizleştirmek ve böylece dilde oluşabilecek çelişkilerin matematiği etkilemesini önlemektir. Fakat Gödel, matematikte anlamın etkisizleştirilmesiyle çelişkili önermelerin matematikten tamamen kovulamayacağını göstermiştir. Anlamsız simgeler topluluğuyla da çelişkili önermeler veya antinomiler (örn. G önermesi) kurulabilmektedir.

Bu aracın ikinci işlevi ise, önceki bölümlerde geniş biçimde ele aldığımız bir tutarlılık kanıtlama yöntemini sağlamasıydı. Fakat bu kanıtlama yönteminin Hilbert'in özgün amaçları doğrultusunda başarıya ulaşamayacağı Gödel tarafından kanıtlanmıştır.

Diğer taraftan Hilbert'in düşünce sistemindeki temel unsurun biçimselcilik değil, aksiyomatik yöntem olduğu açıktır. Hilbert aksiyomatik yönteme büyük bir güven duymuştur. Bu güven onun matematiğe ilişkin amaçlarında da yer bulur.

Hilbert'in *Geometrinin Temelleri* yıllarındaki ana amacının eksiksizlik olduğu görülüyor. Eksiksizlik ise matematiğin teori öncelikli çalışılmasıyla mümkün olabilirdi. Matematik, aksiyomatik teoriler üzerinden çalışılmalıydı. Böyle bir çalışma, çözülmemiş matematik sorularının da çözülmesine yardım edecekti. Fakat bu dönemde Hilbert'in aksiyomatik yönteme sınırsız bir güven duyduğu görülmemektedir.

Diğer taraftan Russell paradoksunun ortaya çıkmasından itibaren Hilbert'in tutarlılık sorunu ile daha fazla ilgilendiği görülmektedir. Hilbert'in bu dönemdeki amacı, aksiyomatik yöntemi kullanarak matematiksel bilgiye sağlam bir temel bulmaktır. Ayrıca bu dönemde, Hilbert'in aksiyomatik yönteme gittikçe artan bir güven duyduğu görülmektedir. Öyle ki 1928 yılına doğru bu güven en üst seviyeye çıkmıştır. Bu yıllarda Hilbert, bütün matematiksel doğruların bir biçimsel sistemin teoremlerine indirgenebileceği konusunda emin gibidir. Eksiklik teoremlerinin Hilbert'in biçimselciliği açısından ifade ettiği ikinci şey, bu iyimserliğinin boşuna olduğudur:

1. Bütün matematiksel doğrular tek bir aksiyomatik teori tarafından ele geçirilemez.
2. Aksiyomatik (tek) bir teori, matematiksel bilginin bütününe temel olamaz.

Artık bu veriler çerçevesinde, eksiklik teoremlerinin matematiksel kesinlik açısından neyi ifade ettiği tartışılabilir.

3.3 Matematiğin Kesinliği Açısından Eksiklik Teoremleri Neyi İfade Eder?

Eksiklik teoremlerinin matematiksel kesinlik açısından neyi ifade ettiği konusu, bu teoremlerin ilişkili olduğu konular arasında en fazla öneme sahip konulardan biridir ve açıkçası bunun soruşturulması diğer herhangi bir konuya göre daha titizce yapılmalıdır. Bu amaç doğrultusunda, çalışmamızda şimdiye kadar incelenen bazı özel konuların bir özetini sunmanın yararı olacaktır.

Öncelikle şunu belirtelim ki, matematik nesiller boyunca doğruluğu apaçık olan, başka bir deyişle doğruluğu sezgisel olarak görülebilen aksiyomlardan mantıksal çıkarım kuralları kullanılarak kesin matematiksel bilgilerin üretildiği bir bilim olarak anlaşılmıştır. Bunda özellikle Öklid geometrisinin etkisi büyüktür. Fakat paralel aksiyomunun reddedilip Öklid-dışı geometrilerin ortaya çıkışı ve ardından bu geometrilerin zaman içinde fizik teorilerinde yer bulmasıyla apaçık doğruluk anlayışı, başka bir deyişle aksiyomların doğruluğunun sezgisel olarak görülebileceği anlayışı büyük ölçüde sarsılmış ve matematiğin görünümü sürekli olarak biçimselleşen bir havaya bürünmüştür. Bu yeni görünüm doğruluğu önceden varsayılan aksiyomlardan biçimsel mantığın çıkarım kurallarıyla teorem türetildiği, aksiyomların doğruluğunu sorgulamanın matematikçinin temel görevi olmadığı bir matematiğe işaret etmektedir. Fakat bu yeni matematik anlayışının eski matematik anlayışına göre bazı yeni sorunları vardır.

Doğru olan önermelerin aynı zamanda tutarlı olması bir mantık yasasıdır. Fakat matematiğin değişen bu yeni yüzünde aksiyomların artık kendiliğinden doğru olduğunun kabul edilmemesi, bu aksiyomların tutarlılık sorununu da beraberinde getirmiştir.

Bu durum bir süre boyunca ciddi bir sorun oluşturmamıştır. Fakat Cantor'un kümeler teorisinde Russell tarafından bulunan çelişkiler, matematiğin temellerinde çelişkiler olduğu tartışmalarını beraberinde getirmiştir. Ayrıca kümeler teorisinin çok büyük tartışmalara yol açan sonlu ötesi varsayımlarının kanıtlanmasını sağlayan saçmaya indirgeme, başka bir deyişle çelişki ile kanıtlama yöntemi ve bu yönteme temel olan üçüncü halin olmazlığı ilkesinin güvenilirliği de tartışılmaya başlamıştır.

Matematiksel bilginin temellerinin sağlamlığının yeniden tartışmalı hale geldiği bu ortamda Russell, tipler teorisi üzerinden kümeler teorisinde kendi bulmuş olduğu bu çelişkileri önlemeye çalışmıştır. Hilbert ise konuyu Russell'dan çok daha geniş biçimde ele almış ve matematiksel bilginin güvenilirliğini, bir daha asla tartışmaya açılmayacak biçimde, mutlak olarak sağlama amacını gütmüştür. Bu amaca ise, kümeler teorisinin fiili sonsuzluklardan bahseden varsayımlarını ve bu varsayımlara götüren kanıtlama yöntemlerini de kapsayacak biçimde ulaşmaya çalışmıştır. Bu noktada özetle şunları belirteceğiz ki, Hilbert'in bakış açısıyla:

-Matematikte somut, sonlu alana ilişkin (veya sonlu matematiğe ilişkin kanıtlama kurallarıyla kanıtlanabilen) A grubu doğru önermeler veya teoremler vardır:

