MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ASİMPTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif KUYUCU

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ASİMPTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER ÜZERİNE

Elif KUYUCU

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Elif KUYUCU tarafından hazırlanan "Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Asimptotik Lacunary $\mathcal{I}$-Denk Diziler Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ
Sivas Cumhuriyet Üniv., Eğitim Fak.

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

......./......../........... tarih ve

.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/12/2019

Elif KUYUCU

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN
ASİMPTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER ÜZERİNE

Elif KUYUCU
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusunun önemini ve tarihi geçmişini anlatan genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, literatürde mevcut ve tez çalışmasının daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan bazı temel kavramlar ve tanımlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise, reel sayı dizilerinin modülüs fonksiyonu ile tanımlanan asimptotik lacunary ideal denkliği konusu ile ilgili temel kavramlar verilerek bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ve ispatları gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, bir pozitif $p = p_k$ dizisi kullanılarak reel sayı dizilerinin modülüs fonksiyonu ile tanımlanan asimptotik lacunary ideal denkliği konusu ile ilgili temel kavramlar verilerek bu kavramlar arasındaki bazı kapsama ve gerektirme ilişkilerini inceleyen teoremler ve ispatları incelenmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2019, v + 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: İdeal yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Lacunary dizi, Asimptotik denklik, Modülüs fonksiyonu.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON ASYMPTOTICALLY LACUNARY $\mathcal{I}$-EQUİVALENT SEQUENCES DEFINED BY A MODULUS FUNCTION

Elif KUYUCU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Matematics

Supervisor: Assoc. Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of five main chapters.

In the second chapter, the basic concepts and definitions that are present in the literatüre and necessary for a better understanding of the thesis are mentioned. In the third chapter, the definitions of basic concepts related to asymptotic lacunary ideal equivalence defined by the modulus function of real number sequences are given and theorems and their proofs are examined. In the fourth chapter, by using a positive $p = p_k$ sequence, the definitions of basic concepts related to the asymptotic lacunary ideal equivalence defined by the modulus function of the real number sequences are given and the theorems and proofs which examine some coverage and necessity relationships between these concepts are examined.

In the fifth section, which is the last chapter, the sources in the literatüre that we use during our study are listed.

2019, v + 35 pages

Keywords: Ideal convergence, Cesàro summable, Lacunary sequence, Asymptotically equivalence, Modulus function.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR a, yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Elif KUYUCU
Afyonkarahisar, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLANAN ASİMPTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER 13
4. (f,p) $-$ASİMTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER 21
5. KAYNAKLAR 33
ÖZGEÇMİŞ 35

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$x=(x_k)$	Reel sayı dizisi
l_∞	Sınırlı reel veya kompleks diziler kümesi
$\theta=\{k_r\}$	Lacunary dizi
$2^{\mathbb{N}}$	Doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
I_f	Sonlu elemanlı kümelerden oluşan ideal
$x\sim y$	Asimptotik denk diziler
$x\overset{S^L}{\sim}y$	Asimptotik istatistiksel denk diziler
$x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
S_θ^L	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler kümesi
$x\overset{[N]_\theta^L}{\sim}y$	Kuvvetli Asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^L$	Kuvvetli Asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$inf_k x_k$	$x=(x_k)$ dizisinin alt sınırlarının en büyüğü
$sup_k x_k$	$x=(x_k)$ dizisinin üst sınırlarının en küçüğü
$x\overset{S^L(\mathcal{I})}{\sim}y$	$\mathcal{I}$-asimptotik istatistiksel denk diziler
$x\overset{S_\theta^L(\mathcal{I})}{\sim}y$	$\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$S_\theta^L(\mathcal{I})$	$\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler kümesi
$x\overset{[N]_\theta^L(\mathcal{I})}{\sim}y$	Kuvvetli $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^L(\mathcal{I})$	Kuvvetli $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$x\overset{[N]_\theta^{L(p)}(\mathcal{I})}{\sim}y$	$p=(p_k)$ dizisi için kuvvetli $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary denk diziler
$[N]_\theta^{L(p)}(\mathcal{I})$	$p=(p_k)$ dizisi için kuvvetli $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary denk diziler kümesi
$x\overset{\sigma^{(p)}(\mathcal{I})}{\sim}y$	$p=(p_k)$ dizisi için Kuvvetli Cesàro $\mathcal{I}$-asimptotik denk diziler

1. GİRİŞ

Yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık kavramları, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi alanının temel kavramlarından olup, son zamanlarda çok farklı biçimlerde ve uzaylarda tartışılmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Toplanabilme Teorisinde büyük öneme sahiptir. Fast (1951)'in istatistiksel yakınsak kavramını tanıtmasından sonra başta Schoenberg (1959), Salat (1980), Fridy (1985) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından bu kavramın uygulamaları ve bazı genelleştirmeleri ile birlikte bazı özellikleri günümüze kadar incelenmiştir.

Toplanabilme teorisinin önemli kavramlarından biri de lacunary dizi kavramıdır. Fridy ve Orhan (1993) lacunary dizi kavramı yardımıyla lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtıp, bu kavramın bir çok özelliğini incelemişlerdir.

