LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe CANER

Danışman

Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Ayşe CANER

Danışman

Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşe CANER tarafından hazırlanan "Lineer Olmayan Gecikmeli Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık Davranışı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 19/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi,
Fen Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

19/06/2019

Ayşe CANER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Ayşe CANER

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde, lineer olmayan gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı çalışılmıştır.

2019, v+45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Salınımlılık, Lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklem, Lineer olmayan gecikmeli fark denklemi.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

OSCILLATORY BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF
NONLINEAR DELAY EQUATIONS

Ayşe CANER
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Sermin ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are introduced. In the third chapter, the oscillation of solutions of nonlinear delay differential equations is investigated. In the fourth chapter, the oscillation of solutions of nonlinear delay difference equations is studied.

2019, v+45 pages

Keywords: Oscillation, Nonlinear delay differnetial equation, Nonlinear delay difference equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Ayşe CANER

AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
C	Sürekli Fonksiyonların Kümesi
$\sum$	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler teorisi, doğada oluşan ve oluşabilecek gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel unsurlardan biridir. Aynı zamanda, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir.

Bilim, doğada ve etrafımızda oluşan olayları incelerken ve bu olaylar hakkında öngörülerde bulunurken ilginç yaklaşım teorilerinde bulunur. Bazı olayları gözlemleyerek, gelecekte oluşabilecek olayları tahmin eder ve bunun için ele aldığı olgunun veya sistemin matematiksel bir modelini kurmayı amaç edinir. Fakat birçok uygulama alanında , kurulan modelin, incelenen olgunun veya sistemin gelecekteki durumunun geçmişteki durumdan bağımsız olarak hareket edeceği varsayılarak hazırlanır. Uygulamaların çoğunda ele alınan bir sistemin nedensellik ilkesi tarafından yönetildiği kabul edilir veya düşünülür. Yani, sistemin geçmişe bağlı konumuyla değil de, sadece şu anki konumu tarafından idare edildiği düşünülür. Bu durumun sonucu olarak, olaya karşılık gelen denklem, olayın şu anki durumunu ve şu anki durumunun değişim oranı ele alınırsa, bu duruma en güvenli yaklaşım diferensiyel denklemlerdir. Aynı zamanda, sistem konumun değişim oranı ve konumunu içeren bir denklem tarafından ifade ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya adi (bayağı) diferensiyel denklemler ya da kısmi diferensiyel denklemler ile ifade edilir.

Detaylı bir araştırma yapıldığında, nedensellik ilkesinin sadece mevcut konum için doğru bir yaklaşım olduğu ve genelde uygulamaların çoğunda doğru olmadığı düşünülür. Bunun yerine daha gerçekçi bir yaklaşım olan ve sistemin geçmişteki konumunu içeren modellemeler yapılır. Sistemin geçmişteki konumunu görmemezlikten gelmek sistemin modellemesini anlamsız kılabilir.

Yukarıda bahsettiğimiz kuralın yalnızca bir ilk yaklaşım olduğunu ve bu yaklaşımda geçmişe dönük durumların da ele alınması modellemenin daha sağlıklı olmasını sağlar. Özellikle bazı problemlerde geçmişe dönük durumları modellemeye dahil etmemek sistemi anlamsız kılar. Normal şartlarda dışarıdan algılanan bilgiler düşünüldüğünde etkiye karşı tepki gösteren her sistemde çok azda olsa bir gecikme oluşur. Çünkü;

dışarıdan alınan her etkiye karşı oluşturulan bir tepki, zamana bağlı olarak oluşur. Yukarıda anlatılan bu tepki matematiksel modellemede geçmişe bağımlılığın ortaya çıktığı en basit hal, durum değişkeninde geçmişe bağımlılık olup türevinde böyle bir bağımlılığın söz konusu olmamasıdır. İşte bu tür denklemlere gecikmeli diferensiyel denklemler denir. Sonuç olarak, ister geçmişe bağımlılık göz önünde tutulsun ister tutulmasın, bir çok olayın matematiksel modeli kurulmaya çalışılırken bir diferansiyel denklemin oluşturulması kaçınılmazdır. Dolayısıyla gecikmeli denklemlerin incelenmesi birçok bilim dalı için büyük önem arz etmektedir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler, fark denklemleri ve nötr gecikmeli diferensiyel denklemler ilk olarak 18. yüzyılda Volterra, Bernoulli, Laplace ve Condorcet gibi bilim insanları tarafından ele alınmıştır.

Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi ile yapılan ilk çalışmalar literatüre 1770 yılından sonra girmiş olsa da, gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan sistematik ve kayda değer çalışmalar son 70 yılda ortaya konmuştur. Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi, teknoloji, fizik, ekonomi, biyoloji, ve fizyoloji (işlev bilim) gibi bilim birçok bilim dalında çok fazla kullanım alanına sahiptir. Fakat; literatür ele alındığında ve araştırıldığında bu kullanım alanlarının çok daha geniş yeni bilim alanına yayıldığını görmek mümkündür.

Gecikmeli diferensiyel denklemler tıp biliminde de kullanılmakta ve bu bilim için oldukça büyük bir önem taşımaktadır. Kanser hastalığı maalesef tüm dünyada çok yaygın olarak görülen hastalıkların başında gelmektedir. Yalnızca Amerika'da her yıl bir milyonun üzerinde insan kansere yakalanmakta ve bunların 500.000'in üzerindeki kısmı kanser hastalığı dolayısıyla yaşamını yitirmektedir. Dolayısıyla, tüm dünyada bilim adamlarının kanser hücreleri ile ilgili matematiksel modelleme yapmaları çok doğal bir durumdur. Villasana ve Radunskaya (2003) çalışmalarında, kanser hücrelerinin çoğalması ve bağışıklık sisteminin hücreleri ile bazı özel ilaçların kanser hücrelerinin artması üzerindeki etkilerini araştıran matematiksel bir modelleme ortaya koymaktadır. Yukarıdaki çalışmada, matematiksel modelleme yapılırken gecikmeli diferensiyel denklem kullanılmıştır ve bu durum bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran en büyük özellik olmuştur. Bu nedenle; gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi son yıllarda yapılan çalışmalar nedeniyle gelişmesi yönünde pozitif bir ivme kazanmıştır.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\tau(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$y'(t) = f(t, y(t), y(\tau(t)))$$

şeklindedir. Görüldüğü üzere $y'(t)$ ‘nin değişim oranı sadece $y(t)$ değerine değil, aynı zamanda $y(\tau(t))$ değerine de bağlıdır.

$$y'(t) + y(t-2) - y\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x\left(t - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$z''(t) - 3z'(t - |sint|) - z\left(\frac{t}{3}\right) = 0$$

denklemleri gecikmeli denklemlere örnek olarak verilebilir.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem argümanındaki sapmanın durumuna göre ileri, karışık tipli (mixed type), gecikmeli (delay) diferansiyel denklemler olarak adlandırılabilir. Örneğin,

$$x'(t) = x(t+2) - t + 1$$

diferensiyel denklemi bir ileri diferensiyel denklem,

$$y'(t) = 3y(t-1) - 2y(t+1)$$

diferensiyel denklemi ise, bir karışık tipli diferensiyel denklemdir.

Salınımlılık teorisi diferensiyel denklemleri içine alan modern teorinin önemli ve iyi bilinen bir dalıdır ve teknoloji , doğal ve sosyal bilimlerde uygulanan problemlerde ortaya çıkan salınımlılık olayları ile ilgili çalışmalardır. Klasik salınımlılık teorisine, teorik bir bakış açısı ile yaklaştığımızda verilen denklemlerde veya sistemlerde salınımlı çözümlerin var olup olmaması ve bu tip çözümlerin asimptotik tanımlarının var olduğunu düşünebiliriz. Salınımlı çözümler, dinamik sistemlerin birçoğunun temel özelliğidir. Dahası, salınmlı nonlineer denklemlerin ortaya çıkmasına da neden olmuştur. Bu sistemlerde gecikme terimi geri, ileri veya rastgele olabilir. Bu faktörler orijinal sistemde ortaya çıkan salınmlılık yapısına zarar verebilmektedir.