"1=1", "5+7=12" ……

-Ayrıca matematikte soyut (kurgusal), sonlu alana ilişkin olmayan, sonlu matematiğe ilişkin kanıtlama kurallarıyla kanıtlanamayan; fakat sonlu matematiğe ilişkin önermelerin düzenlenmesine veya sonlu matematiğe ilişkin daha fazla doğrunun bulunabilmesine yardım edebilecek (Hilbertçi çerçevede araçsal bir değere sahip) olan B grubu hipotezler vardır:

"$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$", "$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$"………

Hilbert'in sorunu bu B grubu önermelerin A grubu doğruları ile çelişip çelişmediğini görmektir. Başka bir ifadeyle, "$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$" gibi soyut bir önermenin "1=1" gibi somut bir doğru ile tutarlı olup olmadığını görmektir. Eğer bu soyut önermeyi doğru kabul ettiğimizde bu kabul ediş bizi "1=0" önermesi türünden herhangi bir yanlış veya saçma önermeye götürmüyorsa, bu soyut önerme teorem olarak kabul edilebilir.

Dahası, Hilbertçi kategorilerle ifade edersek, matematikteki bu soyut varsayımların (örn. sonsuz kümeler teorisinin varsayımları) matematiğin somut doğruları ile çelişmediğinin görülmesi, bu varsayımlara ulaşmayı sağlayan kanıtlama yöntemlerinin ve yasaların da güvenilirliğini gösterir. Şu halde öyle görünüyor ki Hilbert'in projesi özgün amaçlarıyla tamamlanabilseydi, matematikte kullanılan belirli kanıtlama yöntemlerinin, daha da özelde bu kanıtlama yöntemlerine temel olan çıkarım kurallarının güvenilirliğini sağlamak için de genel bir yöntem bulunmuş olacaktı.

Tutarlılığın veya tutarsızlığın görülebilmesi için Hilbert'in önerdiği çözüm, temel aritmetik ile kümeler teorisinin biçimselleştirilmesi ve aksiyomatik bir temele oturtulmasıdır. Eğer bu temel tutarlı ve eksiksiz bir temel olursa, bu soyut önermelerin somut doğrularla çelişip çelişmediği de görülebilir. Kısaca Hilbert'in, Cantor'un teorisinde çelişki olmadığını, bunun da ötesinde matematiğin doğasında çelişki olmadığını bir daha asla tartışmaya açılamayacak biçimde gösterme amacı, onun öncelikle kümeler teorisine ve ardından bütün matematiğe sağlam, yani hem eksiksiz hem de tutarlı bir aksiyomatik temel sağlama fikri ile birleşmiş ve bir bütün oluşturmuştur.

Fakat Gödel'in çalışmaları sonucunda bunun mümkün olmadığı, Hilbert'in sunduğu özgün çözümler ile doğal sayılar aritmetiğine bile sağlam bir biçimsel aksiyomatik temel bulunamayacağı görülmüştür. Belirli bir biçimsel teori, doğal sayıların yapısını ve bu sayılar arasındaki toplama ve çarpma işlemi ile gösterilebilecek bağıntıları karakterize edebilecek kadar güçlendiğinde, kendi kendisinin kanıtlanamazlığını ileri süren ve teoriyi eksikleştiren G önermesi türü önermeler sistem içinde inşa edilebilmektedir. Çünkü bu özellikleri taşıyan her teori Gödel numaralandırmasına tabi tutulabilir. İkinci olarak bu teorinin mutlak tutarlılığı, sistemin kendi aksiyomları ve kanıtlama kuralları içine yansıtılabileceği anlamında kanıtlanamamaktadır. Bu, teorinin tutarlılığının asla kanıtlanamayacağı anlamına gelmez. Fakat bu mutlak tutarlılık kanıtlaması, sistemin kendi içine yansıtılamaz. Yani teori kendi kendisinin tutarlılığını kanıtlayamaz.

Artık eksiklik teoremlerinin matematiksel kesinlik açsından neyi ifade ettiği incelenebilir. Matematiksel bilginin kesinliği açısından bu durum neyi ifade eder? Örneğin “1+1 = 2”, “65<98”, “2x2=4”, “iki çift doğal sayının toplamı her zaman bir çift doğal sayıdır” vb. gibi önermelerin kesinliği artık şüpheli bir hale mi gelir? Yine örneğin “1=0” mı olmuştur? Öncelikle iki tür kesinlikten bahsedeceğiz:

a. *Bağımlı kesinlik*: Bir hipotezin belirli bir aksiyom ve çıkarım kuralları kümesi ile kesin olarak kanıtlanabilirliği. Belirli bir teorem, bu teoremin kanıtında kullanılan aksiyom ve çıkarım kuralları reddedilmediği sürece kesindir.

Eksiklik teoremleri, zaten bu türden bir kesinliğe sahip olan matematiksel doğruların artık bu kesinliğini kaybettiği sonucunu vermez. Yani eksiklik teoremleri, teorem olduğu zaten kanıtlanmış veya kanıtlanabilir olan önermelerin kesinliği konusunda bir şey söylemez. Zaten eksiklik teoremlerinin matematiksel kesinliği etkileyip etkilemediği ile ilgili tartışmalar bu konuda yapılmamaktadır. Eğer bir önerme, belirli bir aksiyom kümesi ve kanıtlama kuralları ile kanıtlanabilir durumdaysa, bu önerme, bu aksiyom ve kanıtlama kuralları reddedilmediği sürece kesindir. Yukarda örneklerini vermiş olduğumuz “1+1=2”, “iki çift doğal sayının toplamı her zaman bir çift doğal sayıdır” vb. gibi önermeler bu tipte örneklerdir.

Diğer taraftan eksiklik teoremleri her doğrunun bu türden bir kesinliğe sahip olmadığını belirtir. Matematiksel bilgimizi ne kadar genişletirsek genişletelim, doğru olduğu sezgisel veya başka biçimlerde görülebilen fakat bir kanıt getirilemeyen önermelerin her zaman olacağını belirtir – eğer sonlu sayıda aksiyom ve kanıtlama kuralı temel alınırsa.

Açıkçası matematiğin sahip olduğu bu kesinlik türü bile, onun kesinlikteki konumunu diğer bilimlere göre başka bir noktaya koymaktadır. Deneysel bilimlerde belirli bir gözlemin sürekli olarak aynı sonucu vermesinin mantıksal bir garantisi yoktur. Fakat matematikte, iki çift doğal sayının toplamı her zaman bir çift doğal sayı olması bir defa aksiyomatik olarak kanıtlanırsa, bu teoreme götüren aksiyomlar reddedilmedikçe veya bu aksiyoma götüren kanıtlama kurallarının güvenilirliği tartışmaya açılmadıkça teorem kesindir.

