GECİKMELİ KESİRLİ FARK
DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüsniye ÖZ

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2020

Bu tez çalışması 18.FEN.BİL.67 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Hüsniye ÖZ

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2020

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

31 / 08 /2020

Hüsniye ÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GECİKMELİ KESİRLİ FARK
DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Hüsniye ÖZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde; Riemann-Liouville kesirli fark denklemlerinin bazı salınımlılık kriterleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, Caputo kesirli fark denklemleri için yeni bir salınımlılık şartı elde edilmiştir.

2020, v + 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli fark denklemi, Salınımlılık, Caputo türevi, Riemann-Liouville türevi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF DELAY FRACTIONAL
DIFFERENCE EQUATIONS

Hüsniye ÖZ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Sermin ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter; some oscillation criterias of Riemann-Liouville fractional difference equations are given. In the fourth chapter, a new oscillation criteria for Caputo fractional difference equations is obtained.

2020, v + 48 pages

Keywords: Fractional difference equations, Oscillation, Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sürecinde görüş ve önerileriyle çalışmalarıma yön veren ihtiyacım olduğunda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK' e teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasını, 18.FEN.BİL.67 numaralı proje kapsamında madden destekleyen Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman ve her konuda bana destek olan sevgili eşime ve kızıma bana bu süreçte gösterdikleri sabırdan dolayı teşekkür ederim.

Hüsniye ÖZ

Afyonkarahisar 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
Δ	Fark Operatörü
$\int$	İntegral Operatörü
$\sum$	Toplam Operatörü
Δ^{α}	Riemann- Liouville Ayrık Kesirli Farkı
$\int_a^b$	Belirli İntegral
Γ	Gamma Fonksiyonu
t^{n}	Faktöriyel Fonksiyonu
$\prod$	Çarpım Operatörü
$\frac{d}{dt}$	Türev
$\in$	Elemanıdır
N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
lim	Limit
lim sup	Limit Supremum
lim inf	Limit İnfimum

1. GİRİŞ

Birçok bilim dalında yaşanan gelişmeler, matematiksel problemleri de beraberinde getirmektedir. Bu problemlerin çözümü fark denklemleri ile yapılmaktadır. Çünkü; karşılaşılan problemlerde bağımsız değişkenlerin sürekli olmadığı durumlarla karşılaşılabilir.

Fark denklemi; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine fonksiyonel denklemler de denir (Elaydi 2000).

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin, doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların çoğu ayrık (kesitli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluştururlar. Daha da önemlisi fark denklemleri, diferansiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metotlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferansiyel denklemlerin ayrık benzerleridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, buna karşılık gelen diferansiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Diferansiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile gösteriliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Böylece, fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik durumları kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamak için yaygın olarak kullanılmaktadır (Tollu 2009).

Türev ve integral operatörleri reel sayılar üzerinde tanımlı adi hesabın iki temel kavramıdır. Benzer olarak fark ve toplam operatörleri de tam sayılar üzerinde tanımlı ayrık hesabın iki temel kavramıdır. Genellikle n bir tam sayı olmak üzere türev ve fark operatörleri n kez bir fonksiyona uygulanabilir. Bunlar da türev $d^n f(x)/dx^n$, fark $\Delta^n f(x)$ şeklinde tanımlanmıştır. Aslında kesirli hesap, integral ya da türev operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabileceğini gösterir. Örneğin; bir fonksiyonun $1/2$ –nci mertebeden türevi ya da $\sqrt{3}$. mertebeden integrali hesaplanabilir. Keyfi mertebeden türevler ve integraller ile ilgilenen kesirli hesap uygulamalı matematiğin bir alanıdır ve bu alanın uygulamaları, mühendislik, uygulamalı matematik, ekonomi ve birçok alanda görülür. Bilindiği üzere $D=\frac{d}{dx}$ operatörü içeren diferansiyel hesabın özellikleri ve ileri fark operatörü olarak bilinen

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

operatörü içeren ayrık hesabın özellikleri arasında bir benzerlik vardır. Aynı benzerlik kesirli ve ayrık kesirli analizin operatörleri arasında da vardır (Sengul 2010).

İlk olarak 300 yıl önce, kesirli hesap, L'Hospital tarafından Leibniz'e gönderilen bir mektupta, L'Hospital'in " $\mathrm{n}=1/2$ olduğunda $d^n y/d^n x$ notasyonu ne anlama gelir?" sorusuyla gündeme gelmiştir. 30 Eylül 1695 tarihli cevapta, Leibniz "Bu paradoksun bir gün yararlı sonuçları olacaktır." diye yazmıştır. Sonra, Leibniz, Johann Bernoulli ile yazışarak, genel mertebenin türevlerinden bahsetti. $1/2$ –nci mertebeden türevi $d^{1/2}y$ notasyonunu kullanarak gösterdi. Daha sonra kesirli türevlerden birçok kaynakta bahsedilmiştir. $D^\alpha f$ kesirli mertebeden türev literatürde yaygın olarak yer almasına rağmen kesirli mertebeden farka daha az ilgi duyulmuştur. Kesirli mertebeden fark ilk kez Kuttner tarafından 1957 yılındaki çalışmasında incelenmiştir (Sengul 2010).

Kuttner, a_n kompleks sayıların herhangi bir dizisi ve s herhangi bir reel sabit olmak üzere, s- mertebeden farkı

$$\Delta_{a_n}^{s} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s-1+m}{m} a_{n+m} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlamıştır. Diaz ve Osler ise 1974 ‘de kesirli farkı,

$$\Delta^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+\alpha-k) \tag{1.2}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1).k!}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada α herhangi bir reel ya da kompleks sayıdır.

Miller vd. 1989 ‘da kesirli mertebeden toplam ve fark operatörlerini sırasıyla

$$\Delta^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=\alpha}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s) \tag{1.3}$$

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta\Delta^{-(1-\alpha)} f(t) = \Delta \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=\alpha}^{t-1+\alpha} (t-\sigma(s))^{(1-\alpha)} f(s) \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada; $t \equiv \alpha (mod 1)$ ve $0 < \alpha < 1$ ‘dir. Anastassiou ise 2009 yılında Caputo ayrık kesirli farkını,

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^{-(m-\alpha)} \Delta^{m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=\alpha}^{t-m+\alpha} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} \Delta^{m} f(s) \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Kesirli türev ve integral kavramı, klasik türev ve integral kavramlarından farklı olarak, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarını ve araştırmalarını kapsayan ve bundan dolayı klasik türev ve integral kavramlarına göre daha kapsamlı olan matematiksel bir kavramdır. Ayrıca kesirli türev ve integrallerin tek bir tanımları yoktur. Bu ayrıcalık ise kesirli türev ve integral problemlerinin çözümlerinin en iyi şekilde elde edilmesini sağlar. Bu kesirli türev ve integral kavramlarından başlıcaları

Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Weyl şeklinde sıralanabilir. Bu tanımların en büyük farkları başlangıç koşullarının fiziksel yorumlarıdır.

Kesirli analiz ilk olarak, klasik türevin Leibnitz tarafından ilk tanımı yapıldıktan sonra, L’Hospital’in 1695 yılında Leibnitz’e tam sayı mertebeden türevin, tam sayı olmayan mertebeli türeve genellenip genellenemeyeceğini sormasıyla başlamıştır. 1730 yılında Euler kesirli türev ve integral hesaplamalarında büyük öneme sahip olan Gamma (Euler-Gamma) fonksiyonunu tanımlamıştır. 1819 yılında da Lacroix, bu Gamma fonksiyonunu kullanarak ⁄ fonksiyonunun türevini hesaplayarak, kesirli türeve ilk katkı yapan matematikçilerden biri olmuştur. Devam eden süreç içerisinde Laplace ve Fourier’in çalışmalarının da ardından, Abel 1823 yılında kesirli hesaplamaları ilk olarak Tautochrone probleminin

$$k = \int_0^x (x-t)^{\frac{-1}{2}} f(t)dt$$

şeklindeki integral denkleminin çözümünde kullanmıştır. Abel’in bu çalışmalarından sonra kesirli analiz üzerine yoğunlaşan Liouville, 1832-1837 yılları arasında yayımlanmış olduğu makalelerdeki kesirli türev ve integral tanımları, o dönem matematikçileri tarafından büyük ilgi ve destek görmüştür. Riemann ise 1847 yılında yazmış olduğu ancak vefatından on yıl sonra 1876 yılında yayımlanan makalesinde kesirli integral tanımı vermiştir. Daha sonra ise Riemann tarafından verilen bu tanım, Liouville’nin tanımıyla birleştirilerek yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır.