Geçmişten günümüze sistematik olarak araştırmacıların konuya olan ilgisi giderek artmakta ve hali hazırda bu konu hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bu konuda, yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Bu tip denklemlerin yaygın kullanım alanları kontrol teorisi, matematiksel biyoloji, matematiksel ekonomi, sistemler teorisi ve klasik analizdir .

$$z'(t) + q(t)z\big(\tau(t)\big) = 0 \quad , \quad t \geq T \tag{1.1}$$

lineer diferensiyel denklemini ele alalım. Burada, $q(t) > 0$, $t \leq T$ için, $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ şartları altında Myhkis (1950), (1.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için

$$\limsup_{t\to\infty}[t - \tau(t)] < \infty$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty}[t - \tau(t)]\liminf_{t\to\infty} q(t) > (1/e)$$

şeklinde gerek ve yeter koşul tanımlamıştır. Bu çalışma, (1.1) şeklindeki gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için yapılan ilk sistematik çalışma olarak kabul edilmektedir.

Bunun dışında, Koplatazde ve Chanturija (1982), (1.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun, $\tau(t)$ monoton olmayan yada azalmayan olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t} q(s)ds \le 1/e$$

şartının sağlanması olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan, eğer

$$\int_{\tau(t)}^{t} q(s)ds \le 1/e$$

ise (1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözüme sahip olduğunu göstermişlerdir.

Daha sonra Gyori ve Ladas (1991),

$$z'(t) + qz(t-\tau) = 0 \tag{1.2}$$

denklemi için $q, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) (1.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(ii) $q\tau > 1/e$

ifadelerinin birbirine denk olduğunu göstermişlerdir.

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin, doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların çoğu ayrık (kesitli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluştururlar. Daha da önemlisi fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzerleridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, buna karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır.

Erbe ve Zhang (1989), $p_n$negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0 \; ; \; n = 0,1,2,\ldots \tag{1.3}$$

lineer, otonom olmayan, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için

$$\liminf_{n\to\infty} p_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olması gerektiğini ispatlamışlardır.

Yine; Ladas, vd. (1989), yukarıda verilen otonom olmayan fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir.

Ladas (1990), çalışmasında $p \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \, , n = 0,1,2,\ldots \tag{1.4}$$

lineer, otonom fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şartın

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\ldots, -3, -2\} \cup \{1,2,\ldots\}$ ise $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

ifadelerinin denk olması gerektiğini göstermiştir.

Diferensiyel denklemler ile bunların ayrık benzerleri olan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılıkları arasında ilgi çekici benzerlikler vardır. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) + p(t)x(t - k) = 0 \tag{1.5}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. (1.4) fark denklemi (1.5) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.5) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Fakat (1.3) fark denklemi $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} \left(1 - p_j\right)\right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm $\forall j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı çözüme sahiptir. Daha sonraki yıllarda, Yu vd. (1994), Tang ve Zhang (2001), (1.3) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriterler elde etmişlerdir. Bunun dışında, Yu vd. (1993), Yu ve Tang (2000), (1.3) fark denkleminde p_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir.

Yukarıda verilen bilgilerin ışığında, bu yüksek lisans tez çalışmasında birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ve birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR ve LİTERATÜR BİLGİSİ

2.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Birinci mertebeden bir lineer gecikmeli diferensiyel denklem $1 \leq i \leq m, \tau_i(t) \leq t$ ve $q_i(t) \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}]$ olmak üzere

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{m} q_i(t) z(\tau_i(t)) = 0 \tag{2.1}$$

denklemi ile tanımlanır.

$m = 1$ için (2.1) denklemi

$$z'(t) + q(t) z\big(\tau(t)\big) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir.

Birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklem ise $1 \leq i \leq m$, $\tau_i(t) \leq t$ ve $q_i(t) \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}]$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{m} q_i(t) f_i(z(\tau_i(t))) = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlıdır.

$m = 1$ için (2.3) denklemi

$$z'(t) + q(t) f\left(z\big(\tau(t)\big)\right) = 0 \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.1 $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, $\tau_i(t) = t - \tau_i$ ve $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$ olmak üzere $t \geq t_1$ için z, $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve z, (2.1) denklemini sağlıyorsa $z \in$

$C[[t_1-\tau,\infty),\mathbb{R}]$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin bir çözümüdür denir ve bu çözüm $[t_1,\infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır (Ladde *et al*. 1987).

t_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\varphi \in C[[t_1-\tau,t_1),\mathbb{R}]$ şeklinde bir başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece, (2.1) denklemi $t_1-\tau \leq t \leq t_1$ için

$$z(t)=\varphi(t) \qquad (2.5)$$

şeklinde $[t_1,\infty)$ aralığında bir tek z çözümüne sahiptir.

Tanım 2.1.2 Bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü z olsun. Eğer z, çözümü sonsuz sayıda sıfıra sahipse, yani; $\lim_{n\to\infty} t_n=\infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $z(\{t_n\})=0$ ise z çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ya ergeç pozitif ya da ergeç negatiftir. Yani, $\forall t>t_1$ için $z(t)\neq 0$ olacak biçimde en az bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde *et al.* 1987).

Tanım 2.1.3 Aşikar olmayan bir z çözümü T herhangi bir sayı olmak üzere (T,∞) aralığında işaret değiştiriyorsa z çözümüne salınımlıdır denir (Ladde *et al.* 1987).

$$z''(t)+z(t)=0$$

diferensiyel denklemi için $z_1(t)=sin\ t$ salınımlı bir çözüm iken,

$$z''(t)-z(t)=0$$

denklemi için $z_2(t)=e^t+e^{-t}$ çözümü ise salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Bazı salınımlılık durumları ise gecikme terimleri ile oluşur. Örneğin;

$$z'(t)+z(t)=0$$

ve

$$z''(t) - z(t) = 0$$

diferensiyel denklemlerinin çözümleri salınımlı olmamasına karşın,

$$z'(t) + z\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ve

$$z'(t) + z(t - \pi) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri sırasıyla $z = sin\, t$ ve $z = cos\, t$ fonksiyonları olduğundan bu çözümler salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Eğer bir z çözümü salınımlı değilse, z ya ergeç pozitif ya da ergeç negatif olmak zorundadır. Yani, $t \geq T$ için $z(t)$ pozitif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır ya da $t \geq T$ için $z(t)$ negatif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır.

Eğer bir gecikmeli diferensiyel denklemin salınımlı olmayan pozitif bir $z(t)$ çözümü var ise, buna karşılık gelen negatif bir $-z(t)$ çözümü de mevcuttur. Bu nedenle bir gecikmeli diferensiyel denklem salınımlı olmayan bir çözüme sahipse bu çözüm ya pozitif bir çözüm ya da negatif bir çözümdür. Ayrıca, (2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise bu, her $t_1 \geq t_0$ başlangıç noktası ve her $\varphi \in C[[t_1 - \sigma, t_1), \mathbb{R}]$ başlangıç fonksiyonu için, (2.1) ve (2.5) başlangıç değer probleminin tek çözümü olan z çözümü salınımlıdır anlamına gelmektedir. Yani; z sonsuz çoklukta sıfıra sahiptir. Diğer taraftan (2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözüme sahip olduğunu ispatlamak istediğimizde ise, (2.1) denkleminin pozitif ya da negatif bir z çözümüne sahip olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

Gyori ve Ladas (1991), bazı gecikmeli diferensiyel denklemler için aşağıdaki salınımlılık koşullarını elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.1 $q, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$z'(t) + qz(t - \tau) = 0 \tag{2.6}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) (2.6) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) $q\tau > 1/e$ ‘dir.

(Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.2 $i = 1,2,\dots,m$ için $q_i, \tau_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{m} q_i(t) z(t - \tau_i) = 0$$

denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

olmasıdır (Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.3 $q \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+], \tau > 0$ olmak üzere

$$z'(t) + qz(t - \tau) = 0, \quad t \geq t_0 \tag{2.7}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer

$$\int_{t-\tau}^{t} q(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Eğer $q \in C[[t_0 - \sigma, \infty), \mathbb{R}^+], \tau > 0$ olmak üzere

$$\int_{t-\tau}^{t} q(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.7) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahip olur (Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.4 $t \geq t_0$ için $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t)$ azalmayan olmak üzere

$$z'(t) + q(t)z\big(\tau(t)\big) = 0 \tag{2.8}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} q(s)ds > 1$$

ise (2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas *et al*. 1972).

Teorem 2.1.5 $t \geq t_0$ için $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ olsun. Bu durumda, $\tau(t)$ monoton olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} q(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer yandan

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} q(s)ds < \frac{1}{e}$$

ise (2.8) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Koplatadze and Chanturija 1982).

2.2 Fark Denklemleri ve Gecikmeli Fark Denklemleri

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tek değişkenli x_n fonksiyonu için öteleme (shift) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

ile tanımlanır (Mickens 1990).

Buradan

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca; I özdeşlik (birim) operatörü olmak üzere $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_{n+k-i}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olarak elde edilir (Mickens 1990).

Tanım 2.2.1 $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun. $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ terimleri arasında verilen bir fonksiyonel bağıntıya k. mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Bir fark denklemi $k, \sigma \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere,

$$F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, x_{n-1}, \ldots, x_{n-\sigma}) = q_n \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.2 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki farktır (Agarwal 2000).

Teorem 2.2.1 Δ ve E operatörleri lineerdir. Yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

(i) $\Delta[ax_n + by_n] = a\Delta x_n + b\Delta y_n$

(ii) $E[ax_n + by_n] = aEx_n + bEy_n$

eşitlikleri sağlanır (Elaydi 1999).

Lemma 2.2.1 İleri fark operatörü için

(i) $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}$

(ii) $\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x_k\right) = x_n$

özellikleri sağlanır (Elaydi 1999).

Lemma 2.2.2 İleri fark operatörü için çarpım ve bölüm kuralı sırasıyla,

(i) $\Delta[x_n . y_n] = Ex_n . \Delta y_n + y_n . \Delta x_n$

(ii) $\Delta[\frac{x_n}{y_n}] = \frac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n E y_n}$

şeklinde tanımlıdır (Mickens 1990).

Tanım 2.2.3. $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x^{(k)} = x(x-1) \dots (x-k+1)$$

polinomuna "faktöriyel polinomu" denir (Elaydi 1999).

Lemma 2.2.3 $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ bir sabit olmak üzere

(i) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$

(ii) $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1) \dots (k-n+1)x^{(k-n)}$

(iii) $\Delta^k x^{(k)} = x^{(k)} = k!$

eşitlikleri sağlanır (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.4 Eğer bir fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.10}$$

formunda verilirse bu fark denklemine k. mertebeden lineerdir denir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.10) fark denklemine homogen olmayan, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.2.5 Eğer fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.11}$$

şeklinde verilirse (2.11) fark denklemine homogen, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

p_i ler sabitler ve $p_k \neq 0$ olmak üzere k. mertebeden

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \cdots + p_k x_n = 0 \tag{2.12}$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklemde λ^n çözüm kabul edilip denklemde yerine yazılırsa

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0 \tag{2.13}$$

denklemi bulunur. Buna (2.12) fark denkleminin karakteristik denklemi ve λ'lara ise (2.13) denkleminin karakteristik kökleri denir. (2.12) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak çözümler bulunur (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.6 Eğer her pozitif $\mathbb{N}$ tamsayısı ve $n \geq \mathbb{N}$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Elaydi 1999).

Teorem 2.2.2 $p \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \tag{2.14}$$

$(k + 1)$. mertebeden, otonom fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda (2.14) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\dots, -3, -2\} \cup \{1, 2, \dots\}$ ise $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

(Ladas 1990, Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.2.3 Kabul edelim ki; $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$p_i \in (0, \infty) \text{ ve } k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

veya

$$p_i \in (-\infty, 0) \text{ ve } k_i \in \{\dots, -2, -1\}$$

şartları sağlansın. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i + 1}}{{k_i}^{k_i}} > 1$$

sağlanıyorsa,

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i} = 0$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas 1990, Gyori and Ladas 1991).

3. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli

$$y'(t) + p(t)f\left(y\big(\sigma(t)\big)\right) = 0 \tag{3.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yapılan çalışmalar incelenecektir. Burada, $p(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq 0$ ve

$$t \geq t_0 \text{ için } \sigma(t) \leq t \text{ ve } \lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \infty \tag{3.2}$$

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } y \neq 0 \text{ için } yf(y) > 0 \tag{3.3}$$

dır. Bu bölümde, Fukagai ve Kusano (1984) ve Öcalan vd. (2017) temel kaynak olarak alınmıştır.

Ladde vd. (1987) çalışmasında, (3.1) denkleminin çözümlerinin salınımılığı için aşağıdaki salınımlılık kriterlerini vermişlerdir.

Teorem 3.1 (3.1) denklemi için

(i) $t \in \mathbb{R}_+$ için $\sigma(t) < t, \sigma \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ olsun. Ayrıca $\sigma(t), \mathbb{R}_+$ üzerinde kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \infty$,

(ii) $p(t)$ fonksiyonu bölgesel olarak integrallenebilir ve $p(t) \geq 0$,

(iii) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y \neq 0$ için $yf(y) > 0$, f artan bir fonksiyon ve

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{f(y)}\right) = N < \infty$$

şartları sağlansın. Bu durumda

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > N$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 3.1 Teorem 3.1, f fonksiyonunun hem lineer hem de yarı lineer olma durumunu içerir. $N = 0$ olursa f fonksiyonu yarı lineer bir fonksiyon olur.

Tanım 3.1 Eğer

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{f(y)}\right) = \infty$$

ise f fonksiyonu genelleştirilmiş süperlineer fonksiyon olarak adlandırılır (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 3.2 (i), (ii) ve (iii) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e}$$

oluyorsa (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Örnek 3.1

$$y'(t) - \frac{2}{(eln\lambda)t}y(\lambda t) = 0, \qquad 0 < \lambda < 1$$

gecikmeli diferensiyel denklemi gözönüne alalım. Buradan

$$\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \int_{\lambda t}^{t} -\frac{2}{(eln\lambda)s}ds = \frac{2}{e} > \frac{N}{e}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2 gereğince verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Ladde *et al.* 1987).

Ladde vd. (1987), birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yukarıda verilen salınımlılık kriterlerini aşağıda belirtilen sonuca genişletmişlerdir.

Teorem 3.3 $1 \leq i \leq m$ olmak üzere,

(i) $t \in \mathbb{R}_+$ için $\sigma_i \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ olmak üzere $\sigma_i(t) < t$, σ_i(t) fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin olarak artan ve $\lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty$,