İşte matematiğe ilişkin ikinci kesinlik türü bu noktada ortaya çıkar. Bu tür, aksiyomların doğruluğu ve kanıtlama yöntemlerinin (daha da özelde bu kanıtlama yöntemlerine temel olan çıkarım kurallarının) güvenilirliği ile ilgili olan mutlak kesinliktir ve aşağıdaki biçimde formüle edilebilir:

b. *Mutlak kesinlik*: Matematiğin temellerini oluşturan teorilerin güvenilirliği, bu güvenilirlik bir daha asla tartışmaya açılmayacak biçimde gösterilebilir.

Genel olarak bilimler düzeyinde konuşulduğunda ise mutlak kesinlik, belirli bir bilimin ana teorilerinin ilkelerinin mutlak, değişmez bir bilgi vermesi biçiminde ele alınabilir. Eğer bir bilimin bu anlamda bir kesinliği yoksa bu durum ele alınan bilimin temel ilkelerinin hipotetik olduğu anlamına gelir. Örneğin doğa bilimlerini ve sosyal bilimleri oluşturan bilimlerin teorileri hipotetiktir.

Eksiklik teoremlerinin, daha da özelde ikinci eksiklik teoreminin ilişkili olduğu kesinlik türü bu kesinlik türüdür ve bu teorem matematiğin bu anlamda bir kesinliğe sahip olmadığını gösterir. Çünkü temel aritmetiği kapsayan herhangi bir teorinin tutarlılığının kanıtı kendi içinde verilememektedir. Teorinin sadece kendi aksiyomları ve kanıtlama kurallarına bağlı kalmadan yapılan bir tutarlılık kanıtlamasının ise ne kadar mutlak bir tutarlılık kanıtlaması olduğu tartışılır. Mevcut durumda, Peano Aritmetiği'nde veya ZFC'de gelecekte hiçbir çelişki çıkmayacağının ve dolayısıyla bu sistemler üzerinde büyük veya küçük çapta düzenlemeye gidilmeyeceğinin hiçbir önsel garantisi yoktur. Şu halde öyle görünüyor ki, mevcut durumda matematik teorilerinin başarısı ancak tümevarımsal olarak görülebilecektir.

Bu durum açıkçası aksiyomların bir doğruluk değerine sahip olmadığını belirten ve aksiyomların hipotetik anlamda bir değerinin olduğunu kabul edenler için büyük bir sorun olabilir. Fakat bunun büyütülmemesini düşünenler de vardır. Aşağıda alıntıladığımız görüşler bu bakış açısını özetler:

> "Mutlak kesinliği aramak, hem Hilbert hem de Brouwer için açıkça temel bir motivasyon kaynağıydı. Fakat matematik kendi geçerliliği için mutlak kesinliğe ihtiyaç duyar mı? Daha özelde, bir teoriyi kullanmadan önce bu teorinin tutarlı olmasından veya zamanın saf sezgisinden türetilebileceğinden neden emin olmalıyız? Başka hiçbir

> bilimde bu türden taleplerde bulunmayız. Fizikte bütün teoriler hipotetiktir; bir teoriyi yararlı tahminlerde bulunduğu sürece benimseriz ve yararlı tahminlerde bulunmayı kesmeye başladığında düzenleriz (modify) veya bırakırız. Geçmişte matematiksel teorilere olan şey buydu; çelişkiler keşfedildiğinde, bu keşfin ortaya çıktığı zamana kadar kabul edilen matematiksel doktrinlerde düzenlemeye gidilirdi. Neden gelecekte aynısını yapmayalım? Teorilerin neliği hakkındaki biçimselci kavrayışı temel aldığımızda, bir teoriyi yararlı olduğu, doğallık ve basitlik gibi şartları kendi zamanında makul ölçüde sağladığı ve bizi hataya düşürmediğini bildiğimiz sürece kabul ederiz. Teorilerimizi, bu koşulların sağlandığını görmek ve yeterliliklerinin olası kanıtını mümkün olduğunca elde etmek amacıyla gözetim altında tutmalıyız. Gödel teoremi bütün yapabileceğimizin bu olduğunu, deneyci bilim felsefesi bütün yapmamız gerekenin bu olduğunu gösterir."[129]

Bu görüşler gerçekten de makul karşılanabilir. Gödel'in teoremlerinden deneyci bir bakış açısı ile bazı somut derslerin alınması gerektiğini belirtir. Diğer taraftan herkes tarafından kabul edilmeyecek bazı yönleri de bulunmaktadır, çünkü böyle bir görüş gerçekten de matematiği deneysel bir bilim haline getirir. Bu deneysellik "1+1=2" önermesinin bilgisinin, fiziğin herhangi bir olgusal bilgisi gibi deneysel bir bilgi olması anlamında değildir. Fakat matematiğe temel olan teorilerin, bir fizik teorisi gibi hipotetik olarak değerlendirilmesi anlamındadır ve bu görüşte de bundan bahsedilmiştir.

Diğer taraftan örneğin fizik teorileri, olgusal bilgilerin kanıtlanması amacını taşımaz. Onlardan olgusal bilgilere bir açıklama getirmesi ve yeni olgusal bilgilerin keşfini sağlayacak araştırmalar için temel olması beklenir. Olguların bilgisi teorilerin doğruluğunun kanıtı olarak sunulur. Matematikte ise teoriler, daha özelde teorileri oluşturan aksiyomlar, matematiksel bilginin kanıtını sağlar. Şu halde, matematiksel teorilerin mutlak kesinliğe sahip olması gerektiği düşüncesinden tamamen vazgeçmek, Gödel'in deyişiyle matematiğin *a priori* doğasını ve "doğruluklar sistemi" olan değerini bir kenara bırakmak, matematikçiler ve felsefeciler açısından ne kadar kabul edilebilir, tartışılır. Gödel'in matematiksel sezgiyi bir bilme yolu olarak yeninden sunması bu bakımdan anlam taşır. Açıkçası matematiksel teorilerin, daha da özelde aksiyomların ve kanıtlama yöntemlerinin güvenilirliklerini kesin olarak göstermeye yönelik çalışmalar da bitmemiştir.

---

[129] Haskell B. Curry (1977), *Foundations of Mathematical Logic*, Dover Publications, Inc., New York, s.16.