1967-1968 yılları arasında Grünwald ve Letnikov kesirli mertebeden hesaplama için sonlu fark yaklaşımını kullanarak kesirli türev ve integralin yaklaşık hesaplamaları için yeni bir bakış açısı geliştirmiştir.

1967 yılında da İtalyan matematikçi Caputo, Riemann-Liouville tanımına benzeyen ve fiziksel uygulamalarda daha çok tercih edilen bir kesirli türev tanımı yapmıştır. Gelişimi günümüzde de halen devam eden ve daha birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı kesirli analiz kavramının değişik uygulama alanları vardır. Bunlardan başlıcaları ısı transferi, viskoelastik, polimer fizik, sinyal işleme, elektromanyetik, elektrokimya, akustik şeklinde sıralanabilir.

Teknolojinin de gelişmesiyle birlikte uygulama alanları gün geçtikçe artmaya devam eden ve matematiğin uygulamalı dallarında da büyük bir öneme sahip olan kesirli analiz ve kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri oldukça güç olduğundan bazı sayısal yaklaşım yöntemleri ile bu sorunun üstesinden gelinmeye çalışılmıştır. Tek adımlı ve çok adımlı sayısal yaklaşım yöntemlerinin bu tip problemlere genelleştirmesi olan Kesirli Euler, Kesirli Trapezoid (yamuk), Kesirli Adams, Kesirli Runge-Kutta metotları bu yöntemlere örnek olarak gösterilebilir.

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında hazırlanan bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış, konu ile ilgili kavramların tarihsel gelişimi ve önemi ayrıntılı olarak incelenmiştir. İkinci bölümde tez çalışması için önemli ve gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde; Riemann-Liouville kesirli fark denklemlerinin bilinen bazı salınımlılık kriterleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise yüksek mertebeden Caputo kesirli fark denklemleri için yeni bir salınımlılık şartı elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

2.1 Fark Operatörü

Tanım 2.1.1 $N_a = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ ve $y = N_a \to R$ olsun. Bu durumda Δ fark operatörü,

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

Yüksek mertebeden farklar, fark operatörünün kendisine tekrarlı olarak uygulanması ile elde edilir (Kelley ve Peterson 2001).

İkinci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y(t) &= \Delta\big(\Delta y(t)\big) \\
&= \Delta(y(t+1) - y(t)) \\
&= \Delta y(t+1) - \Delta y(t) \\
&= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) \\
&= y(t+2) - 2y(t+1) - y(t)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Tümevarım kullanılarak n -inci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}
\Delta^n y(t) &= y(t+n) - ny(t+n-1) - \frac{n(n-1)}{2!} y(t+n-2) \\
&\quad + \cdots + (-1)^n y(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Charoenphon 2014).

2.2 Ayrık Hesap ve Adi Hesap Arasında Bir Benzerlik

Ayrık hesabın teorisi, adi hesabın teorisine paraleldir. Kavram olarak benzerlik göstermelerine rağmen hesaplamada bazı farklılıklar vardır. Örneğin, diferansiyel operatörü "D", fark operatörü "Δ" ile, integral operatörü " $\int$ ", toplam operatörü "$\sum$" ile benzerdir (Charoenphon 2014).

Aşağıda bu kavramlar arasındaki benzerliği göstermek amacıyla Teorem 2.2.1 ve Lemma 2.2.1 verilmiştir.

Teorem 2.2.1 (Analizin Temel Teoremi)

(i) $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$

(ii) $d\left(\int_a^b f(t)dt\right) = f(x)$

dir (Elaydi 2004).

Lemma 2.2.2 Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(i)

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0)$$

(ii)

$$\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k)\right) = x(n)$$

(Elaydi 2004).

Yukarıda verilen Teorem ve Lemma 'dan ayrık hesap ile adi hesap arasındaki benzerlik açıkça görülmektedir.

2.3 Shift Operatörü

Tanım 2.3.1 $n \in N$ olmak üzere x_n fonksiyonu için shift (kaydırma, öteleme) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 2000 ve Agarwal 2000).

Teorem 2.3.1 E öteleme operatörü cinsinden k -ıncı basamaktan

$$p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots a_kI$$

polinomu verilsin. Burada, $a_0 \neq 0,\ a_1, \ldots, a_k$ reel sabitler ve I birim operatördür. Bu durumda, b bir sabit ve $g(n)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} p(E)b^n &= a_0b^{n+k} + a_1b^{n+k-1} + \cdots a_kb^n \\ &= (a_0b^k + a_1b^{k-1} + \cdots a_k)b^n \\ &= p(b)b^n \end{aligned}$$

ve

$$p(E)\big(b^ng(n)\big) = b^np(bE)g(n)$$

dir (Elaydi 2004).

2.4 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ ile gösterilen özel bir transandantal fonksiyondur ve tamsayı olmayan değerler için faktöriyel genelleştirmesi ilk kez Euler tarafından yapılmıştır (Sengul 2010).

Tanım 2.4.1 Γ: $(0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır. $x = 1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty} \int_{0}^{z} e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty} [-e^{-t}]_{0}^{z} = \lim_{z \to \infty} (1 - e^{-z}) = 1$$

dir (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.2 (Γ için Fonksiyonel Denklem) Eğer $x > 0$ ise,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

dir (Diethelm 2010).

İspat Gamma fonksiyonunun tanımından,

$$\Gamma(x+1) = \int_{0}^{\infty} t^{x} e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty, y \to 0+} \int_{y}^{z} t^{x} e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty, y \to 0+} \left([-e^{-t} t^{x}]_{t=y}^{t=z} + \int_{y}^{z} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

$$= \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.3 $n \in N$ için, $\Gamma(n+1) = n!$ ‘dir (Podlubny 1999).

İspat Matematiksel tümevarım, $\Gamma(1) = 1$ ve Teorem 2.3.1 kullanılırsa, $x = 1,2,3, \ldots$ için,

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

$\Gamma(n+1) = n!$ olduğu elde edilir.

Teorem 2.4.4 $n \notin Z$ ve $k \in N_0$ olsun. Bu durumda,

$$(-1)^k \Gamma(n-k)\Gamma(k+1-n) = \Gamma(-n)(n+1)$$

dir (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.5 (Γ için Yansıma Formülü) $0 < x < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

eşitliği sağlanır (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.6 (Γ için Gauss Çarpım Formülü) $x \in R, -x \notin N_0$ olsun. Bu durumda,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n)}$$

dir (Diethelm 2010).

2.5 Faktöriyel Fonksiyonu

Her $n \geq 0$ tamsayısı için kesirli faktöriyel fonksiyonu,

$$t^{(n)} = t(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$$

ile tanımlanır. Burada, Γ, Gamma fonksiyonudur (Sengul 2010).

Teorem 2.5.1 İyi tanımlı faktöriyel fonksiyonu için

(i) Δ ileri fark operatörü olmak üzere $\Delta t^{(v)} = vt^{(v-1)}$ dir.
(ii) $\mu \in$ R olmak üzere $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$ dir.
(iii) $\mu \in$ R olmak üzere $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ dir.
(iv) Herhangi $v > r$ için $t \leq r$ ise $t^{(v)} \leq r^{(v)}$ dir.
(v) Eğer $0 < v < 1$ ise $t^{(\alpha v)} \leq (t^{(\alpha)})^{(v)}$ dir.
(vi) $t^{(\alpha+\beta)} = (t-\beta)^{(\alpha)}t^{(\beta)}$ dir.

özellikleri sağlanır (Atıcı ve Eloe 2007).

İspat

(i) Faktöriyel fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned}\Delta t^{(v)} &= (t+1)^{(v)} - t^{(v)} \\ &= (t+1)(t)(t-1)\dots(t-v+2) - (t)(t-1)(t-2)\dots(t-v+2)(t-v+1) \\ &= (t)(t-1)\dots(t-v+2)[(t+1)-(t-v+1)] \\ &= vt^{(v-1)}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)

$$\begin{aligned}(t-\mu)t^{(\mu)} &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)} \\ &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\mu+1)} \\ &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{(t-\mu)\Gamma(t-\mu)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-(\mu+1))}$$
$$= t^{(\mu+1)}$$

(iii) $\mu^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ olduğu tanımdan açıktır.

(iv) Herhangi bir $v > r$ için $t \leq r$ olsun. Euler'in sonsuz çarpımı,

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{u}}{1+\left(\frac{u}{n}\right)}$$

şeklindedir. $t \leq r$ olduğundan, $\frac{-v}{t+1} \leq \frac{v}{r+1}$ yazılabilir. O halde, Euler'in sonsuz çarpımı da kullanılarak,

$$t = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}$$
$$= \frac{\frac{1}{t+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{t+1}}{1+\left(\frac{t+1}{n}\right)}}{\frac{1}{t+1-v}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{t+1-v}}{1+\left(\frac{t+1-v}{n}\right)}}$$
$$= \frac{t+1-v}{t+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\frac{\left(1+\frac{t+1-v}{n}\right)}{\left(1+\frac{t+1}{n}\right)}$$
$$= \left(1-\frac{v}{t+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right)$$
$$\leq \left(1-\frac{v}{r+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right)$$
$$\leq r^{(v)}$$

elde edilir.

