YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bahri BEKTAŞ

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bahri BEKTAŞ

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2020

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23 / 07 / 2020

Bahri BEKTAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN
FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
SALINIMLILIĞI

Bahri BEKTAŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışmasında amaç; yüksek mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı hakkında bilgi vermektir. Tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, birinci mertebeden gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir. Dördüncü bölüm monoton olmayan argümanlı yüksek mertebeden gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgilidir. Son bölümde ise; yüksek mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ve salınımlı olmayan çözümleri incelenmiştir.

2020, v+ 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Yüksek mertebeden fark denklemi, Salınımlılık, Gecikmeli fark denklemi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF SOLUTION OF HIGHER ORDER
DIFFERENCE EQUATIONS

Bahri BEKTAŞ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Sermin ÖZTÜRK

The aim of this thesis is to give information about the oscillation of the solutions of higher order difference equations. This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter, the oscillation of solutions of first order delay difference equations are investigated. Fourth chapter, deals with oscillation of solutions of higher order delay difference equations with non-monotone arguments. In the last chapter, oscillation and non oscillating solutions of higher order difference equations are studied.

2020, v + 44 pages

Keywords: Difference equation, High order difference equation, Oscillation, Delay difference equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Bahri BEKTAŞ
Afyonkarahisar, 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
Δ	İleri fark operatörü
E	Öteleme (Kaydırma) operatörü
$\boldsymbol{\Sigma}$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
Z	Tam sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
$x'(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu
$x''(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\forall$	Her, tüm
$\cup$	Birleşim
Ln	Doğal logaritma fonksiyonu
∞	Sonsuz
$\rightarrow$	Yaklaşır

1 GİRİŞ

Gelişen ve değişen teknoloji ile birlikte mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, genetik, kuantum, ekonomi gibi bilim alanlarında yaşanan gelişmeler beraberinde matematiksel problemleri de getirmektedir. Bu problemlerin çözümü, genellikle fark denklemleri ile yapılmaktadır. Çünkü; bu alanlarda karşılaşılan problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlarla karşılaşılabilir. Fark denklemi; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferensiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine, fonksiyonel denklemler de denir (Elaydi 2000).

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi $y^{'}(x)$, $y''(x), \ldots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak, x 'in ayrık (discrete) değerler alması durumunda değişim, türevler yardımıyla açıklanamaz. Burada, içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri devreye girer.

Diferensiyel denklemlerde, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade edilebilirken; 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde; devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide; talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır (Tollu 2009).

Ardışık tekrar işlemi bir önceki adımda bulunan değerin bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmesidir. Fark denklemlerinde ise ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istenilen bir terimin değeri bulunabilir. Ayrıca sadece kesikli (süreksiz) değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler ardışık tekrar işlemlerinin de yardımı ile fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilebilir. Örneğin, ekonomide böyle bir değişken zamandır (Goldberg 1960).

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır, zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların pek çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluşturur. Daha da önemlisi, fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metotlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir.

Sonuç olarak, fark denklemleri teorisinin ilginç olduğunu ve yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağını söyleyebiliriz. Böylece, fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve birçok bilim dalında kullanılmaktadır.

M.Ö. 450 'lerde daha açık formda Pisagor 'un üçgensel sayılar çalışmasında; $t^n = t^{n-1} + n$ denklemi ve $S_n = S_{n-1} + n^2$ tam kare sayı denklemi fark denklemlerine katkılar sağlamıştır. Pisagor ayrıca Pell denkleminin, $(x^2 - 2y^2 = 1)\sqrt{2}$ civarındaki çözümü içinde fark denklemini kullanmıştır.

M.S. 400-1200 yılları arası matematik bilimi adına sönük bir dönemdir. Avrupa'da bu dönemde etkileyici bir çalışma olmamıştır. Ortadoğu 'da yapılan çalışmalarda öne çıkan isim Ömer Hayyam olmuştur. Kesin olarak bilinmemekle birlikte 1000-1100 yılları civarında, Chia Hsien ve Omer Hayyam en eski fark denklemi örneklerinden olan;

$$b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$$

eşitliği üzerinde çalışmışlardır (Lankshmikantham, Trigiante 2002).

Fark denklemlerinin kesin olarak olarak bilinmemekle birlikte bir çok kaynakta, ünlü İtalyan matematikçi olan ve daha çok Fibonocci olarak bilinen Leonardo di Pisa tarafından, 1202 'de Liberabaci de yazılan abaküs hakkındaki bir kitabında görülen ve tavşan problemi olarak bilinen problemi, fark denklemlerinin başlangıcı olarak bilinir. Bu problemin çözümü olarak bilinen Fibonocci Dizisi çok ilgi çekici bir problemdir. Bu problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

"Her yeni çift tavşan iki aylık olduğunda, her ay bir çift tavşan yavrulayabiliyorsa bir yılda kaç çift tavşan üremiş olur?" Bu problem,

Aylar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Çiftler	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

tablosu ile gösterilebilir. Burada, bu problemin matematik modellemesi yapılırsa;

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n); \;\; y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad 0 \leq n \leq 10$$

şeklinde ikinci mertebeden bir fark denklemi ortaya çıkar.

18. yy 'da temel lineer fark denklemleri teorisini geliştiren matematikçiler Moivre, Euler, Lagrange, Laplace, Simson, Cotes olmuştur. Yine bu dönemde, Riccati'nin çalışmaları olmuştur.

$$x(n+1) = \frac{a + bx(n)}{c + dx(n)}$$

denklemi Riccati fark denklemi olarak bilinir. 1755' te Euler'in "Institutiones Calculi Differentials" eseri sonlu fark hesaplaması ile başlamaktadır. Kitapta; Euler'in sonlu fark için "Δ" sembolünü kullandığı görülmektedir. Bu da kısaca $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$ eşitliğini yazma kolaylığını getirmiştir.

Diferensiyel denklemler iki yüz yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemleri yüzyıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Sonlu fark işlemleri ilk olarak, Newton ile yayılmaya başlamıştır. Daha sonra Laplace, fark denklemi üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemleri konusu ele alınmamasına rağmen, 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiştir. Lagrange, doğrusal diferensiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde ederken, Guichard 1887' de denklemin ikinci tarafındaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiştir. Gelgrun ise bu tür denklemlerin, asimptotik çözümleri üzerine çalışmış, Birkhoff ve Carmichael ise bu çalışmaları genişletmişlerdir (Çatal, 2004).

Liouville ve Sturm, ikinci mertebeden selfadjoint doğrusal diferensiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan; Sturm-Liouville fark denklemlerinin çözümünü ifade etmişlerdir. March Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denkleminin asimptotik üstel çözümlerinin özelliklerini geliştirmiştir. Popenda ise ikinci mertebeden fark denkleminin salınımlı ve salınımsız durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur. Kaczorek, n -inci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denkleminin açık formdaki çözümlerini vermiştir.

1850 'li yıllardan sonra, herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla ilgili tahminler yapılırken, bu türün çoğalmasını etkileyebilecek tüm iç, dış ve çevresel faktörlerin göz önüne alınması gerekli olduğundan fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır. 1900 'lerde, ardışık denklemler bazı matematiksel mucizeler oluşturmaya başlamıştır. Bunlar; düzlem doldurma eğrileri ya da fraktallarla başlar. Bu eğriler, hiçbir boşluk bırakmadan düzlem dolduran eğrilerdir. Bunun gibi eğriler ilk olarak 1890 yılında Peano tarafından keşfedilmiştir. Fark denklemlerini düzlem doldurma eğrileri ile kullanan diğer matematikçiler; Hilbert ve Van Koch olmuştur. Düzlem doldurma eğrilerinin ve fraktalların birçok uygulaması vardır. Bunlardan biri de adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kapalı ve açık yinelemeli yöntemler ailesinin önemli bir türü olan Runge-Kutta yöntemidir. Böylece, artık fark denklemleri kullanılarak diferensiyel denklemlerin, nümerik çözüm yöntemlerine geçilmiştir.

Bu araştırmalar, matematikçileri dinamik sistemler üzerinde yeni keşifler yapmaya yöneltmiştir. Sonrasında ise elde edilen sonuçlar ekonomiden tıpa birçok alanda uygulama alanı bulmaya başlamıştır.

Diferensiyel ve fark denklemlerinin salınımlılığı, bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Son yıllarda gecikmeli diferensiyel denklemler ve fark denklemlerinin salınımlı ve salınımsız çözümleri ile ilgili birçok çalışma yapılmaktadır.

Yüksek mertebeden bir fark denklemi; $(p(n))_{n\geq 0}$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve $(\tau(n))_{n\geq 0}$ tamsayılar dizisi olmak üzere

$$\Delta^m x(n) + p(n)x(\tau(n) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada Δ; $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ şeklinde tanımlı ileri fark operatörüdür ve

$$\tau(n) \leq n - 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.2}$$

dir. Burada tanımlanan (1.1) denkleminin çözümü,

$$r = -\min \tau(n)$$

pozitif bir tamsayı olmak üzere (1.1) denklemini sağlayan $\{x(n)\}_{n \geq -r}$ dizisidir.

Eğer, $(x(n))$ dizisinin terimleri ne ergeç pozitif ne de ergeç negatif ise (1.1) fark denkleminin $\{x(n)\}_{n \geq -r}$ çözümü salınımlıdır denir. Aksi takdirde çözüme, salınımlı olmayan çözüm denir.