Peki, bu sonuçlar üzerinden matematiğin kesinlikte doğa bilimleri ve sosyal bilimlere göre hangi konumda olduğu söylenebilir? Bu konuda sadece şu noktaya işaret edeceğiz. Doğa bilimlerinde ve sosyal bilimlerde bir teorinin belirli bir olguyu açıklayıp açıklayamadığı sorunu her zaman apaçık görülmez ve bu sorun teorinin destekçileri ve karşıtları arasında bir bilimsel tartışmaya dönüşebilir. Fakat matematikte belirli bir hipotezin belirli bir matematiksel teoriden çıkıp çıkmadığı bir defa gösterildiğinde, bu artık kesindir. Ayrıca matematikte belirli bir teorinin/sistemin alanın bütün doğrularına bir kanıt getiremeyeceği gibi önemli bir doğru bile kesin olarak kanıtlanabilmektedir. İşte matematiğin gücü buradadır.

3.4 Gödel'in Platonculuğu ve Eksiklik Teoremleri Akılcı Felsefe Açısından Neyi İfade Eder?

Bilgi felsefesi açısından akılcılık, bilgiye ulaşma yolu olarak değerlendirilen yollar (akıl, deney, sezgi, vahiy, içe doğma vb.) arasında, aklın diğerlerine üstünlüğünü kabul eden felsefi tutumdur. Bu felsefi tutumun daha koyu formülasyonlarında, bilgiye ulaşma konusunda akıl dışındaki bütün kavramlar reddedilir. Akılcı tutumun geleneksel en büyük rakibi ise deneyci felsefe olmuştur.

Bu bölümde, eksiklik teoremlerinin ve Gödel'in Platonculuğunun, akılcılığın anmış olduğumuz varsayımları açısından neyi ifade ettiğini inceleyeceğiz. Böylece Gödel'in ortaya koyduklarının felsefi çerçevede hangi alana oturtulabileceğini ve anlamını belirlemeye çalışacağız.

Fakat bu incelemeden önce konuya ilişkin bazı değerlendirmeleri paylaşmak istiyoruz. Onlarca yıl boyunca Gödel'in eksiklik teoremleri üzerinden farklı alanlarda hangi sonuçlara ulaşılması gerektiğini düşünen ve bu teoremleri kullanarak matematiksel bilginin rastgele[130] (random) olduğunu iddia eden Gregory Chaitin'in konuya ilişkin çalışmalarının derlendiği yapıt için yazdığı önsözde Paul Davis şunu belirtir:

---

[130] Teknik anlamıyla rastgelelik, belirli bir olgu alanına ilişkin bilgilerin tümünün çok daha yalın biçimde ifade edilememesi durumudur. Bu durum, ele alınan olgu alanının karmaşıklığına ve bu olgu alanını oluşturan öğeler arasındaki ilişkinin düzensizliğine işaret eder.

> "Terimin normal kullanılışında "keşif" sözcüğü, önceden bilmediğimiz bir şeyi öğrenmemize işaret eder. Buna karşıt olarak Gödel'in teoremi, bize neyi bilmediğimizi ve bilemeyeceğimizi söyler. Neliğin bilgisi üzerine temelli ve kaçınılmaz bir sınır koyar."[131]

Bu değerlendirmeye benzeri bir değerlendirme Paul Casti tarafından ifade edilmiştir. Casti'ye göre eksiklik teoremleri:

> "insanlığın tam, çelişkiden bağımsız bilgi düşünü –iki bin yıldır sürmüş olan bir düşü- paramparça eden yüzyılımızın en önemli sınırlayıcı sonucudur. Gödel insanlığın kadiri mutlaklık fantezisini sınırlamasıyla, Kopernik, Darwin ve Freud geleneği içinde yer alır"[132]

Ayrıca Nagel ve Newman tarafından ortaya konulan ve Gödel'in kanıtlamasının anlaşılmasını kolaylaştıran rehber niteliğindeki çalışmanın Türkçe çevirisine yaptığı sunuşta Bülent Gözkan şu gözlemini paylaşır:

> "(…) moderniteyi belirleyen Akıl anlayışına bir "hiza" gösteren çalışma olarak olarak da değerlendirilmiştir Gödel'in kanıtlaması. Bütünlük ve tamlık beklentilerinin sınırlarını göstermiş olduğu düşünüldüğünden, modernite ve postmodernite tartışmaları üzerine düşünce üreten felsefecilerin değerlendirmelerinde Gödel'in kanıtlaması da yerini almıştır."[133]

Bu değerlendirme ve gözlemler üzerinden Gödel'in eksiklik teoremlerinin, akılcılık açısından olumsuz sonuçlar ortaya koyduğu yorumu yapılabilir. Bu yorum bazı yönlerden haklıdır. Eksiklik teoremleri tek başına ele alındığında insan aklına gerçekten de sınır koymaktadır. Bu sınır insanın tümdengelimli düşünmesine, başka bir deyişle mekanik düşünmesine konulmuştur. Sınırları olan şey, mekanik düşünmedir. Ayrıca Gödel'in eksiklik teoremleri göstermektedir ki, insan aklının matematiksel sorular karşısındaki tek erdemi tümdengelimli düşünme değildir. İnsan aklı, tek boyutlu bir tümdengelimli düşünme merkezi olmaya indirgenemez. İnsan aklının matematiksel sorular karşısında başka bir erdemi daha vardır. Bu erdem, insanın matematiksel sorular

---

[131] Paul Davis, Chaitin, Gregory J. (2007), *Thinking About Gödel and Turing – Essays on Complexity – 1970-2007,* yapıta önsöz*,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, s.V.

[132] Casti ve Depauli, 2004: 203.

[133] Bülent Gözkan, Nagel ve Newman (2008), *Gödel Kanıtlaması,* yapıtın sunuşu*,* çev. Bülent Gözkan, 2. Baskı, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, ss. 5-18.

karşısında bir anlamda yaratıcı düşünmesini sağlayan bir yeteneği veya Gödel'in dilinde matematiksel sezgi kavramı ile ifade edilmiş olan şeydir.

Hilbert Programı'nın çalışmamızda henüz tartışmadığımız bir yönü bulunmaktadır. Hilbert'in programının amaçlarından biri matematikte aritmetikle başlayarak, çözülmemiş hiçbir sorunun kalmamasıydı. Bu programın sonunda ortaya çıkacak biçimsel aksiyomatik temel ne ise, bu temel bütün sorulara bir cevap bulabilecekti. Eğer bir hipotez bu temelden çıkıyorsa teorem, bu hipotezin olumsuzu temelden çıkıyorsa, bu olumsuz hipotez teorem olacaktı. Yani bu temel, bir bakıma katı biçimsel kurallara göre çalışan mekanik bir teorem makinesi olacaktı. Bu bağlantı Casti tarafından da belirtilmiştir:

> "Hilbert'in aradığı şey bir tür Doğruluk Makinesi'ydi. Önermeyi bir ucundan ver, kolu çevir ve diğer uçtan DOĞRU veya YANLIŞ yanıtının çıkmasını bekle."[134]

Hilbert'in temelde aradığı şey elbette bu kadar basit değildir. Fakat Hilbert programının hedefleri, günümüzün sayısal (digital) dünyasının çerçevesiyle bakıldığında gerçekten de böyle bir makineyi karakterize etmektedir.