(v) $I \subseteq R$ üzerinde tanımlı f konveks fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
f[ux+(1-u)y] &\le uf(x)+(1-u)f(y) \\
&\le [f(x)]^u+[f(y)]^{1-u}, \quad x,y \in I \text{ ve } u\in[0,1]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan,

$$
\begin{aligned}
t+1-\alpha v &= t+1-\alpha v+vt-vt-v+v \\
&= vt+v-\alpha v+t+1-vt-v \\
&= v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)
\end{aligned}
$$

olduğundan;

$$
\begin{aligned}
t^{(\alpha v)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha v)} \\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v))}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gamma fonksiyonunun konvekslik özelliği kullanılarak,

$$
\Gamma[vx+(1-v)y] \le [\Gamma(x)]^v[\Gamma(y)]^{1-v},\ 0<v<1
$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte, $x=t+1-\alpha$ ve $y=t+1$ alındığında,

$$
\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)] \le [\Gamma(t+1-\alpha)]^v[\Gamma(t+1)]^{1-v}
$$

$$
\frac{1}{\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)]} \ge \frac{1}{[\Gamma(t+1-\alpha)]^v[\Gamma(t+1)]^{1-v}}
$$

olur. Bu eşitsizlik $\Gamma(t+1)$ ile çarpıldığında,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)]} &\ge \frac{\Gamma(t+1)}{[\Gamma(t+1-\alpha)]^v[\Gamma(t+1)]^{1-v}} \\
&\ge \left[\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}\right]^v
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece,

$$t^{(av)} = (t^{(a)})^{(v)}$$

elde edilmiş olur ki, böylece ispat tamamlanır.

(vi) $t^{(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)}$ ifadesi $\Gamma(t-\beta+1)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\beta+1)} = (t-\beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$$

elde edilir. Böylece, $t^{(\alpha+\beta)} = (t-\beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$ eşitliğinin sağlandığı ispatlanmış olur.

Not Her $\alpha > 0$ reel sayısı için, $\frac{d}{dt} t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha-1}$ ve ayrık hesapta $\Delta t^{(\alpha)} = \alpha t^{\alpha-1}$ ‘dir. Bundan dolayı adi hesaptaki x^n ile ayrık hesaptaki $x^{(n)}$ benzerlik gösterir (Sengul 2010).

2.6 Belirsiz Toplam

Tanım 2.6.1 Reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonu için, belirsiz toplam $\sum f(t)$ şeklinde olmak üzere,

$$\Delta\left(\sum f(t)\right) = f(t)$$

eşitliği sağlanır (Charoenphon 2014).

Sonuç 2.6.2 $\alpha \in R$, olmak üzere $F(t)$ fonksiyonu $\{a, a+1, \dots\}$ kümesinde tanımlanmış olsun. $f(t)$, $F(t)$ ’nin belirsiz toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum F(t) = f(t) + C, \qquad \Delta C = 0$$

dır (Charoenphon 2014).

Teorem 2.6.3 α ve C birer sabit olmak üzere,.

i. $\sum \alpha^t = \frac{\alpha^t}{\alpha-1} + C\ ,\ \alpha \neq 1$

ii. $\sum t^\alpha = \frac{t^{(\alpha+1)}}{\alpha-1} + C\ ,\ \alpha \neq -1$

dir (Charoenphon 2014).

Teorem 2.6.4 $F(t)$, $f(t)$'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde belirli toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(t)\Big|_{a}^{b+1} = F(b+1) - F(a) + C, \qquad \Delta C = 0$$

dır (Kelley ve Peterson 2001).

İspat

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Δ, $\sum_{t=a}^{b} f(t)$ 'ye uygulanırsa,

$$\Delta \sum_{t=a}^{b} f(t) = \sum_{t=a}^{b+1} f(t) - \sum_{t=a}^{b} f(t)$$

$$= f(b+1)$$

elde edilir.

Daha sonra, $F(b+1) - F(a)$ ‘ya Δ uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta\big(F(b+1) - F(a)\big) &= \Delta F(b+1) - \Delta F(a) \\ &= \Delta F(b+1) \\ &= f(b+1)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda;

$$\Delta \textstyle\sum_{t=a}^{b} f(t) = \Delta F(b+1) - F(a)$$

dır. Buradan,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a) + C, \qquad \Delta C = 0$$

elde edilir ki, bu durumda ispat tamamlanır.

2.7 Fark Operatörü İçin Çarpım ve Bölüm Kuralları

Teorem 2.7.1 (Çarpım Kuralı) Δ ileri fark operatörü, $f(t)$, $g(t)$ herhangi iki fonksiyon ve $\sigma(t) = t+1$ olmak üzere,

$$\Delta\big(f(t)g(t)\big) = g(t)\Delta f(t) + f\big(\sigma(t)\big)\Delta g(t) = g\big(\sigma(t)\big) = g\big(\sigma(t)\big)\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)$$

dir (Kelley ve Peterson 2001).

İspat Tanım 2.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(t)g(t)\big) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t) \\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t) \\ &= f(t+1)\big(g(t+1) - g(t)\big) + g(t)(f(t+1) - f(t))\end{aligned}$$

$$= f(\sigma(t))\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)$$

şeklinde ilk eşitlik elde edilir. Yine, Tanım 2.1.1 ‘den

$$\begin{aligned}
\Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t) \\
&= f(t+1)g(t+1) - g(t+1)f(t) + g(t+1)f(t) - f(t)g(t) \\
&= g(t+1)(f(t+1) - f(t)) + f(t)(g(t+1) - g(t)) \\
&= g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)
\end{aligned}$$

elde edilir ki; böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.7.2 (Bölüm Kuralı) $\sigma(t) = t\ + 1$ olmak üzere,

$$\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir (Kelley ve Peterson 2001).

İspat Tanım 2.1.1 kullanılarak,

$$\Delta\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)}$$

$$= \frac{f(t+1)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}$$

$$= \frac{f(t+1)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}$$

$$= \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

elde edilir.

2.8 Tamsayı Mertebeden Toplamlar

N_0 doğal sayılar kümesi olmak üzere, $N_a = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ $(a \in R)$ olmak üzere $f: N_a \to R$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun n katlı belirli integrali**,**

$$y(t) = \int_a^t \int_a^s \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1})(d_{\tau_{n-1}} \dots d_{\tau_2} d_{\tau_1} d_S)$$

$$= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) d_S,\ t \in [a, \infty) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın. n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{cases} y^n(t) = f(t), & t \in [a, \infty) \\ y^{(i)}(a) = 0, & i = 0,1, \dots, n-1 \end{cases}$$

dir (Kısalar 2015).

Benzer olarak bir f ayrık fonksiyonunun n kez tekrarlanmış belirli toplamları

$$y(t) = \sum_{s=a}^{t-1} \sum_{\tau_1=a}^{s-1} \dots \sum_{\tau_{n-1}=a}^{\tau_{n-2}-1} f(\tau_{n-1})$$

$$= \sum_{s=a}^{t-n} \frac{\prod_{j=a}^{n-1}(t-s-1-j)}{(n-1)!} f(s), t \in N_a \tag{2.2}$$

dir.

Ayrık n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{cases} \Delta^n y(t) = f(t), & t \in N_a \\ \Delta^{(i)} y(a) = 0, & i = 0,1, \dots n-1 \end{cases}$$

dir. Bundan dolayı (2.2) toplamının çekirdeği Ayrık Cauchy fonksiyonudur. Bu çekirdek,

$$(t-s-1)^{(n-1)} = \prod_{j=0}^{n-1}(t-s-1-j)$$

şeklinde tanımlanır.

$$y(a) = \Delta y(a) = \cdots = \Delta^{n-1} y(a) = 0$$

başlangıç şartlarından yararlanılarak,

$$y(a) = y(a+1) = \cdots = y(a+n-1) = 0$$

olduğu görülür. (2.2) toplamından, f 'nin $\Delta_a^{-n} f$ ile gösterilen n-inci mertebeden toplamı

$$y(t) = (\Delta_a^{-n} f)(t) = \sum_{s=a}^{t-n} \frac{(t-s-1)^{n-1}}{(n-1)!} f(s), \qquad t \in N_a$$

şeklinde yazılabilir (Kısalar 2015).