(ii) $p_i(t)$ fonksiyonu bölgesel olarak integrallenebilir ve $p_i(t) \geq 0$,

(iii) $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y \neq 0$ için $y f_i(y) > 0, f_i$ fonksiyonları artan fonksiyonlar ve

$$\lim_{y\to 0} \left(\frac{y}{f(y)}\right) = \infty$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > \frac{N^*}{e}$$

veya

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > N^*$$

oluyorsa

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, f_i\left(y\left(\sigma_i(t)\right)\right) = 0 \tag{3.4}$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada, $\sigma^*(t) = max\{\sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)\}$ ve $N^* = max\{N_1, \ldots, N_m\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 3.4 $t \geq t_0$ için $\sigma(t)$ azalmayan bir fonksiyon, $\sigma(t) \leq t$, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$, ve $y \neq 0$ için $y f(y) > 0$, f sürekli bir fonksiyon ve

$$\delta = \limsup_{y\to 0} \frac{|y|}{|f(y)|} < \infty \tag{3.5}$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{\delta}{e} \tag{3.6}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki; $y(t)$, (3.1) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. (3.6) şartı

$$\int_{\alpha}^{\infty} [p(t)]dt = \infty$$

olmasını gerektirir. $\int_{\alpha}^{\infty}[p(t)]dt < \infty$ şartı (3.1) denkleminin bir sınırlı salınımsız çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart olduğundan $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ dur. Kabul edelimki; $\delta > 0$ olsun. Bu durumda, (3.5) eşitsizliğinden $t \geq T$ için

$$f\big(y(t)\big) \geq \frac{1}{2\delta} y(t) \tag{3.7}$$

olacak şekilde oldukça büyük $T > \alpha$ seçilebilir. Yeterince büyük her t için
$\sigma(t^*) < t < t^*$ olacak şekilde bir t^* vardır öyleki

$$\int_{\sigma(t^*)}^{t}[p(s)]ds \geq \frac{\delta}{2e} \qquad \text{ve} \qquad \int_{t}^{t^*}[p(s)]ds \geq \frac{\delta}{2e} \tag{3.8}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $t^* \geq T$ olacak şekilde yeterince büyük bir t varolsun. (3.1) denklemi $[\sigma(t^*), t]$ ve $[t, t^*]$ üzerinde integre edilip, (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$y(t) - y\big(\sigma(t^*)\big) = -\int_{\sigma(t^*)}^{t} [p(s)]\, f\Big(y\big(\sigma(s)\big)\Big)\, ds$$

$$\begin{aligned} y\big(\sigma(t^*)\big) - y(t) &= \int_{\sigma(t^*)}^{t} [p(s)]\, f\Big(y\big(\sigma(s)\big)\Big)\, ds \\ &\geq \frac{1}{2\delta}\int_{\sigma(t^*)}^{t} [p(s)]\, y\big(\sigma(s)\big)ds \\ &\geq \frac{1}{4e} y\big(\sigma(t)\big) \end{aligned}$$

ve

$$y(t^*) - y(t) = -\int_t^{t^*} [p(s)]\, f\left(y\big(\sigma(s)\big)\right) ds$$

$$y(t) - y(t^*) = \int_t^{t^*} [p(s)]\, f\left(y\big(\sigma(s)\big)\right) ds$$

$$\geq \frac{1}{2\delta}\int_t^{t^*} [p(s)]\, y\big(\sigma(s)\big) ds$$

$$\geq \frac{1}{4e} y(\sigma(t^*))$$

olur. Yukarıda elde edilen bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde yeterince büyük $T_1 \geq T$ için,

$$y(t) \geq \frac{1}{4e} y(\sigma(t^*)) \geq \frac{1}{(4e)^2} y\big(\sigma(t)\big)$$

veya

$$y(t) \geq \frac{1}{(4e)^2} y\big(\sigma(t)\big), \quad t \geq T_1$$

elde edilir.

$$\theta = \liminf_{t\to\infty} \frac{y\big(\sigma(t)\big)}{y(t)} \tag{3.9}$$

olsun. Bu durumda $1 \leq \theta \leq (4e)^2$ olduğundan θ sonludur.

Şimdi, (3.1) denklemi $y(t)$' ye bölünüp $[\sigma(t), t]$ üzerinde integre edilirse,

$$log \frac{y(t)}{y\big(\sigma(t)\big)} + \int_{\sigma(t)}^{t} [p(s)] \frac{f\left(y\big(\sigma(s)\big)\right)}{y(s)} ds = 0$$

$$log \frac{y(t)}{y\big(\sigma(t)\big)} + \int_{\sigma(t)}^{t} [p(s)] \frac{f\left(y\big(\sigma(s)\big)\right)}{y(\sigma(s))} \frac{y(\sigma(s))}{y(s)} ds = 0$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafının alt limiti alınıp (3.9), (3.6) ve (3.5) ifadeleri kullanılırsa,

$$\log\theta = \frac{\theta}{e} \tag{3.10}$$

elde edilir. Ancak, her $x > 0$ için $\log x \leq \frac{x}{e}$ olduğundan (3.10) eşitliğinin sağlanması mümkün değildir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, (3.1) denklemi bir ergeç pozitif çözüme sahip değildir. Yani, (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 3.5 (3.4) denkleminin bir özel formu olan

$$y'(t) + p(t)f(y(\sigma_1(t)),\ldots,u(\sigma_m(t))) = 0 \tag{3.11}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $1 \leq i \leq m$ ve $t \geq a$ için $p(t)$ ve $\sigma_i(t)$ fonksiyonları $[a,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar, $p(t) \geq 0$, $\sigma_i(t)$ $\leq$t ve $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \infty$, olsun. Ayrıca $\mathbb{R}^m$ üzerinde $1 \leq i \leq m$ ve $y_1 y_i > 0$ için $y_1 f(y_1,\ldots,y_m) > 0$, sürekli $f(y_1,\ldots,y_m)$ fonksiyonu ve negatif olmayan α_i sabitleri için $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ olmak üzere,

$$N = \limsup_{\substack{y_i\to 0\\ 1\leq i\leq m}} \frac{|y_1|^{\alpha_1}\ldots|y_m|^{\alpha_m}}{|f(y_1,\ldots,y_m)|} < \infty$$

olsun. Diğer yandan $1 \leq i \leq$m ve $t \geq a$ için $\sigma_i(t) \leq \sigma^*(t) \leq t$ olacak şekilde azalmayan $\sigma^*(t)$ fonksiyonu var ve

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma^*(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e}$$

ise (3.11) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Öcalan vd. (2017) çalışmalarında, $\sigma(t)$ için yukarıda verilen (3.2) şartı sağlanmak üzere $\sigma(t)$' nin non-monoton veya azalmayan olması durumunda, (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki yeter şartı vermişlerdir.

$$k(t) \coloneqq \sup_{s\leq t}\sigma(t), \;\; t \geq 0 \tag{3.12}$$

olsun. Burada, tüm $t \geq 0$ için $\sigma(t) \leq k(t)$ ve $k(t)$' nin azalmayan bir fonksiyon olduğu açıktır. Bunun dışında kabul edelim ki; (3.1) denklemindeki f fonksiyonu için

$$\limsup_{y\to 0} \frac{y}{f(y)} = N, \quad 0 \le N < \infty \tag{3.13}$$

şartı sağlansın.

Teorem 3.6 (3.2), (3.3) ve (3.13) sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e} \tag{3.14}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: Çelişki için (3.1) denkleminin salınımlı olmayan pozitif bir $y(t)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $t \ge t_1$ için $y(t)$, $y(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \ge t_0$ mevcuttur. Ayrıca (3.1) denkleminden,

$$y'(t) = -p(t)f\left(y(\sigma(t))\right) \le 0, \quad t \ge t_1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $y(t)$ azalan bir fonksiyondur. $y(t)$ azalan olduğundan negatif olmayan sonlu bir limiti vardır. Yani; $\lim_{t\to\infty} y(t) = m \ge 0$ mevcuttur. (3.14) şartından

$$\int_{\alpha}^{\infty} p(t)dt = \infty \tag{3.15}$$

olur. Böylece (3.15) ifadesinin varlığı göz önünde bulundurulduğunda, (3.1.1) denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsadığından Ladde *et al.* (1987)' daki Teorem 3.1.5' den, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ elde edilir. $N > 0$ olsun. Diğer yandan, (3.13) ifadesi yardımıyla

$$f(y(t)) \ge \tfrac{1}{2N} y(t), \quad t \ge t_2 \tag{3.16}$$

olacak şekilde $t_2 > t_1$ seçilebilir. Diğer taraftan, Erbe vd. (1995)' deki Lemma 2.1.1' den

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \liminf_{t\to\infty} \int_{k(t)}^{t} p(s)ds \tag{3.17}$$

dir. Böylece (3.1) denklemi, $\sigma(t) \leq \delta(t)$ eşitsizliği, $y(t)$'nin azalan bir fonksiyon olması ve (3.16) eşitsizliği yardımıyla

$$y'(t) + \tfrac{1}{2N} p(t) y\big(k(t)\big) \leq 0, \quad t \geq t_3 \tag{3.18}$$