Bu çalışmada incelemelerimizi daha çok doğruluk/kanıtlanabilirlik doğrultusunda yaptık ve Hilbert programının bu yönüne daha fazla odaklandık. Fakat bu program başarılı olsaydı, bu başarı matematik yapmanın kendisini de büyük ölçüde değiştirecekti: Matematik yapmak neredeyse tamamen belirli bir simgeler kümesi olarak aksiyomlardan, biçimsel kurallar kullanılarak teorem türetme işi olacaktı. Bu durum bilgi felsefesi açısından, insan aklına ve yaratıcı düşünceye daha az ihtiyaç duyulacağını gösterir. Şunu açıkça belirtebiliriz ki, matematikçinin aklına daha az ihtiyaç duyulacaktı ve matematik, tamamen mekanik süreçlerle işleyecekti. Hofstadter'in de eğlenceli bir yorumuyla belirttiği gibi, örneğin aritmetikçiler işsiz kalacaktı.[135] Bu durum bir bakıma, insanın olağan olarak yaptığı bir işin, bir makine tarafından ele geçirilmesine benzer. Fakat bu mümkün olmamıştır.

İnsan aklının belirli bir soru ile karşılaştığında bu sorunun çok farklı yönlerini görebildiğini biliyoruz. İşte bu görü eyleminin bir örneği, matematikçinin bir matematik

---

[134] Casti ve Depauli, 2004: 29.
[135] Hofstadter, 2001: 276.

sorusuna yaklaşırken bu sorunun çok farklı boyutlarını görebilmesidir. Örneğin matematikçi, belirli bir aritmetik sorusunu bir geometri sorusuna dönüştürebilir. Bu sorunun başka bir soru ile doğrudan bağlantısını görebilir. Dahası matematikçi, bu sorun ile uzun bir süre uğraştıktan sonra çözümü sağlayacak yolu kestirebilir. Yine matematikçi, sorunların çözümünü engelleyecek öğeleri fark edip, bunları bertaraf etmenin yollarını bulabilir.

Bu tür durumlara sadece bu çalışma içinde incelenen konular içinden bile pek çok örnek verilebilir. Öklid'in paralel postülasının diğer aksiyomlardan türetilemeyeceğini fark edip bunu bir postüla olarak varsaymasını sağlayan şey neydi? Dedekind'ın dört aksiyomunu ileri sürmesinden sonra bu aksiyomların sadece doğal sayılar kümesini karakterize etmediğini ve başka aksiyomların da eklenmesi gerektiğini fark ettiren şey neydi? Russell'a kümeler teorisinin özgün formülasyonunda paradokslar olduğunu fark ettiren şey neydi?

Gödel'in, PM sistemi hakkında yapılabilecek üst matematiksel yorumların aritmetiğin nesneleri ve bu nesnelerin birbirleri ile olan bağlantıları biçiminde gösterilebileceğini görmesini sağlayan ve Penrose'un örneğini anarsak, Gödel'e bu sistem içinde kararlaştırılamaz bir önerme biçimi olduğunu ve bu önermeyi PM sistemi içine kodlamanın bir yolu olduğunu fark ettiren şey neydi? Bu tür örnekler hiçbir şekilde saf mekanik veya tümden gelimli bir akıl yürütme tarzının ürünü değildir ve matematiğin tarihi böyle yaratıcı örneklerle doludur.

İşte bu tür örnekleri sağlayan şey Gödel'in kendi söz dağarcığında "matematiksel sezgi" olarak geçen ve kendisinin bize spekülatif konular ve kavramlar etrafında tanıttığı görü biçimidir. İşte eksiklik teoremlerinin gösterdiği şey bu görü biçiminin tamamen mekanikleştirilemeyeceğidir. Gödel'in kendi ifadesiyle tekrar belirtirsek: *İnsan tini, bütün matematiksel sezgileri formüle etme (yani onları mekanikleştirme) yetisine sahip değildir.* Eksiklik teoremlerinin akılcı felsefe ile ilişkisi buradadır. Bu teoremler mekanik düşünmenin sınırlarını gösterir fakat yaratıcı düşünmeye bir sınır koymaz. Aksine onun önemini ortaya koyar.

Gödel'in Platoncu düşünceleri de bu yorumu desteklemektedir. Onun, süreklilik hipotezinin doğruluk değerini bulma yolunda matematiksel sezgiye önem vermesi bu konuda bir örnektir. Yeni matematiksel sezgiler yardımıyla, süreklilik hipotezinin doğruluk değerine karar verilmesini sağlayacak yeni aksiyomları ve yeni kanıtlama yolları keşfedilebilir.

Bütün bunları değerlendirince bir bütün insan aklının en azından matematikle ilgili konularda bir sınırının olduğunu düşünebilir miyiz? Bu sorunun cevabı olumsuz görünüyor. Çünkü aklın sadece tümdengelimli biçimde mekanik süreçlerle sonuç üreten bir merkez olmadığı açıktır. Her yeni keşfe ve her yeni doğruya böyle bir süreç ile varılmamaktadır. İnsanda tümdengelimli akıl yürütme biçiminden değişik akıl yürütme biçimleri de vardır ve bu akıl yürütme biçimleri yeni keşiflere ulaşma yolunda en az tümdengelimli akıl yürütme kadar önemlidir. Bu bakımdan Nagel ve Newman'ın bu konu üzerine yaptığı şu yoruma da katılıyoruz:

> "Biçimsel olarak kanıtlanamayacak aritmetiksel doğrulukların olduğunun bulunması, sonsuza kadar bilinmeden kalacak doğrulukların olduğu anlamına gelmiyor; "mistik" bir sezginin (zihinsel çalışmalarda kullanılandan tür ve itibar açısından kökten farklı) güçlü, ikna edici bir kanıtlamayla yer değiştirmesi anlamına da gelmiyor. Bazı yazarların öne sürdükleri gibi "insan aklının kaçınılmaz sınırları" olduğu anlamına da gelmiyor. Ama, (…) her zaman yeni kanıtlama ilkelerinin icadının ve bulunmasının beklendiği anlamına geliyor."[136]

Bütün bunları bir arada değerlendirdiğimizde akılcı felsefelerde görülen, doğruluğa ulaşmada akla güvenme ve akla özel bir değer biçme biçiminde ortaya çıkan tutum, hem eksiklik teoremleri tarafından hem de Gödel'in Platonculuğu tarafından desteklenmektedir.