Eğer $m = 1$ ise (1.1) denklemi,

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \ n = 0, 1, ... \tag{1.3}$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak $l > 0$ için $\tau(n) = n - l$ olmak üzere (1.3) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\Delta x(n) + p(n)x(n - l) = 0 \tag{1.4}$$

elde edilir. L. H. Erbe ve B. G. Zhang, 1989 'da yaptıkları çalışmada,

$$\liminf_{n \to \infty} p(n) > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}} \tag{1.5}$$

ve

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{j=n-l}^{n} p(j) > 1 \tag{1.6}$$

şartlarından herhangi birinin sağlanmasının (1.4) denkleminin her çözümünün salınımlılığı için yeter şart olduğunu göstermişlerdir.

Yine, 1989 'da G. Ladas, Ch. G. Philos ve Y. G. Sficas

$$\liminf_{n \to \infty} \left[\frac{1}{l} \sum_{j=n-l}^{n} p(j) \right] > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}} \tag{1.7}$$

şartı altında (1.4)denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu ispatlamıştır.

1991 'de Ch. G. Philos, (1.7) salınımlılık şartını daha da genelleştirerek, eğer $(\tau(n))_{n \geq 0}$ artan ise,

$$\liminf_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n - \tau(n)} \sum_{j=n-l}^{n} p(j) \right] > \limsup_{n \to \infty} \frac{(n - \tau(n))^{n - \tau(n)}}{(n - \tau(n) + 1)^{n - \tau(n) + 1}} \tag{1.8}$$

şartının (1.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için bir yeter şart olduğunu göstermiştir.

B. G. Zhang ve C. J. Tian, 1998 yılındaki çalışmalarında, $(\tau(n))$ azalmayan bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty}(n-\tau(n))=\infty \tag{1.9}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)>\frac{1}{e} \tag{1.10}$$

şartı altında (1.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu ispatlamışlardır.

Daha sonra, 1998 'de, yine B. G. Zhang ve C. J. Tian yaptıkları çalışmada $(\tau(n))$ 'nin azalmayan veya monoton olmaması durumunda,

$$\limsup_{n\to\infty}p(n)>0 \tag{1.11}$$

ve (1.10) şartları sağlanıyorsa (1.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu elde etmişlerdir.

2008 'de ise G. E. Chatzarakis, R. Koplatadze ve I. P. Stavroulakis , $(\tau(n))$ azalmayan veya monoton olmayan bir dizi, $h(n)=\max_{s\leq n}\tau(n)$ ve

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)>1 \tag{1.12}$$

eşitsizliği sağlandığında, (1.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olacağını belirtmişlerdir.

Yine aynı yıl yaptıkları farklı bir çalışmada, $(\tau(n))$ azalmayan veya monoton olmayan bir dizi, $h(n)=\max_{s\leq n}\tau(n)$,

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)<\infty \tag{1.13}$$

ve (1.10) sağlanıyorsa, (1.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu göstermişlerdir.

W. Yan, Q. Meng , J. Yan 'ın 2006 yılında yaptıkları çalışmalarında ise $(\tau(n))$ azalmayan bir dizi olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)>0 \tag{1.14}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} p(j)\frac{(j-\tau(j))^{j-\tau(j)}}{(j-\tau(j)+1)^{j-\tau(j)+1}} > 1 \tag{1.15}$$

şartları sağlanıyorsa, (1.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğu ispatlamışlardır.

Yukarıda yapılan çalışmaların ışığı altında hazırlanan bu yüksek lisans tezi, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümü olup, literatürde bulunan çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde, konunun temelini oluşturan bazı tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, birinci mertebeden fark denklemleri için daha önce verilen salınımlılık kriterleri üzerinde durulmuştur. Dördüncü ve beşinci bölümlerde ise yüksek mertebeden fark denklemleri için verilen salınımlılık kriterleri sunulmuştur.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde ihtiyaç duyulacak olan, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmalar verilecektir. İlk olarak; fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Son olarak ise fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999 ve Agarwal 2000).

Tanım 2.1.2 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \ldots.x_{n+k} \tag{2.1}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya k -ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin, $x_{n+4} + 3x_{n+3} - x_{n+2} = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.4 Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.2}$$

şeklinde verilirse, k -ıncı mertebeden (2.1) fark denklemine lineerdir denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.2) fark denklemine homojen olmayan lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in}x_{n+i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde verilirse (2.3) fark denklemine homojen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.5 Fark denklemlerinde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmeksiz terimlerinin en yüksek mertebeden farkını içeren denklemlere nötral (neutral) tipten fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.6 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere k -ıncı mertebeden

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k} + ... + p_{kn}x_n = 0 \tag{2.4}$$

fark denklemine lineer homojen fark denklemi denir. Eğer denklem

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k} + ... + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.5}$$

şeklinde ise bu denklem homojen olmayan lineer fark denklemi olarak adlandırılır. Burada; p_{in} ve g_n, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır.(Agarwal 2000).

Tanım 2.1.7 Eğer $n \geq n_0$ için,

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + ... + a_r f_{rn} = 0 \tag{2.6}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan a_1,$a_{2,...,}a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, ..., f_{rn}$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham and Trigiante 1988).

Tanım 2.1.8 (2.4) denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, temel çözümler kümesi denir (Elaydi 1999, Lankshmikantham and Trigiante 1988).

Tanım 2.1.9 $\{x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{kn}\}$ (2.5) fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ’ler keyfi sabitler olmak üzere (2.4) fark denkleminin genel çözümü

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_{in} \tag{2.7}$$

ile verilir (Elaydi 1999).

Tanım 2.1.10 k -ıncı mertebeden,

$$x(n+k)+p_1x(n+k-1)+...+p_k=0 \tag{2.8}$$

fark denklemini ele alalım. Burada p_i 'ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. (2.8) denkleminden λ^n 'i çözüm kabul edip denklemde yerine yazılırsa,

$$\lambda^k+p_i\lambda^{k-1}+...+p_k=0 \tag{2.9}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme, (2.8) fark denkleminin karakteristik denklemi ve λ 'lara ise (2.9) denkleminin karakteristik kökleri denir. (2.8) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak üç durum söz konusudur:

1. Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_{1,}\lambda_{2,...,}\lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,...,\lambda_k^n\}$ ifadesi (2.8) fark denkleminin temel çözümler kümesi olur ve (2.8) fark denkleminin genel çözümü, a_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$x(n)=\sum_{i=1}^{k}a_i\lambda_i^n \tag{2.10}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

2. Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_{1,}$ $\lambda_{2,...,}$ λ_k kökleri reel ve sırasıyla $m_{1,}m_2,...,m_k$ katlı ise (2.8) denklemini

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}...(E-\lambda_k)^{m_k}x_n=0 \tag{2.11}$$

şeklinde yazabiliriz. $(E-\lambda_i)^{m_i}=0$, $1\leq i\leq r$ denkleminin temel çözümler kümesi $G_i=\{\lambda_i^n,n\lambda_i^n,...,n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ olduğundan (2.11) 'in temel çözümler kümesi $G=\bigcup_{i=1}^{r}G_i$ olur ve (2.11) 'in genel çözümü

$$x(n)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^n(a_{i0}+a_{i1}n+a_{i2}n2+...+a_{im_i-1}n^{m_i-1}) \tag{2.12}$$

şekilinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

3. Durum: (2.9) karakteristik denklemi $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=a-i\beta$ kompleks köklerine ve $\lambda_3\neq\lambda_4\neq...\neq\lambda_k$ şeklindeki reel köklere sahip olsun. Bu durumda genel çözüm,

$$x(n)=c_1(a+i\beta)^n+c_2(a-i\beta)^n+c_3(\lambda_3)^n+c_4(\lambda_4)^n+...+c_k(\lambda_k)^n \tag{2.13}$$

şeklinde olur.

Burada; $\alpha = r.cos\theta$, $\beta = r.sin\theta$, $r = \alpha_2 + \beta_2$, $\theta = tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$ olmak üzere

$$x(n) = r^n[a_1cos(n\theta) + a_2sin(n\theta)] + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + ... + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.14}$$

olur ve (2.14) 'de $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$, $w = tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$

$$x(n) = Ar^ncos(n\theta - w) + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + ... + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.15}$$

şeklinde yazılır (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

Örneğin; $x(n+3) - 4x(n+2) + 5x(n+1) - 2x(n) = 0$ fark denklemi gözönüne alınsın. Burada; başlangıç değerleri $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ şeklinde verilen başlangıç değer probleminin çözümünü inceleyelim:

Bu denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

şeklinde olup karakteristik denklemin kökleri;

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 2$ 'dir. Bu durumda, denklemin genel çözümü,

$$x(n) = (a_0 + na_1)1^n + b_12^n$$

şeklinde yazılabilir. Verilen başlangıç şartları denklemde yerine yazılırsa; $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ bulunur. Böylece problemin çözümü

$$x(n) = \frac{1}{2}(-1 + n + 2^n)$$

olur.

Tanım 2.1.11 $\forall \in n \geq n_0$ için $p_{nk} \neq 0$ olmak üzere k -ıncı mertebeden lineer homojen olmayan

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + ... + p_{kn}x(n) = g(n) \tag{2.16}$$

fark denkleminin homojen çözümü $x(cn)$ ve homojen olmayan kısmının çözümü $x(pn)$ olmak üzere, (2.16) fark denkleminin genel çözümü $x(n) = x(cn) + x(pn)$ şeklindedir.