şeklini alır. Ayrıca (3.14) ve (3.17)' den

$$\int_{k(t)}^{t} p(s)ds \geq l > \frac{N}{e}, \qquad t \geq t^3 \geq t_2 \tag{3.19}$$

olacak şekilde $l > 0$ sabiti vardır. Böylece (3.19)' dan,

$$\int_{k(t)}^{t^*} p(s)ds > \frac{N}{2e} \quad \text{ve} \quad \int_{t^*}^{t} p(s)ds > \frac{N}{2e} \tag{3.20}$$

olacak şekilde $t^* \in (k(t), t)$ bulunabilir. (3.18) eşitsizliği, $y(t)$ fonksiyonunun azalan olması kullanılarak $k(t)$ den t^* ‘a integre edilirse,

$$y(t^*) - y\big(k(t)\big) + \frac{1}{2N}\int_{k(t)}^{t^*} p(s) y\big(k(s)\big) ds \leq 0$$

veya

$$y(t^*) - y\big(k(t)\big) + \frac{1}{2N} y\big(k(t^*)\big)\int_{k(t)}^{t^*} p(s) ds \leq 0$$

elde edilir. Böylece (3.20)' den,

$$-y\big(k(t)\big) + \frac{1}{2N} y\big(k(t^*)\big)\frac{N}{2e} < 0 \tag{3.21}$$

bulunur. (3.18) eşitsizliği, t^* ‘dan t’ ye integre edilirse,

$$y(t) - y(t^*) + \frac{1}{2N}\int_{t^*}^{t} p(s) y\big(k(s)\big) ds \leq 0$$

veya

$$y(t) - y(t^*) + \frac{1}{2N} y\big(k(t)\big)\int_{t^*}^{t} p(s) ds \leq 0$$

bulunur. (3.20) ifadesi yardımıyla,

$$-y(t^*) + \frac{1}{2N} y\big(k(t)\big)\frac{N}{2e} < 0 \tag{3.22}$$

olur. Böylece, (3.21) ve (3.22) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$y(t^*) > y\big(k(t)\big)\frac{1}{4e} > y\big(k(t^*)\big)\left(\frac{1}{4e}\right)^2$$

elde edilir ve

$$\frac{y\big(k(t^*)\big)}{y(t^*)} < (4e)^2 \quad , \quad t \geq t_4$$

olur. Ayrıca

$$u = \frac{y\big(k(t^*)\big)}{y(t^*)} > 1 \tag{3.23}$$

olarak tanımlanırsa $1 \leq u < (4e)^2$ olduğundan, u sınırlıdır. Diğer taraftan (3.1) denklemi $y(t)$ ile bölünüp $k(t)$ den t ye integre edilirse,

$$\int_{k(t)}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)} ds + \int_{k(t)}^{t} p(s) \frac{f\Big(y\big(\sigma(s)\big)\Big)}{y(s)} ds = 0$$

$$\ln \frac{y(t)}{y(\sigma(t))} + \int_{k(t)}^{t} p(s) \frac{f\Big(y\big(\sigma(s)\big)\Big)}{y(\sigma(s))} \frac{y(\sigma(s))}{y(s)} ds = 0$$

ifadeleri elde edilir. $y(t)$ azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\ln \frac{y(t)}{y(k(t))} + \int_{k(t)}^{t} p(s) \frac{f\Big(y\big(\sigma(s)\big)\Big)}{y(\sigma(s))} \frac{y(k(s))}{y(s)} ds \leq 0$$

olur. Ayrıca $\gamma, t \to \infty, \gamma \to \infty$ iken $k(t) < \gamma < t$ olacak şekilde tanımlanırsa, $k(t) \to \infty$ olur. O halde son eşitsizlik,

$$\ln \frac{y(k(t))}{y(t)} \geq \frac{f\Big(y\big(\sigma(\gamma)\big)\Big)}{y\big(\sigma(\gamma)\big)} \frac{y(k(\gamma))}{y(\gamma)} \int_{k(t)}^{t} p(s) ds \tag{3.24}$$

olur. Buradan, (3.24) ifadesinin her iki tarafının alt limiti alınırsa $\ln u > (u/e)$ bulunur. Fakat, her $x > 0$ için $\ln x \leq (x/e)$ olduğundan bu imkansızdır. Bu bir çelişkidir. $N = 0$ olması durumu da aynı şekilde gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2

$$y'(t)+\tfrac{1}{e}y\big(\sigma(t)\big)\ln\big(10+\big|y\big(\sigma(t)\big)\big|\big)=0\,,\quad t>0 \tag{3.25}$$

birinci mertebe lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Burada, $\sigma(t)$ fonksiyonu,

$$\sigma(t)=\begin{cases} t-1, & t\in[3k,3k+1] \\ -3t+12k+3, & t\in[3k+1,3k+2] \\ 5t-12k-13, & t\in[3k+2,3k+3]\end{cases}\quad,\quad k\in\mathbb{N}_0$$

şeklindedir. (3.12)’ den

$$k(t)\coloneqq\sup_{s\leq t}\sigma(t)=\begin{cases} t-1, & t\in[3k,3k+1] \\ -3t+12k+3, & t\in[3k+1,3k+2] \\ 5t-12k-13, & t\in[3k+2,3k+3]\end{cases}\quad,\quad k\in\mathbb{N}_0$$

elde edilir. $p(t)=(1/e)$ ve $f(y)=y\ln(10+|y|)$ olarak alınırsa

$$N=\limsup_{y\to 0}\frac{y}{f(y)}=\limsup_{y\to 0}\frac{y}{y\ln(10+|y|)}=\frac{1}{\ln 10}$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t}p(s)ds=\frac{1}{e}>\frac{N}{e}=\frac{1}{e\ln 10}$$

elde edilir. Yani, Teorem 3.6’ nın tüm şartları sağlanır. Böylece (3.25) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

4. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$y_{n+1} - y_n + q_n f(y_{n-k}) = 0, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{4.1}$$

şeklinde lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı incelenecektir ve temel kaynak olarak Tang ve Yu (2002) alınmıştır. Burada, $\{q_n\}$ negatif olmayan bir sayı dizisi, k bir pozitif tamsayı ve

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad y \neq 0 \text{ için } yf(y) > 0 \tag{4.2}$$

dir. (4.1) denkleminin lineerleştirilmiş şekli ise;

$$y_{n+1} - y_n + q_n y_{n-k} = 0, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{4.3}$$

ile tanımlıdır. (4.1) denkleminin $\{\boldsymbol{y_n}\}$ dizisinin terimleri ne tamamen negatif ne de tamamen pozitif olmuyorsa $\{\boldsymbol{y_n}\}$ çözümüne salınımlıdır, aksi halde çözüm salınımsızdır denir.

Erbe ve Zhang (1989), çalışmalarında

$$\liminf_{t\to\infty} q_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

şartı sağlanıyorsa (4.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu ispatlamışlardır.

Daha sonra, Ladas vd. (1989), yukarıda verilen şartı geliştirerek

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q_i > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

şartı altında (4.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağını belirtmişlerdir.

Tang (1998), çalışmasında farklı teknikler kullanarak (4.3) denkleminin salınımlılığı için yeterince büyük n için,

$$\sum_{i=n-k}^{n-1} q_i \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \tag{4.4}$$

ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} q_n \left\{ \left[1 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=n-k}^{n-1} q_i - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \right) \right]^{-k} - 1 \right\} = \infty \tag{4.5}$$

şartlarını elde etmiştir.

Bunun yanı sıra Tang ve Yu (1999a) ve Tang ve Yu (1999b), (4.3) denkleminin salınımlılığı için verilen yukarıdaki şartı geliştirerek sırasıyla;

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \left[\frac{k+1}{k} \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right)^{\frac{1}{k+1}} - 1 \right] = \infty$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \left[\sum_{i=n}^{n+k} q_i \, ln \left(\sum_{i=n}^{n+k} q_i + 1 - sgn \sum_{i=n}^{n+k} q_i \right) - \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \, ln \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i + 1 - sgn \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right) \right] = \infty \tag{4.6}$$

şartları altında (4.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu ispatlamışlardır.