Nagel ve Newman'ın, makine temelli yapay zekaların matematiksel sorular karşısında insan aklı kadar güçlü olamayacağı iddiasının temelinde yatan şey bu olgudur.[137] Ayrıca Roger Penrose, insan gibi düşünen makinelerin yapılamayacağı iddiasını güçlendirmek için de Gödel'in matematiksel sezgi kavramını incelemiştir ve bu incelemede şöyle bir genellemede bulunmuştur: "Ancak, sezgiler sistemleştirilemez ve bu nedenle, gerçekten, herhangi bir algoritmik işlemin dışında kalmaktadırlar!"[138] Fakat karşıt görüşler bulmak da mümkündür. Douglas R. Hofstadter'in *Gödel, Esher, Bach* yapıtı bunlardan biridir ve Hofstadter açıkça şunu belirtmiştir: "Beyinlerin

---

[136] Nagel ve Newman, 2008: 90.
[137] Nagel ve Newman, 2008: 89-90.
[138] Penrose, 2000: 131.

başardıklarıyla kabaca aynı sonuçları elde eden simge-yönlendirme tiplerine ilişkin bilgisayarların (ya da onların ardıllarının) yaşama geçirilmesinin önüne Gödel'in Teoremi tarafından konulmuş hiçbir engel göremiyorum. Tikel bir insanın zihnini bir program içine kopyalamaya çalışmak tamamıyla başka bir problemdir – ama zeki bir program üretmek kesinlikle daha sınırlı bir hedeftir."[139] Hem Penrose'un hem de Hofstadter'in uslamlamasını vermek bu yapıtın sınırlarını aşan bir şeydir. Zaten yapay zekalar konusu başlı başına özel olarak incelenmesi gereken bir konudur. Biz sadece bu konudaki görüşlere değinmekle ve Gödel'in eksiklik teoremleri ile matematiksel sezgi kavramının bu görüşler ile bağlantısına kısaca değinmekle yetineceğiz.

Diğer taraftan eksiklik teoremlerinin ve onun Platonculuğunun akla bir sınır koymadığını, aksine onu yücelttiği olgusunun dışında, Gödel'in akılcılığı destekleyen bazı başka yönleri vardır. Gödel'in matematiğin temelde *a priori* bir bilim olduğunu belirtmesi bunlardan biridir. Ayrıca yeni aksiyom ve kanıtlama yöntemlerinin keşfedilmesini sağlayacak matematiksel sezgilerin güçlenmesi için matematiğe temel olan soyut öğe ve kavramların anlamlarının daha da derinleştirilmesini ve açık kılınmasını önermesi kesinlikle akılcı felsefelerde görülen bir tutumdur. Gödel'in düşünce sisteminde merkezi bir öneme sahip bu tür düşünceler üzerinden Gödel'in daha çok akılcı felsefelere yakın olduğu açıktır.

Biz Gödel'i daha çok akılcı felsefelere yakın bir kişi olarak değerlendiriyoruz. Fakat kanımızda Gödel'in böyle bir değerlendirmeyi tam olarak onaylamazdı. Bunun için bazı nedenlerimiz var.

Gödel deneyciliği tam olarak dışlayan biri değildir. Aksine deneyciliğe özel bir önem vermektedir. Onun düşünce sisteminde bu tür örnekleri bulmak mümkündür. Örneğin Gödel'in doğruluğu hemen görülemeyen fakat alanın sorunlarını çözme yolunda başarılı olan, çözülmemiş matematik sorularının çözümü sağlayan veya en azından bu çözümü kolaylaştıran aksiyomların bulunabileceğini belirtmesi bunlardan biridir. Yani Gödel aksiyomların doğruluğunun *a posteriori* olarak görülebilmesi olanağını dışlamamaktadır.

Peki, bütün bunların anlamı nedir? Gödel hatırlanabileceği gibi "Felsefenin Işığında Matematiğin Temellerinin Modern Gelişimi" yazısında matematiksel sorunlar

[139] Hofstadter, 2001: 765-766.

karşısında benimsenmesi gereken tutumun sağ ve sol felsefeler arasında, daha da özelde aprioricilik ve deneycilik arasında bir yerde olduğunu belirtmişti. Bu noktayı Gödel tam olarak belirlememiş görünüyor ama hem genel düşünceleriyle hem de matematiğin bazı özel konularına yaklaşımıyla böyle bir noktanın örneklerini veriyor. Kanımızca Gödel'in durmak istediği nokta budur.

Bu bölümü bitirmeden önce Gödel'in matematiksel sezgi kavramına tam bir açıklama getirmek istiyoruz. Kant'a göre bir sanatçıyı sanatçı yapan şey, sanatçı dehalarda bulunan bir tür ruh, Kant'ın deyişiyle "geist"tır. Geist ise *estetik ide*leri görebilme ve bunları betimleyebilme gücüdür. Bu estetik idelerin temeli ise, duyulara, algılara dayanan hayal gücünün tasavvurlarıdır.[140]

Gödel'in matematiksel sezgi kavramından anladığı şey bir bakıma Kant'ın geist kavramından anladığına benzemektedir. Bu matematiksel nesneler dünyasının bir algısıdır ve matematikçinin, bu dünyanın nesneleri ile bu nesnelerin birbirleri ile olan bağıntılarını görmesini sağlar. Bu yetenek insanda "doğrudan verili" biçimde bulunur.[141] Öyle görünüyor ki Gödel'e göre matematikçiyi matematikçi yapan şey, bu yeteneği kullanmasıdır.

[140]Heinz Heimsoeth (1986), *Immanuel Kant'ın Felsefesi,* çev. Takiyettin Mengüşoğlu, Remzi Kitabevi, İstanbul, ss.170-171.
[141] Gödel, 1964: 271.

SONUÇ

Bu çalışmanın başında XIX. ve XX. yüzyıl matematikçilerini, matematiksel nesneler dünyasının resmini çizmeye çalışan insanlar olarak betimlemiştik. Öyle görünüyor ki matematiksel nesneler dünyasının tam bir resmi çizilemeyecektir. Şu halde, matematiksel nesneler dünyasının bütün doğruları da bu çizimler üzerinden görülemeyecektir. Ayrıca resimlerimizden matematiksel nesneler hakkında çelişkili çıkarımlar yapmayacağımız, daha doğrusu, çizimlerimizin böyle bir şeye müsaade etmediği önceden görülemeyecektir. Bu iki teoremin de tek bir sonucu varsa bu sonuç matematiğin dişleriyle yüzleşmeye devam edileceğidir. Eksiklik teoremleri bunu kanıtlar. Gödel'in çalışmamızda incelemiş olduğumuz matematiğin temellerine ilişkin görüşleri ise bunu açıklamaya çalışır.