Kostyrko vd. (2000) doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal kavramına dayanan ve istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını tanımlayarak bu kavramın bazı özellikleri ile birlikte yakınsaklık ile aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı şartlar altında $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler verilmiştir. Daha sonra bu kavramın uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi başta Dems (2004), Kostyrko (2005), Savaş ve Das (2011) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar çalışılmıştır. Son zamanlarda Das vd. (2011) ideal kavramı, lacunary dizi kavramı ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarını kullanarak, $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını ve bu kavramların bazı uygulamalarını vermişlerdir.

Reel sayı dizileri için asimptotik denklik kavramları ile asimptotik regüler matrisler için bazı temel tanımlar ve özellikler Marouf (1993) tarafından vermiştir. Son zamanlarda Patterson (2003), Savaş (2013), Ulusu ve Nuray (2013) gibi birçok araştırmacı asimptotik denklik kavramı ve ilgili kavramları bazı özellikleriyle birlikte çalışmışlardır. Patterson (2003) asimptotik istatistiksel denklik ve ilgili kavramları tanımlamıştır. Daha sonra Patterson ve Savaş (2006) asimptotik denklik, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary dizi kavramlarının doğal kombinasyonu olan asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını tanıtmışlardır. Savaş (2013) $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını vermiştir. Savaş ve Gümüş (2013) pozitif reel sayıların $p = (p_k)$ dizisini kullanarak $\mathcal{I}$-asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını genelleştirmişlerdir.

Modülüs fonksiyonu ilk olarak Nakano (1953) tarafından tanımlanmıştır. Maddox (1986), Pehlivan ve Fisher (1995), Kumar ve Sharma (2012), Pancaroğlu ve Nuray (2014), Kişi vd. (2015) ve birçok yazar tarafından modülüs fonksiyonu çalışılmıştır.

Tezimizin üçüncü bölümünde, Kumar ve Sharma (2012) tarafından yapılan makalede incelenen, modülüs fonksiyonu tarafından tanımlanan kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denklik, kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik, asimptotik lacunary istatistiksel $\mathcal{I}$-denklik, f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik, kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ve kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik kavramlarını vererek, bu kavramlar arasındaki bazı ilişkiler ile kapsama ve gerektirme bağıntılarını veren teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz.

Tezimizin dördüncü bölümünde ise, Bilgin (2015) tarafından yapılan makalede incelenen, bir pozitif $p = p_k$ dizisi kullanılarak modülüs fonksiyonu tarafından tanımlanan kuvvetli (f, p)-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ve kuvvetli (f, p)-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik kavramlarını vererek, bu kavramlar arasındaki bazı ilişkiler ile kapsama ve gerektirme bağıntılarını veren teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında yararlanacağımız bazı temel kavramlar verilmiştir. Literatürde iyi bilinen doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, metrik uzay ve mutlak değer metriği gibi temel kavramları burada vermeyeceğiz.

Öncelikle bir dizinin tanımı verip, dizinin sınırlılığı, yakınsaklığı ve Cesàro toplanabilirliği gibi kavramaları not edeceğiz.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir (Balcı 1999).

Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye reel terimli dizi veya reel sayı dizisi ya da reel dizi denir. Yani, reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Genel terimi x_k olan bir dizi $(x_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ şeklinde gösterilir.

Tezimizde aksi belirtilmediği sürece (x_k) dizisini reel sayı dizisi olarak ele alacağız.

Tanım 2.2 $x = (x_k)$ bir dizi ve $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $k > n_0$ olduğunda

$$|x_k - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi $\mathcal{L}$ sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \mathcal{L} \text{ veya } x_k \to \mathcal{L}$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1999).

Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye ise ıraksak dizi denir.

Tanım 2.3 Eğer her $k > 0$ sayısı için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı 1999).

Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \mathcal{L}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir (Freedman *et al*. 1978).

Şimdi bir dizinin yakınsaklığı kavramının bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamada kullanılan doğal yoğunluk kavramını ve istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy dizi tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.5 (Doğal yoğunluk) $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümelerini ele alalım. $|K| = \mathrm{card}K$ (K kümesinin kardinalitesi) olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{|K_n|}{n} \text{ ve } \overline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla K kümesinin alt ve üst yoğunlukları denir. $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve bu limit değerine K kümesinin doğal yoğunluğu denir. O halde $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dır (Niven *et al*. 1991).

Tanım 2.6 $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Tanım 2.7 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her ε > 0 için bir $N = N(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\delta(\{k: |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy 1985).

Şimdi de son yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışılan lacunary dizi kavramını tanıtarak bir dizinin lacunary yakınsaklığı ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.8 $\theta = \{k_r\}$ dizisi $(r = 1,2,3, \dots)$,

$$k_0 = 0 \text{ ve } h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty \ (r \to \infty)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi ise, bu dizi lacunary dizi olarak adlandırılır (Fridy and Orhan 1993).

Çalışma boyunca $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile belirtilip, ayrıca $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı ise q_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.9 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r}^{n} |x_k - \mathcal{L}| = 0$$

olacak şekilde bir $\mathcal{L}$ reel sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ ye kuvvetli lacunary yakınsaktır denir (Fridy and Orhan 1993).

Tanım 2.10 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

İstatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ideal yakınsaklık kavramı 2000 yılından bu yana birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.
Şimdi ideal, süzgeç ve ideal yakınsaklık kavramları ile ilgili tanım ve örnekleri verelim.

Tanım 2.11 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$,

iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset$ A için $B \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir ideal denir.