2.9 Kesirli Toplam Operatörü ve Kesirli Fark Operatörü

Tanım 2.9.1 a herhangi bir reel sayı ve α herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α-ıncı mertebeden kesirli toplamı,

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f, s = \alpha(\text{mod}1)$, $\Delta_a^{-\alpha} f$, $t = a + \alpha$ (mod1) ‘dir. Özel olarak $N_t = \{t, t+1, t+2, \ldots\}$ olmak üzere $\Delta_a^{-\alpha}: N \to N_{a+\alpha}$ ‘dir (Sengul 2010).

Not $\alpha = 1$ için Tanım 2.9.1 ‘den ayrık toplam operatörü

$$\Delta_a^{-1} f(t) = \sum_{s=a}^{t-1} f(s)$$

şeklini alır (Sengul 2010).

Tanım 2.9.2 α herhangi bir reel sayı, m bir tamsayı ve α, $m-1 < \alpha < m$ aralığında herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α-ıncı mertebeden kesirli farkı,

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^m \Delta^{-(m-\alpha)} f(t) = \Delta^m \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-m+\alpha} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s) \qquad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır (Sengul 2010).

2.9.1 Kesirli Toplamlar İçin Üs Kuralı

Teorem 2.9.1.1 f reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \alpha > 0$ olsun. $t = m + \alpha \ (\mathrm{mod} 1)$ olmak üzere, tüm t 'ler için,

$$\Delta^{-\alpha}[\Delta^{\mu} f(t)] = \Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t) = \Delta^{-\mu}[\Delta^{-\alpha} f(t)]$$

dir (Atıcı vd. 2007).

İspat Kesirli toplamın tanımından

$$\begin{aligned}
\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\boldsymbol{\alpha}} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{-\boldsymbol{\mu}} \sum_{r=0}^{t-\alpha} (t-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \sum_{s=a}^{t-\mu} (t-\sigma(s))^{(\mu-1)} \sum_{r=0}^{s-\alpha} (s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \sum_{s=a}^{t-\mu} \sum_{r=0}^{s-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\mu-1)} (s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\boldsymbol{\alpha}} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)} \sum_{s=r+\alpha}^{t-\mu} (t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

elde edilir. $x = s - (r+1)$ alınırsa eşitlik,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\boldsymbol{\alpha}} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)} \left(\sum_{x=\alpha-1}^{t-\sigma;(r)-\mu} (t-\sigma(r)-\sigma(x))^{(\mu-1)} x^{(\alpha-1)} \right) f(r)$$

şeklini alır. Kesirli toplam operatörünün tanımdan,

$$\begin{aligned}\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\boldsymbol{\alpha}} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)} \left(\Delta^{-\mu}(t-\sigma(r))^{(\alpha-1)}\right) f(r) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\mu)} (t-\sigma(r))^{(\alpha+\mu-1)} f(r) \\ &= \Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t)\end{aligned}$$

elde edilir.

Not f, tamsayılar kümesinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. Ayrık hesapta, $\Delta\Delta^{-1}f = f$ ‘dir. Her pozitif reel α sayısı için, bu eşitlik ayrık kesirli hesapta da geçerlidir. Ayrık kesirli farkın tanımından, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} f(x) = \Delta\Delta^{-(1-\alpha)}\Delta^{-\alpha} f(x)$$

dir (Sengul 2010). Bundan dolayı üs kuralı kullanılarak Teorem 2.9.1.1 ‘den

$$\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)} f(x) = \Delta\Delta^{-1} f(x) = f(x)$$

yazılabilir (Kısalar 2015).

2.9.2 Ayrık Kesirli Hesap İçin Kuvvet Fonksiyonu

Kuvvet fonksiyonu bir faktöriyel fonksiyonun α -ıncı mertebeden kesirli toplamını ifade eder (Sengul 2010).

Lemma 2.9.2.1

$$\Delta^{-\boldsymbol{\alpha}} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} t^{(\mu+\alpha)}$$

dir (Atıcı vd. 2007).

Not Her sabit c için, $\Delta^{\alpha} c$ sıfır değildir. Toplam operatörünün lineerlik özelliği ve kuvvet fonksiyonu kullanılarak, c sabitinin kesirli farkı, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} c = \Delta \frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} t^{(1-\alpha)} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{(-\alpha)}$$

dir (Sengul 2010).

2.9.3 Kesirli Toplam ve Kesirli Farkın Değişme Özelliği

Kesirli toplam ve kesirli farkın değişme özelliği, toplam ve fark operatörlerinin mertebesinin yer değiştirebileceğini ifade eder (Sengul 2010).

Teorem 2.9.3.1 $\alpha > 0$ için

$$\Delta^{\alpha} \Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\alpha}(t) - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $f,\ N_a$ ‘da tanımlanmıştır (Atıcı vd. 2007).

İspat Parçalı toplam formülünden,

$$\Delta_s\big((t-s)^{(\alpha-1)}f(s)\big) = (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\Delta_s f(s) - (\alpha-1)(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)}f(s)$$

dir. Toplam kullanılarak,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}\ \Delta_s f(s) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\, f(s) + \frac{(t-s)^{(\alpha-1)}f(s)}{\Gamma(\alpha)}\Big|_{\alpha}^{t+1-\alpha}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\, f(s)$$

$$+\frac{(\alpha-1)^{(\alpha-1)}f(t+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}f(a)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\, f(s) - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}f(s)$$

yazılabilir. Burada,

$$\Delta\Delta^{-\alpha}f(t) = \sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)}(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)}\, f(s))$$

dir. Böylece, istenilen eşitlik sağlanır.

2.10 Fark Denklemleri

Tanım 2.10.1 $n \in N$ olmak üzere x_n, N üzerinde taımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) k-ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.10.2 Bir fark denkleminin mertebesi denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır (Agarwal 2000).

Tanım 2.10.3 Eğer, k-ıncı mertebeden bir fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n$$

şeklinde verilirse bu fark denklemine lineerdir denir. Eğer en az bir $n \in N$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda fark denklemi homojen olmayan lineer fark denklemi adını alır. Eğer,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0$$

ise k-ıncı mertebeden fark denklemine homojen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.10.4 Eğer, $n \geq n_0$ için,

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir (Elaydi 2004).

Tanım 2.10.5 $x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = 0$ denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, temel çözümler kümesi denir (Elaydi 2004).

Tanım 2.10.6 $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$, $x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = 0$ denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ‘ler keyfi sabitler olmak üzere genel çözüm

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x_{in} = 0$$

ile verilir (Elaydi 2004).

Tanım 2.10.7 Eğer her pozitif n tamsayısı ve $n \geq n_0$ için $x_n\, x_{n+1} \leq 0$ şartını sağlayan x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde, x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif veya sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal 2000).

2.11 Lineer Olmayan Fark Denklemleri

$k \in Z^+$ ve $N \in Z^+$ için lineer olmayan fark denklemi

$$x(n+1) - x(n) + p(n)f\big(x(n-k)\big) = 0 \qquad (2.6)$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.11.1 Kabul edelim ki f fonksiyonu R üzerinde sürekli ve

i. $x\,f\,(x) > 0$, $x \neq 0$,

ii. $lim_{x\to 0}\, inf \frac{f(x)}{x} = L,\ \ 0 < L < \infty$

iii. $p = lim_{n\to\infty}\, inf\, p(n) > 0$ olmak üzere $k \geq 1$ ise $pL > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ ve $k = 0$ ise $pL > 1$ ‘dir.

şartları sağlansın. Bu durumda, (2.6) denkleminin her çözümü salınımdır.

İspat Kabul edelim ki, $x(n)$, (2.6) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. (2.6) ‘dan $n \geq N$ için $x(n)$ azalandır. Dolayısıyla; $\lim_{n\to\infty} x(n) = c \geq 0$ ‘dır. $f(c) = 0$ olduğunan ve (2.6) denkleminin her iki tarafının limiti alındığında (i) şartından dolayı $c = 0$ olur. Bundan dolayı $lim_{n\to\infty}\, x(n) = 0$ dır. (2.6) denklemi $x(n)$ ile bölündüğünde ve $z(n) = x(n)/x(n+1) \geq 1$ alındığında,

$$\frac{1}{z(n)} = 1 - p(n)z(n-1) \dots z(n-k)\frac{f(x(n-k))}{x(n-k)} \qquad (2.7)$$

elde edilir. Buradan, $\lim_{n\to\infty} \inf z(n) = r$ ‘dir. (2.7) denkleminin üst limiti alınarak,

$$\frac{1}{r} \leq 1 - pLr^k$$

ya da

$$pL \leq \frac{r-1}{r^{k+1}} \qquad (2.8)$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla görülür ki; $h(r) = (r-1)/r^{k+1}$ fonksiyonu $r = (k+1)\,/\,k$ ‘da maksimum değerini alır. Bu değer, $k^k\,/(k+1)^{k+1}$ olur. Böylece (2.8) eşitsizliği,

$$pL > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olur ki; bu da (iii) ile çelişir (Elaydi 2004).

3. RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde; Riemann-Liouville kesirli fark denklemlerinin salınımlılığı incelenecektir. Bu incelemede temel kaynak olarak; Li (2016) alınmıştır.

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)+p(t)\Delta^{\alpha}x(t)+f(t,x(t))=g(t), \quad t\in N_0 \tag{3.1}$$

kesirli fark denklemini $\Delta^{\alpha-1}x(t)\,\big|_{t=0}=x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım.α, $0<\alpha<1$ arasında bir sabit, $\Delta^{\alpha}x$; x 'in α. dereceden Riemann-Liouville fark operatörü ve $N_0=\{0,1,2,\dots\}$ 'dır. Ayrıca, bu bölüm boyunca kabul edelim ki;

(**A**) $p(t)$ ve $g(t)$ reel dizi, $p(t)>-1, f\colon N_0\times R\to R$ ve $t\in N_0$ için $x\neq 0$ olmak üzere $x.f(t,x)>0$

olsun. (3.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümüne ne ergeç pozitif ne de ergeç negatif ise salınımlı, aksi halde; salınımlı olmayan çözüm denir.

Tanım 3.1 $v>0$ olmak üzere f'nin v-inci kesirli toplamı

$$\Delta^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-s-1)^{(v-1)}f(s) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada f fonksiyonu $s=a\,(\mathrm{mod}\,1)$, $\Delta^{-v}f$ ise $t=(a+v)\,(\mathrm{mod}\,1)$ için tanımlıdır ve $\mathrm{t}^{(\mathrm{v})}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-1-v)}$ 'dir. $\Delta^{-v}f$ kesirli toplamı $N_a=\{a,a+1,a+2,\dots\}$ üzerinde tanımlı fonksiyonları $N_{a+v}=\{a+v,a+v+1,a+v+2,\dots\}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlara dönüştürür. Burada Γ, Gamma fonksiyonudur.

Tanım 3.2 Bir *m* pozitif tamsayısı için $m=\lceil\mu\rceil$ olmak üzere $m-1<\mu<m$ ve $\mu>0$ olsun. Bu durumda, $v=m-\mu$ olmak üzere v-inci kesirli fark

$$\Delta^{\mu}f(t)=\Delta^{m-v}f(t)=\Delta^{m}\Delta^{-v}f(t) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, ⌈μ⌉ , μ ’nün tavan fonksiyonudur.

Lemma 3.1 f, N_a üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon ve $\mu, v > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta^{-v}[\Delta^{-\mu} f(t)] = \Delta^{-(\mu+v)} f(t) = \Delta^{-\mu}[\Delta^{-v} f(t)] \tag{3.4}$$

$$\Delta^{-v}\Delta f(t) = \Delta\Delta^{-v} f(t) - \frac{(t-\alpha)^{(v-1)}}{\Gamma(v)} f(a) \tag{3.5}$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 3.2 $x(t)$, (3.1) denkleminin bir çözümü ve

$$E(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) \qquad t \in N_0 \tag{3.6}$$

olsun. Bu durumda,

$$\Delta E(t) = \Gamma(1-\alpha)\Delta^{\alpha} x(t) \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Tanım 3.1 ve (3.6) kullanılırsa,

$$E(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1+\alpha} (t-s-1)^{(-\alpha)} x(s) = \sum_{s=t_0}^{t-(1-\alpha)} (t-s-1)^{((1-\alpha)-1)} x(s)$$
$$= \Gamma(1-\alpha)\Delta^{-(1-\alpha)} x(t)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\Delta E(t) = \Gamma(1-\alpha)\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} x(t) = \Gamma(1-\alpha)\Delta^{\alpha} x(t)$$

elde edilir ki; Lemma 3.2 ‘nin ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 3.3 $\mu \in R\backslash\{\dots,-2,-1\}$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta^{-v} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)} t^{(\mu+v)} \tag{3.8}$$

dir.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki $t_0 \in N_0$ için

$$\lim_{t\to\infty} \inf\left\{\sum_{s=0}^{t-\alpha} \frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi).V(\xi)\right]\right\} < 0 \tag{3.9}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \sup\left\{\sum_{s=0}^{t-\alpha} \frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi).V(\xi)\right]\right\} > 0 \tag{3.10}$$

olsun. Burada, M bir sabit ve

$$V(t) = \prod_{s=t_0}^{t-1}(1+p(s)) \tag{3.11}$$

dir. Bu durumda, (3.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

İspat Çelişki için kabul edelim ki; $x(t)$, (3.1) denkleminin bir salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani; $x(t)$ çözümü $N_{t_0} = \{t_{0,} t_0 + 1, t_{0,} + 2, \dots\}$ 'da bir sıfıra sahip olmasın. Bu durumda, $t \in N_{t_0}$ için $x(t) > 0$ veya $x(t) < 0$ 'dır.

Durum 1: $t \in N_{t_0}$ için $x(t) > 0$ olsun. (A) kabulü ve (3.1) denkleminden,

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big) + p(t)^{C}\, \Delta^{\alpha}x(t) = -f(t,x(t)) + g(t) < g(t) \tag{3.12}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Δ'nın temel özelliğini ve $V(t)$'nin tanımını kullanarak,

$$\Delta\Big(\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)V(t)\Big) = \Delta\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)\,V(t+1) + \Delta^{\alpha}x(t)\Delta V(t)$$
$$= \Delta\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)\big(1+p(t)\big)\,V(t) + \Delta^{\alpha}\,x(t)p(t)V(t)$$
$$< g(t)V(t) \tag{3.13}$$

yazılabilir. (3.13)' ün her iki tarafı t_0 'dan $t-1$ 'e kadar toplanırsa,

$$\big(\Delta^{\alpha}x(t)\big)V(t) < \big(\Delta^{\alpha}x(t_0)\big)V(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) = M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)$$

elde edilir. Burada, $M = \big(\Delta^{\alpha}x(t_0)\big)V(t_0)$ 'dir. Yani; eşitsizliğin her iki tarafı $V(t)$'ye bölünürse

$$\Delta^{\alpha}x(t) < \frac{M}{V(t)} + \frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) \tag{3.14}$$

olur. (3.14) eşitsizliğine $\Delta^{-\alpha}$ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}\mathrm{x(t)} < \Delta^{-\alpha}\left[\frac{M}{V(t)} + \frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)\right] \tag{3.15}$$

elde edilir. Buradan, (3.15) 'in sol tarafına Lemma 3.1 uygulanırsa,

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}\mathrm{x(t)} = \Delta^{\alpha}\Delta\Delta^{-(1-\alpha)}x(t) \tag{3.16}$$
$$= \Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)}x(t) - \frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}x_0$$
$$= x(t) - \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)}t^{(\alpha-1)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, Tanım 3.1 kullanılarak (3.15)' in sağ tarafı düzenlenirse

$$\Delta^{-\alpha}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V(t)}} + \frac{1}{\mathrm{V(t)}}\sum_{\mathrm{s=t_0}}^{\mathrm{t-1}} \mathrm{g(s)V(s)}\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi) V(\xi)\right] \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.16) ve (3.17) birleştirilirse,

$$x(t) < \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} t^{(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi) V(\xi)\right] \tag{3.18}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.18) denklemi $t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)$ ile çarpılırsa,.

$$\Gamma(\alpha)\, t^{1-\alpha}\, x(t) < x_0 t^{(\alpha-1)}\, t^{1-\alpha}$$
$$+\, t^{1-\alpha} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi) V(\xi)\right] \tag{3.19}$$

olur. Buradan, $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(t) t^{\varepsilon}}{\Gamma(t+\varepsilon)} = 1, \quad \varepsilon > 0$$

Stirling formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{(\alpha-1)}\, t^{1-\alpha} &= \lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha+1)} \\ &= \lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} \frac{t\Gamma(t)}{(t+1-\alpha)\Gamma(t+(1-\alpha))} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t+1-\alpha} \frac{\Gamma(t)\, t^{1-\alpha}}{\Gamma(t+(1-\alpha))} = 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) den (3.19) ‘da $t \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \inf\{t^{1-\alpha}\, x(t)\} \leq -\infty$$

elde edilir ki bu durum $x(t) > 0$ olmasıyla çelişir. Bu durumda $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