Teorem 2.1.1 (2.16) fark denkleminin genel çözümü

$$x(n) = x(pn) + \sum_{i=1}^{k} a_i x(in)$$

dir. Burada; $\{x(1n), x(2n), ..., x(kn)\}$ kümesi (2.16) fark denkleminin homojen kısmının temel çözümler kümesidir (Elaydi 1999).

Tanım 2.1.12 Eğer her pozitif n tamsayısı ve $n \geq n_0$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ şartını sağlayan x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde, x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif veya sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal 2000, Gyori and Ladas 1991 ve Elaydi 1999).

Tanım 2.1.13 k -ıncı mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $\{x_n\}$çözümü - $x_n = \left[x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k\right]^T$olsun. Eğer her bir $\{x_n^i\}$ bileşeni salınımlı ise $\{x_n\}$çözümüne salınımlıdır denir. Diğer durumda, yani; bir $\{x_n^i\}$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif veya negatif ise $\{x_n\}$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $n = 0, 1, 2, ...$ için $x_n \in \mathbb{R}^r$ 'dir (Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.2 $k, l \in \mathbb{N}$ ve $j = -k, ..., l$ için $p_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{j=-k}^{l} x(n+j) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.17}$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu durumda aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) (2.16) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır

(ii)(2.16) fark denkleminin

$$\lambda - 1 + \sum_{j=-k}^{l} p_j \lambda^j = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif kökü yoktur (Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.3 $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0 \tag{2.18}$$

şeklindeki $(k+1)$ -inci mertebebeden otonom fark denklemi göz önüne alınsın. Bu durumda (2.18) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart

(i) $k=-1$ ise $p\leq -1$;

(ii) $k=0$ ise $p\geq 1$;

(ii) $k\in\{...-3,-2\}\cup\{1,2,...\}$ ise $p>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

ifadelerinden herhangi birinin sağlanmasıdır (Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.1.4 $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{s=n-l}^{n-1}q(s)>\left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}$$

şartı sağlanıyorsa,

$$\Delta v(n)+q(n)v(n+1)\geq 0 \tag{2.19}$$

denklemi bir pozitif çözüme sahip değildir (Thandapani, Arul and Raja 2002).

Teorem 2.1.5 $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve k pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}p(i)>(\frac{k}{k+1})^{k+1}$$

ise

$$A(n+1)-A(n)+p(n)A(n-k)=0,\qquad n=0,1,2, \tag{2.20}$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas, Philos and Sficas 1986).

Teorem 2.1.6 $0\leq p\leq 1$ ve $0\leq a\leq 1$ olsun. Bu durumda $n=0,1,2,\ldots$ için

$$\Delta(x\,(n)-px(n-1))+q(n)x^a(n-k)=0 \tag{2.21}$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır (Zhang 2002).

Lemma 2.1.1 $1\leq m\leq n-1$ ve $\mathbb{N}(a)=\{a,a+1,a+2,...\}$ üzerinde bir $u(k)$ fonksiyonu tanımlı olsun. Bu durumda

(i) $\liminf\limits_{k\to\infty}\Delta^n u(k)>0$ ise, $1\leq i\leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta^i u(k)=\infty$ 'dur.

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty}\Delta^n u(k)<0$ ise, $1\leq i\leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta^i u(k)=-\infty$ 'dur.

(Agarwal 2000).

İspat: İlk olarak birinci durumu göz önüne alalım. Yani, $\liminf\limits_{k\to\infty}\Delta^n u(k)>0$ olsun. Bu durumda, her $k\in\mathbb{N}(k_1)$ için $\Delta^i u(k)\geq c>0$ olacak şekilde yeterince büyük bir $k_1\in\mathbb{N}(a)$ vardır. Buradan,

$$\Delta^m u(l)=\Delta(\Delta^{m-1}u(l))$$

$$\Delta^m u(l) = \Delta^{m-1}u(l+1) - \Delta^{m-1}u(l)$$

denkleminin her iki tarafı k_1 'den $k-1$ toplanırsa,

$$\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \left[\Delta^{m-1}u(l+1) - \Delta^{m-1}u(l)\right]$$

elde edilir. Sağ tarafta ki toplam açılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) &= \Delta^{m-1}u(k) - \Delta^{m-1}u(k-1) + \Delta^{m-1}u(k-1) - \Delta^{m-1}u(k-2) \\
&\quad + ... + \Delta^{m-1}u(k_1+1) - \Delta^{m-1}u(k_1) \\
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) &= \Delta^{m-1}u(k) - \Delta^{m-1}u(k_1)
\end{aligned}$$

olur. Burada, $\Delta^{m-1}u(k)$ ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$\Delta^{m-1}u(k) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^i u(l) + \Delta^{m-1}u(k_1) \tag{2.22}$$

elde edilir. İspatın başında kabul edilen $\Delta^i u(k) \geq c > 0$ eşitsizliğinin her iki tarafı k_1 'den $k-1$ 'e toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^i u(k) &\geq \sum_{l=k_1}^{k-1} c \\
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^i u(k) &\geq c(k-k_1) \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan (2.23) eşitsizliği (2.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\Delta^{m-1}u(k) \geq c(k-k_1) + \Delta^{m-1}u(k_1)$$

elde edilmiş olur. $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) &\geq \lim_{k\to\infty} \left[c(k-k_1) + \Delta^{m-1}u(k_1)\right] \\
\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) &= \infty
\end{aligned}$$

olur ki $i = m-1$ için ispat tamamlanmış olur. $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) = \infty$ oluyorsa $\liminf\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) > 0$ 'dır. Yukarıdaki adımlar küçültülerek devam edilirse $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^{m-2}u(k) = \infty$ elde edilir. Bu adımlar ardışık olarak tekrarlandığında (i) ifadesi ispatlanmış olur.

(ii) Şimdi ise $\limsup\limits_{k\to\infty} \Delta^n u(k) < 0$ olsun. Bu durumda, her $k \in \mathbb{N}(k_2)$ için $\Delta^i u(k) \leq c < 0$ olacak şekilde yeterince büyük $k_2 \in \mathbb{N}(a)$ vardır. Birinci durumda olduğu gibi

$$\Delta^m u(l) = \Delta(\Delta^{m-1} u(l))$$

$$\Delta^m u(l) = \Delta^{m-1} u(l+1) - \Delta^{m-1} u(l)$$

eşitliğinin her iki tarafı k_1 den $k-1$ 'e toplanırsa,

$$\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \left[\Delta^{m-1} u(l+1) - \Delta^{m-1} u(l)\right]$$

elde edilir. Buradan, sağ tarafın toplamı açılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) &= \Delta^{m-1} u(k) - \Delta^{m-1} u(k-1) + \Delta^{m-1} u(k-1) - \Delta^{m-1} u(k-2) \\
&\quad + ... + \Delta^{m-1} u(k_1+1) - \Delta^{m-1} u(k_1) \\
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) &= \Delta^{m-1} u(k) - \Delta^{m-1} u(k_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $\Delta^{m-1} u(k)$ ifadesi yalnız bırakılırsa,

$$\Delta^{m-1} u(k) = \sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^m u(l) + \Delta^{m-1} u(k_1) \tag{2.24}$$

bulunur. İspatın başında kabul edilen $\Delta^i u(k) \leq c < 0$ eşitsizliğinin her iki tarafı k_1 'den $k-1$ 'e toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^i u(k) &\leq \sum_{l=k_1}^{k-1} c \\
\sum_{l=k_1}^{k-1} \Delta^i u(k) &\leq c(k-k_1) \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.25) eşitsizliği (2.24) 'de yerine yazılırsa,

$$\Delta^{m-1} u(k) \leq c(k-k_1) + \Delta^{m-1} u(k_1)$$

olur. $k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1} u(k) &\leq \lim_{k\to\infty} \left[c(k-k_1) + \Delta^{m-1} u(k_1)\right] \\
\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1} u(k) &= -\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $i = m - 1$ için ispat tamamlanmış olur. Bu durumda, $\Delta^{m-1}u(k) = \infty$ oluyorsa $\limsup_{k\to\infty} \Delta^{m-1}u(k) < 0$ eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki adımlar küçültülerek devam edilirse $\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-2}u(k) = -\infty$ elde edilir. Bu adımlar ardışık olarak tekrarlandığında, (ii) ifadesi ispatlanmış olur.

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, $n = 0, 1, 2, ...$ için $(p(n))_{n\geq 0}$ negatif olmayan bir reel sayı dizisi ve

$$\tau(n) \leq n - 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.1}$$

olacak şekilde azalmayan veya monoton olmayan bir $(\tau(n))_{n\geq 0}$ tamsayı dizisi olmak üzere,

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı üzerinde durulacaktır. Bu bölümde temel kaynak olarak, Öcalan (2016) alınmıştır.

Bu çalışma boyunca,

$$h(n) = \max_{s\leq n} \tau(n), \qquad n \geq 0 \tag{3.3}$$

olarak kabul edilecektir. Burada, her $n \geq 0$ için $h(n)$ azalmayan ve $h(n) \geq \tau(n)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\tau(n)$ azalmayan ise $n \geq 0$ için $h(n) = \tau(n)$ 'dir.