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir gerçek (non-trivial) ideal denir. Ayrıca, $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealine uygun (admissible) ideal denir (Kostyrko *et al*. 2000).

Bu çalışmadaki bütün idealler uygun ideal olarak kabul edilecektir

Tanım 2.12 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Kostyrko *et al*. 2000).

Şimdi $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili örnekler verelim (Kostyrko *et al*. 2000).

(i) $\mathcal{I}_0 = \{\emptyset\}$ alalım. $\mathcal{I}_0$, $\mathbb{N}$ de minimal idealdir. Bir $x = (x_k)$ dizisi sabit bir dizi ise $\mathcal{I}$-yakınsaktır. Bunu tersi de doğrudur.

(ii) $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin tüm sonlu alt cümlelerinin sınıfı $\mathcal{I}_f$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_f$ uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık alışılmış (adi) yakınsaklık ile çakışır.

(iii) $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_\delta$ bir uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

(iv) $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$ ve $M \neq \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathcal{I}_M = 2^M$ idealini ele alalım. Bu durumda $\mathcal{I}_M$ ideali bir proper idealdir. Bir $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{I}_M$-yakınsaktır ancak ve ancak $x = (x_k)$ $\mathbb{N}/M$ üzerinde sabit dizidir, yani bir $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N} / M$ için $x_n = \mathcal{L}$ dir. Özel olarak $M = \emptyset$ alınırsa (i) deki ideal elde edilir.

Tanım 2.13 Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,

iii. Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir süzgeç adı verilir (Kostyrko *et al*. 2000).

Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal ise, bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N} : (\exists A \in \mathcal{I})(M = \mathbb{N} \backslash A)\}$$

sınıfına $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ ideali ile birleşen süzgeç denir (Kostyrko *et al*. 2000).

Tanım 2.14 $x = (x_k)$ bir sayı dizisinin alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda x dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır (veya $S(\mathcal{I})$-yakınsaktır) denir. Bu durumda,

$$x_k \to \mathcal{L}\big(S(\mathcal{I})\big) \text{ veya } S(\mathcal{I}) - \lim_{k\to\infty} x_k = \mathcal{L}$$

yazabiliriz (Das *et al*. 2011).

Tanım 2.15 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsaktır denir ve

$$x_k \to \mathcal{L}(N_\theta(\mathcal{I}))$$

biçiminde gösterilir (Das *et al*. 2011).

Tüm kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak dizilerin sınıfı $N_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilir.

Tanım 2.16 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$x_k \to \mathcal{L}(S_\theta(\mathcal{I}))$$

biçiminde gösterilir (Das *et al*. 2011).

Tüm lacunary $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilir.

Şimdi asimptotik denklik kavramı ve bu kavramla ilgili temel tanım ve özellikleri not edeceğiz. Öncelikle, denklik, kuvvetli Cesàro asimptotik denklik, kuvvetli asimptotik lacunary denklik, asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik kavramlarının tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.17 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 1$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine asimptotik denktir denir ve $x \sim y$ şeklinde gösterilir (Marouf 1993).

Tanım 2.18 $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|^{p_k} = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli Cesàro asimptotik denktir denir ve

$$x \overset{\sigma(p)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca p dizisi için kuvvetli Cesàro asimptotik denktir denir (Savaş and Patterson 2008).

Tanım 2.19 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli asimptotik lacunary denktir denir ve

$$x \overset{N_\theta}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L}$ =1 ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli asimptotik lacunary denktir denir (Savaş and Patterson 2008).

Tanım 2.20 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. $x = x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \epsilon I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right|^{p_k} = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine p dizisi için $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli asimptotik lacunary denktir denir ve

$$x \overset{[N]_\theta^{\mathcal{L}(p)}}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca p dizisi için kuvvetli asimptotik lacunary denktir denir (Savaş and Patterson 2008).

Tanım 2.21 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı asimptotik istatistiksel denktir denir ve

$$x \overset{S^{\mathcal{L}}}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca asimptotik istatistiksel denktir denir (Patterson 2003).

Tanım 2.22 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı asimptotik lacunary istatistiksel denktir denir ve

$$x \overset{S_\theta}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L}$=1 ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca p dizisi için asimptotik lacunary istatistiksel denktir denir (Patterson and Savaş 2006).

Tanım 2.23 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ ise, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir.

Şimdi de Nakona (1953) tarafından tanımlanan modülüs fonksiyonu ile ilgili tanımları ve bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.24 $[0, \infty)$ dan $[0, \infty)$ a tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa modülüs fonksiyonu adını alır:

i. $f(x)$= 0 ancak ve ancak $x = 0$ dır.
ii. Tüm $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ dir.
iii. f artandır.
iv. f, 0 da sağdan süreklidir.

Lemma 2.1 f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Eğer $y \neq 0$ için $\left(\frac{x}{y}\right) > \delta$ ise,

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{2f(1)}{\delta}\left(\frac{x}{y}\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Pehlivan and Fisher 1994).

Tanım 2.25 Bir f modülüs fonksiyonunu alalım. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k - \mathcal{L}|) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir. Bu

$$w_f\text{-}\lim_k x = \mathcal{L}$$

ile gösterilir (Öztürk and Bilgin 1994).