Durum 2: $t \in N_{t_0}$ için $x(t) < 0$ olsun. (A) kabulü ve **(**3.1) denkleminden,

$$\left(1 + p(t)\right)\Delta\left(\Delta^{\alpha} x(t)\right) + \ p(t)\Delta^{\alpha} x(t) = -f\left(t, x(t)\right) + g(t) \ > \ g(t) \qquad (3.21)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Delta\left(\left(\Delta^{\alpha} x(t)\right)V(t)\right) > g(t)V(t) \qquad (3.22)$$

olur. (3.22)' nin her iki tarafı t_0'dan $t-1$ 'e toplanırsa,

$$\left(\Delta^{\alpha} x(t)\right)V(t) > \left(\Delta^{\alpha} x(t_0)\right)V(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) = M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)$$

yazılabilir. Burada, $M = \left(\Delta^{\alpha} x(t_0)\right)V(t_0)$ 'dir. Yani; eşitsizliğin her iki tarafı $V(t)$'ye bölünürse,

$$\Delta^{\alpha} x(t) > \frac{M}{V(t)} + \frac{1}{V(t)} \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) \qquad (3.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Durum 1 'in ispatında izlenen yol kullanılarak

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\, t^{1-\alpha}\, x(t) >\ & x_0 t^{(\alpha-1)}\, t^{1-\alpha} \\ & + t^{1-\alpha} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi)V(\xi)\right] \end{aligned} \qquad (3.24)$$

sonucuna ulaşılır. (3.20) 'den, (3.24) 'de $t \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} sup\{t^{1-\alpha}\, x(t)\} \geq \infty$$

elde edilir. Bu da $x(t) < 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $x(t)$ çözümünü salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 Kabul edelim ki; $t_0 \in N_0$ için M bir sabit ve $V(t)$, (3.11) 'deki şekilde tanımlı olmak üzere,

$$lim_{t\to\infty} inf \left\{\sum_{s=t_0}^{t-1} \frac{1}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi).V(\xi)\right]\right\} = -\infty \quad (3.25)$$

ve

$$lim_{t\to\infty} sup \left\{\sum_{s=t_0}^{t-1} \frac{1}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi).V(\xi)\right]\right\} = \infty \quad (3.26)$$

olsun. Bu durumda, (3.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

İspat Çelişki için kabul edelim ki; (3.1) denklemi salınımlı olmayan bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. Bu durumda, $t \in N_{t_0}$ için $x(t) > 0$ veya $x(t) < 0$ 'dır.

Durum 1 $t \in N_{t_0}$ için $x(t) > 0$ olsun. Teorem 3.1 'deki Durum 1 'in ispatındaki gibi (3.14) elde edilir. Lemma 3.2 'den (3.14) eşitsizliği,

$$\Delta E(t) < \frac{\Gamma(1-\alpha)}{V(t)} \left\{M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)\right\} \quad (3.27)$$

olur. (3.27)' nin her iki tarafı t_0 'dan $t-1$ 'e kadar toplanırsa,

$$E(t) < E(t_0) + \Gamma(1-\alpha) \sum_{s=t_0}^{t-1} \frac{1}{V(s)} \left\{M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi)V(\xi)\right\} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.21) 'den $t \to \infty$ için $E(t) > 0$ olmasıyla çelişki elde edilir.

Durum 2: $t \in N_{t_0}$ için $x(t) < 0$ olsun. Teorem 3.1 'deki Durum 2 'nin ispatından (3.23) 'ü elde edilir. Lemma 3.2 'den (3.23),

$$\Delta E(t) > \frac{\Gamma(1-\alpha)}{V(t)} \left\{M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)\right\} \quad (3.29)$$

olur. (3.29) ‘un her iki tarafı t_0 ’dan $t-1$ ‘e kadar toplanırsa,

$$E(t) > E(t_0) + \Gamma(1-\alpha)\sum_{s=t_0}^{t-1}\frac{1}{V(s)}\left\{M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi)V(\xi)\right\} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) ‘dan $t \to \infty$ için $E(t) < 0$ olmasıyla bir çelişki elde edilir. Böylece, Teorem 3.2 ’nin ispatı tamamlanır.

Örnek 3.1

$$\frac{2}{3}\Delta\left(\Delta^{\frac{2}{3}}x(t)\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\Delta^{\frac{2}{3}}x(t) + \frac{\Gamma\left(t+\frac{1}{3}\right)}{3t\Gamma(t)}x(t) = \frac{3-2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9},\ t \in N_0 \tag{3.31}$$

kesirli fark denklemini

$$\Delta^{-\frac{1}{3}}x(t)\ \Big|_{t=0} = 0$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Burada $p(t) = -\frac{1}{3}$, $f\left(t,x(t)\right) = \frac{\Gamma\left(t+\frac{1}{3}\right)}{3t\Gamma(t)}x(t)$, $g(t) = \frac{3-2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9}$ olur. Buradan kolayca görülebilir ki;

$$V(t) = \prod_{s=1}^{t-1}\left(1+p(t)\right) = \prod_{s=1}^{t-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}$$

ve

$$g(t) = \frac{3-2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9} > 0$$

dir. Dolayısıyla, $\alpha = \frac{2}{3}$ için

$$\sum_{s=0}^{t-\frac{2}{3}} \frac{(t-s-1)^{\left(-\frac{1}{3}\right)}}{V(s)}\left[M+\sum_{\xi=1}^{s-1} g(\xi)V(\xi)\right]$$

$$= \sum_{s=0}^{t-\frac{2}{3}} (t-s-1)^{\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{3}{2}\right)^{s-1}\left[M+\sum_{\xi=1}^{s-1}\frac{3-2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{\xi-1}\right] > 0$$

olur. Bu ise Teorem 3.1 ‘deki (3.9) koşulu ile çelişir. O halde verilen bu denklemin her çözümü salınımlı değildir. Örneğin; $x(t) = t^{\left(\frac{2}{3}\right)}$ bu denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür. Gerçekten de, Lemma 3.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta^{\frac{2}{3}}x(t) &= \Delta^{\frac{2}{3}}t^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \Delta\left(\Delta^{-\frac{1}{3}}t^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right) \\
&= \Delta\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+1\right)}t^{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)}\right) \\
&= \Delta\left(\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t^{(1)}\right) \\
&= \Delta\left(\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t\right) \\
&= \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ve

$$\Delta\left(\Delta^{\frac{2}{3}}x(t)\right) = \Delta\left(\Delta^{\frac{2}{3}}x(t)t^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right) = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$x(t) = t^{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\left(t+1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma\left(t+\frac{1}{3}\right)} \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.32) ve (3.33) birleştirilirse, $x(t) = t^{\left(\frac{2}{3}\right)}$ ‘nin (3.31) denkleminin bir çözümü olduğu sonucu elde edilir.

4. CAPUTO KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde Caputo kesirli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeni bir salınımlılık kriteri verilecektir.

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)+\ p(t)^{C}\,\Delta^{\alpha}x(t)+f(t,x(t))=g(t),\ t\in\ N_0 \qquad (4.1)$$

kesirli fark denklemini

$$\Delta^{k}x(t)\ \Big|_{t=0}=x_k,\quad k=1,2,\dots,n-1 \qquad (4.2)$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Burada; α, $n-1<\ \alpha<n$ arasında bir sabit ${}^{C}\,\Delta^{\alpha}x$, x ‘in α-ıncı dereceden Caputo fark operatörü ve $N_0=\{0,1,2,\dots\}$ ’dır. Bu bölüm boyunca;

(**A**) $p(t)$ ve $g(t)$ reel dizi, $p(t)>\ -1, f\colon N_0\times R\to R$ ve $t\in N_0$ için $x\neq 0$ olmak üzere $x.f(t,x)>0$ ‘dır.

önermesi kabul edilecektir. (4.1) denkleminin bir $x(t)$ çözümüne, ne ergeç pozitif ne de ergeç negatif ise salınımlı, aksi halde; salınımlı olmayan çözüm denir.

Tanım 4.1 Bir m pozitif tamsayısı için $m=\lceil\mu\rceil\alpha=m-\mu$ olmak üzere $m-1<\mu<m$ ve $\mu>0$ olsun. Bu durumda, μ-inci mertebeden Caputo kesirli fark operatörü,

$${}^{C}\,\Delta^{\mu}x(t)=\Delta^{-\alpha}(\Delta^{m}x(t))-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\,(\Delta^{m}x)_{\,(s)},\ \ \forall t\in N_{a+v} \qquad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.1 Herhangi $\alpha\in R$ ve m herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\Delta^{-\alpha}\ {}^{C}\,\Delta^{m}x(t)=\Delta^{m}\Delta^{-\alpha}x(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(\alpha-m+k)}}{\Gamma(\alpha+k-m+1)}\Delta^{k}x(a)\ \Big|_{a=0} \qquad (4.4)$$

eşitliği sağlanır. Burada f, N_a üzerinde tanımlıdır.