Şimdi,

$$k(n) = \left(\frac{n - \tau(n) + 1}{n - \tau(n)}\right)^{n-\tau(n)+1}, \qquad n \geq 1 \tag{3.4}$$

tanımlanmış olsun. $\tau(n) \leq n - 1$ ifadesinden,

$$\begin{aligned}
k(n) &\leq \left(\frac{n - (n-1) + 1}{n - (n-1)}\right)^{n-(n-1)+1} \\
k(n) &\leq \left(\frac{n - n + 1 + 1}{n - n + 1)}\right)^{n-n+1+1} \\
k(n) &\leq 4
\end{aligned}$$

$k(n) \leq 4$ bulunur. Yine, $\lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty$, $n = 0, 1, 2, ...$ olduğundan,

$$\lim_{\tau(n)\to-\infty} k(n) = \lim_{\tau(n)\to-\infty} \left(\frac{n - \tau(n) + 1}{n - \tau(n)}\right)^{n-\tau(n)+1}$$

yazılabilir. Limit hesaplandığında $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği görülür. Buradan,

$$\lim_{\tau(n)\to-\infty} \left(\frac{n - \tau(n) + 1}{n - \tau(n)}\right)^{n-\tau(n)+1} = p$$

yazılıp her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{\tau(n)\to-\infty}\left(\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}\right)^{n-\tau(n)+1}\right] &= \ln b\\
\lim_{\tau(n)\to-\infty}(n-\tau(n)+1)\ln\left(\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}\right) &= \ln b
\end{aligned}$$

elde edilir. $(n-\tau(n)+1)\to\infty$ için $\left(\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}\right)\to 0$ olur. Yani; $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\infty.0$ belirsizliğine dönüşür. Bunu çözmek için ise

$$\lim_{\tau(n)\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}\right)}{\frac{1}{(n-\tau(n)+1)}}=\ln b$$

yazılır ve $\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}=u$ alınıp L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{\tau(n)\to-\infty}\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}=1$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau(n)\to-\infty}\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)} &= 1=\ln b\\
b &= e
\end{aligned}$$

olur ki $e\leq k(n)$ sonucuna ulaşılır. O halde, $e\leq k(n)\leq 4$ olduğu açıkça görülür.

Lemma 3.1 Kabul edelimki; $p(n)\geq 0$ ve (3.1) sağlansın. Bu durumda, $k(n)$, (3.4) deki şekilde tanımlanmak üzere.

$$m=\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)k(j)=\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n-1}p(j)k(j) \tag{3.5}$$

elde edilir.

İspat: $h(n)$ azalmayan ve her $n\geq 0$ için $h(n)\geq\tau(n)$ olduğundan

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)k(j)\leq\sum_{j=h(n)}^{n-1}p(j)k(j)$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)k(j)\leq\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n-1}p(j)k(j)$$

yazılabilir. Kabul edelim ki; (3.5) şartı sağlanmasın. Bu durumda, öyle bir $m' \geq 0$ ve $l \to \infty$ için $n_l \to \infty$ olacak şekilde bir $\{n_l\}$ dizisi vardır öyleki;

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=h(n_l)}^{n_l-1} p(j)k(j) \leq m' < m$$

olur. $h(n_l) := \max\limits_{s\leq n_l} \tau(s)$ tanımından $h(n_l') = \tau(n_l)$ olacak şekilde bir $n_l' \leq n_l$ vardır. Bu durumda,

$$\sum_{j=h(n_l)}^{n_l-1} p(j)k(j) = \sum_{j=\tau(n_l')}^{n_l-1} p(j)k(j) \geq \sum_{j=\tau(n_l')}^{n_l'-1} p(j)k(j)$$

yazılabilir.

$$\left\{\sum_{j=h(n_l)}^{n_l'-1} p(j)k(j)\right\}_{l=1}^{\infty}$$

dizisi sınırlı bir dizi olduğundan yakınsak bir alt diziye sahiptir. O halde, $t \to \infty$ için

$$\sum_{j=\tau(n'_{l_t})}^{n'_{l_t}-1} p(j)k(j) \to c \leq m' < m$$

olur ki, bu da

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) \leq m' < m$$

olmasını gerektirir. Bu ifade, (3.5) ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2 Kabul edelim ki, $(p(n))$ negatif olmayan bir reel sayı dizisi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > M \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir $M > O$ sayısı var olsun. Eğer $x(n)$,

$$\Delta x(n) + p(n)x(n-k) \leq 0 \tag{3.7}$$

denkleminin bir pozitif bir çözümü ise yeterince büyük her n için öyle bir n^* tamsayısı vardırki $n-k \leq n^* \leq n-1$ için

$$\frac{x(n^*-k)}{x(n^*)} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2$$

dir.

İspat: $x(n)$, (3.7) eşitsizliğinin bir pozitif çözümü olsun.(3.6) 'dan büyük $n \geq n_0$ için

$$\sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > M$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, $n \geq n+k$ için $n-k \leq n^* \leq n-1$ olacak şekilde bir n^* vardır öyle ki,

$$\sum_{i=n-k}^{n^*} p(i) \geq \frac{M}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=n^*}^{n-1} p(i) \geq \frac{M}{2} \tag{3.8}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (3.7) 'den $(x(n))$ azalan olduğundan

$$\begin{aligned} x(n-k) - x(n^*+1) &= \sum_{i=n-k}^{n^*} (x(i) - x(i+1)) \\ &\geq \sum_{i=n-k}^{n^*} p(i)x(i-k) \\ &\geq \left(\sum_{i=n-k}^{n^*} p(i) \right) x(n^*-k) \\ &\geq \frac{M}{2} x(n^*-k) \end{aligned} \tag{3.9}$$

ve

$$\begin{aligned} x(n^*) - x(n+1) &= \sum_{i=n^*}^{n} (x(i) - x(i+1)) \\ &\geq \sum_{i=n^*}^{n} p(i)x(i-k) \\ &\geq \left(\sum_{i=n*}^{n} p(i) \right) x(n-k) \\ &\geq \frac{M}{2} x(n-k) \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} x(n^*) &\geq \frac{M}{2} x(n-k) \geq \frac{M}{2}\frac{M}{2} x(n^*-k) \\ x(n^*) &\geq \left(\frac{M}{2}\right)^2 x(n^*-k) \\ \frac{x(n^*)}{x(n^*-k)} &\geq \left(\frac{M}{2}\right)^2 \\ \frac{x(n^*-k)}{x(n^*)} &\geq \left(\frac{2}{M}\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 Kabul edelimki (3.1) sağlansın ve ergeç $p(n) \geq 0$ olsun. Diğer taraftan; $k(n)$, (3.4) deki şekilde tanımlı olmak üzere,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) > 1 \tag{3.11}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: Çelişki için, $(x(n))$ 'nin (3.2) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olduğunu kabul edelim. $n_1 \geq -k$ bir tamsayı olsun öyleki her $n \geq n_1$ için $x(n), x(\tau(n)) > 0$ sağlansın. Buradan, (3.2) denkleminden

$$\begin{aligned} \Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \\ \Delta x(n) &= -p(n)x(\tau(n)) \\ \Delta x(n) &\leq p(n)x(\tau(n)) \end{aligned}$$

olur ki; bu durumda $(x(n))$ artmayan bir dizidir.

Genelliği bozmaksızın, Lemma 3.1 'den kabul edelim ki, $(\tau(n))$ azalmayan olsun. Böylece (3.11) dan bir $n \geq n_0$ ve yeterince küçük bir pozitif ε_0 sayısı vardır öyleki;

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) \geq (1+\varepsilon_0) = d > 1$$

yazılabilir. Lemma 3.2 'den tüm büyük n 'ler için

$$\frac{x(\tau(n))}{x(n)} \geq d^k \tag{3.12}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer tarafdan (3.11) 'den

$$4\sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j) \geq \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j)k(j) \geq \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) \geq d \geq 1 \tag{3.13}$$

elde edilir. Tüm büyük n 'ler ve (3.13) 'den

$$4\sum_{j=\tau(n)}^{n^*} p(j) \geq \frac{d}{2} \text{ ve } 4\sum_{j=n^*}^{n} p(j) \geq \frac{d}{2} \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir $n^* \in (\tau(n), n)$ vardır. $(\tau(n))$ azalmayan ve $(x(n))$ artmayan olduğundan, (3.2) denklemi $\tau(n)$ 'den n^* 'a toplanırsa,.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\tau(n)}^{n^*} (\Delta x(j) + p(j)x(\tau(j))) &= \sum_{j=\tau(n)}^{n^*} 0 \\
\sum_{j=\tau(n)}^{n^*} \Delta x(n) + \sum_{j=\tau(n)}^{n^*} p(j)x(\tau(j)) &= 0 \\
x(n^*+1) - x(\tau(n)) + \sum_{j=\tau(n)}^{n^*} p(j)x(\tau(j)) &= 0 \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda, (3.2) denklemi n^* 'dan n 'ye toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n^*}^{n} (\Delta x(j) + p(j)x(\tau(j))) &= \sum_{j=n^*}^{n} 0 \\
\sum_{j=n^*}^{n} \Delta x(j) + \sum_{j=n*}^{n} p(j)x(\tau(j)) &= 0 \\
x(n+1) - x(n^*) + \sum_{j=n^*}^{n} p(j)x(\tau(j)) &= 0 \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.15) ve (3.16) 'de ilk terimler ihmal edilirse ve (3.13) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
-x(\tau(n)) + x(\tau(n^*))\frac{d}{8} &\leq 0 \\
x(\tau(n^*))\frac{d}{8} &\leq x(\tau(n))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-x(n^*) + x(\tau(n))\frac{d}{8} &\leq 0 \\
x(\tau(n))\frac{d}{8} &\leq x(\tau(n^*))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$x(n^*) \geq x(\tau(n))\frac{d}{8} \geq x(\tau(n^*))\left(\frac{d}{8}\right)^2$$

olur ve böylece

$$\frac{x(\tau(n^*))}{x(n^*)} \leq \left(\frac{8}{d}\right)^2$$

yazılabilir. Bu, (3.12) ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1

$$\Lambda x(n) + \frac{1}{e}x(n-1) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, .. \qquad (3.17)$$

denklemi gözönüne alınsın. Burada; $p(n) = \frac{1}{e}$ ve $\tau(n) = n - 1$ olur. Buradan,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-1}^{n-1} p(j) = \frac{1}{e}$$

olacağı açıktır. Dolayısıyla; daha önce verilen salınımlılık kriterleri yardımıyla (3.17) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı hakkında bir yorum yapılamaz. Ancak

$$m = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-1}^{n-1} p(j)k(j) = \frac{4}{e} > 1$$

olacağından Teorem 3.1 'den (3.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