Tanım 2.26 f bir modülüs fonksiyonu, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_k f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri $\mathcal{L}$ katlı f-asimptotik denktir denir ve $x \overset{f}{\sim} y$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca f-asimptotik denktir denir (Bilgin 2011).

Tanım 2.27 f bir modülüs fonksiyonu, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli f-asimptotik denktir denir ve

$$x \overset{w_f}{\sim} y$$

ile gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli f-asimptotik denktir denir (Bilgin 2011).

Tanım 2.28 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli f-asimptotik lacunary denktir denir ve

$$x \overset{N_{\theta f}}{\sim} y$$

ile gösterilir. Eğer $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli f-asimptotik lacunary denktir denir (Bilgin 2011).

3. MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLANAN ASİMPTOTİK LACUNARY $\mathcal{I}$-DENK DİZİLER

Bu bölümde, Kumar ve Sharma (2012) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz.

Burada öncelikle, kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denklik, kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik, asimptotik lacunary istatistiksel $\mathcal{I}$-denklik, f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik, kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ve kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik tanımlarını vereceğiz.

Tanım 3.1 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(w)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir.

Tanım 3.2 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $\gamma > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right| \geq \gamma\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı asimptotik lacunary istatistiksel $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(S_\theta)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca asimptotik lacunary istatistiksel $\mathcal{I}$-denktir denir.

Tanım 3.3 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r}^{n} \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir.

Tanım 3.4 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve f modülüs fonksiyonu alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$için

$$\left\{k \in \mathbb{N} : f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(f)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir.

Tanım 3.5 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve f modülüs fonksiyonu alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir.

Tanım 3.6 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini, f modülüs fonksiyonunu ve bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir ve

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^f)}{\sim} y$$

biçiminde gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denktir denir.

Aşağıdaki teorem kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ile kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik kavramları arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.1 Negatif olamayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve bir f modülüs fonksiyonunu alalım. Bu durumda,

(i) Eğer, $x \overset{\mathcal{I}(w)}{\sim} y$ ise $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer, $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \alpha > 0$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(w)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) $x \overset{\mathcal{I}(w)}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ için olsun. $0 < \delta < 1$ seçelim öyle ki $0 \leq t \leq 1$ için $f(t) < \varepsilon$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) = \frac{1}{n} \sum_{\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \leq \delta} f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) + \frac{1}{n} \sum_{\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| > \delta} f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right)$$

yazılabilir. Ayrıca, f modülüs fonksiyonunun tanımını kullanarak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) < \varepsilon + \left(\frac{2f(1)}{\delta} \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right|$$

elde edilir. Böylece, her $\eta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right) \geq \eta\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{x_k} - \mathcal{L}\right| \geq \frac{(\eta - \varepsilon)^{\delta}}{2f(1)}\right\}$$

kapsaması sağlanır. $x \overset{\mathcal{I}(w)}{\sim} y$ olduğundan, yukarıdaki kapsama ifadesinde sağdaki küme ve dolayısıyla da soldaki küme $\mathcal{I}$ idealine aittir. Bu da

$$x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$$

olduğunu kanıtlar.

(ii) Eğer $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \alpha > 0$ ise, o halde tüm $t > 0$ için $f(t) \geq \alpha t$ olur. Şimdi $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) = \alpha\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)$$

olduğundan, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \alpha\varepsilon\right\}$$

kapsaması geçerlidir. $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ olduğundan, yukarıdaki kapsama ifadesinde sağdaki küme ve dolayısıyla da soldaki küme $\mathcal{I}$ idealine aittir. Bu da

$$x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$$

olduğunu kanıtlar. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ile asimptotik $\mathcal{I}$-istatistiksel denklik arasındaki ilişkiyi veren teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 3.2 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini ve bir f modülüs fonksiyonunu alalım. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer f sınırlı ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) Kabul edelim ki $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon}}^{\infty} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)$$

$$\geq \frac{f(\varepsilon)}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dur ve sonuç olarak, herhangi bir $\eta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\eta}{f(\varepsilon)}\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \eta\right\}$$

elde edilir. $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ olduğundan, Tanım 3.5 gereğince yukarıdaki kapsama ifadesinde sağdaki küme ve dolayısıyla da soldaki küme $\mathcal{I}$ idealine aittir. Böylece,

$$x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$$

olur.

(ii) Kabul edelim ki f sınırlı ve $x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$ olsun. f sınırlı olduğundan bir M reel sayısı vardır öyle ki $sup \leq M$ olur. Ayrıca, $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) = \frac{1}{n}\left[\sum_{\substack{k=1 \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon}}^{n} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|}}^{n} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]$$

$$\leq \frac{M}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + f(\varepsilon)$$

yazılabilir. Buradan da, $\varepsilon \to 0$ iken sonuç (1) dekine benzer şekilde elde edilir.

Şimdi kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denklik ile kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik arasındaki ilişkiyi veren teorem ve ispatı verilecektir.

Teorem 3.3 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini, bir f modülüs fonksiyonunu ve $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Eğer, $\liminf_r q_r > 1$ ise, o zaman

$$x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{(N_\theta^f)}{\sim} y$$

elde edilir.