Yukarıdaki denklemde $m = \alpha$ alınırsa;

$$\Delta^{-\alpha}\ {}^{C}\Delta^{\alpha} x(t) = \Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{(k)}}{\Gamma(k+1)} \Delta^{k} x(0)$$

$$= x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{(k)}}{\Gamma(k+1)} x_k \tag{4.5}$$

elde edilir.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki; $t_0 \in N_0$ için,

$$lim_{t\to\infty}\, inf \left\{ \sum_{s=0}^{t-\alpha} \frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi) V(\xi) \right] \right\} < 0 \tag{4.6}$$

ve

$$lim_{t\to\infty}\, sup \left\{ \sum_{s=0}^{t-\alpha} \frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{V(s)} \left[M + \sum_{\xi=t_0}^{S-1} g(\xi) V(\xi) \right] \right\} > 0 \tag{4.7}$$

olsun. Burada, M keyfi bir sabit ve

$$V(t) = \prod_{s=t_0}^{t-1} (1 + p(s)) \tag{4.8}$$

dir. Bu durumda, (4.1) denkleminin her $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

İspat Kabul edelim ki, $x(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun öyle ki. $N_{t_0} = \{t_{0,} t_0 + 1, t_{0,} + 2, \dots\}$ 'da hiç sıfırı bulunmasın. Bu durumda, $t \in N_{t_0}$ için ya $x(t) > 0$ ya da $x(t) < 0$ olur.

Durum 1 $t \in N_{t_0}$ için $x(t) > 0$ olsun. (A) kabulünden ve (4.1) denkleminden,

$$\big(1+p(t)\big)\Delta\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)+\ p(t)^{C}\,\Delta^{\alpha}x(t)=-f\big(t,x(t)\big)+g(t)<g(t) \qquad (4.9)$$

olur. Buradan, Δ 'nın temel özelliğini ve $V(t)$ 'nin tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta\Big(\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)V(t)\Big)&=\Delta\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)\,V(t+1)+{}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\Delta V(t)\\&=\Delta\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)\big(1+p(t)\big)\,V(t)+\ {}^{C}\Delta^{\alpha}\,x(t)p(t)V(t)\\&<\ g(t)V(t) \qquad (4.10)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_0 'dan $t-1$ 'e toplamı alınırsa

$$\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\big)V(t)<\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t_0)\big)V(t_0)+\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)=M+\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)$$

elde edilir. Burada, $M=\big({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t_0)\big)V(t_0)$ 'dir. Böylece eşitsizliğin her iki tarafı $V(t)$ ile bölünürse

$${}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)<\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s) \qquad (4.11)$$

olur. (4.11) eşitsizliğinde $\Delta^{-\alpha}$ kesirli operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{-\alpha}\ {}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)<\Delta^{-\alpha}\left[\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\right] \qquad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitsizliğinin sol tarafına Lemma 4.1 uygulanırsa,

$$\Delta^{-\alpha}\ {}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)=\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha}x(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{(k)}}{\Gamma(k+1)}\Delta^{k}x(k)\ \Big|_{t=0} \qquad (4.13)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte Tanım 4.1 kullanılarak, (4.12) 'nin sağ tarafı düzenlenirse

$$\Delta^{-\alpha}\left[\frac{M}{V(t)}+\frac{1}{V(t)}\sum_{s=t_0}^{t-1}g(s)V(s)\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\frac{M}{V(s)}+\frac{1}{V(s)}\sum_{\xi=t_0}^{t-1}g(\xi)V(\xi)\right] \tag{4.14}$$

olur. Buradan, (4.13) ve (4.14) birleştirilirse,

$$x(t)<\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{(k)}}{\Gamma(k+1)}\ x_k\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\frac{M}{V(s)}+\frac{1}{V(s)}\sum_{\xi=t_0}^{t-1}g(\xi)V(\xi)\right] \tag{4.15}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\mathrm{t}^{1-\mathrm{m}}$ ile çarpılırsa

$$t^{1-m}\,x(t)<\ t^{1-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{(k)}}{\Gamma(k+1)}x_k$$
$$+\ \frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\frac{M}{V(s)}+\frac{1}{V(s)}\sum_{\xi=t_0}^{t-1}g(\xi)V(\xi)\right]$$

elde edilir. Buradan, $t^{(k)}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-1-k)}$ eşitliği yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa eşitsizlik

$$t^{1-m}\,x(t)<\ \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-k)\Gamma(k+1)}t^{1-m}\ \ x_k$$
$$+\ \frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\frac{M}{V(s)}+\frac{1}{V(s)}\sum_{\xi=t_0}^{t-1}g(\xi)V(\xi)\right] \tag{4.16}$$

şeklini alır. Ayrıca,

$$\frac{\Gamma(t+1)t^{1-m}}{\Gamma(t+1-k)}=\frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t+1-k)}t^{1-m}$$
$$=\frac{t(t-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(t+1-k)}t^{1-m}$$
$$=\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-(k-1))\Gamma(t-(k-1))}{\Gamma(t-(k-1))\ t^{m-1}}$$
$$=\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-(k-1))}{t^{m-1}} \tag{4.17}$$

olup, yukarıdaki ifadenin $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$lim_{t\to\infty} \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-(k-1))}{t^{m-1}} \leq 1\,, \quad 0 < k < m-1 \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18) ‘i kullanarak (4.16) eşitsizliğinin $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{1-m}\, x(t) <\ & \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(t+1)t^{1-m}}{\Gamma(t+1-k)} \frac{x_k}{k!} \\ & + \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi)V(\xi) \right] \\ & \leq \frac{x_k}{k!} + \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi)V(\xi) \right] \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty} inf\{t^{1-m}\, x(t)\} \leq\ -\infty$$

elde edilir. Bu da $x(t) > 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

Durum 2 $t \in N_{t_0}$ için $x(t) < 0$ olsun .(A) kabulünden ve (4.1) denkleminden,

$$\big(1 + p(t)\big)\Delta\big({}^{C}\,\Delta^{\alpha} x(t)\big) +\ p(t)^{C}\,\Delta^{\alpha} x(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g(t) > g(t) \tag{4.19}$$

olur. Buradan,

$$\Delta\Big(\big({}^{C}\,\Delta^{\alpha} x(t)\big)V(t)\Big) > g(t)V(t) \tag{4.20}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının t_0 ’dan $t-1$ ‘e toplamı alınırsa,

$$\left({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t)\right)V(t) > \left({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t_0)\right)V(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) = M + \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s)$$

elde edilir. Burada, $M = \left({}^{C}\Delta^{\alpha}x(t_0)\right)V(t_0)$ ‘dir. Buradan, bu eşitsizliğin her iki tarafı $V(t)$ ’ye bölünürse

$$ {}^{C}\Delta^{\alpha}x(t) > \frac{M}{V(t)} + \frac{1}{V(t)} \sum_{s=t_0}^{t-1} g(s)V(s) \tag{4.21}$$

olur. Durum 1 ’in ispatındaki yöntem benzer olarak kullanılırsa,

$$\begin{aligned} t^{1-m}\,x(t) &> \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(t+1)t^{1-m}}{\Gamma(t+1-k)}\,\frac{x_k}{k!} \\ &+ \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\frac{M}{V(s)} + \frac{1}{V(s)} \sum_{\xi=t_0}^{t-1} g(\xi)V(\xi)\right] \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.18) ‘i kullanarak (4.22) ‘nin $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{1-m}\,x(t) > \lim_{t\to\infty} &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(t+1)t^{1-m}}{\Gamma(t+1-k)} \frac{x_k}{k!} \\ + \quad \lim_{t\to\infty} &\frac{t^{1-m}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\, f(s) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty} sup\{t^{1-m}\,x(t)\} > \frac{x_k}{k!} + \infty = +\infty$$

elde edilir. Bu da $x(t) < 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $x(t)$ çözümü salınımlıdır.