Tang ve Yu (2000c), (4.6) salınımlılık şartına karşıt bir aşağıdaki örneği vererek, (4.1) lineer olmayan fark denklemi ile (4.3) lineerleştirilmiş fark denkleminin

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \tag{4.7}$$

şartı sağlansa bile farklı salınımlılık davranışı gösterdiklerini ispatlamışlardır.

Örnek 4.1 Lineer olmayan gecikmeli

$$y_{n+1} - y_n + \left(\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} + \frac{1}{n+1} \right) f(y_{n-k}) = 0 \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots$$

fark denklemini gözönüne alalım. Burada,

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1 + \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}}, & |y| \geq 1 \\ \dfrac{y}{1 + ((k+1)^{k+1}/k^k) ln(k/(k+1))/ln|k/(k+1)^{k+1} y|}, & 0 < |y| < 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

dır. Buradan kolayca görülebilir ki; (4.2) ve (4.7) sağlanır ve denklem $y_n = \left[\frac{k}{k+1} \right]^n$ şeklinde bir pozitif çözüme sahiptir. Ancak (4.4) ve (4.5) den bu denklemin lineerleştirilmiş denklemi olan

$$y_{n+1} - y_n + \left(\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} + \frac{1}{n+1} \right) y_{n-k} = 0 \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır (Tang and Yu 2000c).

Yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi (4.3) lineerleştirilmiş denklemin çözümlerinin salınımlılık davranışından, (4.1) lineer olmayan denklemin çözümlerinin salınımlılık davranışına ulaşılamaz. Bu nedenle, lineer olamayan (4.1) denklemi için salınımlılık kriterleri elde etmek oldukça önemli bir problemdir.

İlk olarak, kabul edelim ki; (4.1) denklemindeki $f(x)$ lineer olmayan fonksiyonu için, (A):

i. $h(x)$, $\mathbb{R}^+$ üzerinde azalmayandır,

ii. $h(-x) = h(x)$ ve $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$,

iii. $\int_0^1 \frac{h(x)}{x} dx < \infty$,

iv. $\left|\frac{f(x)}{x-1}\right| \leq h(x), 0 < |x| < \varepsilon_0$

olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ ve bir $h(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu vardır.

Bunun dışında, $S_n = \{q_i > 0: n-k \leq i \leq n-1\}$ ve S_n kümesindeki elemanların sayısı da k_n ile gösterilsin. Buradan açıktır ki; $0 \leq k_n \leq k$ dır.

Lemma 4.1 (4.2) şartı ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty \tag{4.8}$$

şartının sağlandığını kabul edelim. O halde, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan her çözümü $n \to \infty$ için monoton olarak sıfıra yakınsar.

Lemma 4.2 (4.2), (4.8) ve (A) kabulü sağlansın. Eğer (4.1) denklemi bir salınımlı olmayan çözüme sahip ise o halde, ergeç

$$\sum_{i=n}^{n+k} q_i \leq \frac{3}{2}$$

dir.

Lemma 4.3 (4.2), (4.8) ve (A) kabulü sağlansın. Eğer $\{y_n\}$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ise

$$|x_n| \leq B \prod_{i=N}^{n-1} \left(1 - \frac{q_i}{2}\right), \qquad n > N$$

olacak şekilde bir $B > 0$ reel sayısı ve bir N tamsayısı vardır.

İspat. $\{y_n\}$ dizisinin ergeç pozitif olduğunu kabul edelim. $n \geq N$ için $y_n > 0$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır ve

$$y_{n+1} - y_n + \frac{1}{2} q_n y_n \le 0, \quad n \ge N$$

dir. Buradan $B = y_N$ olmak üzere

$$y_n \le B \prod_{i=N}^{n-1} \left(1 - \frac{q_i}{2}\right), \qquad n > N$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.4 (4.2) şartı (A) kabulü ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q_i > 0 \tag{4.9}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer $\{y_n\}$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ise o zaman $\frac{y_{n-k}}{y_n} < m$ olacak şekilde bir reel $m > 0$ sayısı vardır.

İspat. Kabul edelim ki, $\{y_n\}$ ergeç pozitif bir dizi olsun. $n \ge N$ için $y_n > 0$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır ve

$$y_{n+1} - y_n + \frac{1}{2} q_n y_{n-k} \le 0, \quad n \ge N$$

dır. Yu ve Zhang (1993) ‘deki Lemma 2. gereğince

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{y_{n-k}}{y_n} \le \frac{16}{\left(\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} q_i\right)^2} < \infty$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki; (4.2) şartı, (A) kabulü, (4.7) şartı ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \left[(k_n+1)\left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right)^{\frac{1}{k_n+1}} - k_n \right] = \infty \tag{4.10}$$

sağlanıyorsa (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki, (4.1) denklemi $n \geq n_0$ için $y_n > 0$ olacak şekilde salınımlı olmayan bir $\{y_n\}$ çözümüne sahip olsun. Lemma 4.1, (4.9) ve (A) kabulünden, $n \geq n_1$ için $\sum_{i=n-k}^{n-1} q_i > 0$ olacak şekilde bir $n_1 \geq n_0$ tamsayısı ve ε_0, (A) daki şekilde tanımlanmış olmak üzere

$$0 < y_n < \varepsilon_0\,,\ y_{n+1} - y_n \leq 0 \text{ ve } 0 < h(y_{n-k}) < 1,\ n \geq n_1$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifade ve (A) kabulünden

$$f(y_{n-k}) \geq \left(1 - h(y_{n-k})\right) y_{n-k}\,, \qquad n \geq n_1$$

elde edilir. Bu ifade (4.1) de yerine yazılırsa

$$y_{n+1} - y_n + q_n y_{n-k}\left(1 - h(y_{n-k})\right) \leq 0, \quad n \geq n_1 \tag{4.11}$$

olur. $\mu_n = 1 - \frac{y_{n+1}}{y_n}, n \geq n_1$ alınırsa, $0 \leq \mu_n < 1$ dir. (4.11) den,

$$\mu_n \geq q_n \prod_{i=n-k}^{n-1} (1-\mu_i)^{-1} - q_n \frac{y_{n-k}}{y_n} h(y_{n-k})\,, n \geq n_1 + k$$

elde edilir. Lemma 4.4 ve aritmetik geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak

$$\mu_n \geq q_n \left(1 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i \right)^{-k_n} \right) - m q_n h(y_{n-k})\,, n \geq n_2 \geq n_1 + k$$

veya $n \geq n_2$ için,

$$\mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq q_n \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right) \left(1 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i \right)^{-k_n} \right) - m q_n \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right) h(y_{n-k})$$

elde edilir. Lemma 4.2, Lemma 4.3 ve yukarıdaki son eşitsizlik göz önüne alındığında, $n \geq n_3 \geq maks\{N, n_2\}$ için

$$\mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq q_n \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right) \left(1 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i \right)^{-k_n} \right) - \frac{3}{2} m q_n h \left(B \prod_{i=N}^{n-k-1} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) \right)$$

bulunur.

$$\prod_{i=n-k}^{n} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) \geq 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=n-k}^{n} q_i \geq \frac{1}{4}, \qquad n \geq n_3$$

olduğundan $n \geq n_3$ için

$$\prod_{i=N}^{n-k-1} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) = \prod_{i=N}^{n} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) \prod_{i=n-k}^{n} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right)^{-1} \leq 4 \prod_{i=N}^{n} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) \qquad (4.12)$$

elde edilir. Burada,

$$\beta_n = \prod_{i=N}^{n} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right)$$

ve $n \geq n_3$ için

$$E_n = 3 m q_n h \left(B \prod_{i=N}^{n-k-1} \left(1 - \frac{q_i}{2} \right) \right) / 2$$

olarak alalım.