İspat: Kabul edelim ki, $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda, $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta$$

olur. Bu da

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

olmasını sağlar. $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ alalım. Yeterince büyük bir r değeri için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) &\geq \frac{1}{k_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \\ &= \left(\frac{h_r}{k_r}\right)\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \\ &\geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{k_r}\sum_{k=1} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \frac{\varepsilon\delta}{1+\delta}\right\}$$

kapsaması yazılabilir. $x \overset{\mathcal{I}(wf)}{\sim} y$ olduğundan, yukarıdaki kapsama ifadesinde sağdaki küme ve dolayısıyla da soldaki küme $\mathcal{I}$ idealine aittir. Dolayısıyla

$$x \overset{(N_\theta^f)}{\sim} y$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik ile kuvvetli asimptotik lacunary $\mathcal{I}$-denklik arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.4. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini, bir f modülüs fonksiyonunu ve $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta)}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^f)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \alpha > 0$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^f)}{\sim} y$ dir.

İspat: İspat Teorem 3.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, kuvvetli f-asimptotik lacunary $\mathcal{J}$-denklik ile asimptotik lacunary $\mathcal{J}$-istatistiksel denklik arasındaki ilişkiyi veren teoremi inceleyeceğiz.

Teorem 3.5. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini, bir f modülüs fonksiyonunu ve $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisini alalım. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{J}(N_\theta^f)}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{J}(S_\theta)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer f sınırlı ise, o zaman $x \overset{\mathcal{J}(N_\theta^f)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{J}(S_\theta)}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) Kabul edelim ki $x \overset{\mathcal{J}(N_Q^f)}{\sim} y$ olsun ve $\varepsilon > 0$ alalım.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq f(\varepsilon)\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

olduğundan, $\gamma > 0$ için eğer

$$A(\varepsilon,\gamma) = \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \gamma\right\}$$

ve

$$B(\varepsilon,\gamma) = \left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right) \geq \gamma f(\varepsilon)\right\}$$

kümelerini tanımlarsak bu durumda,

$$A(\varepsilon,\gamma) \subseteq B(\varepsilon,\gamma)$$

olur. $x \overset{\mathcal{J}(N_\theta^f)}{\sim} y$ olduğundan, $B(\varepsilon,\gamma) \in \mathcal{J}$ olur. Böylece, ideal tanımı gereği $A\,(\varepsilon,\gamma) \in \mathcal{J}$ ve

$$x \overset{\mathcal{J}(S_\theta)}{\sim} y$$

elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki f sınırlı ve $x \overset{\mathcal{J}(S_\theta)}{\sim} y$ olsun. f sınırlı ise tüm $x \geq 0$ için bir M pozitif reel sayı vardır öyle ki $|f(x)| \leq M$ olur. Ayrıca, bu gerçeği kullanarak

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)=\frac{1}{h_r}\left[\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)+\sum_{\substack{k\in I_r\\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|<\in}} f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]$$

$$\leq\frac{M}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+f(\varepsilon)$$

olup, ispat Teorem 3.2 nin ispatının 2. kısmından yararlanarak elde edilir.

4. (f,p)-ASİMTOTİK LACUNARY $\mathcal{J}$-DENK DİZİLER

Bu bölümde Bilgin (2015) tarafından yapılan makaledeki tanım, teorem ve lemmaları ispatlarıyla birlikte not edeceğiz.

Öncelikle, kuvvetli asimptotik (f,p)-denklik ve kuvvetli asimptotik lacunary (f,p)-denklik tanımlarını vereceğiz.

Tanım 4.1 f bir modülüs fonksiyonu ve $p=(p_k)$ bir pozitif tam sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k}\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{J}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ sayı dizilerine $\mathcal{J}$ idealine göre $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli (f,p)-asimptotik denktir denir. Bu

$$x\overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim}y$$

ile gösterilir. Eğer, $\mathcal{L}=1$ alınırsa, bu durumda $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerine kısaca $\mathcal{J}$ idealine göre kuvvetli (f,p)-asimptotik denktir denir.

Eğer, her $x\geq 0$ için $f(x)=x$ alınırsa, $x\overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim}y$ yerine

$$x\overset{\mathcal{J}(w^{p})}{\sim}y$$

yazılabilir ve eğer $\mathcal{L}=1$ ise, kısaca $\mathcal{J}$ idealine göre kuvvetli p-asimptotik denklik denir.

Eğer $p=p_k$ alınırsa, tüm $k\in\mathbb{N}$ için $x\overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim}y$ yerine

$$x\overset{\mathcal{J}(w^{(fp)})}{\sim}y$$

yazılabilir.

Tanım 4.2 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ bir pozitif tam sayı dizisi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ sayı dizilerine $\mathcal{I}$ idealine göre $\mathcal{L}$ katlı kuvvetli (f, p)-asimptotik lacunary denktir denir. Bu

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta{}^{(f,p)})}{\sim} y$$

ile gösterilir. Eğer, $\mathcal{L} = 1$ alınırsa, bu durumda $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine kısaca $\mathcal{I}$ idealine göre kuvvetli (f, p)-asimptotik lacunary denktir denir.

Eğer $p = (p_k)$ alınırsa, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta{}^{(f,p)})}{\sim} y$ yerine

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{fp})}{\sim} y$$

yazılabilir.

Eğer $p = 1$ alınırsa, $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{fp})}{\sim} y$ yerine

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{f})}{\sim} y$$

yazılabilir. Böylece, bu sonuç Kumar and Sharma (2012) tarafından elde edilen

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{f})}{\sim} y$$

ile aynı olur.