Örnek 4.1

$$\frac{3}{2}\Delta\left(\Delta_C^{\frac{3}{2}}x(t)\right) + \frac{1}{2}\Delta_C^{\frac{3}{2}}x(t) + \frac{\Gamma\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2t\Gamma(t)}x(t) = \frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}$$

$$x(0)=0, \qquad \Delta x(0)=0$$

kesirli fark denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t)=1/2$, $f\big(t,x(t)\big)=\frac{\Gamma\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2t\Gamma(t)}x(t)$, $g(t)=\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}$ şeklindedir. Buradan,

$$V(t)=\prod_{s=0}^{t-1}(1+p(t))=\prod_{s=0}^{t-1}(3/2)=\left(\frac{3}{2}\right)^{t}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$g(t)=\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}>0$$

olduğu açıktır. O halde $\alpha=3/2$ için

$$\sum_{s=0}^{t-3/2}\frac{(t-s-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{V(s)}\left[M+\sum_{\xi=0}^{s-1}g(\xi)V(\xi)\right]$$
$$=\sum_{s=0}^{t-3/2}(t-s-1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^{t}\left[M+\sum_{\xi=0}^{s-1}\frac{4+3\Gamma(1/2)}{8}\left(\frac{3}{2}\right)^{\xi}\right]>0$$

olur. Bu ise Teorem 4.1 deki (4.7) koşulu ile çelişir. O halde verilen bu denklemin her çözümü salınımlı değildir. Örneğin $x(t)=t^{(3/2)}$ bu denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür. Gerçekten de,

$$\Delta_C^{\frac{3}{2}}x(t)=\Delta_C^{\frac{3}{2}}t^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

olup $\Delta\left(\Delta_C^{\frac{3}{2}}x(t)\right)=0$ dır. $x(t)=t^{(3/2)}$ denklemde yazılırsa denklemin bir çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

5. KAYNAKLAR

Abdeljawad T, 2011, On Riemann and Caputo Fractional Differences, Computers Mathematics Applications, 62, 1602–1611.

Abbas S, Benchohra M, N'Guérékata G M, 2012, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York.

Agarwal R P, 2000, Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 228, NewYork.

Atici F M, Eloe P W, 2007, A Transform Method in Discrete Fractional Calculus. International Journal Difference Equation, 2, 165–176.

Atici FM, Eloe PW, 2008, Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus, Proceeedings of the American Mathematical Society, 137, 981–989.

Atici F M, Eloe P W, 2011, Linear Systems of Fractional Nabla Difference Equations, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 41, 353–370.

Atici FM, Sengül S, 2010, Modeling with Fractional Difference Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 369, 1–9.

Atici FM, Wu F, 2014, Existence of Solutions For Nonlinear Fractional Difference Equations with Initial Conditions, Dynamic Systems Applications, 23, 265–276.

Alzabut J O, Abdeljawad T, 2014, Sufficient Conditions for the Oscillation of Nonlinear Fractional Difference Equations, Journal Fractional Calculus Applications, 5, 177–187.

Charoenphon S, 2014, Green's Functions of Discrete Fractional Calculus Boundary Value Problems and an Application of Discrete Fractional Calculus to a Pharmacokinetic Model, Masters Theses & Specialists Projects, 1328p, Western Kentucky Univesity, Bowling Gren, Kentucky.

Chen D, Qu P, Lan Y, 2013, Forced Oscillation of Certain Fractional Differential Equations, Advances Difference Equations, DOI:10.1186/1687-1847-2013-125.

Chen D X, 2013, Oscillatory Behavior of a Class of Fractional Differential Equations with Damping, University Politehnica of Bucharest Scientifics Bulletin Series Applied, 75, 107–118.

Cheng J, Chu Y, 2012, Fractional Difference Equations with Real Variable, Abstract and Applied Analysis, Article number 918529.

Chen F, Liu Z, 2012, Asymptotic Stability Results for Nonlinear Fractional Difference Equations, Journal of Applied Mathematics, Article number 879657.

Chen D X, 2012, Oscillation Criteria of Fractional Differential Equations, Advances in Difference Equations, DOI:10.1186/1687-1847-2013-323.

Chen F, Luo X, Zhou Y, 2011, Existence Results for Nonlinear Fractional Difference Equation, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Difference Equations, DOI:10.1155/2011/713201.

Cheng, J F, Chu Y M, 2011, On the Fractional Difference Equations of Order (2; q), Abstract and Applied Analysis, Article number 497259.

Deekshitulu G V S R, Mohan J J, 2013, Solutions of Perturbed Nonlinear Nabla Fractional Difference Equations of Order $0 < \alpha < 1$, Mathematical Eternal, 3, 139–150.

Diaz J B, Osler T J, 1974, Differences of Fractional Order, Mathematics of Computation, 28, 1–17.

Elaydi S, 2004, An Introduction to Difference Equations, Springer, Third edition, Texas, USA.

Er F, 2016, Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Standart Olmayan Theta Metodu, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.

Grace S R, Agarwal R P, Wong P J Y, Zafer A, 2012, On the Oscillation of Fractional Differential Equations, Fractional Calculus Applied Analysis, l15, 222–231.

Goldberg S, 1958, Introduction to Difference Equations, John Wiley and Sons, New York.

Goodrich C S, 2012, On a Discrete Fractional Three-point Boundary Value Problem, Journal of Difference Equation Applications, 18, 397–415.

Goodrich C S, 2011, Existence of a Positive Solution to a System of Discrete Fractional Boundary Value Problems, Applied Mathematics Computation, 217, 4740–4753.

Han Z, Zhao, Y Sun, Zhang C, 2016, Oscillation for a Class of Fractional Differential Equation, Discrete Dynamics in Nature and Society, Article number 390282.

Han Z, Sun Y, Zhang C, Zhao Y, 2013, Oscillation for a Class of Fractional Differential Equation, Doi: 10.1155/2013/390282.

Kısalar S, 2015, Kesirli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Kelley W G, Peterson A C, 2001, Difference Equations: An Introduction with Applications, Akademic Press, Second edition, USA.

Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.

Kulenovic M R S,Ljubovic C, 2000, Necessary and Sufficient Conditions for the Oscillation of a Second Order Linear Differential Equation, DOI: 10.1002/1522-2616.

Kuttner B, 1957, On Differences of Fractional Order, Proceedings of The London Mathematical Society., 3, 453–466.

Li W N, 2015, Forced Oscillation Criteria for a class of Fractional Partial Differential Equations with Damping Term, Mathematics Problems in Engineering, Article number 410904.

Li W N, 2015, On the Forced Oscillation of Certain Fractional Partial Differential Equations, Applied Mathematics Letters, 50, 5–9.

Li W N, 2016, Oscillation Results for Certain Forced Fractional Difference Equations with Damping Term, DOI:10.1186/s13662-016-0798-2.

Marian S L, Loganathan M P, Maria Selvam A G, Sagayaraj M R, 2013, Oscillation of Caputo Like Discrete Fractional Equations, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 89, 667–677, Marian S L, Sagayaraj M R, Selvam A G M, Loganathan M P, 2012, Oscillation of Fractional Nonlinear Difference Equations, Mathematical Eternal, 2, 805–813.

Miller K S, Ross B, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, USA.

Miller K S, Ross B, 1989, Fractional Difference Calculus in Univalent Functions, Ellis Horwood Series in Mathematics & its Applications, Horwood, Chichester, 139–152.

Ögrekçi S, 2015, Interval Oscillation Criteria for Functional Differential Equations of Fractional Order, Advances in Difference Equations, Article number 3.

Podlubny I, 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.

Prakash P, Harikrishnan S, Benchohra M, 2015, Oscillation of Certain Nonlinear Fractional Partial Differential Equation with Damping Term, Applied Mathematics Letters, 43, 72–79.

Sagayaraj M R, Selvam A G M, Loganathan M P, 2014, On the Oscillation of Nonlinear Fractional Difference Equations, Mathematical Eternal, 4, 91–99.

Sengul S, 2010, Discrete Fractional Calculus and Its Applications to Tumor Growth, Masters Theses & Specialists Projects, 161p, Western Kentucky University, Bowling Green, Kentucky.

Tollu D T, 2009, Bazı Fark Denklemlerinin Kararlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Qi C, Cheng J, 2013, Interval Oscillation Criteria for a Class of Fractional Differential Equations with Damping Term, Mathematical Problems in Engineering, Article number 301085.

Wang Y, Han Z, Sun S, 2015, Comment on ‘On the Oscillation of Fractional-Order Delay Differential Equations with Constant Coefficients’, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 26, 195–200.

Yang J, Liu A, Liu T, 2015, Forced Oscillation of Nonlinear Fractional Differential Equations with Damping Term, Advances in Difference Equations, Article number 1.

Yılmaz E, 2018, Lineer Olmayan Kesirli Fark Denklemleri için Salınımlılık Kriterleri, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Zheng B, 2013, Oscillation for a Class of Nonlinear Fractional Differential Equations with Damping Term, Journal of Advanced Mathematical Studies, 6, 107–115.

Zhou Y, 2014, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore.

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hüsniye ÖZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Çobanlar, 15.05.1991
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0546 737 11 76 / husniye_dt03060@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Çay İMKB Anadolu Lisesi (2005 – 2009)
Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2010 – 2014)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2017 – 2020)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

: Ataköy Orta Okulu (2015 – 2016)

: Hattat Ahmet Karahisari Anadolu İmam Hatip Lisesi (2018 – 2019)

: Geben Şehit Ramazan Avcı Anadolu Lisesi (2019 – Devam Ediyor)