4 YÜKSEK MERTEBEDEN MONOTON OLMAYAN ARGUMANLI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$\Delta^m x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0 \tag{4.1}$$

şeklindeki m -inci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenecektir. Temel kaynak olarak; Öcalan ve Özkan (2019) çalışmasından yararlanılmıştır.

Lemma 4.1 (Ayrık Kneser Teoremi) $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için $x\,(n)$ tanımlı olsun. Burada, $n \geq n_0$ için $\Delta^m x(n)$ sabit işaretli olmak üzere $x\,(n) > 0$ ve özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda; $0 \leq j \leq m$ olmak üzere $\Delta^m x(n) \leq 0$ için $(m+j)$ tek ve $\Delta^m x(n) \geq 0$ için $(m+j)$ çift olacak şekilde bir j tamsayısı vardır öyleki,

$$j \leq m-1 \text{ ise } (-1)^{j+i}\,\Delta^i x(n) > 0,\, n \geq n_0,\;\; j \leq i \leq m-1 \tag{4.2}$$

ve

$$j \geq 1 \text{ ise } \Delta^i x(n) > 0,\, n \geq n_0,\; 1 \leq i \leq j-1 \tag{4.3}$$

dir.

Özel olarak; $n \geq n_0$ için $\Delta^m x(n) \leq 0$ ve $(x(n))$ sınırlı ise her $n \geq n_0$ için

$$(-1)^{i+1}\,\Delta^{m-i} x(n) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^i x(n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1 \tag{4.4}$$

dir (Agarwal 2000).

İspat: İspat için iki durum söz konusudur.

1. Durum: $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x(n) \leq 0$ olsun. İlk olarak $n \geq n_0 \in N$ için $\Delta^{m-1} x(n) > 0$ olduğunu ispatlayalım. Eğer bunun aksi düşünülürse $\mathbb{N}\,(n_0)$ ’da $n_1 \geq n_0$ sayısı vardır öyleki;

$$\Delta^{m-1} x(n) \leq 0$$

dır. $\Delta^{m-1}x(n)$ azalan olduğundan $\mathbb{N}(n_0)$ 'da sabit olarak tanımlanamaz. Bu durumda; bir $n_2 \in N(n_1)$ vardır öyleki tüm $n \in \mathbb{N}(n_2)$ için

$$\Delta^{m-1}x(n) \leq \Delta^{m-1}x(n_2) \leq \Delta^{m-1}x(n_1) \leq 0$$

dir. Fakat Lemma 2.1.1 'den

$$\lim_{k\to\infty} x(n) = -\infty$$

bulunur. Bu da, $x(n) > 0$ olması ile çelişir. Böylece, $\mathbb{N}(n_0)$ 'da $\Delta^{m-1}x(n) > 0$ 'dır ve yeterince küçük bir j sayısı vardır öyle ki $m+j$ toplamı tek, $0 \leq j \leq m-1$ ve

$$(-1)^{j+i}\,\Delta^i x(n) > 0, \;\; n \geq n_0, \quad j \leq i \leq m-1$$

dir. Şimdi de $j \geq 1$ ve

$$\Delta^{j-1}x(n) < 0, \quad n \in \mathbb{N}(n_0)$$

olsun. Yine, Lemma 2.1.1 'den

$$\Delta^{j-2}x(n) > 0, \quad n \in \mathbb{N}(n_0)$$

bulunur. Bu iki eşitsizliğin sonucu olarak

$$(-1)^{j-2+i}\,\Delta^i x(n) > 0, \quad n \geq n_0, \quad j-2 \leq i \leq m-1$$

elde edilir. Bu da; j 'nin tanımıyla çelişir. Böylece; $\Delta^{j-1}x(n) < 0$, $n \in \mathbb{N}(n_0)$ eşitsizliği yanlıştır ve $\Delta^{j-1}x(n) \geq 0$ 'dır.

$$(-1)^{j+i}\,\Delta^i x(n) > 0, \quad n \geq n_0, \quad j \leq i \leq m-1$$

eşitsizliğinden $\Delta^{j-1}x(n)$ azalmayandır ve böylece

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{j-1}x(n) > 0$$

olur. Eğer $j > 2$ ise Lemma 2.1.1 'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^i x(n) = \infty, \quad 1 \leq i \leq j-2$$

elde edilir. Böylece tüm büyük $n \in \mathbb{N}(n_0)$ ve $1 \leq i \leq j-1$ için

$$\Delta^i x(n) > 0$$

dir. Böylece, ispatın birinci kısmı tamamlanır.

2. Durum: $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x(n) \geq 0$ olsun. $n_3 \in \mathbb{N}(n_2)$ olsun öyle ki

$$\Delta^{m-1} x(n_3) \geq 0$$

dır.Bu durumda, $\Delta^{m-1} x(n)$ azalmayan olduğundan sabit olarak tanılanamaz ve bir $n_4 \in \mathbb{N}(n_3)$ sayısı vardır öyle ki tüm $n \in \mathbb{N}(n_4)$ 'ler için

$$\Delta^{m-1} x(n) > 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1} x(n) > 0$$

bulunur ve Lemma 2.1.1 'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{i} x(n) = \infty, \quad 1 \leq i \leq j-2$$

elde edilir. Böylece tüm büyük $n \in \mathbb{N}(n_0)$ ve $1 \leq i \leq j-1$ için

$$\Delta^{i} x(n) > 0$$

dır. Bu, $m = j$ için teoremi sağlar. Tüm $n \in \mathbb{N}(n_0)$ için $\Delta^{m-1} x(n) < 0$ olması durumunda yine Lemma 2.1.1 'den tüm $n \in \mathbb{N}(n_0)$ için

$$\Delta^{m-2} x(n) > 0$$

bulunur. İspatın buradan sonraki kısmı 1.durum 'un benzeridir.

Lemma 4.2 $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için $x(n)$ tanımlı olsun ve $\Delta^m x(n) \leq 0$ olmak üzere $x(n) > 0$ olsun ve özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda yeterince büyük bir $n_1 \geq n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki,

$$x(n) \geq \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} x(2^{m-j-1}.n), \quad n \geq n_1 \tag{4.5}$$

dir. Burada j, Lemma 4.1 'deki gibi tanımlanmıştır. Ayrıca; eğer $x(n)$ artan ise

$$x(n) \geq \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1} x(n), \quad n \geq 2^{m-1} n_1 \tag{4.6}$$

dir (Agarwal 2000).

İspat: Lemma 4.1 'den söyleyebiliriz ki; $\mathbb{N}(n_0)$ 'da $j \le i \le m-1$ olmak üzere

$$(-1)^{j+i-1}\Delta^i x(n) > 0, \quad j \le i \le m-1$$

olur ve tüm büyük $n \ge n_1 \in \mathbb{N}(n_0)$ için $1 \le i \le j-1$ olmak üzere

$$\Delta^i x(n) > 0$$

dır. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-2}x(n) &= -\Delta^{m-2}x(\infty) + \sum_{l=n}^{\infty}\Delta^{m-1}x(l) \\
&\ge \sum_{l=n}^{2n}\Delta^{m-1}x(l) \\
&\ge \Delta^{m-1}x(2n)(n)^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-3}x(n) &= \Delta^{m-3}x(\infty) - \sum_{l=n}^{\infty}\Delta^{m-2}x(l) \\
&\ge \sum_{l=n}^{2n} l^{(1)}\Delta^{m-1}x(2l) \\
&\ge \sum_{l=n}^{2n}(l-n)^{(1)}\Delta^{m-1}x(2l) \\
&\ge \Delta^{m-1}(2^2n)\frac{1}{2!}(n)^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\Delta^j x(n) \ge \Delta^{m-1}x(2^{m-j-1}n)\frac{1}{(m-j-1)!}(n)^{(j-m-1)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Delta^{j-1}x(n) &= \Delta^m x(n_1) + \sum_{l=n_1}^{n-1}\Delta^m x(l) \\
&\ge \sum_{l=n_1}^{n-1}\frac{1}{(m-j-1)!}(l-n_1)^{(j-m-1)}\Delta^{m-1}x(2^{m-j-1}l) \\
&\ge \frac{1}{(m-j)!}(n-n_1)^{(j-m)}\Delta^{m-1}x(2^{m-j-1}n)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $(j-1)$ kez tekrardan sonra

$$x(n) \ge \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!}\Delta^{m-1}x(2^{m-j-1}n); \quad n \ge n_1$$

elde edilir.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki; (3.1) sağlansın ve $k(n)$, (3.4) 'deki şekilde tanımlı olsun. Eğer $(\tau(n))$, azalmayan veya monoton olmayan bir dizi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) > (m-1)! \tag{4.7}$$

ise (4.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$$

dır.