Ayrıca, her $x \geq 0$ için$f(x) = x$ alınırsa, $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta{}^{(f,p)})}{\sim} y$ yerine

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{p})}{\sim} y$$

yazılabilir. Böylece, bu sonuç Savaş ve Gümüş (2013) tarafından elde edilen

$$x \overset{N_Q^{L(p)}(\mathcal{I})}{\sim} y$$

ile aynıdır.

Bu kısımda, $\mathcal{J}$ idealine göre kuvvetli (f,p)-asimptotik denklik ile kuvvetli p-asimptotik denklik kavramları arasındaki arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem ile başlayacağız.

Teorem 4.1 f bir modülüs fonksiyonu ve

$$0 < h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{J}(w^p)}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{J}(w^p)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) $x \overset{\mathcal{J}(w^p)}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $0 \leq u \leq \delta$ şartını sağlayan her u için $f(u) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ seçelim. O halde,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} = \frac{1}{n}\sum_{\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \leq \delta}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} + \frac{1}{n}\sum_{\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| > \delta}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k}$$

yazılabilir. Böylece, f fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \leq \max\{\varepsilon^h, \varepsilon^H\} + max\{1, (2f(1)\delta^{-1})^H\}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\{n \in \mathbb{N}; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{n \in \mathbb{N}; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon - max\{\varepsilon^h, \varepsilon^H\}}{\max\{1, \left(2f(1)\delta^{-1^H}\right)\}}\right\}$$

olur. $x \overset{\mathcal{J}(w^p)}{\sim} y$ olduğundan, yukarıdaki kapsama ifadesinde sağdaki küme ve dolayısıyla da soldaki küme $\mathcal{J}$ ya aittir. Bu da

$$x \overset{\mathcal{J}(w^{(f,p)})}{\sim} y$$

olduğunu ispatlar.

(ii) Yukarıdaki ilk kısımda $x \overset{\mathcal{I}(w^p)}{\sim} y$ ise, $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ olduğunu ispat ettik. Şimdi de bunun tersini ispat edersek ispat tamamlanmış olur.

Eğer $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise, tüm $t > 0$ için $f(t) \geq \beta t$ olur. $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ olduğunu kabul edelim. Açık olarak,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\beta\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right]^{p_k} \geq \min\{\beta^k, \beta^H\}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right]^{p_k}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece, $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon \min\{\beta^k, \beta^H\}\right\}$$

elde edilir. $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ olduğundan, yukarıdaki kapsamada ikinci küme ve dolayısıyla da birinci küme $\mathcal{I}$ ya aittir. Bu da $x \overset{\mathcal{I}(w^p)}{\sim} y$ olduğunu ispatlar.

Teorem 4.2 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve

$$0 < h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^p)}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^p)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 4.1 in ispatına benzer olduğundan, ispatı vermeyeceğiz.

Bir sonraki teorem $\mathcal{I}$ idealine göre kuvvetli (f,p)-asimptotik denklik ve kuvvetli (f,p)-asimptotik lacunary denklik arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 4.3 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayı dizisi olsun. O zaman,

(i) Eğer $\lim sup_r q_r < \infty$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ olması $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ olmasını gerektirir.

(ii) Eğer $\lim\inf_r q_r > 1$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ olması $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ olmasını gerektirir.

(iii) Eğer $1 < \lim inf_r q_r \leq \lim sup_r q_r < \infty$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) Eğer $\lim sup_r q_r < \infty$ ise, bu durumda bir $K > 0$ vardır öyle ki her r için $q_r < K$ olur. Şimdi kabul edelim ki $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$A = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} < \varepsilon \right\}$$

alalım. Böylece, tüm $j \in A$ için

$$H_j = \frac{1}{h_j} \sum_{k \in I_j} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

elde edilir. Herhangi bir n tamsayısı alalım öyle ki $k_r \geq n > k_{r-1}$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[f \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{k_r - 1} \sum_{m=1}^{r} \sum_{k \in I_m} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{k_r - 1} \sum_{m=1}^{r} \frac{k_m - k_{m-1}}{h_m} \sum_{k \in I_m} \left[f\left(\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right) \right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{m=1}^{r} (k_m - k_{m-1}) \sup_{j \in A} H_j \\
&= \frac{k_r}{k_{r-1}} \sup_{j \in A} H_j \\
&= q_r \sup_{j \in A} H_j < K_\varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}$$

yazılabilir. Herhangi bir $\varepsilon' > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \leq \varepsilon' \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dir öyle ki bu

$$x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$$

olmasını sağlar. Çünkü herhangi bir $A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi için

$$\bigcup \{ n : k_{r-1} < n < k_r , r \in A \} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dir.

(ii) $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ ve $\lim inf_r q_r > 1$ alalım. $\delta > 0$ vardır öyle ki tüm $r \geq 1$ için,

$$q_r = (k_r/k_{r-1}) \geq 1 + \delta$$

olur. Yeteri kadar büyük r için

$$(k_r/h_r) \leq \frac{1+\delta}{\delta} \text{ ve } k_{r-1}/h_r \leq \frac{1}{\delta}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ alalım ve

$$A = \left\{ k_r \in \mathbb{N}: \frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} < \varepsilon \right\}$$

kümesini tanımlayalım. O halde, $A \in F(\mathcal{I})$ dir. Her bir $k_r \in A$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[f \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f \left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \\
&= \frac{k_r}{k_r h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} - \frac{k_{r-1}}{h_r k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \frac{x_k}{y_k} \sum_{k=1}^{k_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} \\
&< \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right) \varepsilon = \varepsilon'
\end{aligned}$$

olur. Buradan da, herhangi bir $\varepsilon' > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r} \sum\nolimits_{k \in I_r} \left[f\left(\left| \frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L} \right| \right) \right]^{p_k} < \varepsilon' \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir ki bu da

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$$

olmasını sağlar.