Eksiklik teoremlerinin sonuçlarının aritmetiğin tutarlılığının kanıtlanamayacağını gösterdiği genel bir yorumdur. Fakat saf bilimsel amaçlar temel alındığında bu yorum anlamsızdır. Çelişkiler her zaman çıkabilir. Gödelci bir tarzda ifade edersek, matematiksel sezgiler her zaman yanıltabilir. Fakat çelişkilerin çıkması bu çelişkilerin üstesinden gelinmeyeceği anlamına gelmiyor.

Açıkçası çelişkilerin ortaya çıkması, ele alınan bilimsel nesnelerin doğasında sorun olduğunu değil, onlar üzerine bilgilerimizde sorun olduğunu gösterir. Bu yüzden bilim adamlarına mevcut bilgilerinin ve sistemlerinin yeniden gözden geçirilip güçlendirilmesi olanağı sağladığı için bunlar olumlu bile karşılanmalıdır.

Modern bilişimde de aynı durum geçerlidir. Gündelik yaşamımıza her yönden tesir eden çok çeşitli teknolojik alt yapılar, açıkçası bu alt yapıların güvenilirliği sorgulandığında, sistemin çalışmasına tehdit oluşturan tehlikeler fark edildiğinde yeniden güçlendirilir. Fakat güçlendirilen sistemi gelecekte tehdit eden tehlikelerin çoğu önceden sezilemez. Eksiklik teoremlerinden özellikle ikincisinin gösterdiği sonuç budur. Bu sonuç çok kısa bir süre sonra Alan Turing'in makinesi ile daha somut biçimde ortaya koyulacaktı.

Çalışmamızda aynı zamanda Gödel'in Platonculuğunu da inceledik. Onun düşünceleri XX. yüzyılda pek karşılaşılmayan cinstendir. Fakat bu Platonculuğu yüzeysel olarak görmemek, anlamını aramak gerekiyor. Öyle görünüyor ki Gödel'in asıl sorunu doğrudan matematiksel nesnelerin zihnimizden bağımsız bir varlığa sahip olduğunu göstermek değildir. Fakat bu Platonculuğa yol açan bazı nedenler vardır. Matematiksel bilginin ve matematiksel yargıların niteliği ile ilgili geleneksel felsefi açıklamalar Gödel’e yetmemektedir, tıpkı zamanında Frege’ye de yetmediği gibi.

Bu Platonculuğa yol açan başka bir sorun türü daha vardır ve sorunu kısaca göstermek istiyoruz. "$\aleph_1$″ gibi bir sayı matematikte görece yeni bir sayıdır. Bu sayı ortaya ilk çıktığında ise matematikçileri çok şaşırtmıştır: Nasıl değerlendirilebileceği anlaşılmamıştır. Öncelikle bu sayının fiziksel dünya ile hiçbir ilişkisi yoktur. Zaten matematikçilerin hiçbiri de bunu ifade etmemekte ve aksini düşünmektedir. Sezgicilerin, doğal sayılarla oluşturulamadığı için onu reddetmesinin, Hilbert’in, bu sayının temel matematiğe dahil olmadığını fakat araçsal bir değerinin olabileceğini düşünmesinin, Gödel’in ise bu tür sayıların olduğunu matematiksel sezgi kavramı ile ve Platoncu bir tarzda göstermeye çalışmasının altında yatan neden budur. Ortada belirli bir teorinin bilimsel olarak kabul edilip edilemeyeceğine ilişkin bir tür yenilikçilik-gelenekçilik tartışması vardır. Gödel öyle görünüyor ki yenilikçi taraftadır ve böyle bir konuda yenilikçiliği destekleyecek belki de en uygun felsefi görüş Platonculuktur.

KAYNAKLAR

Awodey, Stewe ve A. W. Carus (2010), "Gödel and Carnap", *Kurt Gödel: Essays for His Centennial*, ed. Solomon Feferman, Charles Parsons, Steven G. Simpson, Cambridge University Press, Cambridge.

Baldwin, Thomas, (2001) "Bertrand Russell", *Blackwell Companions to Philosophy: A Companion to Analytic Philosophy,* ed. A. P. Martinich, David Sosas, Blackwell Publishers Ltd, Oxford.

Bottazzini, Umberto (2011), "Hilbert's Problems: A Research Program for Future Generations", *Mathematical Lives: Protagonists of the Twentieth Century From Hilbert to Wiles*, translated by Kim Williams, Springer, Heidelberg.

Bradley, Michael J. (2006), *Modern Mathematics: 1900-1950,* Chelsea House, New York.

Brown, James R. (2008), *Philosophy of Mathematics - A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Second Edition, Routledge, New York.

Budak, Mehmet (2010), *On the Role of Diagonalization in Gödel's Incompleteness and Tarski's Theorems* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Bueno, Otávio (2010), "Philosophy of Mathematics", *Philosophies of the Sciences - A Guide*, ed. Fritz Allhoff, Blackwell Publishing, Oxford.

Burgess, John P. (2008), *Mathematics, Models, and Modality - Selected Philosophical Essays*, Cambridge University Press, New York.

Byrd, Michael (1999), *Gödels Theorems,* yayınlanmamış ders notları.

Casti, John L. ve Depauli, Werner (2004), *Gödel*: *Mantığa Adanmış Bir Yaşam,* (çev. Ergün Akça), 1. Baskı, Kabalcı Yayınevi, İstanbul

Chaitin, Gregory J. (2007), *Thinking About Gödel and Turing – Essays on Complexity – 1970-2007,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore.

Chalmers, Alan (1997), *Bilim Dedikleri,* çev. Hüsamettin Arslan, 3. Basım, Vadi Yayınları, Ankara.

Chihara, Charles S. (2007), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, New York.

Çitil, Ahmet Ayhan (1984), *An Introduction to the Ontological Foundations of Gödel's Incompleteness Theorems* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Boğaziçi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Cook, Roy T. (2009), *A Dictionary of Philosophical Logic,* Edinburgh University Press, Edinburgh.

Curry, Haskell B. (1977), *Foundations of Mathematical Logic*, Dover Publications, Inc., New York.