İspat: Çelişki için kabul edelim ki; $(x(n))$, (4.1) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü ve $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) > 0$ olsun. Bu durumda, her $n \geq n_1$ için $x(n)$,$x(\tau(n))$,$x(h(n) > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ vardır. Böylece, (4.1) denkleminden

$$\begin{aligned} \Delta^m x(n) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \\ \Delta^m x(n) &= -p(n)x(\tau(n)) \leq 0, \quad n \geq n_1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

yazılabilir. Lemma 4.1 'den her $i \in \{1,2,3,...\}$ için $\Delta^i x(n)$ tek işaretlidir ve yeterince büyük n için $\Delta^{m-1}x(n) > 0$ dır. Dolayısıyla, $\Delta x(n) > 0$ ve $\Delta x(n) < 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

$\mathbf{\Delta x(n) > 0}$ **Durumu:** $\Delta x(n) > 0$ olduğundan $x(n)$ artandır. Lemma 4.2 'den,

$$x(n) \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1}x(n), \quad n \geq n_2$$

ve

$$x(\tau(n)) \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1}x(\tau(n)), \quad n \geq n_2 \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $n_2 \geq n_1$ vardır. $y(n) = \Delta^{m-1}x(n)$ olduğunu kabul edelim. Böylece $n \geq n_2$ için

$$y(n) > 0 \text{ ve } y(\tau(n) > 0$$

olur ki buradan,

$$\begin{aligned} \Delta^m x(n) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \\ \Delta\left(\Delta^{m-1}x(n)\right) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \\ \Delta\left(y(n)\right) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, (4.9) eşitsizliği ve $\lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} x(\tau(n)) &\geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} y(\tau(n)) \qquad (4.11) \\ x(\tau(n)) &\geq \frac{1}{(m-1)!} y(\tau(n)), \quad n \geq n_3 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $n_3 \geq n_2$ tamsayısı vardır. (4.11) eşitsizliğinden, (4.10) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} y(\tau(n)) &\leq x(\tau(n)) \\ \frac{1}{(m-1)!} p(n) y(\tau(n)) &\leq p(n) x(\tau(n)) \\ \Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!} p(n) y(\tau(n)) &\leq \Delta y(n) + p(n) x(\tau(n)) \\ \Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!} p(n) y(\tau(n)) &\leq 0, \quad n \geq n_3 \qquad (4.12) \end{aligned}$$

şeklini alır. $y(n)$ artmayan ve $h(n)$ azalmayan olduğu, her $n \geq 0$ için $\tau(n) \leq h(n)$ olduğu gözönüne alınırsa (4.11) 'den

$$\Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!} p(n) y(h(n)) \leq 0, \quad n \geq n_3$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\widetilde{p}(n) = \frac{p(n)}{(m-1)!}$ alınırsa,

$$\Delta y(n) + \widetilde{p}(n) y(h(n)) \leq 0, \quad n \geq n_3 \qquad (4.13)$$

olur ki, (4.11) eşitsizliği bir ergeç pozitif çözüme sahiptir.

Diğer taraftan; $h(n)$, (3.3) 'deki şekilde tanımlı olmak üzere Lemma 3.1 'den

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} p(j)k(j) \qquad (4.14)$$

dir. Bundan dolayı, (4.7) şartı ve (4.14) 'den

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} \widetilde{p}(j)k(j) = \frac{1}{(m-1)!} \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} p(j)k(j) > 1 \qquad (4.15)$$

olur. Böylece, Teorem 3.1 den (4.13) denklemi bir ergeç pozitif çözüme sahip değildir.Bu bir çelişkidir.

Δx(n) < 0 Durumu: Lemma 4.1 'den m nin çift olma durumu imkansızdır. Bu nedenle, m 'nin sadece tek olduğu durumu ele alacağız. $\Delta x(n) < 0$ durumunda $x(n)$

azalan ve sınırlıdır ve bu nedenle $(x(n))$, bir a sabitine yakınsar. Lemma 4.1 'den tüm büyük $n \geq n_1$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$$(-1)^{i+1}\,\Delta^{m-i}x(n) > 0 \tag{4.16}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{m-1}x(n) = 0 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) 'dan her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \Delta^{m-1}x(n) \leq \varepsilon, \quad n \geq n_4 \tag{4.18}$$

$n_4 \geq n_1$ tamsayısı vardır. Açıktır ki, $a > 0$ 'dır. Dolayısıyla,

$$x(n) > \frac{1}{2}a, \quad x(\tau(n)) > \frac{1}{2}a, \;\; n \geq n_5 \tag{4.19}$$

olacak şekilde bir $n_5 \geq n_4$ vardır. Böylece; (4.19), (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta^m x(n) + p(n)x(\tau(n)) &= 0 \\ \Delta^m x(n) + \frac{a}{2}p(n) &\leq 0, \quad n \geq n_5 \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4.20) eşitsizliğinin her iki tarafı n_5 'ten n 'ye kadar toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{s=n_5}^{n}\left[\Delta^m x(s) + p(s)\frac{a}{2}\right] &\leq \sum_{s=n_5}^{n} 0 \\ \sum_{s=n_5}^{n}\Delta\left(\Delta^{m-1}x(s)\right) + \sum_{s=n_5}^{n} p(s)\frac{a}{2} &\leq 0 \\ \Delta^{m-1}x(n+1) - \Delta^{m-1}x(n) + ... \\ +\Delta^{m-1}x(n_5+1) - \Delta^{m-1}x(n_5) + p(s)\textstyle\sum_{s=n_5}^{n}\frac{a}{2} &\leq 0 \\ \Delta^{m-1}x(n+1) - \Delta^{m-1}x(n_5) + \frac{a}{2}\sum_{s=n_5}^{n} p(s) &\leq 0, \quad n \geq n_5 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$n \to \infty$ alınırsa yeterince büyük n 'ler için

$$\frac{a}{2}\sum_{s=n_5}^{n} p(s) \leq \varepsilon \tag{4.22}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.7) 'den

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(s)k(s) > \frac{(m-1)!}{2}, \quad n \geq n_6 \tag{4.23}$$

olacak şekilde bir $n_6 \geq n_5$ tamsayısı vardır. $n \geq 1$ için $k(n) \leq 4$ olduğundan (4.23) 'den yeterince büyük n 'ler için

$$\frac{a}{2} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(s) \geq \frac{a(m-1)!}{8} \tag{4.24}$$

elde edilir ki, bu durum (4.24) ile (4.22) çelişir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 Kabul edelim ki, m çift, $k(n)$, (3.4) 'deki şekilde tanımlı ve (3.1) sağlansın. Eğer $(\tau(n))$ azalmayan veya monoton olmayan bir dizi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \tau^{m-1}(j)p(j)k(j) > 2^{(m-1)^2}(m-1)! \tag{4.25}$$

ise (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelim ki $(x(n))$, (4.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda, $x(n)$,$x(\tau(n))$,$x(h(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ vardır. Teorem 4.1 'den pozitif bir n_1 tamsayısı vardır öyle ki, (4.8) sağlanır. Lemma 4.1 'den

$$\Delta x(n) > 0$$

olur ki, bu durum $x(n)$ 'nin artan olmasını gerektirir. Teorem 4.1 'de $y(n) = \Delta^{m-1}x(n)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} x(\tau(n)) &\geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1}x(\tau(n)) \\ x(\tau(n)) &\geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} y(\tau(n)) \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Bundan dolayı, (4.10) ve (4.26) 'den

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!}p(n)\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} y(\tau(n)) &\leq p(n)x(\tau(n)) \\ \Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!}p(n)\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} y(\tau(n)) &\leq \Delta y(n) + p(n)x(\tau(n)) \\ \Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} p(n)y(\tau(n)) &\leq 0, \quad n \geq n_2 \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Buradan $y(n)$ artmayan, $h(n)$ azalmayan ve her $n \geq 0$ için $\tau(n) \leq h(n)$ olduğundan,(4.27) 'den

$$\Delta y(n) + \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1} p(n)y(h(n)) \leq 0, \quad n \geq n_3$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\widetilde{p}(n) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\tau(n)}{2^{m-1}}\right)^{m-1}$ alınırsa,

$$\Delta y(n) + \widetilde{p}(n)y(h(n)) \leq 0 \tag{4.28}$$

olur ki bu (4.28) eşitsizliğinin bir ergeç pozitif çözüme sahip olduğu anlamına gelir.

Diğer taraftan; Lemma 3.1 'den

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j)k(j) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} p(j)k(j) \tag{4.29}$$

dir. Bundan dolayı, (4.29) ve (4.25),

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} \widetilde{p}(j)k(j) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{2^{(m-1)^2}} \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n-1} \tau^{m-1}(j)p(j)k(j) > 1 \tag{4.30}$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle, Teorem 3.1 'den (4.30) denklemi bir ergeç pozitif çözüme sahip değildir. Bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. Kabul edelim ki, (3.1) sağlansın. Eğer $(\tau(n))$ azalmayan veya monoton olmayan bir tamsayı dizisi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) > \frac{1}{e}(m-1)! \tag{4.31}$$

ise (4.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$$

dır.