(iii) (i) ve (ii) den ispat elde edilir.

Şimdi $\mathcal{I}$ idealine göre asimtotik istatistiksel denklik ve kuvvetli (f, p)-asimtotik denklik arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Ayrıca, $\mathcal{I}$ idealine göre asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve kuvvetli(f, p)-asimtotik lacunary denklik arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 4.4 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve

$$0 < h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer f sınırlı ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) Kabul edelim ki $x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon}}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k}$$

$$\geq min\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

yazılabilir. Sonuç olarak, herhangi bir $\gamma > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \gamma\right\}$$

$$\subseteq \left\{n \in \mathbb{N}; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right)\right]^{p_k}\right\} \geq \gamma\, min\,\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\} \in \mathcal{I}$$

olur. Böylece,

$$x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$$

elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki f sınırlı ve $x \overset{\mathcal{I}(S)}{\sim} y$ olsun. f sınırlı olduğundan, bir T tam sayısı vardır öyle ki tüm $x \geq 0$ için

$$|f(x)| \leq T$$

dir.

Dahası her $\varepsilon > 0$ için, toplamı her $k \leq n$ için $\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon$ ve $\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| < \varepsilon$ olacak şekilde iki parçaya ayırabiliriz. Bu durumda,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \leq \max\{T^h, T^H\}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \max\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^h\}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon - max\,\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}}{\max\{T^h, T^H\}}\right\} \in \mathcal{I}$$

yazılabilir. Böylece,

$$x \overset{\mathcal{I}(w^{(f,p)})}{\sim} y$$

elde edilir.

Teorem 4.5 f bir modulüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve

$$0 < h = inf_k p_k \leq p_k \leq sup_k p_k = H < \infty$$

olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$ ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(S_\theta)}{\sim} y$ dir.

(ii) Eğer f sınırlı ise, o zaman $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathcal{I}(S_\theta)}{\sim} y$ dir.

İspat:

(i) $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon}}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \min\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve böylece,

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \gamma\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right)\right]^{p_k} \geq \gamma\, min\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}\right\}$$

yazılabilir. İdeal tanımdan, yukarıdaki kapsamada ikinci küme ve dolayısıyla da birinci küme $\mathcal{I}$ ya aittir. Sonuç olarak,

$$x \overset{\mathcal{I}(S_\theta)}{\sim} y$$

yazılabilir.

(ii) Kabul edelim ki f sınırlı ve $x \overset{\mathcal{I}(S_\theta)}{\sim} y$ olsun. f sınırlı olduğundan, bir T tam sayısı vardır öyleki tüm $x \geq 0$ için $|f(x)| \leq T$ dir. O halde,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \leq \max\{T^h, T^H\}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$+\max\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}$$

ve böylece,

$$\left\{r \in \mathbb{N}: \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N}; \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{\varepsilon - \max\{f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H\}}{\max\{T^h, T^H\}}\right\} \in \mathcal{I}$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$$

elde edilir.

Tüm k ve $0 < p \leq t$ ler için $p_k = p$ ve $t_k = t$ alalım. Bu durumda, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.6 f bir modulüs fonksiyonu ve $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda;

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(ft)})}{\sim} y \text{ ise, o zaman } x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(fp)})}{\sim} y \text{ dir.}$$

İspat: $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(ft)})}{\sim} y$ alalım. Hölder eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p} \leq \left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_{k\mathcal{L}}}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{t}\right)^{\frac{p}{t}}$$

ve böylece

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^p \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N}; \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^t \geq \varepsilon^{\frac{t}{p}}\right\} \in \mathcal{I}$$

olur. Buradan,

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(fp)})}{\sim} y$$

elde edilir.

Şimdi (p_k) ve (t_k) dizilerinin sabit olmadığını düşünerek aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.7 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve tüm k lar için $0 < p_k \leq t_k$ ve $(t_k \,/\, p_k)$ sınırlı olsun. Bu durumda,

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,t)})}{\sim} y \text{ ise, o zaman } x \overset{V(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y \text{ dir.}$$

İspat: $x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(ft)})}{\sim} y$ olsun.

$$z_k = \left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \text{ ve } \lambda_k = (p_k \,/\, t_k)$$

alalım öyle ki $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$ olsun. u_k ve v_k dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$z_k \geq 1 \text{ için; } u_k = z_k \text{ ve } v_k = 0$$

ve

$$z_k < 1 \text{ için; } v_k = z_k \text{ ve } u_k = 0.$$

Bu durumda,

$$z_k = u_k + v_k;\ {z_k}^{\lambda_k} = {u_k}^{\lambda_k} + {v_k}^{\lambda_k}$$

elde edilir. Buradan da

$${v_k}^{\lambda_k} \leq u_k \leq z_k \text{ ve } {v_k}^{\lambda_k} \leq v_k^{\lambda}$$

olur. Böylece,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}{z_k}^{\lambda_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}{u_k}^{\lambda_k} + {v_k}^{\lambda_k} \leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} z_k + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} v_k^{\lambda}$$

elde edilir.