$$4 B \beta_{N^*-1} < 1$$

olacak şekilde $N^* \geq n_3$ olsun. (4.12), $h(x)$ fonksiyonunun azalmayan olmasından ve (A) kabulünün (iii) şıkkından

$$\sum_{n=N^*}^{\infty} E_n = \frac{3}{2} m \sum_{n=N^*}^{\infty} q_n h\left(B \prod_{i=N}^{n-k-1}\left(1-\frac{q_i}{2}\right)\right)$$

$$\leq \frac{3}{2} m \sum_{n=N^*}^{\infty} q_n h\left(4B\beta_n\right)$$

$$= -3m \sum_{n=N^*}^{\infty} \frac{\Delta\beta_{n-1}}{\beta_{n-1}} h\left(4B\beta_n\right)$$

$$= -3m \sum_{n=N^*}^{\infty} \frac{h(\alpha_n)}{\alpha_{n-1}} \Delta\alpha_{n-1}$$

$$\leq 3m \sum_{n=N^*}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} \frac{h(x)}{x} dx$$

$$\leq 3m \int_0^{\alpha_{N^*-1}} \frac{h(x)}{x} dx < \infty$$

elde edilir. Burada, $\alpha_n = 4B\beta_n$ artmayan ve $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dır. $n \geq n_3$ için

$$E_n = \frac{3}{2} m q_n h\left(B \prod_{i=N}^{n-k-1}\left(1-\frac{q_i}{2}\right)\right)$$

alınırsa

$$\mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq q_n \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i\right)\left(1-\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i\right)^{-k_n}\right) - E_n$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten, $r \geq 0$ ve $x < k_n$ için

$$r\left(1-\frac{y}{k_n}\right)^{-k_n} \geq y + (k_n+1) r^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n$$

olduğundan $n \geq n_3$ için

$$\mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq q_n \sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i + q_n \left[(k_n+1)\left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i\right)^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n\right] - E_n$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin N^* dan $T > N^* + 2k$ ya toplamı alınırsa,

$$\sum_{n=N^*}^{T} \mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i - \sum_{n=N^*}^{T} q_n \sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i$$
$$\geq \sum_{n=N^*}^{T} q_n \left[(k_n + 1) \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right)^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n \right] - \sum_{n=N^*}^{T} E_n$$

olur. Toplamın sırası değiştirilirse,

$$\sum_{n=N^*}^{T} q_n \sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i \geq \sum_{n=N^*}^{T-k} \mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i$$

bulunur. Son eşitsizlik bir önceki ifadede yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=\mathrm{T-k+1}}^{T} \mu_n \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq \sum_{n=N^*}^{T} q_n \left[(k_n + 1) \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right)^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n \right] - \sum_{n=N^*}^{T} E_n$$

elde edilir. Burada $0 \leq \mu_n < 1$ olduğundan bir önceki eşitsizlikten

$$\sum_{n=\mathrm{T-k+1}}^{T} \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \geq \sum_{n=N^*}^{T} q_n \left[(k_n + 1) \left(\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \right)^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n \right] - \sum_{n=N^*}^{T} E_n$$

yazılabilir. $\sum_{n=N^*}^{T} E_n < \infty$ olduğundan (4.10) ve bir önceki eşitsizlikten

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n=\mathrm{T-k+1}}^{T} \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i = \infty \qquad (4.13)$$

olur. Diğer taraftan, Lemma 4.2 den,

$$\sum_{n=\mathrm{T-k+1}}^{T} \sum_{i=n+1}^{n+k} q_i \leq \frac{3}{2} k$$

elde edilirki, bu durum (4.13) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 4.1 Teorem 4.1 ‘in ispatından (4.3) lineer denklemi için (4.9) koşulunun gerekli olmadığı kolayca görülmektedir. Bu yüzden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1 Kabul edelimki (4.10) sağlansın. Bu durumda, (4.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.2 (4.2) ve (4.7) sağlansın ve kabul edelimki,

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)^{k_n+1}\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i\right] > 1 \tag{4.14}$$

olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki, (4.1) denklemi $n \geq n_0$ için $y_n > 0$ olacak şekilde salınımlı olmayan bir $\{y_n\}$ çözümüne sahip olsun. (4.14) den $n \geq n_1$ için

$$(k_n+1)\left(\sum_{i=n+1}^{n+k}(1-\varphi)q_i\right)^{\frac{1}{k_n+1}} - k_n \geq \varphi$$

olacak şekilde bir n_1 tamsayısı ve $\varphi \in (0,1)$ vardır. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n\left[(k_n+1)\left(\sum_{i=n+1}^{n+k}(1-\varphi)q_i\right)^{\frac{1}{k_n+1}} - k_n\right] = \infty$$

yazılır. Sonuç 4.1 den

$$y_{n+1} - y_n + (1-\varphi)q_n y_{n-k} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.15}$$

denklemi yalnızca salınımlı çözümlere sahiptir. Diğer taraftan, (4.7) kullanılarak

$$\frac{f(y_{n-k})}{y_{n-k}} > 1-\varphi\,, \qquad n \geq n_2$$

olacak şekilde bir $n_2 \geq n_1$ tamsayısı vardır. Bu ifade (4.1) ile birlikte düşünüldüğünde,

$$y_{n+1} - y_n + (1-\varphi)q_n y_{n-k} \le 0, \qquad n \ge n_2$$

olur. Bu durum ise yukarıdaki eşitsizliğin bir ergeç pozitif çözümünün olduğunu gösterir. Sonuç olarak, (4.15) denklemi de bir ergeç çözüme sahiptir. Bu çelişkinin elde edilmesiyle ispat tamamlanır.

Teorem 4.3 (4.2), (4.9), (4.10) sağlansın ve

$$|f(x) - x| \le M|x|^{r+1}, \ \ |x \le \varepsilon_0|$$

olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0, r > 0$ ve $M \ge 0$ var olsun. Bu durumda, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: $h(x) = M|x|^r$ olsun. Bu durumda (A) kabulünün sağlandığı kolayca görülür. Dolayısıyla, Teorem 4.1 den Teorem 4.3 sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2 $q_{3n} = 0, q_{3n+1} = q_{3n+2} = c, n = 0,1,2,\dots$ olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + q_n y_{n-3} = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{4.16}$$

lineer gecikmeli fark denklemini gözönüne alalım. $n \ge 4$ için $k_n = 2$ ve

$$\sum_{i=n+1}^{n+3} q_i = 2c, \ \ n = 0,1,2,\dots$$

olduğu açıktır. Eğer, $c > \frac{4}{27}$ ise

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)^{k_n+1}\sum_{i=n+1}^{n+k} q_i\right] = \frac{4}{27}c > 1$$

olacaktır. Teorem 4.2’ den (4.16) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Diğer taraftan eğer, $c \le \frac{4}{27}$ ise Erbe ve Zhang (1989)’ a göre

$$x_{n+1} - x_n + cy_{n-2} = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

gecikmeli fark denklemi bir ergeç pozitif $\{x_n\}$ çözümüne sahiptir.

$$y_{3n+1} = y_{3n} = x_{2n}, \qquad y_{3n+2} = x_{2n+1}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

olsun. Bu durumda,

$$y_{3n+1} - y_{3n} = 0 = q_{3n}y_{3n-3}$$

$$y_{3n+2} - y_{3n+1} = x_{2n+1} - x_{2n} = -cx_{2n-2} = -q_{3n+1}y_{3n+1-3},$$

$$y_{3n+3} - y_{3n+2} = x_{2n+2} - x_{2n+1} = -cx_{2n-1} = -q_{3n+2}y_{3n+2-3}$$

olur ki, bu durumda $\{x_n\}$, (4.16) denklemini sağlar ve dolayısıyla $\{x_n\}$ 'in, (4.16) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olduğu görülür. O halde (4.16) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $c > \frac{4}{27}$ olmasıdır.