Sonuç 4.2 Kabul edelim ki, m çift ve (3.1) sağlansın. Eğer $(\tau(n))$ azalmayan veya monoton olmayan bir tamsayı dizisi ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \tau^{m-1}(j)p(j) > \frac{2^{(m-1)^2}}{e}(m-1)! \tag{4.32}$$

ise (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Örnek 4.1

$$\tau(n) = \begin{cases} n-3, & n \text{ çift ise} \\ n-1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\Delta^3 x(n) + \frac{3}{e} x(\tau(n)) = 0, \quad n \geq 0 \tag{4.33}$$

fark denklemini gözönüne alalım. Burada (3.1) şartının sağlandığı açıktır. (3.3) 'den

$$h(n) = \max_{0 \leq s \leq n} \tau(s) = \begin{cases} n-2, & n \text{ çift ise} \\ n-1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu görülür. Buradan hesaplanırsa,

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) = \begin{cases} \frac{6}{e}, & \text{n çift ise} \\ \frac{3}{e}, & \text{n tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece,

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) = \frac{3}{e} > \frac{1}{e}(m-1)! = \frac{2}{e}$$

olur yani; Sonuç 4.1 'deki (4.31) şartı sağlanır. Dolayısıyla, (4.33) denkleminin her çözümü ya salınımlı ya da $\lim_{n \to \infty} x(n) = 0$ 'dır.

5 YÜKSEK MERTEBEDEN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu tez çalışmasının bu bölümünde;

$$\Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.1}$$

şeklinde l -inci mertebeden gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlılık davranışları incelenecektir. Temel kaynak olrakak, Zhou (2006) kullanılacaktır.

$i = 1, 2, ...$ için k_i pozitif tamsayı, $(p_i(n))$ 'ler negatif olmayan reel sayı dizileri, Δ, ileri fark operatörü ve $l \geq 2$ için $\Delta^l x(n) = \Delta^{l-1}(\Delta x(n))$ olmak üzere,

$$\Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

gecikmeli fark denklemini ve bu denklemin birinci mertebeden eşitsizlik karşılığı olan

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) \leq 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.2}$$

eşitsizliğini gözönüne alalım.

Tanım 5.1 (5.1) veya (5.2) 'nin bir çözümü; $n \geq 0$ olmak üzere (5.1) denklemini veya (5.2) eşitsizliğini sağlayan ve aşikar olmayan bir $(x(n))$ reel sayı dizisidir.

Tanım 5.2 Bir $(x(n))$ çözümü, eğer ne ergeç pozitif ne de ergeç negatif ise salınımlı çözüm, aksi halde; salınımlı olmayan çözüm olarak adlandırılır.

Lemma 5.1 Kabul edelim ki,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > 1 \tag{5.3}$$

veya

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=n}^{n+k_i} p_i(s) > 1 \tag{5.4}$$

olsun. Bu durumda, (5.2) eşitsizliği ergeç pozitif çözüme sahip değildir.

Lemma 5.2 $n \geq n_0$ için $\Delta^l x(n) \leq 0$ olacak şekilde bir $x(n) > 0$ dizisi var ve özdeş olarak sıfırdan farklı olsun.Eğer x_n artan ise

$$x(n) \geq \frac{2^{2-2l}}{(l-1)!} n^{l-1} \Delta^{l-1} x(n), \quad \forall n \geq 2^l n_1 \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir büyük $n_1 \geq n_0$ tamsayısı vardır. Özel olarak, yeterince büyük n için

$$x(n) \geq \frac{\theta}{(l-1)!} n^{l-1} \Delta^{l-1} x(n) \tag{5.6}$$

dır. Burada, $0 < \theta < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta = 1$ ve her negatif olmayan t tamsayısı ve $n^{(0)} = 1$ için $n^{(t)} = n.(n-1)...(n-t+1)$ 'dır.

Teorem 5.1 Kabul edelim ki,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > (l-1)! \tag{5.7}$$

olsun. Bu durumda, (5.1) denkleminin her $(x(n))$ çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ için $x(n) \to 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $(x(n))$, (5.1) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. Bu durumda,

$$x(n) > 0, \quad x(n-k_i) > 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., n \geq N_1 \tag{5.8}$$

olacak şekilde bir pozitif N_1 tamsayısı vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} \Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) &= 0 \\ \Delta^l x(n) &= -\sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) \leq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

ve

$$\Delta^l x(n) \neq 0$$

dır.

Lemma 4.1 'den her $i \in \{1, 2, 3, ..., l-1\}$ için $\Delta^i x(n)$, ergeç tek işaretlidir ve yeterince büyük n için $\Delta^{l-1} x(n) > 0$ sağlanır. Burada; $\Delta x(n) > 0$ ve $\Delta x(n) < 0$ olmak üzere iki durum vardır:

1. Durum: $\Delta x(n) > 0$ olsun. Bu durumda, $x(n)$ artandır. $k = \max\{k_1, k_2, ...k_m\}$ olsun. Lemma 5.2 'den

$$x(n) \geq \frac{\theta}{(l-1)!} n^{l-1} \Delta^{l-1} x(n), \quad n \geq N_2$$

ve $i = 1, ..., m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n-k_i) &\geq \frac{\theta}{(l-1)!} (n-k_i)^{l-1} \Delta^{l-1} x(n-k_i) \\ x(n-k_i) &\geq \frac{\theta}{(l-1)!} (n-k)^{l-1} \Delta^{l-1} x(n-k_i), \quad n \geq N_2 \end{aligned} \tag{5.10}$$

olacak şekilde bir $N_2 \geq \max\{k, N_1\}$ tamsayısı vardır. Burada, $0 < \theta < 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \theta = 1$ dir.

$\Delta^{l-1} x(n) = y(n)$ olsun. Bu durumda, $i = 0, 1, 2, ...m$ ve $n \geq N_2$ için

$$y(n) > 0, \quad y(n-k_i) > 0$$

olr ki; bu durum

$$\begin{aligned} \Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) &= 0 \\ \Delta\left(\Delta^{l-1} x(n)\right) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) &= 0 \\ \Delta\left(y(n)\right) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) &= 0, \quad n \geq N_2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

olmasını gerektirir. (5.10) 'den $i = 0, 1, 2, ...m$ için

$$\begin{aligned} x(n-k_i) &\geq \frac{\theta}{(l-1)!} (n-k)^{l-1} \Delta^{l-1} x(n-k_i) \\ x(n-k_i) &\geq \frac{\theta}{(l-1)!} (n-k)^{l-1} y(n-k_i) \\ x(n-k_i) &\geq \frac{\theta}{(l-1)!} y(n-k_i), \quad n \geq N_2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.12) eşitsizliği (5.11) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\Delta\left(y(n)\right) + p_i(n) \frac{\theta}{(l-1)!} y(n-k_i) \leq 0, \quad n \geq N_2$$

bulunur. Burada, $\widetilde{p}_i(n) = \frac{\theta}{(l-1)!} p_i(n)$ olarak alınırsa

$$\Delta\left(y(n)\right) + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_i(n) y(n-k_i) \leq 0, \quad n \geq N_2 \tag{5.13}$$

olurki bu da (5.13) eşitsizliği bir ergeç pozitif çözüme sahiptir anlamına gelir. Diğer taraftan, (5.7) şartı

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} \widetilde{p_i}(s) \\ = &\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) \frac{\theta}{(l-1)!} \\ = &\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\theta}{(l-1)!} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > 1 \end{aligned} \tag{5.14}$$

olmasını gerektirir. Bu rurumda, Lemma 5.1 'den (5.13) bir ergeç pozitif çözüme sahip değildir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu durum ispatlanmış olur.

2. Durum: $\Delta x(n) < 0$ olsun. Bu rumda, Lemma 4.1 'den l 'nin çift olması imkansızdır. Bu durumda l 'nin yalnızca tek olduğu durumu inceleyeceğiz. $\Delta x(n) < 0$ olduğundan, $x(n)$ monoton sınırlı ve bu nedenle bir a sabitine yakınsaktır. Lemma 5.2 'den

$$(-1)^{i+1} \Delta^{l-i} x(n) > 0, \quad i = 1, 2, ..., l-1, \text{ her büyük } n \geq N_1 \tag{5.15}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{l-1} x(n) = 0 \tag{5.16}$$

elde edilir. (5.16) 'dan herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \Delta^{l-1} x(n) \leq \varepsilon, \quad n \geq N_3 \tag{5.17}$$

olacak şekilde bir $N_3 \geq N_1$tamsayısı vardır. Buradan, $a \geq 0$ olduğu açıktır. Eğer $a = 0$ ise ispat açıktır. Bu nedenle, $a > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, $i = 1, 2, ..., m$ için

$$x(n) > \frac{1}{2}a, \quad x(n-k_i) > \frac{1}{2}a, \quad n \geq N_4 \tag{5.18}$$

olacak şekilde bir $N_4 \geq N_3$ tamsayısı vardır. Böylece, (5.1) denkleminden

$$\begin{aligned} \Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(n-k_i) &= 0 \\ \Delta^l x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) \frac{a}{2} &\leq 0 \\ \Delta^l x(n) + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{m} p_i(n) &\leq 0, \quad n \geq N_4 \end{aligned} \tag{5.19}$$

yazılabilir. (5.19) 'nin her iki tarafı N_4 'den n 'ye kadar toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=N_4}^{n}\left(\Delta^l x(n)+\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)\right) &\leq 0\\
\sum_{i=N_4}^{n}\Delta^l x(n)+\sum_{i=N_4}^{n}\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i(s) &\leq 0\\
\sum_{i=N_4}^{n}\Delta\left(\Delta^{l-1}x(n)\right)+\sum_{i=N_4}^{n}\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i(s) &\leq 0\\
\Delta^{l-1}x(n+1)-\Delta^{l-1}x(n)+...+\Delta^{l-1}x(N_4+1)-\Delta^{l-1}x(N_4)+\frac{a}{2}\sum_{i=N_4}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(s) &\leq 0\\
\Delta^{l-1}x(n+1)-\Delta^{l-1}x(N_4)+\frac{a}{2}\sum_{i=N_4}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(s) &\leq 0 \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

bulunur. $n\to\infty$ için

$$\frac{a}{2}\sum_{i=N_4}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(n)\leq\varepsilon, \text{ büyük } n \text{ için} \tag{5.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (5.7) 'dan