Şimdi her r için;

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} v_k^{\lambda} = \sum_{k\in I_r}\left(\frac{1}{h_r}v_k\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{h_r}\right)^{1-\lambda}$$

$$\leq \left(\sum_{k\in I_r}\left[\left(\frac{1}{h_r}v_k\right)^{\lambda}\right]^{1/\lambda}\right)^{\lambda}\left(\sum_{k\in I_r}\left[\left(\frac{1}{h_r}\right)^{1-\lambda}\right]^{1/1-\lambda}\right)^{1-\lambda}$$

$$< \left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} v_k\right)^{\lambda}$$

ve

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} {z_k}^{\lambda_k} \leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} z_k + \left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} v_k\right)^{\lambda}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r} z_k & z_k \geq 1 \\ \dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r} z_k + \left(\dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r} z_k\right)^{\lambda}, & z_k < 1 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r} z_k\,, & z_k \geq 1 \\ 2\left(\dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r} z_k\right)^{\lambda}, & z_k < 1 \end{cases}$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon$$

ise, bu durumda

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\dfrac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon, & z_k \geq 1 \\ \dfrac{1}{h_r}\displaystyle\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\dfrac{x_k}{y_k}-\mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{1/\lambda}, & z_k < 1 \end{cases}$$

olur. Böylece,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{p_k} \geq \varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k\epsilon I_r}\left[f\left(\left|\frac{x_k}{y_k} - \mathcal{L}\right|\right)\right]^{t_k}\right\} \geq min\left\{\varepsilon, \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/\lambda}\right\} \in \mathcal{I}$$

dır. Bu durumda,

$$x \overset{\mathcal{I}(N_\theta^{(f,p)})}{\sim} y$$

elde edilir.

5. KAYNAKLAR

Balcı, M. (1999). Matematik Analiz-I. Balcı Yayınları, Ankara.

Başarır, M. and Altundağ, S. (2011). On asymptotically equivalent difference sequences with respect to a modulus function. *Ricerche di Matematica*, **60:** 299-311.

Bilgin, T. (2011). f-asymptotically lacunary equivalent secuences. *Acta Universitatis Apulensis*, **28:** 271-278.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, **75**: 335-346.

Connor, J.S. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canadion Mathematical Bulletin*, **32**: 194-198.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S. (2011). On generalizations of certain summability methods using ideals. *Applied Mathematics Letters*, **24**:1509-1514.

Dems, K. (2004). On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences. *Real Analysis Exchange*, **30**: 123-128.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**: 241-244.

Freedman, A.R., Sember J.J. and Raphael, M. (1978). Some Cesaro type summability spaces. *Proceedings London Mathematical Society*, **37**: 508-520.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**: 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics,* **160**(1): 43-51.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary summability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **173:** 497-504.

Kolk, E. (1993). On strong boundedness and summability with respect to sequence moduli. *Tartu Ulikooli Toimetised*, **960**: 41-50.

Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W. (2001). $\mathcal{I}$-convergence. *Real Analysis Exchange*, **26:** 669-686.

Kumar, V., Sharma, A. (2012). Asymtotically lacunary equivalent sequences defined by ideals and modulus function. *Mathematical Sciences*, **6:**1-5.

Kumar, V. and Mursaleen, M. (2003). On ideal anologue of asymptotically statistical equivalence of sequences. *Acta Unıversitatis Apulensis*, **36**: 109-119.

Maddox, I.J (1986). Sequence spaces defined by a modulus. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **100:** 161-166.

Marouf, M. (1993). Asymptotic equivalence and summability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Science,* **16**: 755-762.

Başarır, M. and Altundağ, S. (2008). On Δ-lacunary statistical asymptotically equivalent sequences. *Filomat*, **22:** 161-172.

Nakano, H. (1953). Concave modulars. *Journal of the mathematical Society of Japan*, **5:** 29-49.

Öztürk, E. and Bilgin, T. (1994). Strongly summable sequence spaces defined by a modulus. *Indian Jaurnal of Pure and Applied Mathematics*, **25**: 621-625.

Patterson, R.F. (2003). On Asymptotically statisticallly equivalent sequences. *Demonstratio Mathematica*, **36**: 149-153.

Patterson, R.F. and Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, **4:** 267-272.

Pehlivan, S. and Fisher, B. (1994). On some sequence spaces. *İndian Jaurnal of Pureand Applied Mathematics,* **25:** 1027-1071.

Rarh, D. and Tripathy, B.C. (1994). On statistically convergence and statistically Couchy sequences. Indian *Jour. Pure Apple Mathematics*, **25:** 381-386.

Ruckle, W.H. (1973). FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Canadian Jaurnal of Mathematics*, **25:** 973-978.

Savaş, E. and Gümüş, H. (2013). A generalization on $\mathcal{I}$-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Journal of Inequalitiesand Applications*, **2013**(270): 9 pages.

Savaş, E. and Patterson, R.F. (2008). An extension asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, **27:** 109–113.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30**: 139-150.

Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, **66**: 361-375.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Elif KUYUCU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Göksun / 10.09.1994
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: elifkuyucu.123@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Ekinözü Çok Programlı Anadolu Lisesi (2008-2012)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2013-2017)