Örnek 4.3 $q_{5n} = q_{5n+1} = 0,\ q_{5n+2} = q_{5n+3} = q_{5n+4} = c \geq 0.23, n = 0,1,2,\dots$ ve

$$f(x) = \begin{cases} x[1 + (1 + ln^2|x|)]^{-1}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + q_n f(y_{n-k}) = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{4.17}$$

lineer olmayan gecikmeli fark denklemini gözönüne alalım.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , |x| > 1 \\ (1 + ln^2|x|)^{-1} & , 0 < |x| < 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olsun. Buradan görülür ki, (4.2) ve Tang ve Yu (2000)' nun çalışmalarındaki (H) kabulü sağlanır. Basit bir hesaplama ile,

$$k_{5n} = 3, k_{5n+2} = 2, k_{5n+2} = q_{5n+3} = 1, q_{5n+4} = 2, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

ve

$$\sum_{i=5n}^{5n+4} q_i\left[(k_i+1)\left(\sum_{j=i+1}^{i+3} q_j\right)^{\frac{1}{(k_i+1)}}\right] = c\big[\big(2\sqrt{2c}-1\big)+\big(2\sqrt{c}-1\big)+\big(3\sqrt{c}-2\big)\big]$$

$$\geq 0.0353 \ , \ \ n = 0,1,2,\dots$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=5}^{\infty} q_n\left[(k_n+1)\left(\sum_{j=n+1}^{n+3} q_j\right)^{\frac{1}{(k_n+1)}} - k_n\right] = \infty$$

olur ki; Teorem 4.1 den (4.17) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

5. KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. (1992). Difference Equations and Inequalities. *Marcel Dekker*, New York.

Arino, O., Gyori, I. and Jawhari, A. (1984). Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations*, **53**: 115-123.

Berezansky, L. and Braverman, E. (2011). On some constants for oscillation and Stability of delay equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139** (11): 4017-4026.

Bildik, N. (2012). Bilim ve teknolojide gelişmişliğin matematiksel temeli. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa.

Braverman, E. and Karpuz, B. (2011). On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays. *Applied Mathematics and Computation*, **218**: 3880-3887.

Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2016). Oscillations of differential equations with non-monotone retarded arguments. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **19** (1): 98-104.

Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2015). Oscillations of differential equations with several non-monotone arguments. *Dynmical Systems*, **30** (3): 310-323.

Elaydi, S. (1999). An introduction to difference equations, Springer-Verlag, New York.

Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1990). Oscillations of first order differential equations with deviating arguments. *In recent trends in differential equations, World Science Publishing Company,* **172:** 163-178.

Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1995). Oscillation and non-oscillation criteria for delay differential equations. *Proceeding of the American Mathematical Society*, **123**: 1503-1510.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. (1988). Oscillation of first order linear differential equations with deviating arguments. Differential Integral Equations, **1**: 305-314.

Erbe, L.H. and Zhang, B.G. (1989). Oscillation of discrete analogue of delay equations. *Differential Integral Equations*, **2**: 300-309.

Erbe, L. H., Kong, Q. and Zhang, B. G. (1995). Oscillation Theory for Functional Differential Equations. *Marcel Dekker*, New York.

Fukagai, N. and Kusano, T. (1984). Oscillation theory of first order functional differential e*quations with deviating arguments. Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **136**: 95-117.

Gopalsamy, K. (1992). Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. *Kluwer Academic Publishers*.

Grammatikopoulos, M. K., Koplatadze, R. G. and Stavroulakis, I. P. (2003). On the oscillation of solutions of first order differential equations with retarded arguments. *Georgian Mathematical Journal*, **10**: 63-76.

Gyori, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. *Clarendon Press*, Oxford.

Hunt, B. R. and Yorke, J. A. (1984). When all solutions $x' = -\sum_{i=1}^{n} q_i(t)x(t - T_i(t))$ oscillate. *Journal of Differential Equations*, **53**: 139-145.

Koplatadze, R. G. and Chanturija, T. A. (1982). Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating arguments. (Russian), *Differentsial'nye Uravneniya*, **8**: 1463-1465.

Ladas, G., Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G. (1989). Sharp condition for the oscillation of delay difference equation. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, **2**:101-112.

Ladas, G. (1990). Explicit condition for the oscillation of diference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **153**: 276-286.

Ladas, G. (1979). Sharp conditions for oscillations caused by delay. *Applicable Analysis*, **9**: 93-98.

Ladas, G., Laskhmikantham, V. and Papadakis, J. S. (1972). Oscillation of high-order retarded differential equations generated by retarded arguments. *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 219-231.

Ladas, G. and Stavroulakis, I. P. (1982). Oscillation caused by several retarded and advanced arguments. *Journal of Differential Equations*, **44**: 134-152.

Ladde, G. S., Laskhmikantham, V. and Zhang, B. G. (1987). Oscillation theory of differential equations with deviating arguments. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, **110**: Marcel Dekker, Inc., New York.

Mickens, R. E. (1990). Difference Equations, Van Nostrand Reinhold, New York.

Myshkis, A. D. (1950). Linear homogeneous differential equations of first order with deviating arguments. (Russian), *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **5**: 160-162.

Öcalan Ö., Kılıç N., Şahin S. and Özkan U. M. (2017). Oscillation of nonlinear delay differential equation with non-monotone arguments. *International Journal of Analysis and Applications*, **14** (2): 147-154.

Tang, X. H. (1998). Oscillation of delay difference equation with variable coefficients. *Journal of Central South University of Technology,* **29 (3)**: 287-288.

Tang, X. H. and Yu J. S. (1999a). Oscillation of delay difference equations. *Computers&Mathematics with Applications*, **37**: 11-20.

Tang, X. H. and Yu J. S. (1999b). A further result on the oscillation of delay difference equations. *Computers&Mathematics with Applications*, **38**: 229-237.

Tang, X. H. and Yu J. S. (2000a). Oscillation of delay difference equations in a critical state. *Applied Mathematical Letters*, **13**: 9-15.

Tang, X. H. and Yu J. S. (2000b). Oscillation of delay difference equations. *Hokkaido Matematical Journal*, **29**: 213-228.

Tang, X. H. and Yu J. S. (2000c). Oscillation of nonlinear delay difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **249**: 476-490.

Tang, X. H. and Yu J. S. (2002). Oscillation of nonlinear delay difference equations. *Journal of Computational Applied Mathematics*, **146**: 395-404.

Tang, X. H. and Zhang R. Y. (2001). New oscillation criteria for delay difference equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **42**:1319-1330.

Tang, X. H. (2004). Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **289**: 367-378.

Villasana, M. and Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of Mathematical Biology*. **47** (3): 270-294.

Yan, J. and Qian, C. (1992). Oscillation and comparison result for delay difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **165**: 346-360.

Yu, J. S. and Tang, X. H. (2000). Sufficient conditions for the oscillation of linear delay difference equations with oscillating coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **250**: 735-742.

Yu, J. S. and Wang, Z. C. (1994). Asymptotic behavior and oscillation in delay difference equations. *Funkcialaj Ekvacioj,* **37**: 241-248.

Yu, J. S., Zhang B. G. and Qian X. Z. (1993). Oscillation of delay difference equations with deviating coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **177**: 432-444.

Yu, J. S., Zhang B. G. and Wang, Z. C. (1994). Oscillation of delay difference equations. *Applicable Analysis*, **53**: 117-124.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe CANER
Doğum Yeri ve Tarihi : Kiel-ALMANYA, 12.05.1977
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : 0505 346 06 42 / aysecaner77@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Afyon Lisesi, (1991-1994)

Lisans : Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, (1995-2000)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Milli Eğitim Bakanlığı, İscehisar Çok Programlı Lisesi (Hacı Süleyman Selek Çok Programlı Lisesi), 2002-2004.

Milli Eğitim Bakanlığı, Atatürk Lisesi, 2004-2007.

Milli Eğitim Bakanlığı, Zübeyde Hanım Mesleki Teknik Anadolu Lisesi, 2007-2017.

Milli Eğitim Bakanlığı, TOKİ Sosyal Bilimler Lisesi, 2017-…