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1}\sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > \frac{(l-1)!}{2}, \quad n\geq N_4$$

olacak şekilde bir $N_5\geq N_4$ tamsayısının var olduğunu söyleyebiliriz. $\left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1}\leq 2e$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
2e\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) &> \frac{(l-1)!}{2}\\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) &> \frac{(l-1)!}{4e}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan bu son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{a}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > \frac{a(l-1)!}{8e} \tag{5.22}$$

elde edilir. Bu durum, (5.22) ve (5.21) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2 Kabul edelim ki;

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) > (l-1)! \tag{5.23}$$

olsun. Bu durumda, (5.1) denkleminin her $x(n)$ çözümü salınımlıdır veya $n \rightarrow \infty$ için $x(n) \rightarrow 0$ 'dır.

Gerçekten, Teorem 5.1 'in ispatı gözönüne alındığında, (5.23) şartı (5.22) 'in daima sağlanmasını gerektirir ve (5.14) eşitsizliği,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} \widetilde{p}_i(s) > 1 \tag{5.24}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu teoremin ispatı Teorem 5.1 'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.3 Kabul edelim ki, l çift ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} s^{l-1} p_i(s) > (l-1)! \tag{5.25}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, (5.1) denkleminin her sınırlı $x(n)$ çözümü salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelim ki, $x(n)$ (5.1) denkleminin bir ergeç pozitif sınırlı çözümü olsun. Teorem 5.1 'in ispatına göre bir N_1 pozitif tamsayısı vardır öyle ki, (5.8) ve (5.9) sağlanır. Lemma 4.1 'den

$$\Delta x(n) > 0$$

olur ki, bu durumda $x(n)$ artandır.Teorem 5.4 'ün ispatından $i = 1, 2, ..., m$ için

$$x(n-k_i) \geq \frac{\theta}{(l-1)!} (n-k)^{l-1} y(n-k_i), \quad n > N_2 \tag{5.26}$$

olacak şekilde bir $N_2 \geq N_1$ tamsayısı vardır. Burada, $k = \max\{k_1, k_2, ...k_m\}$ ve $0 < \theta < 1$ için $\lim_{n\to\infty} \theta = 1$ 'dir. Buradan, $\widetilde{p}_i(n) = \left(\frac{\theta}{(l-1)!}\right)(n-k)^{l-1}$, $\Delta^{l-1}x(n) = y(n)$ ve $i = 1, 2, ..., m$ olmak üzere

$$\Delta y(n) + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_i(n) y(n-k_i) \leq 0, \quad n > N_2 \tag{5.27}$$

olur ki bu durumda (5.27) bir ergeç pozitif çözüme sahiptir. Diğer taraftan,(5.25) şartı

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} \widetilde{p}_i(s) > (l-1)!$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} s^{l-1} p_i(n) \left(\frac{\theta}{(l-1)!}\right)(n-k)^{l-1} > (l-1)!$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\theta}{(l-1)!} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} \sum_{s=n+1}^{n+k_i} p_i(s) (s-k)^{l-1} > 1 \tag{5.28}$$

olmasını gerektirir. Lemma 5.1 'den (5.27) eşitsizliği bir ergeç pozitif çözüme sahip olamaz. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 5.4 Kabul edelim ki, l çift ve

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=n}^{n+k_i} s^{l-1}p_i(s) > (l-1)!$$

şartı sağlansın. Bu durumda (5.1) denkleminin her sınırlı $x(n)$ çözümü salınımlıdır.

Sonuç 5.1 Kabul edelim ki, l çift olsun. Eğer (5.7) ve (5.23) şartları sağlanıyorsa (5.1) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır.

6 KAYNAKLAR

Agarwal R P, 2000, Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 228, NewYork.

Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2000, Oscillation Theory For Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Bayar E, 2012, Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri İçin Çözüm Yöntemleri, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 107s, Denizli.

Chatzarakis E, Philos Ch G, Stavroulakis I P, 2008, Optimal Oscillation Criteria For First Order Difference Equations with Delay Argument, Pasific Journal of Mathematics, 235, 15–33.

Chatzarakis G E, Koplatadze R, Stavroulakis I P, 2008, Oscillation Criteria of First Order Linear Difference Equations with Delay Argument, Nonlinear Analysis, 68, 994–1005.

Chatzarakis G E, Philos Ch G, Stavroulakis I P, 2008, On the Oscillation of the Solutions to Linear Difference Equations with Variable Delay, Electronic Journal of Differential Equations, 50, 1–15.

Chatzarakis G E, Philos Ch G, Stavroulakis I P, 2009, An Oscillation Criterion For Linear Difference Equations with General Delay Argument, Portugaliae Mathematica, 66, 513–533.

Chen M P, Yu J S ,1994, Oscillations of Delay Difference Equations with Variable Coefficients, In Proceedings of the First International Conference on Difference Equations, Gordon and Breach, London ,105–114.

Cheng J F, 2003, Necessary and Sufficient Conditions For the Oscillation of First Order Functional Difference Equations, Journal of Biomathematics, 18, 295–298.

Elaydi S, 1999, An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, New York.

Erbe L H, Zhang B G, 1989, Oscillation of Discrete Analogues of Delay Equations, Differential Integral Equations, 2, 300–309.

Goldberg S, 1958, Introduction to Difference Equations, John Wiley and Sons, New York.

Gyori I, Ladas G, 1989, Linearized Oscillations For Equations with Piecewise Constant Arguments, Differential Integral Equations, 2, 123–131.

Gyori I, Ladas G, 1991, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford.

Ladas G, Philos Ch G, Sficas Y G, 1989, Sharp Conditions For the Oscillation of Delay Difference Equations, Journal Applied Mathematics, 2, 101–111.

Ladas G, 1990, Explicit Conditions For the Oscillation of Difference Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153, 276–287.

Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G, 1987, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker, NewYork,

Lakshmikantham V, Trigiante D, 2002, Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Second Edition, Marcel Dekker, New York.

Öcalan Ö, Özkan U M, 2019, Oscillation Analisis For Higher Order Difference Equation with Non-monoton Arguments, Journal of Computational Analysis and Applications, 27, 33–41.

Öcalan Ö, Öztürk S S, 2015, An Oscillation Criterion for First Order Difference Equations, Results in Mathematics, 68, 105–116.

Öcalan Ö, 2016, An Improved Oscillation Criterion For First Order Difference Equations, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 59, 65–73.

Philos Ch G, 1991, On Oscillations of Some Difference Equations, Funkcialaj Ekvacioj, 34, 157–172.

Tang Q G, Deng Y B, 1998, Oscillation of Difference Equations with Several Delays, Journal of Hunan University, 2, 1–3.

Tang X H, Yu J S, 1999, Oscillation of Delay Difference Equation, Computers & Mathematics with Applications, 37,11–20.

Tang X H, Yu J S, 1999, A Further Result on the Oscillation of Delay Difference Equations, Computers & Mathematics with Applications, 38, 229–237.

Tang X H, Yu J S, 2000, Oscillations of Delay Difference Equations in a Critical State, Applied Mathematics Letters, 13, 9–15.

Tang X H, Zhang R Y, 2001, New Oscillation Criteria For Delay Difference Equations, Computers & Mathematics with Applications, 42, 1319–1330.

Thandapani E, Arul R, Raja P S, 2003, Oscillation of First Order Neutral Delay Difference Equations, Applied Mathematics E-Notes, 3, 88–94.

Tollu D, 2009, Bazı Fark Denklemlerinin Kararlılığı, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 69s, Konya.

Yan W, Meng Q, Yan J, 2005, Oscillation Criteria For Difference Equation of Variable Delays, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 3, 641–647.

Zhang B G, Tian C J, 1998, Oscillation Criteria For Difference Equations with Unbounded Delay, Computers & Mathematics with Applications, 35, 19–26.

Zhang B G, Tian C J, 1998, Nonexistence and Existence of Positive Solutions For Difference Equations with Unbounded Delay, Computers & Mathematics with Applications, 36, 1–8.

Zhou Y, 2006, Oscillation of Higher Order Delay Difference Equations, Advances in Difference Equations, Article number 65789.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Bahri BEKTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Trabzon, 25.05.1980
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	0 533 490 64 35/ bahri.bektas@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:100.Yıl Lisesi, (1994-1997)
Lisans	:Çukurova Üniversitesi, (1997-2002)
Yüksek Lisans	:Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik ABD., (2018-2020)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmeni, (2014-Devam Ediyor)