Defletsen, Michael (1999), "Brouwer, Luitzgen Egbertus Jan"*, The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Defletsen, Michael (1999), "Hilbert, David"*, The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Defletsen, Michael (1999), "Hilbert's Program", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Defletsen, Michael (1999), "Metamathematics", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Delaney, C. F. (1999), "Instrumentalism", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York

Feferman, Solomon (2007) "Gödel, Nagel, Minds and Machines" http://math.stanford.edu/~feferman/papers/godelnagel.pdf (22 Şubat 2011)

Fitzgerald, Michael ve Ioan James (2007), *The Mind of the Mathematician*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Frege, Gottlob (2008), *Aritmetiğin Temelleri*, çev. H. Bülent Gözkan, Yapı Kredi Yayınları, İstanbul.

Garrity, Thomas A. (2002), *All the Mathematics You Missed, But Need to Know for Graduate School*, Cambridge University Press, Cambridge.

Godwyn, Martin ve Andrew D. Erwine (2003), "Bertrand Russell's Logisicm", *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge University Press, Cambridge.

Gorini, Catherine A. (2003), *The Facts On File Geometry Handbook*, Facts On File, Inc., New York.

Gödel, Kurt (1931), *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine – I* çev. Özge Ekin, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2010, İstanbul.

Gödel, Kurt (1961), "The Modern Development Of The Foundations Of Mathematics In The Light Of Philosophy", *Kurt Gödel: Collected Works, Volume III: Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press, 1995, New York.

Gödel, Kurt (1964), "What is Cantor's Continuum Problem?", *Kurt Gödel – Collected Works. Vol. II*, ed. Solomon Feferman, Oxford University Press, 1995, New York.

Hart, W. D. (2010), *The Evolution of Logic,* Cambridge University Press, Cambridge.

Heimsoeth, Heinz (1986), *Immanuel Kant'ın Felsefesi,* çev. Takiyettin Mengüşoğlu, Remzi Kitabevi, İstanbul.

Hilbert, David (1899), *The Foundations of Geometry,* translated by E. J. Townsend, The Open Court Publishing, 1950, Illinois.

Hodes, Harold T. (1999), "Logicism", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Hofstadter, Douglas R. (2001), *Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik, Lewis Carrol'un İzinde Zihinlere ve Makinelere Dair Metaforik Bir Füg*, çev. Ergün Akça, Hamide Koyukan, 1. Baskı, Kabalcı Yayınevi, İstanbul

Israel, Giorgio ve Ana Millan Gasca, *The World as a Mathematical Game - John von Neumann and Twentieth Century Science*, Birkhauser, Berlin.

John MacFarlane (2002). "Frege, Kant, and the Logic in Logicism". *Philosophical Review* 111 (1).

Kant, Immanuel (1984), *Seçilmiş Yazılar*, Remzi Kitabevi, İstanbul.

Kavuk, Mehmet (2005), *Gödel Spacetime* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Klement, Kevin C. (2002), *Frege and the Logic of Sense and Reference*, New York & London, Routledge Publishing.

Kline, Morris (1985) *Mathematics and the Search for Knowledge*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Lipton, Richard J. (2010), *The P=NP Question and Gödel's Lost Letter*, Springer, New York.

Maddy, Penelope (1999), "Continuum Problem", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

McElroy, Tucker (2005), *A to Z of Mathematicans*, 1. Baskı, Facts on File Inc. New York.

Nagel, Ernest ve Newman, James R. (2008), *Gödel Kanıtlaması,* çev. Bülent Gözkan, 2. Baskı, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul

Nozick, Robert, (1993), *The Nature of Rationality*, Princeton University Press, Princeton/New Jersey

Odifreddi, Piergiorgio (2011), "Kurt Gödel: Completeness and Incompleteness", *Mathematical Lives: Protagonists of the Twentieth Century From Hilbert to Wiles*, translated by Kim Williams, Springer, Heidelberg.

Özgören, Kıvanç (2005), *Gödel`s Metric and Its Generalization* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Parsons, Charles (2010), "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought," *Kurt Gödel: Essays for His Centennial*, ed. Solomon Feferman, Charles Parsons, Steven G. Simpson, Cambridge University Press, Cambridge.

Penrose, Roger (2000), *Kralın Yeni Usu - I / Bilgisayar ve Zekâ,* 2. Basım, Tubitak Popüler Bilim Kitapları 52, Ankara.

Potter, Michael (2004), *Set Theory and Its Philosophy*, Oxford University Press, New York.

Rosado Haddock, Guillermo E. (2006), *A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege*, Ashgate Publishing, Hampshire.

Russell, Bertrand (1948), *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen & Unwin LTD, London.

Schilling, Kurt (1971), *Toplumsal Düşünce Tarihi,* Varlık Yayınevi, İstanbul.

Senemoğlu, Nuray (2007), *Gelişim Öğrenme ve Öğretim*, Gönül Yayıncılık, Ankara.

Stillwell, John (2010), *Mathematics and Its History*, Third Edition, Springer, New York.

Ströker, Elizabeth (2005), *Bilim Kuramına Giriş,* çev. Doğan Özlem, İnkılâp Yayınevi, İstanbul.

Swijtink, Zeno G. (1999), "Categorical Theory", *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge University Press, Second Edition, New York.

Taşkesen, Tufan (2001), *Gödel'in Aksiyomatik Sistemlerin Tam Olmamasına Dair Teoremi ve Paradokslar* (Basılmamış Yüksek Lisans Tezi), Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla.

Tieszen, Richard (1995), "Mathematics", *The Cambridge Companion to Husserl*, ed. Barry Smith ve David W. Smith, Cambridge University Press, New York.

Urquhart, Alasdair, (2003), “The Theory of Types”, *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge University Press, Cambridge.

Wang, Hao (1996), *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Yıldırım, Cemal (2004) *Bilim Felsefesi,* 9. Basım, Remzi Kitabevi, İstanbul.

Yourgrau, Gpalle (2003) *Gödel Einstein Buluşması – Gödel’in Evreninde Zamana Yolculuk,* çev. B. Akalın ve B. Şipal, Güncel Yayıncılık, İstanbul

Zach, Richard (2007), “Hilbert's Program Then and Now”, *Philosophy of Logic*, ed. Dale Jacquette, North Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Adı: Ali Bilge

Soyadı: ÖZTÜRK

Doğum Tarihi: 01.01.1986

Doğum Yeri: Tonya/Trabzon

<u>Eğitim Bilgileri:</u>

İlköğretim: Denizli Merkez İ.Ö.O.

Ortaöğretim: Denizli Anadolu Lisesi

Lisans: Çukurova Üniversitesi Felsefe Grubu Eğitimi Bölümü

Yüksek Lisans (Tezsiz): Çukurova Üniversitesi